Věta 4,8. *Funkce* $[\Phi_n(t), \eta_n(t)]$ *je řešení soustavy diferenciálních rovnic*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi_n(t)\,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y, t) + \varphi_n(t) \,.\, g(x, y)$$

pro $t \in \langle A_1, -A_1 \rangle$ *s počáteční podmínkou* $x(A_1) = 0$, $y(A_1) = Y_1^{(1)}$.

Z těchto vět 4,5 až 4,8 vyplývá, že není možné, aby byla splněna podmínka (0,7) tohoto článku.

Literatura

[1] *J. Kurzweil*: Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter. Czech. Math. Journal *7* (*82*), 1957, 418—449.

[2] *J. Kurzweil*: Generalized Ordinary Differential Equations. Czech. Math. Journal *8* (*83*), 1958, 360—388.

Резюме

О НЕОДНОЗНАЧНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВЛАДИМИР ДОЛЕЖАЛ (Vladimír Doležal), Прага

Вопросы, рассмотренные в настоящей статье, появились при изучении обобщенных дифференциальных уравнений, понятие которых было введено Я. Курцвейлем в [1], особенно при изучении функции Дирака в нелинейных дифференциальных уравнениях в [2], § 5.

Я. Курцвейль в лемме 5,1 доказывает следующее предложение: Пусть $\chi(\eta)$, $\eta \geqq 0$ — возрастающая непрерывная функция, $\chi(0) = 0$, $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\eta}{\chi(\eta)} = \infty$. Пусть $\sigma(t)$, $t \in \langle 0, S \rangle$, — непрерывная вещественная функция с ограниченным изменением. Пусть $g(x) = [g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_m(x_1 \ldots, x_m)]$ — непрерывная векторная функция на открытом множестве $D \subset E_m$ такая, что

$$\|g(x_*) - g(x^*)\| \leqq \chi(\|x_* - x^*\|) \quad \text{для} \quad x_*, x^* \in D\,. \tag{0,1}$$

Пусть $x_0 \in D$, $t_0 \in \langle 0, S \rangle$. Тогда уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\,\mathrm{d}\sigma(\tau)$$

имеет самое больше одно решение.

В этой статье на примере показано, что условие (0,1), которое должна выполнять функция $g(x)$, нельзя заменить более слабым условием: Пусть $g(x)$ — непрерывная, векторная функция на множестве $D \subset E_n$ такая, что

уравнение $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} g(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau$ имеет для $x_0 \in D$, $t_0 \in \langle 0, S\rangle$ одно и только одно решение.

В главе II мы построим на множестве $\langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ функцию $g(x, y)$ такую, что для $t_0 \in \langle 0, 8\pi\rangle$, $x_0 \in \langle 0, \pi\rangle$, $y_0 \in \langle 0, 1\rangle$ система

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\,, \quad y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} g(x(\tau)\,, \quad y(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

имеет одно и только одно решение. В главе III мы построим непрерывно вещественную функцию $\sigma(t)$, $t \in \langle 0, 8\pi\rangle$ с ограниченным изменением такую, что системе

$$x(t) = \int\limits_{0}^{t} \mathrm{d}\sigma(\tau)\,, \quad y(t) = \int\limits_{0}^{t} g(x(\tau)\,, \quad y(\tau))\,\mathrm{d}\sigma(\tau)$$

удовлетворяют два решения.

В дальнейшем Я. Курцвейль в теореме 5,1 доказывает следующее предложение: Пусть $f(x, t) = [f_1(x_1, \ldots, x_m, t), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_m, t)]$ — непрерывная векторная функция для $x \in D$, $t \in \langle -T_1, T_1\rangle$. Пусть $g(x)$ — функция, которая выполняет условия леммы 5,1. Пусть $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ — непрерывная вещественная функция для $t \in \langle -T_1, T_1\rangle$, $\Phi_n(t) = \int\limits_{-T_1}^{t} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Пусть последовательность функцией φ_n выполняет следующие условия:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \int\limits_{-T_1}^{T_1} |\varphi_n(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = L < \infty\,,\\
&\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-T_1}^{t} |\varphi_n(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad \text{для} \quad -T_1 \leqq t < 0\,,\\
&\lim_{n\to\infty} \int\limits_{t}^{T_1} |\varphi_n(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad \text{для} \quad 0 < t \leqq T_1\,,\\
&\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = 0 \quad \text{для} \quad -T_1 \leqq t < 0\,,\\
&\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = 1 \quad \text{для} \quad 0 < t_1 \leqq T_1\,.
\end{aligned}$$

Пусть решение $u(t)$, $t \in \langle -T_0, 0\rangle$, $\langle 0 < T_0 < T_1\rangle$, уравнения

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t)$$

однозначно определяется начальным условием $u(-T_0) = y_0$. Пусть решение $v(t)$, $t \in \langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\rangle$, уравнения $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(x)$ однозначно определяется начальным условиен $v(-\frac{1}{2}) = u(0)$ и пусть, наконец, решение $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0\rangle$, уравнения (*) однозначно определяется начальным условием $w(0) = v(\frac{1}{2})$. Пусть $y_n \to y_0$ для $n \to \infty$.