Nechť $x_{\iota_\varkappa} = t_\varkappa + a_0$. Ukážeme, že $\mathfrak{M} \neq M + \bigcup_{\iota<\nu}\{t_\iota\}$. Je totiž card $\bigcup_{\varkappa<\nu} A_{\iota_\varkappa} \cup$ $\cup \{a_0\} <$ card M. Existuje tedy a_{ι_μ} non $\in \bigcup_{\varkappa<\nu} A_{\iota_\varkappa} \cup \{a_0\}$. Protože

$$x \in M + \bigcup_{\iota<\nu}\{t_\iota\} \Rightarrow x = a + x_{\iota_\varkappa} - a_0$$

pro jisté $\iota_\varkappa$ a $a \in M$, platí $2a_{\iota_\mu}$ non $\in M \dot{+} \bigcup_{\iota<\nu}\{t_\iota\}$. Jinak by totiž bylo $2a_{\iota_\mu} =$ $= a + x_{\iota_\varkappa} - a_0$, tedy $x_{\iota_\varkappa} = a_0 - a - 2a_{\iota_\mu}$, odkud $a_{\iota_\mu} \in A_{\iota_\varkappa}$, což je spor s volbou a_{ι_μ}.

Nechť ν_1 je první index, pro nějž platí x_{ν_1} non $\in M \dot{+} \bigcup_{\iota<\nu}\{t_\iota\}$ (je $\nu_1 \geqq \nu$), nechť a_{ι_ν} non $\in \bigcup_{\varkappa<\nu} A_{\iota_\varkappa} \cup \{a_0\} \cup A_{\nu_1}$. Položme $t_\nu = x_{\nu_1} - a_{\iota_\nu}$. Zřejmě platí $t_\nu \in \mathfrak{M}$ a $x_\nu \in M + \bigcup_{\iota\leqq\nu}\{t_\nu\}$. Ukážeme, že $M \perp \bigcup_{\iota\leqq\nu}\{t_\iota\}$. Připusťme, že $a_\mu + t_\nu = a_\lambda + t_\varkappa$ pro $\varkappa < \nu$. Potom $a_\mu + x_{\nu_1} - a_{\iota_\nu} = a_\lambda + x_{\iota_\varkappa} - a_0$ a tedy $a_{\iota_\nu} = a_\mu + x_{\nu_1} -$ $- a_\lambda - x_{\iota_\varkappa} + a_0$. Kdyby $a_\mu = a_{\iota_\nu}$, potom by bylo $x_{\nu_1} = a_\lambda + t_\varkappa$, což je spor s volbou x_{ν_1}. Tedy $\iota_\nu \neq \mu$ a $a_{\iota_\nu} \in A_{\nu_1} \cup A_{\iota_\varkappa} \cup \{a_0\}$, což je opět spor z volbou a_{ι_ν}. Tedy $M \perp \bigcup_{\iota\leqq\nu}\{t_\iota\}$. Tím je hledaná transfinitní posloupnost sestrojena.

Důkaz tvrzení, že M je faktor, je týž, jako v odstavci I.

Poznámka. V článku [3] bylo dokázáno, že množina $\{0, 1, \alpha\}$, kde α je iracionální číslo, je faktorem grupy reálných čísel ve smyslu Hajósově. Toto tvrzení plyne ihned z naší věty, neboť pro iracionální číslo ε, nezávislé racionálně na α, je $\{\varepsilon, 1 + \varepsilon, \alpha + \varepsilon\}$ nezávislou množinou v množině reálných čísel, tedy faktorem. Tvrzení pak plyne z toho, že je-li A faktorem $\mathfrak{G}$ a $a \in \mathfrak{G}$, je též $A + \{a\}$ faktorem $\mathfrak{G}$.

Literatura

[1] *А. Г. Курош,* Теория групп. Москва, 1953.

[2] *G. Hajós*: Sur la factorisation des groupes abéliens. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, *74* (1949), 157—162.

[3] *K. Koutský* a *M. Sekanina*: Rozklad přímky na shodné trojbodové množiny. Časopis pro pěstování matematiky, *83* (1958), 317—326.