Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

O JISTÉ VLASTNOSTI SOUSTAV NEZÁVISLÝCH PRVKŮ V ABELOVSKÉ GRUPĚ

MILAN SEKANINA, Brno

(Došlo dne 18. července 1959)

V článku se dokazuje, že každá neprázdná množina nezávislých prvků z abelovské grupy je jejím faktorem ve smyslu Hajósově.

Nechť $\mathfrak{G}$ je abelovská grupa. Neprázdnou podmnožinu M z $\mathfrak{G}$ nazýváme nezávislou, platí-li pro každou neprázdnou konečnou podmnožinu $N = \{a_1, \ldots, \ldots, a_n\}$ množiny M, že z rovnice $v_1a_1 + \ldots + v_na_n = 0$ (0 je nulový prvek grupy $\mathfrak{G}$), kde v_i jsou celá čísla, plyne $v_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, n$ (viz [1], str. 123).

Nechť M, N jsou dvě neprázdné podmnožiny z $\mathfrak{G}$. Potom $M + N$ značí množinu všech těch prvků z $\mathfrak{G}$, které se dají psát jako součet prvku z M a prvku z N. Dá-li se každý prvek x z $\mathfrak{G}$ psát nanejvýš jedním způsobem jako $m + n$, $m \in M$, $n \in N$, píšeme $M \perp N$. Je-li $\mathfrak{G} = M + N$ a $M \perp N$, píšeme též $M \dot{+} N$ a říkáme, že M a N tvoří faktorisaci grupy $\mathfrak{G}$ ve smyslu Hajósově (viz též [2]) a M a N nazýváme faktory grupy $\mathfrak{G}$.

Dokážeme větu:

Věta. *Nezávislá množina $M \subset \mathfrak{G}$ je faktorem $\mathfrak{G}$ ve smyslu Hajósově.*

Důkaz. I. Nechť M je konečná množina, tedy $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Ukážeme, že

$$\mathfrak{M} = \{a_1, \ldots, a_n\} \dot{+} \mathbf{E}[k_1na_1 + k_2(a_2 - 2a_1) + \ldots + k_n(a_n - na_1)\,,\quad k_1, k_2, \ldots, k_n \text{ probíhají množinu celých čísel}]\,,$$

kde $\mathfrak{M}$ je nejmenší podgrupa z $\mathfrak{G}$ obsahující množinu M, tedy

$$x \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow x = h_1a_1 + h_2a_2 + \ldots + h_na_n\,,$$

h_i celé číslo (píše se též $\mathfrak{M} = [M]$). Nechť tedy $x = h_1a_1 + h_2a_2 + \ldots + h_na_n$ a

$$h_1 + 2h_2 + \ldots + nh_n = gn + s\,,$$

kde $0 < s \leqq n$.

a) Nechť $s \neq 1$. Potom $x = a_s + nga_1 + \sum_{i=2}^{n} k_i(a_i - ia_1)$, kde $k_i = h_i$ pro $i \neq s$, $k_s = h_s - 1$.

b) Nechť $s = 1$. Potom $x = a_1 + gna_1 + \sum_{i=2}^{n} h_i(a_i - ia_1)$. Tedy v obou případech

$$x \in \{a_1, \ldots, a_n\} + E[k_1 na_1 + \ldots + k_n(a_n - na_1),\ k_i \text{ celé}]\,.$$

Nechť nyní pro jisté ι, i a celá čísla $\varkappa_j$, k_j ($j = 1, \ldots, n$) platí

$$a_\iota + \varkappa_1 na_1 + \sum_{l=2}^{n} \varkappa_l(a_l - la_1) = a_i + k_1 na_1 + \sum_{l=2}^{n} k_l(a_l - la_1)\,.$$

Použijeme nyní předpokladu, že $a_1, \ldots, a_n$ jsou nezávislé prvky.

1. Nechť $i = \iota$. Potom zřejmě $k_j = \varkappa_j$.

2. Nechť $i = 1 < \iota$. Potom porovnáme koeficienty u a_l a dostaneme rovnice

$$1 + \varkappa_1 n - \sum_{l=2}^{n} l\varkappa_l = nk_1 - \sum_{l=2}^{n} lk_l\,, \quad \varkappa_2 = k_2, \ldots, \varkappa_i = k_i + 1, \ldots, \varkappa_n = k_n\,.$$

Odtud plyne $n\varkappa_1 - i = nk_1 - 1$, což je spor, neboť $2 \leqq i < n$ a tedy $n \not\mid i - 1$.

3. Nechť $1 < i < \iota$. Srovnáním koeficientů u a_l plyne

$$n\varkappa_1 - \sum_{l=2}^{n} l\varkappa_l = nk_1 - \sum_{l=2}^{n} lk_l\,,$$
$$\varkappa_2 = k_2, \ldots, \varkappa_i = k_i + 1, \ldots, \varkappa_\iota + 1 = k_\iota, \ldots, \varkappa_n = k_n\,.$$

Odtud dostáváme $n\varkappa_1 - i = nk_1 - \iota$, tedy $i = \iota$, což je spor. Tedy $\mathfrak{M} = \{a_1, \ldots, a_n\} \dotplus \mathsf{E}[k_1 na_1 + \ldots + k_n(a_n - na_1),\ k_j \text{ celé}]$.

Označme $\mathfrak{N} = \mathsf{E}[k_1 na_1 + \ldots + k_n(a_n - na_1),\ k_j \text{ celé}]$. Je-li N systém representantů tříd grupy $\mathfrak{G}$ vzhledem k podgrupě $\mathfrak{M}$, platí podle známých vět o rozkladu grupy v třídy

$$\mathfrak{G} = [\{a_1, \ldots, a_n\} \dotplus \mathfrak{N}] \dotplus N = \{a_1, \ldots, a_n\} \dotplus [\mathfrak{N} \dotplus N]\,.$$

Tedy $\{a_1, \ldots, a_n\}$ je faktorem grupy $\mathfrak{G}$ ve smyslu Hajósově.

II. Nechť M je nekonečná množina nezávislých prvků z $\mathfrak{G}$. Nechť μ značí počáteční ordinální číslo příslušné k mohutnosti $\operatorname{card} M$. Uspořádejme M v posloupnost $\{a_0, a_1, \ldots, a_\iota, \ldots\}$, $\iota < \mu$. Nechť opět $\mathfrak{M} = [M]$. Je $\operatorname{card} \mathfrak{M} = \operatorname{card} M$. Uspořádejme $\mathfrak{M}$ v posloupnost $\{x_0, x_1, \ldots, x_\iota, \ldots\}$, $\iota < \mu$. Množiny A_ι ($\iota < \mu$) definujme takto: $A_\iota = \emptyset$, je-li $x_0 = 0$; $A_\iota = \{a_{\iota_1}, \ldots, a_{\iota_m}\}$, je-li $x_\iota = \alpha_1 a_{\iota_1} + \ldots + \alpha_m a_{\iota_m}$, při čemž $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \neq 0$. Z nezávislosti množiny M plyne jednoznačnost definice množin A_ι.

Nyní budeme transfinitní indukcí definovat posloupnost $\{t_0, \ldots, t_\iota, \ldots\}$, $\iota < \mu$ prvků z M, pro niž platí $M = M \dotplus \bigcup_{\iota<\mu}\{t_\iota\}$, ($\{t_\iota\}$ značí množinu o jediném prvku t).

Položme $t_0 = x_0 - a_0$. Je zřejmě $M \perp \{t_0\}$ a $x_0 \in M \dotplus \{t_0\}$.

Nechť $1 \leqq \nu < \mu$ a předpokládejme, že jsou definována $t_\iota \in \mathfrak{M}$ pro $\iota < \nu$ taková, že $M \perp \bigcup_{\iota<\mu}\{t_\iota\}$ a $x_\iota \in M \dotplus \bigcup_{\delta\leqq\iota}\{t_\delta\}$.