O NEJEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ SOUSTAVY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha

(Došlo dne 3. července 1959)

V tomto článku je sestrojen příklad, který ukazuje, že z jednoznačnosti řešení rovnice $\frac{dx}{dt} = g(x)$ nemusí plynout jednoznačnost řešení rovnice $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\, d\sigma(\tau)$, kde $\sigma(\tau)$ je spojitá reálná funkce s konečnou variací.

Problémy řešené v tomto článku se vyskytly při studiu zobecněných diferenciálních rovnic, které zavedl J. KURZWEIL v článku [1], zvláště pak při studiu Diracovy funkce v nelineárních diferenciálních rovnicích v kap. 5 článku [2].

Tam se v pomocné větě 5,1 dokazuje následující: Buď $\chi(\eta)$, $\eta \geqq 0$ rostoucí spojitá funkce, $\chi(0) = 0$, $\int_0^1 \frac{d\eta}{\chi(\eta)} = \infty$. Buď $\sigma(t)$, $t \in \langle 0, S\rangle$ spojitá reálná funkce s konečnou variací. Buď $g(x) = [g_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)]$ spojitá vektorová funkce na otevřené množině $D \subset E_m$ taková, že

$$\|g(x_*) - g(x^*)\| \leqq \chi(\|x_* - x^*\|) \quad \text{pro} \quad x_*, x^* \in D\,. \tag{0,1}$$

Buď $x_0 \in D$, $t_0 \in \langle 0, S\rangle$. Potom rovnice $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\, d\sigma(\tau)$ má nejvýše jedno řešení.

Ve větě 5,1 se pak dokazuje následující: Buď $f(x, t) = [f_1(x_1, \ldots, x_m, t), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_m, t)]$ spojitá vektorová funkce pro $x \in D$, $t \in \langle -T_1, T_1\rangle$. Buď $g(x)$ funkce, která splňuje předpoklady pomocné věty 5,1. Nechť $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ je spojitá reálná funkce na $\langle -T_1, T_1\rangle$, $\Phi_n(t) = \int_{-T_1}^{t} \varphi_n(\tau)\, d\tau$. Nechť $\varphi_n(t)$ splňuje následující podmínky:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{-T_1}^{T_1} |\varphi_n(\tau)|\, d\tau = L < \infty\,, \tag{0,2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-T_1}^{t} |\varphi_n(\tau)|\, d\tau = 0 \quad \text{pro} \quad -T_1 \leqq t < 0\,, \tag{0,3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t}^{T_1} |\varphi_n(\tau)|\, d\tau = 0 \quad \text{pro} \quad 0 < t \leqq T_1\,; \tag{0,4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = 0 \quad \text{pro} \quad -T_1 \leqq t < 0\,, \tag{0,5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = 1 \quad \text{pro} \quad 0 < t \leqq T_1\,. \tag{0,6}$$

Buď $u(t)$, $t \in \langle -T_0, 0\rangle$, $(0 < T_0 < T_1)$ řešení rovnice $\dfrac{dx}{dt} = f(x, t)$ určené jednoznačně počáteční podmínkou. Buď $v(t)$, $t \in \langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\rangle$ řešení rovnice $\dfrac{dx}{dt} = g(x)$ jednoznačně určené počáteční podmínkou $v(-\frac{1}{2}) = u(0)$. Buď $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0\rangle$ řešení rovnice $\dfrac{dx}{dt} = f(x, t)$ jednoznačně určené počáteční podmínkou $w(0) = v(\frac{1}{2})$.

Nechť $y_n \to u(-T_0)$ pro $n \to \infty$. Potom řešení $x_n(t)$, rovnice

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x) \,.\, \varphi_n(t)\,,$$

$x_n(-T_0) = y_n$ (ne nutně jednoznačné), je definováno na intervalu $\langle -T_0, T_0\rangle$ (pro dosti velká n) a platí

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} x_n(t) = u(t) \quad \text{pro} \quad -T_0 \leqq t < 0\,, \\ &\lim_{n\to\infty} x_n(t) = w(t) \quad \text{pro} \quad 0 < t \leqq T_0\,. \end{aligned} \tag{0,7}$$

V tomto článku ukážeme, že podmínku (0,1), kterou musí splňovat funkce $g(x)$ nelze nahradit slabší podmínkou: nechť $g(x)$ je spojitá vektorová funkce na množině $D \subset E_m$ taková, že rovnice $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\, d\tau$ má pro $x_0 \in D$, $t_0 \in \langle 0, S\rangle$ právě jedno řešení. V kapitole II sestrojíme na množině $\langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ funkci $g(x, y)$ takovou, že pro $t_0 \in \langle 0, 8\pi\rangle$ $x_0 \in \langle 0, \pi\rangle$, $y_0 \in \langle 0, 1\rangle$ má systém

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} d\tau\,, \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau), y(\tau))\, d\tau.$$

právě jedno řešení. V kapitole III sestrojíme spojitou reálnou funkci s konečnou variací $\sigma(t)$, $t \in \langle 0, 8\pi\rangle$ takovou, že systému

$$x(t) = \int_0^t d\sigma(\tau)\,, \quad y(t) = \int_0^t g(x(\tau), y(\tau))\, d\sigma(\tau)$$

vyhovují řešení dvě. Podobně v kapitole IV sestrojíme funkci $f(y, t)$ a posloupnost funkcí $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ tak, že řešení systému

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_n(t) , \quad \frac{dy}{dt} = f(y, t) + g(x, y) \,.\, \varphi_n(t)$$

nebude mít vlastnost (0,7).

I

Nejprve sestrojíme dělení intervalu $\langle 0, Y\rangle$, $Y > 0$ (obdobné dělení intervalu při konstrukci Cantorova diskontinua), které budeme v dalším potřebovat. Zvolme čísla $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $a_1 \neq b_1$ tak, aby $2a_1 + 3b_1 = 1$ a sestrojme posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ takto: $a_n = a_1 \,.\, b_1^{n-1}$, $b_n = b_1^n$. Pak zřejmě platí následující vztahy:

$$(1,1) \qquad a_n : b_n = a_1 : b_1 \,, \quad 2a_n + 3b_n = b_{n-1} \,, \quad 2 \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} a_n = 1 \,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \,.$$

Nyní při prvém kroku sestrojíme body $Y_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ tak, aby platilo

$$Y_1^{(1)} = Y_3^{(1)} - Y_2^{(1)} = Y - Y_4^{(1)} = b_1 \,.\, Y \,, \quad Y_2^{(1)} - Y_1^{(1)} = Y_4^{(1)} - Y_3^{(1)} = a_1 \,.\, Y \,.$$

Podle (1,1) je zřejmé, že takové dělení lze provést. Rozdělili jsme tak interval $\langle 0, Y\rangle$ na pět dílů, z nichž dva jsou délky $a_1 \,.\, Y$ a tři délky $b_1 \,.\, Y$. Při druhém kroku vynecháme otevřené intervaly délky $a_1 \,.\, Y$ a intervaly délky $b_1 \,.\, Y$ rozdělíme opět na pět dílů, a to ve stejném poměru jako interval $\langle 0, Y\rangle$. Stejným způsobem postupujeme dále. Po n-tém kroku máme sestrojeny body

$$(1,2) \qquad D(n) = \{0, Y; Y_1^{(1)}, \ldots, Y_4^{(1)}; Y_1^{(2)}, \ldots, Y_{12}^{(2)}; \ldots; Y_1^{(n)}, \ldots, Y_{4.3^n-1}^{(n)}\} \,.$$

Při $n + 1$ kroku vynecháme otevřené intervaly délek $a_1 \,.\, Y$, $a_2 \,.\, Y, \ldots, a_n \,.\, Y$ a intervaly délek $b_n \,.\, Y$ budeme dělit ve stejném poměru jako interval $\langle 0, Y\rangle$, tj. sestrojíme body $Y_1^{(n+1)}, \ldots, Y_{4.3^n}^{(n+1)}$ tak, aby platilo: Jestliže $Y_*, Y^* \in D(n)$, $Y^* - Y_* = b_n Y$ (tj. koncové body intervalu délky $b_n Y$) pak

$$(1,3) \qquad Y^* - Y_{4s}^{(n+1)} = Y_{4s-1}^{(n+1)} - Y_{4s-2}^{(n+1)} = Y_{4s-3}^{(n+1)} - Y_* = b_{n+1} \,.\, Y \,,$$
$$Y_{4s}^{(n+1)} - Y_{4s-1}^{(n+1)} = Y_{4s-2}^{(n+1)} - Y_{4s-3}^{(n+1)} = a_{n+1} \,.\, Y \,.$$

Podle (1,1) lze takové dělení provést. Intervalů délky $b_n \,.\, Y$ je zřejmě 3^n, je tedy $s = 1, 2, \ldots, 3^n$; intervalů délky $a_n \,.\, Y$ je $2 \,.\, 3^{n-1}$.

Snadno se dokáže následující tvrzení:

Věta 1,1. *Buď* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} (Y_{2l-1}^{(n)}, Y_{2l}^{(n)})$, $B = \langle 0, Y\rangle - A$. *Pak platí: množina* A *je otevřená, množina* B *je uzavřená, má mohutnost kontinua a míru* 0.

II

Než přistoupíme ke konstrukci funkce g dokážeme následující větu:

Věta 2,1. *Nechť funkce φ, ψ mají spojitou první derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí $\varphi(x) < \psi(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Nechť funkce χ má spojitou první derivaci na intervalu $\langle \varphi(a), \psi(a)\rangle$ a nechť $\chi(\varphi(a)) = \varphi'(a)$, $\chi(\psi(a)) = \psi'(a)$. Nechť funkce χ^* má spojitou první derivaci na intervalu $\langle \varphi(b), \psi(b)\rangle$ a nechť $\chi^*(\varphi(b)) = \varphi'(b)$, $\chi^*(\psi(b)) = \psi'(b)$.*

Definujme množinu P takto: Bod $[x, y] \in P$, jestliže platí

$$a \leqq x \leqq b\,, \quad \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\,.$$

Buď $0 < \varepsilon < 1$. Potom na množině P existuje spojitá funkce h mající tyto vlastnosti:

$$\begin{aligned} &1.\ h(x, \varphi(x)) = \varphi'(x) \quad pro \quad x \in \langle a, b\rangle\,, \\ &\quad\ h(x, \psi(x)) = \psi'(x) \quad pro \quad x \in \langle a, b\rangle\,, \\ &\quad\ h(a, y) \quad = \chi(y) \quad pro \quad y \in \langle \varphi(a), \psi(a)\rangle\,, \\ &\quad\ h(b, y) \quad = \chi^*(y) \quad pro \quad y \in \langle \varphi(b), \psi(b)\rangle\,. \end{aligned} \tag{2,1}$$

2. Každým bodem $[x_0, y_0] \in P$ prochází právě jedno řešení diferenciální rovnice

$$y' = h(x, y)\,. \tag{2,2}$$

3. Buďte u_1, u_2 dvě řešení rovnice (2,2). Nechť $u_1(a) - u_2(a) = A > 0$, potom platí

$$A \,.\, \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\psi(a) - \varphi(a)} (1 - \varepsilon) \leqq u_1(x) - u_2(x) \leqq A \,.\, \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\psi(a) - \varphi(a)} (1 + \varepsilon)\,, \tag{2,3}$$

$$u_1(b) - u_2(b) = A \,.\, \frac{\psi(b) - \varphi(b)}{\psi(a) - \varphi(a)}\,.$$

Podobně platí: Buďte v_1, v_2 dvě řešení rovnice (2,2). Nechť $v_1(b) - v_2(b) = B > 0$. Potom

$$B \,.\, \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\psi(b) - \varphi(b)} (1 - \varepsilon) \leqq v_1(x) - v_2(x) \leqq B \,.\, \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\psi(b) - \varphi(b)} (1 + \varepsilon)\,, \tag{2,4}$$

$$v_1(a) - v_2(a) = B \,.\, \frac{\psi(a) - \varphi(a)}{\psi(b) - \varphi(b)}\,.$$

Důkaz. Označme P_1 množinu bodů $[x, y]$ pro které platí

$$a + \delta_1 \leqq x \leqq b - \delta_2\,, \quad \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\,,$$

kde $0 < \delta_i < \dfrac{b - a}{2}$, $(i = 1, 2)$. Definujeme funkci h na množině P_1 takto:

$$h(x, y) = \frac{y - \varphi(x)}{\psi(x) - \varphi(x)} \,.\, \psi'(x) + \frac{\psi(x) - y}{\psi(x) - \varphi(x)} \,.\, \varphi'(x)\,.$$

Zřejmě $h(x, \varphi(x)) = \varphi'(x)$, $h(x, \psi(x)) = \psi'(x)$. Funkce h je na množině P_1 spojitá a platí $|h(x, y)| \leqq |\psi'(x)| + |\varphi'(x)|$.

Buď $[\bar{x}, \bar{y}] \in P_1$. Označme $\lambda = \dfrac{\bar{y} - \varphi(\bar{x})}{\psi(\bar{x}) - \varphi(\bar{x})}$. Pak funkce $H(x, \lambda) = \lambda\, \psi(x) + (1 - \lambda) \,.\, \varphi(x)$ je řešení rovnice (2,2) jdoucí bodem $[\bar{x}, \bar{y}]$. Zřejmě platí

(2,5) $$H(x, \lambda_1) - H(x, \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)\, (\psi(x) - \varphi(x))\,.$$

Nyní označme P_2 množinu bodů $[x, y]$, pro které platí

$$a \leqq x \leqq a + \delta_1\,, \quad \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)$$

a P_3 množinu bodů $[x, y]$, pro které platí

$$b - \delta_2 \leqq x \leqq b\,, \quad \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\,.$$

Na množinách P_2, P_3 nemůžeme definovat funkci h stejně jako na množině P_1, protože by nemuselo platit $h(a, y) = \chi(y)$ resp. $h(b, y) = \chi^*(y)$.

Označme $H(x, \lambda) = \lambda\, \psi(x) + (1 - \lambda)\, \varphi(x)$ pro $x \in \langle a, a + \delta_1\rangle$ a nechť funkce ν má spojitou první derivaci pro $x \in \langle a, a + \delta_1\rangle$ a nechť splňuje následující podmínky

$$\nu(a) = \nu(a + \delta_1) = \nu'(a + \delta_1) = 0\,, \quad \nu'(a) = 1\,, \quad |\nu'(x)| \leqq 1\,,$$

$$0 \leqq |\nu(x)| \leqq \varepsilon \,.\, \frac{|\psi(x) - \varphi(x)|}{M \,.\, |\psi(a) - \varphi(a)| + |\psi'(a) - \varphi'(a)|}\,,$$

kde M je kladné a $M \geqq \max\limits_{y \in \langle \varphi(a),\, \psi(a)\rangle} |\chi'(y)|$.

Protože pro $0 \leqq \lambda \leqq 1$ je $H(a, \lambda) \in \langle \varphi(a), \psi(a)\rangle$, můžeme definovat

$$H^*(x, \lambda) = H(x, \lambda) + \nu(x) \,.\, [\chi(H(a, \lambda)) - H_1'(a, \lambda)]\,, \quad \left(H_1' = \frac{\partial H}{\partial x}\,,\ H_2' = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\right).$$

Nyní platí

$$H^*(a, \lambda) = H(a, \lambda)\,, \quad H^*(a + \delta_1, \lambda) = H(a + \delta_1, \lambda)\,,$$
$$H^*(x, 0) = H(x, 0) = \varphi(x)\,, \quad H^*(x, 1) = H(x, 1) = \psi(x)\,.$$

Funkce H^* má spojité parciální derivace $H_1^{*\prime}$, $H_2^{*\prime}$ a platí

$$H_1^{*\prime}(a, \lambda) = \chi(H(a, \lambda))\,, \quad H_1^{*\prime}(a + \delta_1, \lambda) = H_1'(a + \delta_1, \lambda)$$

($H_1^{*\prime}$ zde znamená derivaci zleva resp. zprava).

Dokážeme, že každým bodem $[x_0, y_0] \in P_2$ prochází právě jedna křivka H^*. Buď $\lambda_1 > \lambda_2$, pak

$$H^*(x, \lambda_1) - H^*(x, \lambda_2) =$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_2) \,.\, (\psi(x) - \varphi(x)) + \nu(x)[\chi(H(a, \lambda_1)) - \chi(H(a, \lambda_2)) - H_1'(a, \lambda_1) + H_1'(a, \lambda_2)]\,.$$

Protože $(\lambda_1 - \lambda_2) \,.\, (\psi(x) - \varphi(x)) > 0$, a protože

$$|\nu(x)| \,.\, |\chi(H(a, \lambda_1)| - \chi(H(a, \lambda_2)) - H_1'(a, \lambda_1) + H_1'(a, \lambda_2)| \leqq$$
$$\leqq |\nu(x)| \,.\, [M(\lambda_1 - \lambda_2) \,.\, (\psi(a) - \varphi(a)) + (\lambda_1 - \lambda_2) \,.\, |\psi'(a) - \varphi'(a)|] \leqq$$
$$\leqq \varepsilon \,.\, (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi(x) - \varphi(x))$$

je

$$H^*(x, \lambda_1) - H^*(x, \lambda_2) > 0 \tag{2,6}$$

a dokonce

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \, . \, (\psi(x) - \varphi(x)) \, . \, (1 - \varepsilon) \leqq H^*(x, \lambda_1) - H^*(x, \lambda_2) \leqq$$
$$\leqq (\lambda_1 - \lambda_2) \, . \, [\psi(x) - \varphi(x)] \, . \, (1 + \varepsilon) \, .$$

Buď $[x_0, y_0] \in P_2$. Funkce $H^*(x, \lambda)$ je spojitá na intervalu $0 \leqq \lambda \leqq 1$ podle (2,6), rostoucí v λ pro každé $x \in \langle a, a + \delta_1 \rangle$ a nabývá všech hodnot od $\varphi(x)$ do $\psi(x)$. Existuje tedy právě jedno $\lambda = \lambda_0$ takové, že $y_0 = H^*(x_0, \lambda_0)$. Křivka $H^*(x, \lambda_0)$ prochází bodem $[x_0, y_0]$ a podle (2,6) žádná jiná křivka $H^*(x, \lambda)$, $\lambda \neq \lambda_0$ nemůže bodem $[x_0, y_0]$ procházet.

Funkci h na množině P_2 budeme definovat takto: nalezneme křivku H^*, která prochází bodem $[x, y] \in P_2$, sestrojíme její tečnu v tomto bodě a směrnice této tečny bude hodnota funkce h v bodě $[x, y]$.

Snadno se ukáže, že takto definovaná funkce h je na P_2 spojitá a lipschitzovská vzhledem k y, a že platí

$$h(x, H^*(x, \lambda)) = H_1^{*\prime}(x, \lambda) \quad \text{pro} \quad a \leqq x \leqq a + \delta_1 \, , \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1 \, ,$$
$$h(a, y) = \chi(y) \quad \text{pro} \quad \varphi(a) \leqq y \leqq \psi(a) \, .$$

Stejným způsobem, pomocí křivek H^{**} definujeme funkci h na množině P_3.

Tím jsme sestrojili funkci h na celé množině P. Z konstrukce je zřejmé, že h je na P spojitá a že je splněno (2,1).

Hledáme řešení diferenciální rovnice (2,2) pro $a \leqq x \leqq b$. Definujme křivku G takto:

$$G(x, \lambda) = H^*(x, \lambda) \quad \text{pro} \quad x \in \langle a, a + \delta_1 \rangle \, ,$$
$$G(x, \lambda) = H(x, \lambda) \quad \text{pro} \quad x \in \langle a + \delta_1, b - \delta_2 \rangle \, ,$$
$$G(x, \lambda) = H^{**}(x, \lambda) \quad \text{pro} \quad x \in \langle b - \delta_2, b \rangle \, .$$

Pak tato křivka má v každém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou derivaci a platí

$$G_1'(x, \lambda) = h(x, G(x, \lambda)) \, .$$

Přitom libovolným bodem $[x_0, y_0] \in P$ prochází právě jedna křivka G.

Buďte u_1, u_2 dvě řešení rovnice (2,2) taková, že $u_1(a) - u_2(a) = A > 0$. Potom $u_1(x) = G(x, \lambda_1)$, $u_2(x) = G(x, \lambda_2)$ a podle (2,5) a (2,6) je

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \, . \, (\psi(x) - \varphi(x))(1 - \varepsilon) \leqq$$
$$\leqq G(x, \lambda_1) - G(x, \lambda_2) \leqq (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi(x) - \varphi(x))(1 + \varepsilon) \, .$$

Protože

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{G(a, \lambda_1) - G(a, \lambda_2)}{\psi(a) - \varphi(a)} = \frac{u_1(a) - u_2(a)}{\psi(a) - \varphi(a)} = \frac{A}{\psi(a) - \varphi(a)} \, ,$$

platí

$$A \, . \, \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\psi(a) - \varphi(a)} (1 - \varepsilon) \leqq G(x, \lambda_1) - G(x, \lambda_2) \leqq A \, . \, \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\psi(a) - \varphi(a)} (1 + \varepsilon)$$

a

$$G(b, \lambda_1) - G(b, \lambda_2) = H^{**}(b, \lambda_1) - H^{**}(b, \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi(b) - \varphi(b)) = = A \frac{\psi(b) - \varphi(b)}{\psi(a) - \varphi(a)}.$$

Stejně se dokáže (2,4). Tím je věta 2,1 úplně dokázána.

Poznámka. Z důkazu věty 2,1 plyne

Je-li $[x, y] \in P_1$ pak $|h(x, y)| \leqq |\psi'(x)| + |\varphi'(x)|$. Je-li $[x, y] \in P_2$ pak $|h(x, y)| = |H_1^{*\prime}(x, \lambda)|$, kde λ vyhovuje rovnici $y = H^*(x, \lambda)$, a platí

$$|h(x, y)| \leqq |\psi'(x)| + |\varphi'(x)| + \max_{y \in \langle \varphi(a), \psi(a) \rangle} |\chi(y)| + |\psi'(a)| + |\varphi'(a)| \leqq$$

$$\leqq |\psi'(x)| + |\varphi'(x)| + 3 \,.\, \max_{y \in \langle \varphi(a), \psi(a) \rangle} |\chi(y)| \,.$$

Podobně, je-li $[x, y] \in P_3$ pak

$$|h(x, y)| \leqq |\psi'(x)| + |\varphi'(x)| + 3 \,.\, \max_{y \in \langle \varphi(b), \psi(b) \rangle} |\chi^*(y)| \,.$$

Odtud plyne pro $[x, y] \in P$

(2,7) $$|h(x, y)| \leqq |\psi'(x)| + |\varphi'(x)| + 3 \,.\, (\max_{\langle \varphi(a), \psi(a) \rangle} |\chi(y)| + \max_{\langle \varphi(b), \psi(b) \rangle} |\chi^*(y)|) \,.$$

Nyní přistoupíme ke konstrukci funkce g (viz obr. 1). Definičním oborem této funkce bude interval $Q_1^{(0)} = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ (na ose y) sestrojíme dělení $Y_i^{(k)}$ popsané v části I (tj. položíme $Y = 1$). Přitom, jak se později ukáže, je nutné volit $\frac{1}{16} < b_1 < 2a_1$. Označme $\psi_1^{(0)}$, $\psi_2^{(0)}$ funkci identicky rovnou nule resp. jedné na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Při prvém kroku sestrojíme na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ funkce

$$\psi_1^{(1)}(x) = -\tfrac{1}{2}a_1 \cos x + \frac{Y_1^{(1)} + Y_2^{(1)}}{2}, \quad \psi_2^{(1)}(x) = \tfrac{1}{2}a_1 \cos x + \frac{Y_3^{(1)} + Y_4^{(1)}}{2},$$

a označme

$$P_1^{(1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]}\left[\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \pi,\ \psi_1^{(0)}(x) \leqq y \leqq \psi_1^{(1)}(x)\right],$$

$$P_2^{(1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]}\left[0 \leqq x \leqq \frac{3\pi}{4},\ \psi_1^{(1)}(x) \leqq y \leqq \psi_2^{(1)}(x)\right],$$

$$P_3^{(1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]}\left[\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \pi,\ \psi_2^{(1)}(x) \leqq y \leqq \psi_2^{(0)}(x)\right],$$

$$Q_1^{(1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]}\left[0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4},\ \psi_1^{(0)}(x) \leqq y \leqq \psi_1^{(1)}(x)\right],$$

$$Q_2^{(1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]}\left[\frac{3\pi}{4} \leqq x \leqq \pi,\ \psi_1^{(1)}(x) \leqq y \leqq \psi_2^{(1)}(x)\right],$$

$$Q_3^{(1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]}\left[0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4},\ \psi_2^{(1)}(x) \leqq y \leqq \psi_2^{(0)}(x)\right].$$

Při druhém kroku budeme na množinách $Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}$ postupovat stejně jako na celém intervalu $Q_1^{(0)} = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Předpokládejme, že jsme provedli n kroků. Máme sestrojeny funkce

$$\Psi(n) = \{\psi_1^{(0)}, \psi_2^{(0)}; \psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}; \psi_1^{(2)}; \ldots, \psi_6^{(2)}; \ldots; \psi_1^{(n)}, \ldots, \psi_{2.3^n-1}^{(n)}\}$$

a definovány množiny

$$P_1^{(1)}, \ldots, P_3^{(1)}; P_1^{(2)}, \ldots, P_9^{(2)}; \ldots; P_1^{(n)}, \ldots, P_{3^n}^{(n)}; Q_1^{(n)}, \ldots, Q_{3^n}^{(n)}$$

takové, že

$$\left(\bigcup_{r=1}^{n} \bigcup_{s=1}^{3^r} P_s^{(r)}\right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{3^n} Q_s^{(n)}\right) = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle .$$

Při $(n+1)$-ním kroku budeme na množinách $Q_s^{(n)}$, $(s = 1, 2, \ldots, 3^n)$ postupovat stejně jako na celém intervalu $Q_1^{(0)} = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Buď

$$Q_s^{(n)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} [a \leqq x \leqq b,\ \psi_*(x) \leqq y \leqq \psi^*(x)] .$$

kde $b - a = \dfrac{\pi}{4^n}$, $\psi_*, \psi^* \in \Psi(n)$ jsou monotonní funkce mající spojitou první derivaci. Přitom rozdíl $\psi^*(x) - \psi_*(x)$ je monotonní a nabývá minima b_n v některém koncovém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$ — označme tento bod x_1. Platí

$$\psi_*(x) \leqq \psi_*(x_1) = Y_* < Y^* = \psi^*(x_1) \leqq \psi^*(x) ; \quad \psi^{*\prime}(x_1) = \psi_*'(x_1) = 0 ,$$

$(Y_*, Y^* \in D(n)$, $\psi_*'(x_1)$, $\psi^{*\prime}(x_1)$ zde znamená derivaci zprava resp. zleva). S vyjímkou množiny $Q_1^{(0)}$ existuje vždy právě jeden takový bod x_1. Buď

$$Y_* < Y_{4s-3}^{(n+1)} < Y_{4s-2}^{(n+1)} < Y_{4s-1}^{(n+1)} < Y_{4s}^{(n+1)} < Y^* , \quad (Y_i^{(n+1)} \in D(n+1)) .$$

Nyní sestrojíme na intervalu $\langle a, b \rangle$ funkce

$$\psi_{2s-1}^{(n+1)}(x) = -\frac{a_{n+1}}{2} \cos 4^n(x - x_1) + \frac{1}{2}(Y_{4s-3}^{(n+1)} + Y_{4s-2}^{(n+1)}) ,$$

$$\psi_{2s}^{(n+1)}(x) = \frac{a_{n+1}}{2} \cos 4^n(x - x_1) + \frac{1}{2}(Y_{4s-1}^{(n+1)} + Y_{4s}^{(n+1)}) .$$

Buďte dále $x_2, x_3, x_4 \in \langle a, b \rangle$ takové, že

$$|x_1 - x_2| = \frac{\pi}{4^{n+1}} , \quad |x_1 - x_3| = \frac{3\pi}{4^{n+1}} , \quad |x_1 - x_4| = \frac{\pi}{4^n}$$

(tj. x_4 je druhý koncový bod intervalu $\langle a, b \rangle$).

Označme pro $[x, y] \in Q_s^{(n)}$:

$$P_{3s-2}^{(n+1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} [|x - x_4| \leqq |x_2 - x_4|,\ \psi_*(x) \leqq y \leqq \psi_{2s-1}^{(n+1)}(x)] ,$$

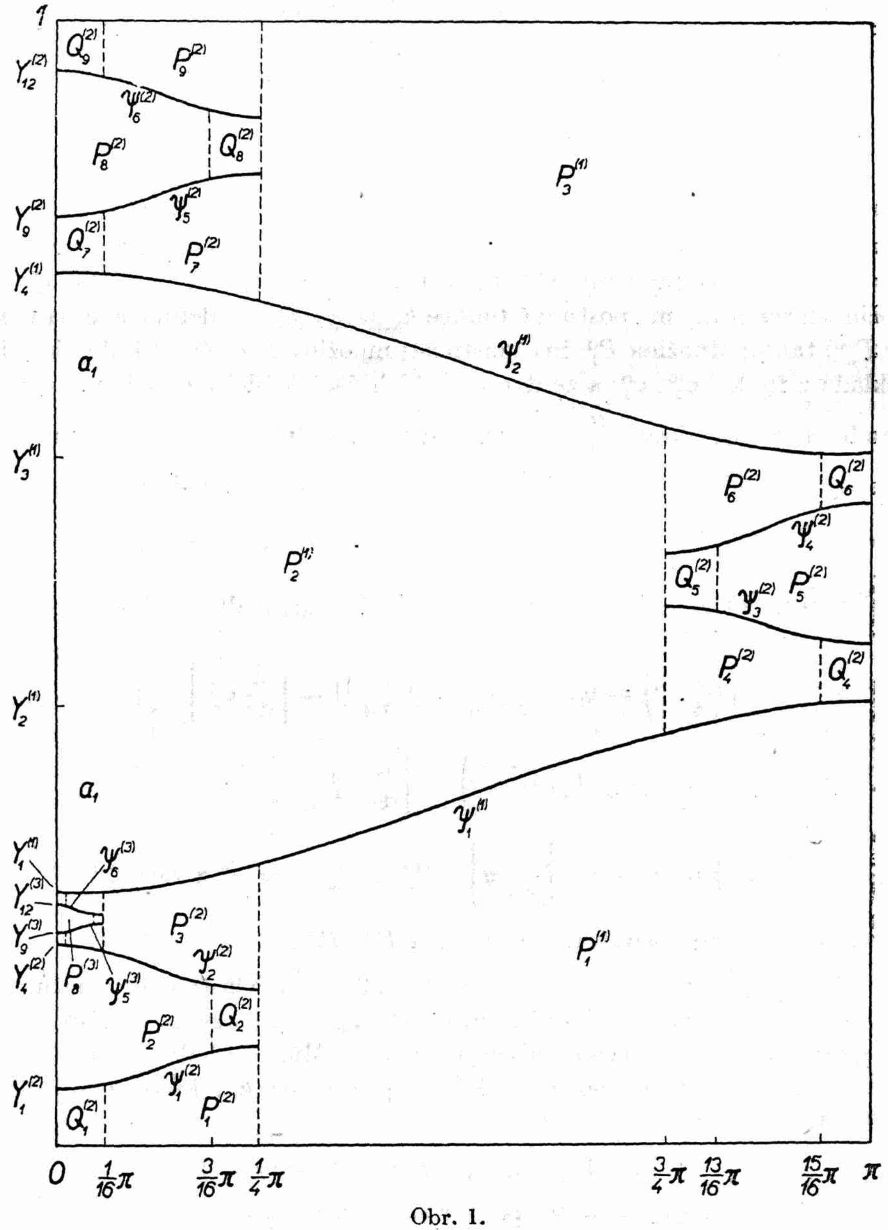
$$P_{3s-1}^{(n+1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} [|x - x_1| \leqq |x_3 - x_1|,\ \psi_{2s-1}^{(n+1)}(x) \leqq y \leqq \psi_{2s}^{(n+1)}(x)] ,$$

$$P_{3s}^{(n+1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} [|x - x_4| \leqq |x_2 - x_4|,\ \psi_{2s}^{(n+1)}(x) \leqq y \leqq \psi^*(x)] ,$$

$$Q_{3s-2}^{(n+1)} = \underset{[x,y]}{\mathscr{E}} \left[|x - x_1| \leqq |x_2 - x_1|,\ \psi_*(x) \leqq y \leqq \psi_{2s-1}^{(n+1)}(x)\right],$$

$$Q_{3s-1}^{(n+1)} = \underset{[x,y]}{\mathscr{E}} \left[|x - x_4| \leqq |x_3 - x_4|,\ \psi_{2s-1}^{(n+1)}(x) \leqq y \leqq \psi_{2s}^{(n+1)}(x)\right],$$

$$Q_{3s}^{(n+1)} = \underset{[x,y]}{\mathscr{E}} \left[|x - x_1| \leqq |x_2 - x_1|,\ \psi_{2s}^{(n+1)}(x) \leqq y \leqq \psi^*(x)\right].$$



Obr. 1.

Množiny $Q_{3s-2}^{(n+1)}, Q_{3s-1}^{(n+1)}, Q_{3s}^{(n+1)}$ mají zřejmě týž charakter jako množina $Q_s^{(n)}$. Protože $s = 1, 2, \ldots, 3^n$ obdržíme tak při $n + 1$ kroku funkce $\psi_1^{(n+1)}, \ldots, \psi_{2.3^n}^{(n+1)}$ a množiny $P_1^{(n+1)}, \ldots, P_{3^{n+1}}^{(n+1)}; Q_1^{(n+1)}, \ldots, Q_{3^{n+1}}^{(n+1)}$. Z konstrukce vyplývá, že jsou-li ψ^*, ψ_* částí hranice množiny $P_{3s-2}^{(n+1)}$ resp. $P_{3s}^{(n+1)}$ a x_*, x^* body intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že $|x_1 - x_*| < |x_1 - x^*|$ pak

$$\psi^*(x_*) - \psi_*(x_*) < \psi^*(x^*) - \psi_*(x^*)\,;$$

jsou-li ψ^*, ψ_* částí hranice množiny $P_{3s-1}^{(n+1)}$, pak

$$\psi^*(x_*) - \psi_*(x_*) > \psi^*(x^*) - \psi_*(x^*)\,.$$

Dále se snadno dokáže, že jestliže $[x_4, y] \in P_{3s-2}^{(n+1)}$ nebo $[x_4, y] \in P_{3s}^{(n+1)}$, pak platí $[x_4, y] \in P_s^{(n)}$, a jestliže $[x_1, y] \in P_{3s-1}^{(n+1)}$, pak platí jedno z těchto tří tvrzení: a) $x_1 = 0$, b) $x_1 = \pi$, c) existuje dvojice (i, r), $r \leqq n - 1$ tak, že $[x_1, y] \in P_i^{(r)}$.

Funkce $\psi_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, 2\,.\,3^{n-1})$ rozdělí nám množinu $\langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ na množiny $P_s^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ s = 1, 2, \ldots, 3^n)$. Na těchto množinách sestrojujeme postupně funkce $h_{n,s}(x, y)$ ($h_{n,s}$ je definována na množině $P_s^{(n)}$) takto: Množina $P_1^{(1)}$ má vlastnosti množiny P z věty 2,1. Její hranice se skládá z funkcí $\psi_1^{(0)}, \psi_1^{(1)}$ a ze dvou svislých úseček, delší z nich má x-ovou souřadnici rovnu π, kratší $\frac{\pi}{4}$. Můžeme tedy podle věty 2,1 sestrojit na množině $P_1^{(1)}$ spojitou funkci $h_{1,1}(x, y)$ takovou, že splňuje body 2, 3 věty 2,1 a že

$$h_{1,1}(x, \psi_1^{(0)}(x)) = 0\,, \quad h_{1,1}(x, \psi_1^{(1)}(x)) = \tfrac{1}{2}a_1 \sin x\,, \quad h_{11}(\pi, y) = 0\,;$$

$h_{1,1}\left(\frac{\pi}{4}, y\right)$ nechť je funkce se spojitou první derivací podle y taková, že

$$h_{1,1}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = 0\,, \quad h_{1,1}\left(\frac{\pi}{4}, \psi_1^{(1)}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\psi_1^{(1)}\right]_{x=\frac{\pi}{4}};$$

$$0 \leqq h_{1,1}\left(\frac{\pi}{4}, y\right) \leqq \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\psi_1^{(1)}\right]_{x=\frac{\pi}{4}},$$

$$h_{1,1}\left(\frac{\pi}{4}, y\right) = 0 \quad \text{pro} \quad \left[\frac{\pi}{4}, y\right] \notin P_1^{(2)} \cup P_3^{(2)} \quad (= \chi^* \text{ z věty } 2{,}1)\,.$$

Stejně budeme postupovat na množinách $P_2^{(1)}, P_3^{(1)}$.

Množina $P_s^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ s = 1, 2, \ldots, 3^n)$ má vlastnosti množiny P z věty 2,1. Její hranice se skládá z funkcí $\psi^*, \psi_* \in \Psi(n)$ a ze dvou svislých úseček, delší z nich nechť má souřadnici $\bar{x}$, kratší $\tilde{x}$. Můžeme tedy postupně podle věty 2,1 sestrojovat na množinách $P_s^{(n)}$ spojité funkce $h_{n,s}$, které splňují body 2 a 3 věty 2,1 a že

$$h_{n,s}(x, \psi_*(x)) = \psi_*'(x)\,, \quad h_{n,s}(x, \psi^*(x)) = \psi^{*\prime}(x)\,,$$
$$h_{n,s}(\bar{x}, y) = 0 \quad \text{pro} \quad \bar{x} = 0 \quad \text{nebo} \quad \bar{x} = \pi\,;$$

je-li $0 \neq \bar{x} \neq \pi$, pak podle (2,8) máme již definováno $h_{r,i}(\bar{x}, y)$ ($r = 1, 2, \ldots, n - 1$) a definujeme $h_{n,s}(\bar{x}, y) = h_{r,i}(\bar{x}, y)$; $h_{n,s}(\tilde{x}, y)$ nechť je funkce se spojitou první derivací dle y taková, že

$$
\begin{aligned}
(2{,}9) \qquad & h_{n,s}(\tilde{x}, \psi^*(\tilde{x})) = \psi^{*\prime}(\tilde{x}) \,, \quad h_{n,s}(\tilde{x}, \psi_*(\tilde{x})) = \psi_*'(\tilde{x}) \,, \\
& |h_{n,s}(\tilde{x}, y)| \leqq \max\left(|h_{n,s}(\tilde{x}, \psi^*(\tilde{x}))| \,, \ |h_{n,s}(\tilde{x}, \psi_*(\tilde{x}))|\right) , \\
& h_{n,s}(\tilde{x}, y) = 0 \quad \text{pro} \quad [\tilde{x}, y] \text{ non} \in P_{3s-2}^{(n+1)} \cup P_{3s}^{(n+1)} \,.
\end{aligned}
$$

Funkci g definujeme na $\langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ takto:

$$g(x, y) = h_{n,s}(x, y) \quad \text{pro} \quad [x, y] \in P_s^{(n)} \,,$$

$$g(x, y) = 0 \quad \text{pro} \quad [x, y] \in \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle - \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s=1}^{3^n} P_s^{(n)} \,.$$

Označíme-li Ψ množinu všech funkcí $\psi_l^{(n)}$, kde $n = 1, 2, \ldots$; $l = 1, 2, \ldots, 2 \,.\, 3^{n-1}$, pak zřejmě platí

Věta 2,2. *Množina Ψ je spočetná.*

Označme C množinu těch bodů $[x, y] \in \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ pro které platí: Ke každému přirozenému číslu n existuje přirozené číslo s ($1 \leqq s \leqq 3^n$) takové, že $[x, y] \in Q_s^{(n)}$.

Věta 2,3. *Množina C je neprázdná. Buď $[x_0, y_0] \in C$. Pak $[x, y_0]$ non $\in C$ pro všechna $x \neq x_0$ a $[0, y_0] \in B$, kde B je množina zavedená ve větě 1,1. Zobrazení $[x_0, y_0] \to [0, y_0]$ je prosté.*

Důkaz. Z konstrukce plyne, že všechny koncové body funkcí $\psi_k^{(n)}$ s vyjímkou bodů $[\pi, 0]$, $[\pi, 1]$ patří do množiny C. Koncovým bodem funkce $\psi_k^{(n)}$, která má definiční interval $\langle x_*, x^*\rangle$ rozumíme body $[x^*, \psi_k^{(n)}(x^*)]$, $[x_*, \psi_k^{(n)}(x_*)]$.

Buď nyní $[x_0, y_0] \in C$ a buďte $l_1, l_2, \ldots$ přirozená čísla taková, že $[x_0, y_0] \in Q_{l_1}^{(1)} \cap \cap Q_{l_2}^{(2)} \cap \ldots$. Potom zřejmě platí $Q_{l_1}^{(1)} \supset Q_{l_2}^{(2)} \supset \ldots$; $d(Q_{l_i}^{(i)}) \to 0$. $Q_{l_1}^{(1)} \cap Q_{l_2}^{(2)} \cap \ldots$ je tedy jednobodová množina, která obsahuje právě bod $[x_0, y_0]$. Existuje proto prosté zobrazení, které přiřazuje bodu $[x_0, y_0] \in C$ posloupnost $l_1, l_2, \ldots$.

Buď B množina na ose y, zavedená ve větě 1,1. Očíslujme intervaly délky b_n postupně od osy x čísly $1, 2, \ldots, 3^n$ a označme je $B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, \ldots, B_{3^n}^{(n)}$. Pak $[0, \tilde{y}_0] \in B \Rightarrow [0, \tilde{y}_0] \in B_{k_1}^{(1)} \cap B_{k_2}^{(2)} \cap \ldots$. Opět platí $B_{k_1}^{(1)} \supset B_{k_2}^{(2)} \supset \ldots$, $d(B_{k_i}^{i}) \to 0$ a tedy do množiny $B_{k_1}^{(1)} \cap B_{k_2}^{(2)} \cap \ldots$ patří právě bod $[0, \tilde{y}_0]$. Existuje tedy prosté zobrazení, které přiřazuje bodu $[0, \tilde{y}_0] \in B$ posloupnost $k_1, k_2, \ldots$. Odtud plyne, že existuje prosté zobrazení bodů $[x_0, y_0] \in C$ na body $[0, \tilde{y}_0] \in B$.

Dokážeme, že $y_0 = \tilde{y}_0$. Vezměme bod $[x_0, \tilde{y}_0]$. Je zřejmé, že $[x_0, \tilde{y}_0]$ patří do těchže $Q_{l_i}^{(n)}$ jako $[x_0, y_0]$.

Věta 2,4. *Funkce g je na intervalu $\langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ spojitá.*

Důkaz. V bodech $[x_0, y_0]$ non $\in C$ dokážeme spojitost snadno. Je třeba vyšetřiti pouze body $[x_0, y_0] \in C$.

1. Platí $[x_0, y_0] \in C \Rightarrow g(x_0, y_0) = 0$. Nechť $[x_0, y_0] \in C$. Pak buď

$$[x_0, y_0] \in \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle - \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{3^n} P_l^{(n)},$$

v tomto případě bylo přímo definováno $g(x_0, y_0) = 0$; nebo

$$[x_0, y_0] \operatorname{non} \in \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle - \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{3^n} P_l^{(n)}.$$

V tomto případě existuje takové přirozené N, že $[x_0, y_0] \in \bigcup_{n=1}^{N} \bigcup_{l=1}^{3^n} P_l^{(n)}$, ale $[x_0, y_0] \operatorname{non} \in \bigcup_{n=1}^{N-1} \bigcup_{l=1}^{3^n} P_l^{(n)}$. Nechť dále $[x_0, y_0] \in Q_m^{(N-1)} \Rightarrow [x_0, y_0]$ patří do právě jedné z množin $P_{3m-2}^{(N)}, P_{3m-1}^{(N)}, P_{3m}^{(N)}$. Nechť patří např. do $P_{3m-2}^{(N)}$, pak ale $[x_0, y_0] \in Q_{3m-2}^{(N)}$ a dále $[x_0, y_0] \in Q_{3(3m-2)-1}^{(N+1)}$. Z toho plyne $[x_0, y_0] \in Q_{3(3m-2)-1}^{(N+1)} \cap P_{3m-2}^{(N)}$ a podle (2,9) plyne, že $g(x_0, y_0) = 0$. Stejně pro $[x_0, y_0] \in P_{3m-1}^{(N)}$ a $[x_0, y_0] \in P_{3m}^{(N)}$.

2. Dokážeme, že $[x, y] \in P_l^{(n)} \Rightarrow |g(x, y)| \leqq \Phi(n)$, kde $\lim_{n\to\infty} \Phi(n) = 0$. Z konstrukce plyne, že buď

$$P_l^{(n)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} \left[x_* + \frac{\pi}{4^n} \leqq x \leqq x_* + \frac{\pi}{4^{n-1}},\quad \psi_*(x) \leqq y \leqq \psi^*(x) \right],$$

nebo

$$P_l^{(n)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} \left[x_* - \frac{\pi}{4^{n-1}} \leqq x \leqq x_* - \frac{\pi}{4^n},\quad \psi_*(x) \leqq y \leqq \psi^*(x) \right],$$

kde $\psi^*, \psi_* \in \Psi(n)$, derivace $\psi^{*\prime}(x_*) = \psi_*'(x_*) = 0$. Dále alespoň jedna z funkcí ψ^*, ψ_*, např. $\psi_* = \psi_{l_1}^{(n)}$, a nechť $\psi^* = \psi_{l_2}^{(k)}$, kde $1 \leqq k \leqq n$. Potom podle poznámky za větou 2,1 je

$$|g(x, y)| \leqq |\psi_*'(x)| + |\psi^{*\prime}(x)| + 3 \left[\max \left(\left| \psi_*' \left(x_* + \frac{\pi}{4^n} \right) \right| ; \left| \psi^{*\prime} \left(x_* + \frac{\pi}{4^n} \right) \right| \right) + \max \left(\left| \psi_*' \left(x_* + \frac{\pi}{4^{n-1}} \right) \right| ; \left| \psi^{*\prime} \left(x_* + \frac{\pi}{4^{n-1}} \right) \right| \right) \right], \tag{2,10}$$

resp.

$$|g(x, y)| \leqq |\psi_*'(x)| + |\psi^{*\prime}(x)| + 3 \left[\max \left(\left| \psi_*' \left(x_* - \frac{\pi}{4^{n-1}} \right) \right| ; \left| \psi^{*\prime} \left(x_* - \frac{\pi}{4^{n-1}} \right) \right| \right) + \max \left(\left| \psi_*' \left(x_* - \frac{\pi}{4^n} \right) \right| ; \left| \psi^{*\prime} \left(x_* - \frac{\pi}{4^n} \right) \right| \right) \right]. \tag{2,11}$$

Odhadneme výraz (2,10). Odhad výrazu (2,11) je zřejmě zcela obdobný. Protože podle předpokladu je $\frac{1}{4} < 4b_1 < 2a_1 + 3b_1 = 1$ platí

$$|\psi_*'(x)| \leqq \frac{a_n}{2} \cdot 4^{n-1} = \frac{a_1}{2} (4b_1)^{n-1} \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty,$$

$$|\psi^{*\prime}(x)| \leqq \frac{a_n}{2} \cdot 4^{n-1} = \frac{a_1}{2} (4b_1)^{n-1} \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty, \quad k = n,$$

$$|\psi^{*\prime}(x)| \leqq \left|\frac{a_k}{2} 4^{k-1} . \sin 4^{k-1} . x\right| \leqq \left|\frac{a_k}{2} 4^{k-1} . \sin 4^{k-1}\left(x_* + \frac{\pi}{4^{n-1}}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{a_1}{2}(4b_1)^{k-1} . \sin \frac{\pi}{4^{n-k}}\right| = \frac{a_1}{2} . (4b_1)^{n-1} . \frac{\sin \frac{\pi}{4^{n-k}}}{\frac{\pi}{4^{n-k}}} . \frac{\pi}{(16b_1)^{n-k}} \to 0$$

$$\text{pro } n \to \infty \text{ a } k = 1, 2, \ldots, n-1 ,$$

a tedy zřejmě existuje zmíněná funkce $\Phi(n)$.

Z těchto dvou výsledků se již snadno dokáže, že funkce g je v $[x_0, y_0] \in C$ spojitá.

Věta 2,5. *Diferenciální rovnice*

$$y' = g(x, y) \tag{2,12}$$

má právě jedno řešení jdoucí bodem $[x_0, y_0] \in \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Důkaz. Existence takového řešení plyne ze spojitosti funkce g. Jestliže $[x_0, y_0]$ non $\in C$, pak máme lokální jednoznačnost zaručenu větou 2,1. Stačí opět vyšetřovat pouze body množiny C.

1. Nechť $[x_0, y_0]$ je koncový bod funkce $\psi_{2l-1}^{(n+1)}$. Z konstrukce funkce g víme, že body $[x, \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x)] \in Q_l^{(n)}$. Použijeme-li označení, které jsme zavedli při konstrukci funkce g, potom platí $|x - x_1| \leqq |x_4 - x_1| = \frac{\pi}{4^n}$ a $\psi_{2l-1}^{(n+1)}(x) \in \langle Y_{4l-3}^{(n+1)}, Y_{4l-2}^{(n+1)} \rangle$. Vyšetřujme bod $[x_1, \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x_1)]$; při vyšetřování bodu $[x_4, \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x_4)]$ a také bodů $[x_1, \psi_{2l}^{(n+1)}(x_1)]$, $[x_4, \psi_{2l}^{(n+1)}(x_4)]$ bychom postupovali stejně.

Buď u libovolné řešení rovnice (2,12) takové, že $u(x_1) = \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x_1)$. Potom zřejmě není možné, aby $u(x) > \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x)$ pro $|x - x_1| \leqq |x_3 - x_1|$, protože

$$\underset{[x,y]}{\mathscr{E}}\,[|x - x_1| \leqq |x_3 - x_1|, \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x) \leqq y \leqq \psi_{2l}^{(n+1)}(x)] = P_{3l-1}^{(n+1)} .$$

Dokážeme, že není možné ani aby $u(x) < \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x)$. Vybereme posloupnost funkcí $\psi_s^{(n+k+1)}$, kde $s = 2 . 3^{(k-1)} . (3l-2)$ a $k = 1,2, \ldots$. Z konstrukce funkce g je zřejmé, že pro $|x - x_1| \leqq \frac{\pi}{4^{n+k}}$ je

$$\psi_s^{(n+k+1)}(x) = \tfrac{1}{2}a_{n+k+1} . \cos 4^{n+k}(x - x_1) + \tfrac{1}{2}(Y_{2s-1}^{(n+k+1)} + Y_{2s}^{(n+k+1)}) .$$

Zřejmě pro $k \to \infty$ je

$$\psi_{2l-1}^{(n+1)}(x_1) - \psi_s^{(n+k+1)}(x_1) = Y_{4l-3}^{(n+1)} - Y_{2s}^{(n+k+1)} = b_{n+k+1} \to 0 , \tag{2,13}$$

$$\psi_{2l-1}^{(n+1)}(\bar{x}) - \psi_s^{(n+k+1)}(\bar{x}) = \frac{a_{n+1}}{2}\left(1 - \cos \frac{\pi}{4^k}\right) + a_{n+k+1} + b_{n+k+1} ,$$

kde $|\bar{x} - x_1| = \frac{\pi}{4^{n+k}}$.

Dále: Existuje jediné řešení rovnice (2,12) pro $\frac{\pi}{4^{n+k}} \leqq |x - x_1| \leqq x_4$, které prochází bodem $[\bar{x}, \psi_s^{(n+k+1)}(\bar{x})]$, neboť toto řešení prochází množinami $P^{(n+k)}_{3k-1.(3l-2)}$, $P^{(n+k-1)}_{3k-2.(3l-2)}$, …, $P^{(n+1)}_{3l-2}$. Nazveme toto řešení prodloužením funkce $\psi_s^{(n+k+1)}$ na celou množinu $Q_l^{(n)}$ a takto prodlouženou funkci $\psi_s^{(n+k+1)}$ označíme v_k.

Je patrné, že u nemůže protnout žádnou funkci v_k uvnitř $Q_l^{(n)}$. Ale v_k konverguje na $Q_l^{(n)}$ stejnoměrně k $\psi_{2l-1}^{(n+1)}$, neboť: Buď $|x - x_1| \leqq \frac{\pi}{4^{n+k}}$, pak podle (2,13) je $(\psi_{2l-1}^{(n+1)}(x) - v_k(x)) \leqq (\psi_{2l-1}^{(n+1)}(\bar{x}) - v_k(\bar{x})) \leqq \left[\frac{1}{2} a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^k}\right) + a_{n+k+1} + \right.$

$$\left. + b_{n+k+1}\right] . \frac{a_{n+k} + b_{n+k} + \frac{1}{2} a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^{k-1}}\right)}{b_{n+k}} \cdots \frac{a_{n+1} + b_{n+1} + \psi_*(x_4)}{b_{n+1}} (1 + \varepsilon),$$

nebo

$$\frac{\pi}{4^{n+k-m+1}} \leqq |x - x_1| \leqq \frac{\pi}{4^{n+k-m}} \quad (m = 1, 2, \ldots, k),$$

pak $[x, v_k(x)] \in P^{(n+k-m+1)}_{3k-m.(3l-2)}$ a platí podle (2,3) resp. (2,4)

$$\psi_{2l-1}^{(n+1)}(x) - v_k(x) \leqq \left[a_{n+k+1} + b_{n+k+1} + \frac{1}{2} a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^k}\right)\right] . \tag{2,14}$$

$$. \frac{a_{n+k} + b_{n+k} + \frac{1}{2} a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^{k-1}}\right)}{b_{n+k}} \cdots \frac{a_{n+2} + b_{n+2} + \frac{1}{2} a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)}{b_{n+2}} .$$

$$. \frac{a_{n+1} + b_{n+1} + \psi_*(x_4)}{b_{n+1}} (1 + \varepsilon) .$$

Snadno zjistíme, že pro $\frac{1}{16} < b_1 < \frac{1}{4}$ je $\lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cos \pi . 4^{-x}}{b_1^x} = 0$. Existuje tedy k_0 takové, že pro $k \geqq k_0$ je $\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^k}\right) < b_1^k$ a $\frac{1}{2} a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^k}\right) < a_{n+k+1}$. Můžeme tedy pro $k \geqq k_0$ přepsat (2,14) takto:

$$\psi_{n-1}^{(k+1)}(x) - v_k(x) \leqq [2a_{n+k+1} + b_{n+k+1}] . \frac{2a_{n+k} + b_{n+k}}{b_{n+k}} \cdots \frac{2a_{n+k_0+1} + b_{n+k_0+1}}{b_{n+k_0+1}} .$$

$$. \frac{a_{n+k_0} + b_{n+k_0} + \frac{1}{2} a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^{k_0-1}}\right)}{b_{n+k_0}} \cdots \frac{a_{n+2} + b_{n+2} + \frac{1}{2} a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)}{b_{n+2}} .$$

$$. \frac{a_{n+1} + b_{n+1} + \psi_*(x_4)}{b_{n+1}} (1 + \varepsilon) = (2a_1 . b_1^{n+k_0} + b_1^{n+k_0+1}) . b_1^{k-k_0} . \left(1 + 2\frac{a_1}{b_1}\right)^{k-k_0} .$$

$$. \frac{a_{n+k_0} + b_{n+k_0} + \frac{1}{2} a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^{k_0-1}}\right)}{b_{n+k_0}} \cdots \frac{a_{n+2} + b_{n+2} + \frac{1}{2} a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)}{b_{n+2}} .$$

$$\cdot \frac{a_{n+1} + b_{n+1} + \psi_*(x_4)}{b_{n+1}} \cdot (1 + \varepsilon) = (2a_1 b_1^{n+k_0} + b_1^{n+k_0+1}) \, .$$

$$\cdot \frac{a_{n+k_0} + b_{n+k_0} + \frac{1}{2} a_{n+1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4^{k_0-1}}\right)}{b_{n+k_0}} \, .$$

$$\ldots \frac{a_{n+2} + b_{n+2} + \frac{1}{2} a_{n+1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right)}{b_{n+2}} \cdot \frac{a_{n+1} + b_{n+1} + \psi_*(x_4)}{b_{n+1}} \, .$$

$$\cdot (b_1 + 2a_1)^{k-k_0} \to 0 \quad \text{pro} \quad k \to \infty \, .$$

Musí tedy být $u(x) = \psi_{2l-1}^{(n+1)}$ a to je jediné řešení rovnice (2,12) vyhovující dané počáteční podmínce pro $x \in Q_l^{(4)}$.

Není-li $x_1 = 0$ nebo $x_1 = \pi$ pak na opačnou stranu (tj. mimo množinu $Q_l^{(n)}$) vychází z bodu $[x_1, \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x_1)]$ právě jedno řešení, protože $Q_l^{(n)}$ „sousedí“ s množinou $P_s^{(r)}$, kde r je některé přirozené číslo $0 \leqq r \leqq n - 1$.

2. Nechť $[x_0, y_0] \in C$ a není koncovým bodem žádné z funkcí množiny Ψ. Nechť $[x_0, y_0] \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_{l_n}^{(n)}$ a nechť

$$Q_{l_n}^{(n)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} \left[x_n^* \leqq x \leqq x_n^* + \frac{\pi}{4^n}, \quad \psi_n^*(x) \leqq y \leqq \psi_n^{**}(x) \right],$$

kde $\psi_n^*, \psi_n^{**} \in \Psi(n)$. Buďte u_1, u_2 řešení rovnice (2,12) jdoucí bodem $[x_0, y_0]$. Podobně jako v první části důkazu prodloužíme funkce ψ_n^*, ψ_n^{**} na celý interval $\langle 0, \pi \rangle$. Označíme-li prodloužení těchto funkcí v_n resp. w_n pak zřejmě $\{v_n\}$ je rostoucí, $\{w_n\}$ je klesající posloupnost funkcí a stejně jako v první části dokážeme, že $|v_n(x) - w_n(x)| \to 0$ stejnoměrně pro $n \to \infty$.

Řešení u_1 a u_2 nemohou, jak plyne z první části důkazu, žádnou z funkcí v_n, w_n protnout a tedy $|u_1(x) - u_2(x)| < |v_n(x) - w_n(x)|$ pro všechna n. Musí platit $u_1(x) = u_2(x)$ a tedy bodem $[x_0, y_0]$ prochází právě jedno řešení rovnice (2,12).

Poznámka. Je zřejmé, že pro $[x, y] \in E_2 - \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ můžeme položit $g(x, y) = 0$ a spojitost a jednoznačnost řešení rovnice $y' = g(x, y)$ zůstane zachována.

III

Nyní sestrojíme na intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$ funkce σ a η. Na definičním intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$ sestrojíme nejprve dělení popsané v kap. I takové, že za první členy posloupností zvolíme $\frac{1}{8}$ resp. $\frac{1}{4}$.

Buď $T_l^{(n)}$, $(l = 1, 2, \ldots, 4 \cdot 3^{n-1})$ dělící body vzniklé při n-tém kroku. Pak intervaly $\langle T_{4k-3}^{(n)}, T_{4k-2}^{(n)} \rangle$, $\langle T_{4k-1}^{(n)}, T_{4k}^{(n)} \rangle$, $k = 1, 2, \ldots, 3^{n-1}$ mají délku $\frac{\pi}{4^{n-1}}$.

Definujme funkci σ' takto

$$\sigma'(t) = (-1)^{k-1} \quad \text{pro} \quad t \in (T^{(n)}_{4k-3}, T^{(n)}_{4k-2}),$$
$$\sigma'(t) = (-1)^{k} \quad \text{pro} \quad t \in (T^{(n)}_{4k-1}, T^{(n)}_{4k}).$$

Podle věty 1,1 máme tímto předpisem definovánu funkci σ' skoro všude na intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$. Podle známých vět z integrálního počtu platí následující věty:

Věta 3,1. *Funkce σ' má Lebesgueův integrál v intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$.*

Věta 3,2. *Funkce σ definovaná vztahem $\sigma(t) = \int_0^t \sigma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ pro $t \in \langle 0, 8\pi \rangle$ je absolutně spojitá, lipschitzovská s konstantou jedna a platí $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma(t) = \sigma'(t)$ skoro všude v $\langle 0, 8\pi \rangle$.*

Z definice funkce σ dokážeme následující větu:

Věta 3,3. *Buď $\langle T_*, T^* \rangle$ interval délky $\frac{2\pi}{4^{n-2}}$ sestrojený při dělení intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$, $T^{(n)}_{4r-3}, T^{(n)}_{4r-2}, T^{(n)}_{4r-1}, T^{(n)}_{4r}$ jeho dělící body. Pak platí*

$$\sigma(T_*) = \sigma(T^{(n)}_{4r-3}) = \sigma(T^{(n)}_{4r}) = \sigma(T^*), \tag{3,1}$$

$$\sigma(T^{(n)}_{4r-2}) - \sigma(T^{(n)}_{4r-3}) = \sigma(T^{(n)}_{4r-1}) - \sigma(T^{(n)}_{4r}) = (-1)^{r-1} \cdot \frac{\pi}{4^{n-1}}.$$

Důkaz.

$$\sigma(T^{(n)}_{4r-3}) = \sigma(T_*) + \int_{T_*}^{T^{(n)}_{4r-3}} \sigma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sigma(T_*) + (-1)^{r-1} \int_0^{T^{(n)}_1} \sigma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \sigma(T_*) + \sum_{m=n+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2.3^{m-n-1}} (-1)^{r-1} \cdot \left(\int_{T^{(m)}_{4l-3}}^{T^{(m)}_{4l-2}} \sigma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{T^{(m)}_{4l-1}}^{T^{(m)}_{4l}} \sigma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) = \sigma(T_*).$$

Stejně se spočte, že $\sigma(T^*) = \sigma(T^{(n)}_{4r})$ a $\sigma(T^{(n)}_{4r}) = \sigma(T^{(n)}_{4r-3})$. Vztahy (3,1) plynou přímo z definice funkce σ.

Nyní stejným způsobem budeme definovat funkci η na intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$ takto

$$\eta'(t) = \frac{a_n}{2} \cdot 4^{n-1} \cdot \sin 4^{n-1}(t - T^{(n)}_{2k-1}) \quad \text{pro} \quad t \in (T^{(n)}_{2k-1}, T^{(n)}_{2k}),$$

kde a_n bylo zavedeno při konstrukci funkce g. Stejně jako v předcházejícím máme funkci η' definovánu v intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$ skoro všude a platí:

Věta 3,4. *Funkce η' má v intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$ Lebesgueův integrál.*

Věta 3,5. *Funkce η definovaná vztahem $\eta(t) = \int_0^t \eta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ pro $t \in \langle 0, 8\pi \rangle$ je absolutně spojitá, rostoucí a skoro všude v $\langle 0, 8\pi \rangle$ je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(t) = \eta'(t)$.*

Nyní dokážeme některé vlastnosti funkce η:

Věta 3,6. *Platí* $\eta(T_k^{(n)}) = Y_k^{(n)}$, *kde* $k = 1, 2, \ldots, 4 \,.\, 3^{n-1}$ ($Y_k^{(n)} \in D(n)$ *provedeného na interval* $\langle 0, 1\rangle$ *při konstrukci funkce* g).

Důkaz. Nejprve dokážeme, že platí

$$\eta(T_{2l}^{(n)}) - \eta(T_{2l-1}^{(n)}) = \tag{3,2}$$

$$= \int_{T_{2l-1}^{(n)}}^{T_{2l}^{(n)}} \eta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \tfrac{1}{2}a_n \,.\, 4^{n-1} \int_{T_{2l-1}^{(n)}}^{T_{2l}^{(n)}} \sin 4^{n-1}(\tau - T_{2l-1}^{(n)})\,\mathrm{d}\tau = a_n \,.$$

Důkaz dokončíme úplnou indukcí. Pro $n = 1$ platí

$$\eta(T_1^{(1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2.3^{n-1}} \int_{T_{2l-1}^{(n+1)}}^{T_{2l}^{(n+1)}} \eta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \,.\, 3^{n-1}a_{n+1} = b_1 = Y_1^{(1)} \,.$$

Podobně

$$\eta(T_2^{(1)}) = Y_2^{(1)}, \quad \eta(T_3^{(1)}) = Y_3^{(1)} \quad \text{a} \quad \eta(T_4^{(1)}) = Y_4^{(1)} \,.$$

Buď nyní $\langle T_*, T^*\rangle$ interval délky $\dfrac{2\pi}{4^{n-1}}$ sestrojený při dělení intervalu $\langle 0,8\,\pi\rangle$ a $T_{4k-3}^{(n+1)}, \ldots, T_{4k}^{(n+1)}$ dělicí body tohoto intervalu. Platí

$$\eta(T_*) = Y_* \,, \quad \eta(T^*) = Y^* \,, \quad Y^* - Y_* = b_n \,; \quad Y_*, Y^* \in D(n)$$

a

$$\eta(T_{4k-3}^{(n+1)}) = \int_0^{T_{4k-3}^{(n+1)}} \eta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \eta(T_*) + \int_{T_*}^{T_{4k-3}^{(n+1)}} \eta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \eta(T_*) + \int_0^{T_1^{(n+1)}} \eta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \eta(T_*) + \sum_{m=n+2}^{\infty} \sum_{l=1}^{2.3^{m-n-2}} \int_{T_{2l-1}^{(m)}}^{T_{2l}^{(m)}} \eta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \eta(T_*) + \sum_{m=n+2}^{\infty} \sum_{l=1}^{2.3^{m-n-2}} a_m =$$

$$= \eta(T_*) + \sum_{m=n+2}^{\infty} 2 \,.\, 3^{m-n-2} \,.\, a_m = \eta(T_*) + b_{n+1} = Y_{4k-3}^{(n+1)} \,.$$

Podle (1,3) a (3,2) plyne $\eta(T_{4k-2}^{(n+1)}) = Y_{4k-2}^{(n+1)}$ a podobně se dokáží další rovnosti.

Věta 3,7. *Buď* $t \in \langle T_{2k-1}^{(n)}, T_{2k}^{(n)}\rangle$. *Pak platí* $\eta(t) = \psi_k^{(n)}(\sigma(t))$, *kde* $\psi_k^{(n)}$ *bylo definováno v kap. II.*

Důkaz. Buď $t \in \langle T_{2k-1}^{(n)}, T_{2k}^{(n)}\rangle$. Pak jest

$$\eta(t) = \eta(T_{2k-1}^{(n)}) + \int_{T_{2k-1}^{(n)}}^{t} \frac{a_n}{2}\, 4^{n-1} \sin 4^{n-1}(x - T_{2k-1}^{(n)})\,\mathrm{d}x =$$

$$= Y_{2k-1}^{(n)} + \frac{a_n}{2} - \frac{a_n}{2} \cos 4^{n-1}(t - T_{2k-1}^{(n)}) = \frac{1}{2}\,(Y_{2k-1}^{(n)} + Y_{2k}^{(n)}) -$$

$$- \frac{a_n}{2} \cos 4^{n-1}(t - T_{2k-1}^{(n)}) \,,$$

$$\sigma(t) = \sigma(T_{2k-1}^{(n)}) + \int_{T_{2k-1}^{(n)}}^{t} \sigma'(x)\,\mathrm{d}x = \sigma(T_{2k-1}^{(n)}) + (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\,(t - T_{2k-1}^{(n)}) \,.$$

Dále je $\sigma(T^{(n)}_{2k-1}) = \varepsilon_1\pi + \varepsilon_2 . \frac{\pi}{4} + \ldots + \varepsilon_n \frac{\pi}{4^{n-1}}$, $\varepsilon_i = 0, 1, -1$; přitom $\varepsilon_n \neq 0$ pro k sudé, $\varepsilon_n = 0$ pro k liché, a $x_1 = m \frac{\pi}{4^{n-2}}$, kde m je vhodné číslo. Odtud

$$\psi^{(n)}_k(\sigma(t)) = (-1)^k \frac{a_n}{2} \cos 4^{n-1} (\sigma(t) - x_1) + \frac{1}{2} (Y^{(n)}_{2k-1} + Y^{(n)}_{2k}) =$$

$$= (-1)^k \frac{a_n}{2} \cos 4^{n-1} \left[\varepsilon_1\pi + \ldots + \varepsilon_n \frac{\pi}{4^{n-1}} + \right.$$

$$\left. + (t - T^{(n)}_{2k-1}) . (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} - m \frac{\pi}{4^{n-2}}\right] + \frac{1}{2} (Y^{(n)}_{2k-1} + Y^{(n)}_{2k}) =$$

$$= (-1)^k \frac{a_n}{2} \cos \left\{4^{n-1}(t - T^{(n)}_{2k-1})(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} + \varepsilon_n\pi\right\} + \frac{1}{2} (Y^{(n)}_{2k-1} + Y^{(n)}_{2k}) = \eta(t) .$$

Mějme nyní funkci g, definovanou v kap. II. Mějme systém diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{dt} = 1 , \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{3,4}$$

($[x, y] \in \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$).

Tento systém je ekvivalentní s rovnicí (2,12) a tedy počátečními podmínkami $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ je dáno právě jedno řešení. Přepišme systém rovnic (3,4) na systém integrálních rovnic

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} d\tau , \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau . \tag{3,5}$$

Také tento systém má právě jedno řešení $[x(t), y(t)]$. Avšak platí:

Věta 3,8. *Buďte σ, η funkce definované v této kapitole. Potom systém integrálních rovnic*

$$x(t) = \int_0^t d\sigma(\tau) , \quad y(t) = \int_0^t g(x(\tau), y(\tau)) \, d\sigma(\tau) \tag{3,6}$$

řeší na intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$ jednak $[\sigma(t), 0]$, jednak $[\sigma(t), \eta(t)]$.

Důkaz. Z konstrukce funkce g plyne, že $g(x, 0) = 0$ a tedy $[\sigma(t), 0]$ je řešením (3,6). Dále ze vztahu

$$\psi^{(n)}_k(\sigma(t)) - \psi^{(n)}_k(\sigma(T^{(n)}_{2k-1})) = \int_{\sigma(T^{(n)}_{2k-1})}^{\sigma(t)} g(x, \psi^{(n)}_k(x)) \, dx$$

vyplývá podle vět 3,6 a 3,7

$$\eta(t) - \eta(T^{(n)}_{2k-1}) = \int_{\sigma(T^{(n)}_{2k-1})}^{\sigma(t)} g(x, \psi^{(n)}_k(x)) \, dx = \int_{T^{(n)}_{2k-1}}^{t} g(\sigma(\tau), \eta(\tau)) \, d\sigma(\tau) .$$

Odtud plyne $\eta(t) = \int_0^t g(\sigma(\tau), \eta(\tau)) \, d\sigma(\tau)$. Tím je důkaz proveden.

IV

Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ posloupnosti, $Y_k^{(n)}$ body a $\psi_k^{(n)}$ funkce zavedené v kapitole II tohoto článku.

Položme $d = \dfrac{3b_1}{2a_1 + 2b_1}$. Nejprve sestrojíme na ose t body A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ takto: $A_1 = -\dfrac{3b_1}{2a_1 - b_1}$, $A_{n+1} - A_n = d^n$. Zřejmě platí

$$A_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{n+1} - A_n) = A_1 + \sum_{n=1}^{\infty} d^n = 0\,. \tag{4,1}$$

Každý interval $\langle A_n, A_{n+1}\rangle$ budeme dále dělit. Při prvním kroku rozdělíme tento interval na tři stejné díly a tak obdržíme body $T_1^{(1)}$, $T_3^{(1)}$ (index n, který by označoval, že se jedná o body intervalu $\langle A_n, A_{n+1}\rangle$ pro jednodušší psaní vynecháme). Při druhém kroku každý z intervalů $\langle A_n, T_1^{(1)}\rangle$, $\langle T_1^{(1)}, T_3^{(1)}\rangle$, $\langle T_3^{(1)}, A_{n+1}\rangle$ opět rozdělíme na tři stejné díly. Tak obdržíme body $T_1^{(2)}, T_3^{(2)}, \ldots, T_{11}^{(2)}$. Tak postupujeme dále, až naposledy při n-tém kroku obdržíme body $T_1^{(n)}$, $T_3^{(n)}, \ldots, T_{4.3^{n-1}-1}^{(n)}$. Takto vzniklé intervaly mají délku $\dfrac{d^n}{3^n}$. Dále označme $T_{2l}^{(r)} = T_{2l-1}^{(r)} + \dfrac{d^n}{2\,.\,3^n}$ $(r = 1, 2, \ldots, n;\ l = 1, 2, \ldots, 2\,.\,3^{r-1})$. Tímto způsobem jsme původní interval $\langle A_n, A_{n+1}\rangle$ rozdělili na interval délky $\dfrac{d^n}{3^n}$ a na $(3^n - 1)\,.\,2$ intervalů délky $\dfrac{d^n}{2\,.\,3^n}$.

Nyní sestrojíme posloupnosti funkcí $\varphi_n(t)$, $\eta_n(t)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ a funkci $f(y, t)$ pro $t \in \langle A_1, -A_1\rangle$, $y \in (-\infty, \infty)$.

Nechť φ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ je spojitá funkce taková, že platí:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t) &= 0 \quad \text{pro} \quad t \in \langle A_1, A_n\rangle \cup \langle 0, -A_1\rangle\,,\\
\varphi_n(t) &> 0 \quad \text{pro} \quad t \in (A_{n+1}, 0)\,,\\
(-1)^{s-1}\,.\,\varphi_n(t) &> 0 \quad \text{pro} \quad t \in (T_{4s-3}^{(r)}, T_{4s-2}^{(r)})\,,\\
(-1)^{s}\,.\,\varphi_n(t) &> 0 \quad \text{pro} \quad t \in (T_{4s-1}^{(r)}, T_{4s}^{(r)})\,,
\end{aligned}$$

kde $T_{4s-3}^{(r)}, \ldots, T_{4s}^{(r)} \in \langle A_n, A_{n+1}\rangle$; $r = 1, \ldots, n$; $s = 1, \ldots, 3^{r-1}$. Pro ostatní body intervalu $\langle A_n, A_{n+1}\rangle$ buď $\varphi_n(t) = 0$. Dále nechť platí

$$\int_{T_{4s-3}^{(r)}}^{T_{4s-2}^{(r)}} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\int_{T_{4s-1}^{(r)}}^{T_{4s}^{(r)}} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau = (-1)^{s-1}\,.\,\frac{\pi}{4^r}\,, \quad \int_{A_{n+1}}^{0} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1\,. \tag{4,2}$$

Ukážeme, že takto definovaná posloupnost funkcí φ_n konverguje k Diracově funkci podle definice 5,1 článku [2], tj. dokážeme, že jsou splněny podmínky (0,2)—(0,6) tohoto článku.

Platí

$$\int_{A_1}^{-A_1} |\varphi_n(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{3r-1} \left[(-1)^{s-1} \int_{T^{(r)}_{4s-3}}^{T^{(r)}_{4s-2}} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau + (-1)^{s} \int_{T^{(r)}_{4s-1}}^{T^{(r)}_{4s}} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] +$$

$$+ \int_{A_{n+1}}^{0} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{3r-1} 2 \,.\, \frac{\pi}{4^r} + 1 = \frac{\pi}{2} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{r-1} + 1\,,$$

a tedy

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{A_1}^{-A_1} |\varphi_n(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = \frac{\pi}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{r-1} + 1 = 2\pi + 1 = L < \infty\,.$$

Podmínky (0,3), (0,4) a (0,5) jsou zřejmě splněny, neboť jak plyne z (4,1), od jistého n je $\varphi_n(\tau) = 0$ pro $\tau \in \langle A_1, t\rangle$ resp. je $\varphi_n(\tau) = 0$ pro $\tau \in \langle 0, -A_1\rangle$.

Pro $t \in \langle 0, -A_1\rangle$ platí

$$\int_{A_1}^{t} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{A_1}^{0} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{3r-1} \Big[\int_{T^{(r)}_{4s-3}}^{T^{(r)}_{4s-2}} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{T^{(r)}_{4s-1}}^{T^{(r)}_{4s}} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big] +$$

$$+ \int_{A_{n+1}}^{0} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{A_{n+1}}^{0} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1\,,$$

a odtud plyne podmínka (0,6).

Obdobným způsobem jako věta 3,3 dokáže se následující tvrzení:

Věta 4,1. *Buď* $\Phi_n(t) = \int_{A_1}^{t} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ *a nechť* $T^{(r)}_k$ *jsou dělící body intervalu* $\langle A_n, A_{n+1}\rangle$. *Potom platí*

$$\Phi_n(T^{(r+1)}_1) = \Phi_n(T^{(r+1)}_4) = \Phi_n(T^{(r)}_1) = 0\,.$$

$$\Phi_n(T^{(r+1)}_{4.3r-2}) = \Phi_n(T^{(r+1)}_{4.3r}) = \Phi_n(T^{(r)}_{4.3r-1}) = 0\,,$$

Buďte $T_*, T^* \in \{T^{(1)}_1, \ldots, T^{(1)}_4, T^{(2)}_1, \ldots, T^{(2)}_{12}, \ldots, T^{(r)}_1, \ldots, T^{(r)}_{4.3r-1}\}$ *takové, že* $T^{(r+1)}_{4s-4} < T_* < T^{(r+1)}_{4s-3} < \ldots < T^{(r-1)}_{4s} < T^* < T^{(r+1)}_{4s+1}$. *Potom*

$$\Phi_n(T_*) = \Phi_n(T^{(r+1)}_{4s-3}) = \Phi_n(T^{(r+1)}_{4s}) = \Phi_n(T^*)\,,$$

$$\Phi_n(T^{(r+1)}_{4s-2}) = \Phi_n(T^{(r+1)}_{4s-1})\,.$$

Na základě této věty a vztahů (4,2) můžeme definovat funkce η_n ($n = 1, 2, \ldots$) takto (viz obr. 2):

$$\eta_1(A_1) = Y^{(1)}_1\,, \quad \eta_1(t) = \psi^{(2)}_1(\Phi_1(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \langle T^{(1)}_1, T^{(1)}_2\rangle\,,$$

$$\eta_1(t) = \psi^{(2)}_2(\Phi_1(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \langle T^{(1)}_3, T^{(1)}_4\rangle\,, \quad \text{kde} \quad T^{(1)}_1, \ldots, T^{(1)}_4 \in \langle A_1, A_2\rangle\,,$$

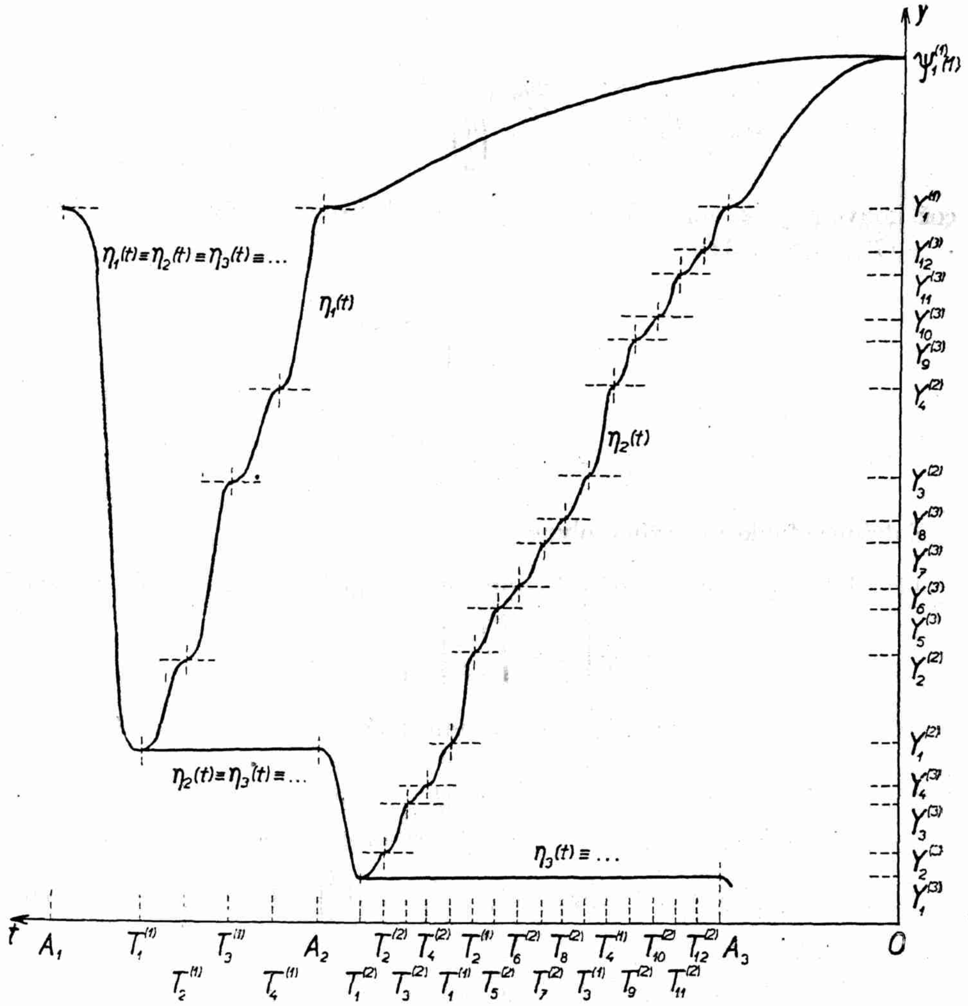
$$\eta_1(t) = \psi^{(1)}_1(\Phi_1(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \langle A_2, -A_1\rangle\,.$$

Na zbytku intervalu $\langle A_1, A_2\rangle$ doplníme funkci η_1 tak, aby měla spojitou první derivaci a aby pro $t \in \langle T_*, T^* \rangle$ platilo $|\eta_1'(t)| \leqq 2 \cdot \dfrac{\eta_1(T^*) - \eta_1(T_*)}{T^* - T_*}$. Jestliže nyní máme již definovánu funkci η_{n-1}, pak položíme $\eta_n(t) = \eta_{n-1}(t)$ pro $t \in \left\langle A_1, A_{n-1} + \left(\dfrac{d}{3}\right)^{n-1} \right\rangle$, $\eta_n(t) = Y_1^{(n)}$ pro $t \in \left\langle A_{n-1} + \left(\dfrac{d}{3}\right)^{n-1}, A_n \right\rangle$. Na intervalu $\langle A_n, A_{n+1} \rangle$ definujeme funkci η_n takto:

$$\eta_n(t) = \psi_{2s-1}^{(r+1)}(\Phi_n(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \langle T_{4s-3}^{(r)}, T_{4s-2}^{(r)} \rangle \,,$$

$$\eta_n(t) = \psi_{2s}^{(r+1)}(\Phi_n(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \langle T_{4s-1}^{(r)}, T_{4s}^{(r)} \rangle \,,$$

kde $r = 1, 2, \ldots, n$; $s = 1, 2, \ldots, 3^{r-1}$. Na intervalu $\langle A_{n+1}, -A_1 \rangle$ definujeme $\eta_n(t) = \psi_1^{(1)}(\Phi_n(t))$ a na zbytku intervalu $\langle A_n, A_{n+1} \rangle$ doplníme funkci η_n tak, aby



Obr. 2.

měla spojitou první derivaci a aby pro $t \in \langle T^*, T_* \rangle$ platilo $|\eta_n'(t)| \leqq \leqq 2 \dfrac{\eta_n(T^*) - \eta_1(T_*)}{T^* - T_*}$. Zřejmě pro všechna n platí

$$\eta_n(A_1) = Y_1^{(1)}, \quad \eta_n(t) = \psi_1^{(1)}(1) \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, -A_1 \rangle .$$

Věta 4,2. *Buď* $T_1^{(n)} \in \langle A_n, A_{n+1} \rangle$, *potom platí* $\lim_{n \to \infty} \dfrac{\eta_n(A_n) - \eta_n(T_1^{(n)})}{A_n - T_1^{(n)}} = 0$. *Buď* $\langle T_*, T^* \rangle \subset \langle A_n, A_{n+1} \rangle$ *interval, kde* φ_n *je identicky rovno nule. Potom platí*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\eta_n(T^*) - \eta_n(T_*)}{T^* - T_*} = 0 .$$

Důkaz. Protože platí $\eta_n(A_n) = Y_1^{(n)}$ a $\eta_n(T_1^{(n)}) = \psi_1^{(n+1)}(\Phi_n(T_1^{(n)})) = Y_1^{(n+1)}$, je

$$\frac{\eta_n(A_n) - \eta_n(T_1^{(n)})}{A_n - T_1^{(n)}} = \frac{2a_{n+1} + 2b_{n+1}}{\left(\dfrac{d}{3}\right)^n} = (2a_1 + 2b_1)^{n+1} ,$$

což konverguje k nule pro $n \to \infty$. Dále z konstrukce plyne, že $\eta_n(T^*) - - \eta_n(T_*) = b_{n+1}$. Tedy

$$\frac{\eta_n(T^*) - \eta_n(T_*)}{T^* - T_*} = \frac{b_{n+1}}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d}{3}\right)^n} = 2b_1(2a_1 + 2b_1)^n$$

a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\eta_n(T^*) - \eta_n(T_*)}{T^* - T_*} = 0 .$$

Z definice funkce η_n přímo plyne

Věta 4,3. *Buď* T *dělicí bod intervalu* $\langle A_n, A_{n+1} \rangle$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Potom platí*

$$\left[\frac{d\eta_n}{dt}\right]_{t=T} = \left[\frac{d\eta_n}{dt}\right]_{t=A_{n+1}} = 0 .$$

Funkci $f(y, t)$ budeme definovat na množině $y \in (-\infty, \infty)$, $t \in \langle A_1, -A_1 \rangle$. Položme $f(y, t) = \dfrac{d\eta_1}{dt}$ pro $t \in \left\langle A_1, A_1 + \dfrac{d}{3} \right\rangle$.

Předpokládejme, že máme funkci f definovánu pro všechna y a pro $t \in \left\langle A_1, A_n + \left(\dfrac{d}{3}\right)^n \right\rangle$. Na intervalu $J_n = \left\langle A_n + \left(\dfrac{d}{3}\right)^n, A_{n+1} + \left(\dfrac{d}{3}\right)^{n+1} \right\rangle$ budeme definovat funkci f takto:

Buď $(T_*, T^*) \subset J_n$ takový interval, kde $\varphi_n(t) \neq 0$. Potom pro $t \in (T_*, T^*)$ definujeme $f(y, t) = 0$.

Buď $J_n \supset (T_*, T^*) \neq \left\langle A_{n+1}, A_{n+1} + \left(\frac{d}{3}\right)^{n+1} \right\rangle$ takový interval, kde φ_n je identicky rovno nule. Potom pro $t \in (T_*, T^*)$ definujeme

$$f(y, t) = 0 \qquad \text{pro} \quad y \leqq Y_1^{(n+1)} \quad \text{nebo} \quad y \geqq Y_1^{(1)},$$

$$f(y, t) = \frac{\mathrm{d}\eta_n}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{y - Y_1^{(n+1)}}{\eta_n(t) - Y_1^{(n+1)}} \quad \text{pro} \quad y \in \langle Y_1^{(n+1)}, \eta_n(t)\rangle,$$

$$f(y, t) = \frac{\mathrm{d}\eta_n}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{y - Y_1^{(1)}}{\eta_n(t) - Y_1^{(1)}} \quad \text{pro} \quad y \in \langle \eta_n(t), Y_1^{(1)}\rangle.$$

Buď $t \in \left\langle A_{n+1}, A_{n+1} + \left(\frac{d}{3}\right)^{n+1} \right\rangle$. Potom definujeme

$$f(y, t) = 0 \qquad \text{pro} \quad y \leqq 0 \quad \text{nebo} \quad y \geqq Y_1^{(1)},$$

$$f(y, t) = \frac{\mathrm{d}\eta_{n+1}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{y - Y_1^{(1)}}{\eta_{n+1}(t) - Y_1^{(1)}} \quad \text{pro} \quad y \in \langle \eta_{n+1}(t), Y_1^{(1)}\rangle,$$

$$f(y, t) = \frac{\mathrm{d}\eta_{n+1}}{\mathrm{d}t} \cdot y \qquad \text{pro} \quad y \in \langle 0, \eta_{n+1}(t)\rangle.$$

Buď T dělící bod intervalu $\langle A_n, A_{n+1}\rangle$. Potom položíme $f(y, T) = f(y, A_{n+1}) = f\left(y, A_{n+1} + \left(\frac{d}{3}\right)^{n+1}\right) = 0$. Na intervalu $\langle 0, -A_1\rangle$ definujeme $f(y, t) = 0$.

Z konstrukce funkce f a z vět 4,2 a 4,3 vyplývá

Věta 4,4. *Funkce $f(y, t)$ je pro $y \in (-\infty, \infty)$, $t \in \langle A_1, -A_1\rangle$ spojitá.*

Nyní vyslovíme čtyři věty, jejichž důkazy triviálně plynou z předcházejícího.

Věta 4,5. *Buď $u(t) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(t)$ pro $t \in \langle A_1, 0)$, $u(0) = 0$. Potom funkce $[0, u(t)]$ je jediné řešení soustavy diferenciálních rovnic*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y, t)$$

pro $t \in \langle A_1, 0\rangle$ s počáteční podmínkou $x(A_1) = 0$, $y(A_1) = Y_1^{(1)}$.

Věta 4,6. *Funkce $[t + \frac{1}{2}, 0]$ je jediné řešení soustavy diferenciálních rovnic*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x, y)$$

s počáteční podmínkou $x(-\frac{1}{2}) = 0$, $y(-\frac{1}{2}) = 0$.

Věta 4,7. *Funkce $[1, 0]$ je jediné řešení soustavy diferenciálních rovnic*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y, t)$$

pro $t \in \langle 0, -A_1\rangle$ s počáteční podmínkou $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.