Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

# O CARTANOVĚ PARAMETRU NA NEPŘÍMKOVÝCH PLOCHÁCH

JOSEF VALA, Brno

(Došlo dne 26. června 1959)

Buď $\frac{dv}{du} = B(u, v)$ diferenciální rovnice vrstvy čar na ploše $\Psi$ vztažené na asymptotiky. Tuto vrstvu nazývám $u$-parametrisující vrstvou $B_u$, jestliže podél každé asymptotiky $v = v_0$ tečny k čarám vrstvy tvoří přímkovou plochu, na níž existuje Riccatiho soustava ($R$-soustava) čar (tj. soustava čar vytínající na tvořicích přímkách projektivní bodové řady), která obsahuje čáru $v = v_0$, pro niž $u$ je Cartanovým parametrem ve smyslu M. BARNERA [1]. Analogicky jsou definovány vrstvy $B_v$. Existuje-li na $\Psi$ nekonečně mnoho vrstev, které jsou jak $B_u$ tak $B_v$, tvoří úplná soustava těchto čar hypergeodetický systém. Zvláštní pozornost je věnována plochám koincidenčním.

Pojem Cartanova parametru nerozvinutelné přímkové plochy $\Phi$ projektivního prostoru $S_3$, přesněji řečeno $R$-soustavy asymptotik plochy $\Phi$, byl zaveden E. CARTANEM v práci [4]. M. BARNER zobecnil pojem Cartanova parametru pro libovolný $R$-systém plochy $\Phi$ v práci [1]. B. SEGRE ve svých přednáškách [6] použil původní Cartanovy definice ke studiu čar na některých nepřímkových plochách, zvláště plochách koincidenčních.

V této práci se vychází z výsledků B. Segreho, jejichž rozšíření je umožněno citovaným zobecněním pojmu Cartanova parametru, které podal M. Barner.

a) Přímková nerozvinutelná plocha $\Phi$ nechť je vytvořena jako soustava přímek spojujících dvojice korespondujících bodů řídicích čar $C_y$, $C_z$ opsaných body $y(u)$, $z(u)$, kde $u$ je proměnný parametr v jistém intervalu. Předpokládejme, že existují a jsou spojité všechny derivace $y'$, $z'$, $y''$, $z''$, atd., které jsou v dalším uvedeny, a že je $(y, z, y', z') \neq 0$. Pak

$$x = y(u) + v\,z(u) \tag{1}$$

je bod vytvořující při proměnných $u$, $v$ plochu $\Phi$, k níž nechť náleží soustava diferenciálních rovnic

$$y'' = \alpha_{11}y + \alpha_{12}z + \beta_{11}y' + \beta_{12}z'\,, \quad z'' = \alpha_{21}y + \alpha_{22}z + \beta_{21}y' + \beta_{22}z'\,, \tag{1a}$$

kde, jak lze dokázati, volbou faktoru homogenity lze vždy docíliti, aby bylo

(2a)
$$\beta_{11} + \beta_{22} = 0\,.$$

Křivky $v =$ konst. plochy $\Phi$ vytvořují na $\Phi$ soustavu $R$ (Doppelverhältnisschar, Riccatiho soustavu) čar a ve smyslu citované práce M. Barnera nutná a postačující podmínka pro to, aby parametr $u$ byl Cartanovým parametrem této soustavy $R$, za předpokladu (2a) je

(2b)
$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0 \quad \text{(Barner [1], str. 55 a 52)}\,.$$

Uveďme, že podmínkami (2ab) je Cartanův parametr souřadnicové soustavy $R$ dán až na lineární transformace tvaru

$$u = \frac{\alpha_1 u^* + \alpha_3}{\gamma_1 u^* + \gamma_3}\,; \quad \alpha_1, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_3 = \text{konst}\,, \quad \alpha_1\gamma_3 - \gamma_1\alpha_3 \neq 0,$$

spojíme-li je se změnou faktoru homogenity

$$y^* = \frac{(\alpha_1\gamma_3 - \gamma_1\alpha_3)^{\frac{1}{2}}}{\gamma_1 u - \alpha_1}\, y\,, \quad z^* = \frac{(\alpha_1\gamma_3 - \gamma_1\alpha_3)^{\frac{1}{2}}}{\gamma_1 u - \alpha_1}\, z\,. \quad \text{(Barner [1], str. 55.)}$$

b) Nepřímková plocha $\Psi$ nechť je vztažena na asymptotiky a vytvořena bodem $x = x(u, v)$; je integrální plochou soustavy diferenciálních rovnic

(3)
$$x_{uu} = \beta x_v + p_{11} x\,, \quad x_{vv} = \gamma x_u + p_{22} x\,.$$

Současně platí

(3a)
$$(x, x_u, x_v, x_{uv}) = \text{konst}\,.$$

Podmínky integrability soustavy (3), jak známo, jsou:

(4a)
$$(2p_{11} + \beta_v)_v = 2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u\,,$$

(4b)
$$(2p_{22} + \gamma_u)_u = 2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v\,,$$

(4c)
$$\beta(2p_{22} + \gamma_u)_v + 2\beta_v(2p_{22} + \gamma_u) - \beta_{vvv} = \\ = \gamma(2p_{11} + \beta_v)_u + 2\gamma_u(2p_{11} + \beta_v) - \gamma_{uuu}\,.$$

(Segre [6], str. 90, Lane [5], str. 120.)

Poznámka. Diferenciální rovnice plochy $\Psi$ vztažené na asymptotiky mají obecně tvar

$$x_{uu} = \alpha x_u + \beta x_v + p_{11} x\,, \quad x_{vv} = \gamma x_u + \delta x_v + p_{22} x\,.$$

Vhodnou normalisací souřadnic $x(u, v)$ (G. Bol [2], str. 107) lze vždy dosáhnouti splnění relace (3a); jestliže je splněna, pak nutně platí $\alpha = \delta = 0$.

**Definice 1.** *Transformací* **T** *asymptotických parametrů $u$, $v$ plochy $\Psi$ rozumějme transformaci (podle G. Bola „Sterntransformation“)*

(5)
$$u = f(u^*)\,, \quad v = g(v^*)\,,$$

*je-li spojena s normalisací faktoru homogenity*

(5a) $$x^* = f_{u^*}^{-\frac{1}{2}} g_{v^*}^{-\frac{1}{2}} x\,.$$

Snadným výpočtem vychází, že po transformaci $\boldsymbol{T}$ plocha $\Psi$ je integrální plochou soustavy diferenciálních rovnic

$$x^*_{u^*u^*} = \beta^* x^*_{v^*} + p^*_{11} x^*\,, \quad x^*_{v^*v^*} = \gamma^* x^*_{u^*} + p^*_{22} x^*\,,$$

kde

(6) $$\beta^* = f'^2 g'^{-1} \beta\,, \quad \gamma^* = f'^{-1} g'^2 \gamma\,, \quad p_{11} = f'^{-2}(p^*_{11} + \mathbf{f}' - \mathbf{f}^2 - \beta^* \mathbf{g})\,,$$
$$p_{22} = g'^{-2}(p^*_{22} + \mathbf{g}' - \mathbf{g}^2 - \gamma^* \mathbf{f})\,,$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\,, \quad \mathbf{g} = \frac{1}{2}\frac{g''}{g'}\,, \quad f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u^*}\,, \quad g' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v^*}\,, \quad \text{atp.} \quad \text{(Bol [3], str. 1)}\,.$$

Z uvedené soustavy diferenciálních rovnic pak snadno plyne:

(6a) $$2p_{11} + \beta_v = f'^{-2}(2p^*_{11} + \beta^*_{v^*}) + 2f'^{-2}(-\mathbf{f}^2 + \mathbf{f}')\,,$$
$$2p_{22} + \gamma_u = g'^{-2}(2p^*_{22} + \gamma^*_{u^*}) + 2g'^{-2}(-\mathbf{g}^2 + \mathbf{g}')\,,$$
$$(2p_{11} + \beta_v)_v = f'^{-2} g'^{-1}(2p^*_{11} + \beta^*_{v^*})_{v^*}\,,$$
$$(2p_{22} + \gamma_u)_u = f'^{-1} g'^{-2}(2p^*_{22} + \gamma^*_{u^*})_{u^*}\,,$$
$$\beta_u = -2f'^{-4} f'' g' \beta^* + f'^{-3} g' \beta^*_{u^*}\,, \quad \gamma_u = f'^{-1} f'' g'^{-2} \gamma^* + g'^{-2} \gamma^*_{u^*}\,,$$
$$\beta_v = f'^{-2} g'^{-1} g'' \beta^* + f'^{-2} \beta^*_{v^*}\,, \quad \gamma_v = -2f' g'^{-4} g'' \gamma^* + f' g'^{-3} \gamma^*_{v^*}\,.$$

$\boldsymbol{T}_u$, resp. $\boldsymbol{T}_v$ nechť je onen zvláštní případ transformace $\boldsymbol{T}$, kde $f(u^*) = \dfrac{\alpha_1 u^* + \alpha_3}{\gamma_1 u^* + \gamma_3}$, $g$ je libovolná funkce proměnné $v^*$, resp. $g(v^*) = \dfrac{\beta_2 v^* + \beta_3}{\gamma_2 v^* + \gamma_3}$, $f$ je libovolná funkce proměnné $u^*$, při čemž $\alpha_1, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 = \text{konst.}$; $\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1 \neq 0$, $\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 \neq 0$. Přímým výpočtem snadno dostaneme, že transformace $\boldsymbol{T}$ je transformací $\boldsymbol{T}_u$, resp. $\boldsymbol{T}_v$ tehdy a jen tehdy, platí-li $\mathbf{f}' - \mathbf{f}^2 = 0$, resp. $\mathbf{g}' - \mathbf{g}^2 = 0$.

c) Jestliže koeficienty soustavy (3) splňují kromě podmínek (4abc) ještě podmínku $(2p_{11} + \beta_v)_v = 0$, pak plochu označme $\Psi_1$, podobně, je-li splněna podmínka $(2p_{22} + \gamma_u)_u = 0$, pak plochu označme $\Psi_2$. Je zřejmé, jestliže plocha $\Psi$ je současně plochou $\Psi_1$ i $\Psi_2$, pak je koincidenční plochou $\Psi_{1,2}$ a obráceně. (Bol [3], str. 38—9.)

Geometricky lze plochy $\Psi_1$ a $\Psi_2$ charakterisovat tím, že v každém jejich bodě kanonická tečna 2. druhu splývá s jednou z asymptotických tečen plochy.

Z rovnic (6a) snadno vyplývá: Na ploše $\Psi_1$ lze zvoliti asymptotické parametry $u^*$, $v^*$ (čili transformaci $\boldsymbol{T}$) tak, že platí $2p^*_{11} + \beta^*_{v^*} = 0$; nalezení těchto parametrů vyžaduje řešení dif. rovnice

$$2\varphi[f(u^*)]f'^4 = 2f'''f' - 3f''^2\,, \quad \text{kde} \quad \varphi(u) = 2p_{11} + \beta_v\,.$$

Podobně na ploše $\Psi_2$ lze zvoliti parametry $u^*, v^*$ tak, že platí $2p_{22}^* + \gamma_{u^*}^*$; nalezení těchto parametrů předpokládá řešiti dif. rovnici

$$2\bar{\varphi}[g(v^*)]\, g'^4 = 2g'''g' - 3g''^2\,, \quad \text{kde} \quad \bar{\varphi}(v) = 2p_{22} + \gamma_u\,.$$

Důležitost volby těchto parametrů bude objasněna v odstavci d.

Jestliže asymptotické parametry $u$, $v$ na ploše $\Psi_1$ jsou již tak voleny, že platí $2p_{11} + \beta_v = 0$, pak tato relace je dle (6a) invariantní pouze při transformaci $\boldsymbol{T}_u$. Podobně, platí-li pro plochu $\Psi_2$ vztaženou na asymptotické parametry $u$, $v$: $2p_{22} + \gamma_u = 0$, pak tato relace je invariantní pouze při transformaci $\boldsymbol{T}_v$.

d) Každá přímková plocha, dotýkající se nepřímkové plochy $\Psi$ podél její asymptotiky $v = v_0$ je vytvořena bodem

$$\xi = y + rz\,, \tag{7}$$

kde

$$y = x(u, v_0)\,, \quad z = A(u, v_0)\, x(u, v_0) + \lambda_1(u, v_0)\, x_u(u, v_0) + \\ + \lambda_2(u, v_0)\, x_v(u, v_0)\,, \tag{7a}$$

při čemž $u$ a $r$ jsou parametry.

**Definice 2.** *Označením $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$ rozumějme soustavu R-čar plochy* (7), *jejíž čáry jsou dány rovnicí* $r =$ konst.

Poznámka 1. Je zřejmé, že každá soustava $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$ leží na přímkové ploše $\Phi(v_0, B)$, která

1. se dotýká plochy $\Psi$ podél její asymptotiky $v = v_0$,
2. jejíž tvořicí přímky se dotýkají čar systému $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \dfrac{\lambda_2(u, v)}{\lambda_1(u, v)} = B(u, v)$

v bodech asymptotiky $v = v_0$.

Z této definice je zřejmé, že přímková plocha $\Phi(v_0, B)$ závisí pouze na poměru $\dfrac{\lambda_2(u, v)}{\lambda_1(u, v)} = B(u, v)$ koeficientů $\lambda_1$, $\lambda_2$.

**Definice 3.** *Vrstvu čar* $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \dfrac{\lambda_2(u, v)}{\lambda_1(u, v)} = B(u, v)$ *nazývejme u-parametrisující vrstvou čar (soustavou $B_u$-čar), splňuje-li $B(u, v)$ podmínku*

$$2\beta \frac{\partial B}{\partial u} = B^2(2p_{11} + \beta_v) + B\beta_u - \beta^2\,. \tag{8}$$

Jestliže plocha $\Psi$ je vztažena na jiné asymptotické parametry $u^*$, $v^*$, pak stejným způsobem lze na ní definovat vrstvu čar $\dfrac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}u^*} = B^*(u^*, v^*)$.

Poznámka 2. Jestliže plocha $\Phi(v_0, B)$ vytvořená bodem (7) má splňovati podmínku $(y, z, y', z') = \text{konst} \neq 0$, je nutné, aby bylo $\lambda_{2u} = 0$, jak vychází snadným počtem. V odstavcích d), e) budeme vždy předpokládat, že tato podmínka je splněna, tj. že $\lambda_2$ je funkcí pouze parametru $v$; $\lambda_2 = \lambda_2(v)$.

**Věta 1.** *Pro soustavy $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$ platí pro všechna $v_0$ simultanně: $u$ je Cartanovým parametrem pro každou $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$, jakmile $B$ splňuje podmínku* (8).

Důkaz. Derivováním rovnic (7a) s přihlédnutím k (3) vychází:

$$
\begin{aligned}
y &= x\,, \\
y_u &= x_u\,, \\
y_{uu} &= \beta x_v + p_{11} x\,, \\
z &= Ax + \lambda_1 x_u + \lambda_2 x_v\,, \\
z_u &= x(A_u + \lambda_1 p_{11}) + x_u(A + \lambda_{1u}) + x_v(\lambda_1 \beta) + x_{uv}\lambda_2\,, \\
z_{uu} &= x[A_{uu} + p_{11}A + 2\lambda_{1u}p_{11} + \lambda_1 p_{11u} + \lambda_2(\beta p_{22} + p_{11v})] + \\
&\quad + x_u[2A_u + \lambda_1 p_{11} + \lambda_{1uu} + \lambda_2\beta\gamma] + \\
&\quad + x_v[\beta A + 2\beta\lambda_{1u} + \lambda_1\beta_u + \lambda_2(\beta_v + p_{11})] + \\
&\quad + x_{uv}(\lambda_1\beta)\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Jestliže do (1a) položíme za $y$, $y'$, $y''$, resp. $z$, $z'$, $z''$ výrazy (9) pro $y$, $y_u$, $y_{uu}$, resp. $z$, $z_u$, $z_{uu}$, obdržíme dvě rovnice, které jsou splněny identicky tehdy a jen tehdy, platí-li soustavy

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= \alpha_{11} + \alpha_{12}A + \beta_{12}(A_u + \lambda_1 p_{11})\,, \\
0 &= \alpha_{12}\lambda_1 + \beta_{11} + \beta_{12}(A + \lambda_{1u})\,, \\
\beta &= \alpha_{12}\lambda_2 + \beta_{12}\lambda_1\beta\,, \\
0 &= \beta_{12}\lambda_2\,, \\
A_{uu} + p_{11}A + 2\lambda_{1u}p_{11} + \lambda_1 p_{11u} + \lambda_2(\beta p_{22} + p_{11v}) &= \\
&= \alpha_{21} + \alpha_{22}A + \beta_{22}(A_u + \lambda_1 p_{11})\,, \\
2A_u + \lambda_1 p_{11} + \lambda_{1uu} + \lambda_2\beta\gamma &= \alpha_{22}\lambda_1 + \beta_{21} + \beta_{22}(A + \lambda_{1u})\,, \\
\beta A + 2\beta\lambda_{1u} + \lambda_1\beta_u + \lambda_2(\beta_v + p_{11}) &= \alpha_{22}\lambda_2 + \beta_{22}\lambda_1\beta\,, \\
\lambda_1\beta &= \beta_{22}\lambda_2\,.
\end{aligned}
\tag{9a}
$$

Odtud snadno dostaneme:

$$
\begin{aligned}
\beta_{11} + \beta_{22} &= 0\,, \\
\alpha_{11} + \alpha_{22} &= \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\left[2\beta\,\frac{\lambda_{1u}\lambda_2}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}(2p_{11} + \beta_v) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\beta_u - \beta^2\right].
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Dosadíme-li $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = B$ ($\lambda_{2u} = 0$), dostaneme pro $\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0$ podmínku (8).

Věta 1 byla dokázána za předpokladu $\lambda_1 \,.\, \lambda_2 \neq 0$ (čímž vylučujeme, že uvažovaný systém čar $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = B(u, v)$ je systémem asymptotik.

Jestliže však $\lambda_1 = 0$, pak tvořicí přímky plochy $\Phi(v_0, B)$ jsou tečnami asymptotik $u =$ konst. plochy $\Psi$ v bodech asymptotiky $v = v_0$. Soustavu $R(v_0, A, 0, \lambda_2)$ tvoří pak podle (7), (7a) čáry vytvořené body

$$
\xi = x(u, v_0) + r[A(u, v_0)\, x(u, v_0) + \lambda_2(u, v_0)\, x_v(u, v_0)]\,.
\tag{11}
$$

Větu 1 pak nahrazuje

**Věta 2.** *Parametr $u$ ve vyjádření* (11) *soustavy $R(v_0, A, 0, \lambda_2)$ je jejím Cartanovým parametrem (při každé hodnotě $v = v_0 =$ konst.), platí-li $2p_{11} + \beta_v = 0$.*

Důkaz. Z rovnic (9a) vychází pro $\lambda_1 = 0$, za předp. $\lambda_2 \neq 0$,

$$\beta_{11} + \beta_{22} = 0\,, \quad \alpha_{11} + \alpha_{22} = 2p_{11} + \beta_v\,.$$

Podmínka $\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0$ vyjadřuje, že plocha $\Psi$ je plochou $\Psi_1$.

**Věta 3.** *Nutná podmínka, aby $u$ byl Cartanovým parametrem systému $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$ a aby tento systém $R$ byl soustavou asymptotik, je, že $\Psi$ je plochou $\Psi_1$, na níž jsou parametry voleny tak, že platí $2p_{11} + \beta_v = 0$.*

Důkaz. Aby systém $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$ byl systémem asymptotik (za předp. $\lambda_{2u} = 0$), je nutno a stačí, aby bylo $\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$, což lze dokázat snadným výpočtem. Odtud pak dle (9a) snadno dostaneme:

$$\lambda_1 = 0\,, \quad 2A_u + \lambda_2\beta\gamma = 0\,, \quad \alpha_{11} + \alpha_{22} = 2p_{11} + \beta_v\,.$$

Poznámka 3. Ve všech větách vpředu uvedených se předpokládá $\lambda_2 \neq 0$, tj. že uvedený $R$-systém neleží na ploše tečen asymptotiky $v = v_0$.

e) **Věta 4.** *Je-li $\mathsf{T}$ transformací parametrů $u$, $v$ podle definice 1 v nové parametry $u^*$, $v^*$, pak každá $u$-parametrisující vrstva čar plochy $\Psi$ se transformuje v $u^*$-parametrisující vrstvu čar plochy $\Psi$ tehdy a jen tehdy, jestliže $\mathsf{T}$ je transformací $\mathsf{T}_u$.*

Důkaz. $u$-parametrisující vrstva čar $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = B(u, v)$ na ploše $\Psi$ nechť má v nové soustavě rovnici $\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}u^*} = B^*(u^*, v^*)$, kde zřejmě platí

$$B(u, v) = f'^{-1}g'\, B^*(u^*, v^*)\,. \tag{12}$$

Podle definice 3 je funkce $B(u, v)$ integrálem dif. rovnice (8). Do této rovnice dosaďme za $B(u, v)$ z rovnice (12) a za $\beta$, $\beta_u$, $\beta_v$, $2p_{11} + \beta_v$ z (6), (6a). Po snadné úpravě pak vychází parciální dif. rovnice pro $B^*(u^*, v^*)$:

$$2\beta^* \frac{\partial B^*}{\partial u^*} = B^{*2}(2p^*_{11} + \beta^*_{v^*}) + B^*\beta^*_{u^*} - \beta^{*2} + 2B^{*2}(\mathsf{f}' - \mathsf{f}^2)\,. \tag{13}$$

Vrstva čar $\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}u^*} = B^*(u^*, v^*)$ je $u^*$-parametrisující vrstvou čar tehdy a jen tehdy, platí-li ve (13) $\mathsf{f}' - \mathsf{f}^2 = 0$, transformace $\mathsf{T}$ je tedy transformací $\mathsf{T}_u$.

Uvažujme kongruenci $\mathsf{K}$ přímek

$$\xi = x + r\{A(u, v)\, x + \varphi(v)[B(u, v)]^{-1}\, x_u(u, v) + \varphi(v)\, x_v(u, v)\}\,. \tag{14}$$

Přímky této kongruence jsou tečnami vrstvy čar $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = B(u, v)$, která nechť je $u$-parametrisující vrstvou čar na ploše $\Psi$. Plochy $u =$ konst., $v =$ konst. kongruence **K** nazývejme parametrickými *v-plochami*, resp. *u-plochami* kongruence **K**. Podle věty 1 čáry $r = \text{konst.}$ vytvářejí na každé parametrické $u$-ploše ($v = v_0$) soustavu $R(v_0, A, \varphi B^{-1}, \varphi)$, pro kterou je parametr $u$ Cartanovým parametrem.

Nechť $\boldsymbol{T}(\xi)$ je transformace $\boldsymbol{T}$ parametrů $u$, $v$, spojená s normalisací faktoru při $\xi$ podle rovnice

$$\xi^* = f_{u^*}^{-\frac{1}{2}} g_{v^*}^{-\frac{1}{2}} \xi\,.$$

Je-li $\boldsymbol{T}_u(\xi)$ zvláštním případem transformace $\boldsymbol{T}(\xi)$ pro $f(u^*) = \dfrac{\alpha_1 u^* + \alpha_3}{\gamma_1 u^* + \gamma_3}$, $\alpha_1, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_3 = \text{konst.}$, $\alpha_1\gamma_3 - \gamma_1\alpha_3 \neq 0$, $g$ je libovolná funkce parametru $v^*$, pak platí

**Věta 5.** *Budiž dána kongruence* **K** *tečen u-parametrisující vrstvy čar* $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = B^*(u, v)$ *plochy* $\Psi$ *rovnicí* (14). *Při transformaci* $\boldsymbol{T}_u(\xi)$ *parametrů* $u$, $v$ *tvoří čáry* $r = \text{konst.}$ *na každé přímkové* $u^*$*-ploše kongruenci* **K** (*tj. na ploše podél níž* $\mathrm{d}v^* = 0$) *parametrický R-systém, pro nějž* $u^*$ *je opět Cartanovým parametrem.*

Důkaz. Podle definice 1 snadno vychází

$$x_u = \tfrac{1}{2} f'^{-\frac{3}{2}} f'' g'^{\frac{1}{2}} x^* + f'^{-\frac{1}{2}} g'^{\frac{1}{2}} x^*_{u^*}\,,$$
$$x_v = \tfrac{1}{2} f'^{\frac{1}{2}} g'^{-\frac{3}{2}} g'' x^* + f'^{\frac{1}{2}} g'^{-\frac{1}{2}} x^*_{v^*}\,.$$

Dosazením do rovnice (14) a po úpravě pak plyne

$$\xi^* = x^* + r\{x^*[A^* + \tfrac{1}{2}\varphi^* B^{*-1} f'^{-1} f'' g'^{-1} + \tfrac{1}{2}\varphi^* g'^{-2} g''] + x^*_{u^*}[g'^{-1}\varphi^* B^{*-1}] + x^*_{v^*}[g'^{-1}\varphi^*]\,, \tag{15}$$

kde $B^{*-1} = f'^{-1} g' B^{-1}$, $A(u, v) = A^*(u^*, v^*)$, $\varphi(v) = \varphi^*(v^*)$. Čáry $\dfrac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}u^*} = B^*(u^*, v^*)$ tvoří podle věty 4 $u^*$-parametrisující vrstvu. Výraz $g'^{-1}\varphi^*$ závisí pouze na parametru $v^*$. Správnost věty je pak zřejmá podle věty 1 a poznámky 2.

f) Každá přímková plocha dotýkající se plochy $\Psi$ podél její asymptotiky $u = u_0$ je vytvořena bodem $\xi = y + rz$, kde

$$y = x(u_0, v)\,, \tag{16}$$
$$z = \bar{A}(u_0, v)\, x(u_0, v) + \bar{\lambda}_1(u_0, v)\, x_u(u_0, v) + \bar{\lambda}_2(u_0, v)\, x_v(u_0, v)\,.$$

**Definice 2a.** Označením $R(u_0, \bar{A}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ rozumějme soustavu $R$-čar plochy (16), jejíž čáry jsou dány rovnicí $r = \text{konst.}$ Každá soustava $R(u_0, \bar{A}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ leží na přímkové ploše $\Phi(u_0, \bar{B})$, která

1. dotýká se plochy $\Psi$ podél její asymptotiky $u = u_0$,

2. její tvořicí přímky se dotýkají čar systému $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \dfrac{\bar{\lambda}_2(u, v)}{\bar{\lambda}_1(u, v)} = \bar{B}(u, v)$ v bodech asymptotiky $u = u_0$.

Vrstvu čar $\frac{dv}{du} = \bar{B}(u, v)$ nazývejme $v$-parametrisující vrstvou plochy $\Psi$, splňuje-li $\bar{B}(u, v)$ podmínku

$$(17) \qquad 2\gamma \frac{\partial \bar{B}}{\partial v} = -(2p_{22} + \gamma_u) - \bar{B}\gamma_v + \bar{B}^2\gamma^2 .$$

Pro plochy $\Phi(u_0, \bar{B})$, $v$-parametrisující vrstvy čar $\frac{dv}{du} = \bar{B}(u, v)$ a soustavy $R(u_0, \bar{A}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ lze odvoditi věty analogické větám 1 až 5.

g) **Definice 4.** *Vrstvu čar* $\frac{dv}{du} = B(u, v)$ *na ploše* $\Psi$ *nazývejme* $(u, v)$*-parametrisující vrstvou čar, vyhovuje-li* $B(u, v)$ *podmínkám* (8), (17), *tj. soustavě parciálních diferenciálních rovnic*

$$(18) \qquad 2\beta \frac{\partial B}{\partial u} = B^2(2p_{11} + \beta_v) + B\beta_u - \beta^2 ,$$

$$2\gamma \frac{\partial B}{\partial v} = -(2p_{22} + \gamma_u) - B\gamma_v + B^2\gamma^2 .$$

Podle této definice a předcházejících odstavců je zřejmé, že $(u, v)$-parametrisující vrstva čar je současně $u$-parametrisující i $v$-parametrisující vrstvou čar na ploše $\Psi$.

Soustava (18) je úplně integrabilní, platí-li tyto podmínky:

$$(19a) \qquad \beta\gamma(2p_{11} + \beta_v)_v - (2p_{11} + \beta_v)(2p_{22} + \gamma_u)_u = 0 ,$$

$$(19b) \qquad \beta\gamma(2p_{22} + \gamma_u)_u - (2p_{22} + \gamma_u)(2p_{11} + \beta_v)_v = 0 ,$$

$$(19c) \qquad -(2p_{11} + \beta_v)(2p_{22} + \gamma_u) + \beta\gamma[\log(\beta\gamma)]_{uv} + \beta^2\gamma^2 = 0 .$$

Jestliže koeficienty $\beta$, $\gamma$, $p_{11}$, $p_{22}$ diferenciálních rovnic plochy $\Psi$ [(3)] vyhovují mimo rovnic (4) ještě podmínkám (19), pak — a jen tehdy — existuje na ploše nekonečně mnoho $(u, v)$-parametrisujících vrstev čar $\frac{dv}{du} = B(u, v)$. Podobně lze definovat na ploše $\Psi$, vztažené na asymptotické parametry $u^*$, $v^*$, — $(u^*, v^*)$-parametrisující vrstvu čar $\frac{dv^*}{du^*} = B^*(u^*, v^*)$.

**Věta 6.** *Jestliže na ploše* $\Psi$ *existuje nekonečně mnoho* $(u, v)$*-parametrisujících vrstev čar* $\frac{dv}{du} = B(u, v)$, *pak jejích úplná soustava tvoří systém hypergeodetický.*

Důkaz. Z rovnic (18) snadno vychází

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} B = \left(\frac{dv}{du}\right)^3 \frac{\gamma}{2} + \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \left[\frac{1}{2\beta}(2p_{11} + \beta_v) - \frac{\gamma_v}{2\gamma}\right] +$$
$$+ \left(\frac{dv}{du}\right)\left[\frac{\beta_u}{2\beta} - \frac{1}{2\gamma}(2p_{22} + \gamma_u)\right] - \frac{\beta}{2} .$$

h) Souřadnice $x = x(u, v)$ koincidenční plochy $\Psi_{1,2}$ nechť vyhovují soustavě diferenciálních rovnic

$$x_{uu} = x_v + (cu + h)\,x\,, \quad x_{vv} = x_u + (cv + k)\,x\,, \tag{20}$$

$c, h, k =$ konst. (Segre [6], str. 102). Podle rovnic (3) tedy zřejmě platí:

**Věta 7.** *Na koincidenční ploše $\Psi_{1,2}$ o rovnicích (20) existuje nekonečně mnoho $(u, v)$-parametrisujících vrstev čar $\dfrac{dv}{du} = B(u, v)$ tehdy a jen tehdy, je-li $c = 0$, $h \, . \, k = \frac{1}{4}$.*

Důkaz. Rovnice (4abc) a (19ab) jsou splněny pro všechny hodnoty $c, h, k$, rovnice (19c) pouze pro $c = 0$, $h \, . \, k = \frac{1}{4}$. Integrací soustavy (18) snadno dostaneme

$$\log\,[\sqrt{2h}B - 1] - \log\,[\sqrt{2h}B + 1] = u + \frac{v}{2h} + C\,, \quad C = \text{konst}\,.$$

Při transformaci $T$ parametrů $u, v$ plochy $\Psi_{1,2}$ platí podle (6) a (6a)

$$\beta^* = f'^2 g'^{-1}\,, \quad \gamma^* = f'^{-1} g'^2\,, \tag{21}$$

$$2(cf + h) = f'^{-2}(2p_{11}^* + \beta_{v^*}^*) + 2f'^{-2}(-\mathbf{f}^2 + \mathbf{f}')\,,$$

$$2(cg + k) = g'^{-2}(2p_{22}^* + \gamma_{u^*}^*) + 2g'^{-2}(-\mathbf{g}^2 + \mathbf{g}')\,.$$

Věta 8. *Na koincidenční ploše $\Psi_{1,2}$, vztažené na asymptotické parametry $u^*, v^*$, pro niž jsou splněny podmínky (21), existuje nekonečně mnoho $(u^*, v^*)$-parametrisujících vrstev čar $\dfrac{dv^*}{du^*} = B^*(u^*, v^*)$, vyhovují-li funkce $f, g$ relacím*

$$2f'^2(cf + h) - 2(-\mathbf{f}^2 + \mathbf{f}') = mf'^2\,, \quad 2g'^2(cg + k) - 2(-\mathbf{g}^2 + \mathbf{g}') = m^{-1}g'^2\,;$$
$$m = \text{konst} \neq 0\,.$$

Důkaz. Rovnice (4abc), (19ab), kde místo $u$ je třeba dosadit $u^*$ atp., jsou pro funkce $\beta^*, \gamma^*, p_{11}^*, p_{22}^*$ splněny podle (6a), (20), (21). Dosadíme-li z rovnice (21) do (19c), kde opět místo $u$ píšeme $u^*$ atp., dostaneme po snadné úpravě:

$$[2f'^2(cf + h) - 2(-\mathbf{f}^2 + \mathbf{f}')]\,f'^{-2} = [2g'^2(cg + k) - 2(-\mathbf{g}^2 + \mathbf{g}')]^{-1}\,g'^2\,.$$

Výraz na levé straně závisí pouze na proměnné $u^*$, pravá strana pouze na proměnné $v^*$. Odtud ihned vycházejí hledané relace.

*Pracováno v semináři diferenciální geometrie prof. dr. J. Klapky.*