Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

POZNÁMKA O MINIMÁLNÍCH PLOCHÁCH S KRUŽNICEMI NORMÁLNÍ KŘIVOSTI KONSTANTNÍHO POLOMĚRU

KAREL SVOBODA, Brno

(Došlo dne 23. června 1959)

V této práci jsou odvozeny nutné a postačující podmínky k tomu, aby plocha $(2m + 1)$-rozměrného projektivního prostoru mohla býti považována za minimální plochu $(2m + 1)$-rozměrného prostoru s konstantní křivostí, jejíž indikatrice normální křivosti až do řádu $m - 1$ jsou kružnicemi konstantních poloměrů.

1. V první části obsáhlého pojednání [2], věnovaného teorii normální křivosti plochy v n-rozměrném prostoru $\mathbf{S}_n$ $(n \geqq 4)$ s konstantní křivostí c, studoval prof. O. BORŮVKA existenční otázky a základní vlastnosti ploch, jejichž indikatrice normální křivosti řádu $1, 2, \ldots, m - 1$ $(2 \leqq m \leqq [\frac{1}{2}n])$ jsou v každém bodě M plochy kružnicemi se středy v tomto bodě. Tyto plochy jsou při vhodné volbě reperu přiřazeného k ploše definovány soustavou diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_n \mathbf{e}_n , \\
\mathrm{d}\mathbf{e}_i &= - c\omega_i M + \omega_{i1} \mathbf{e}_1 + \omega_{i2} \mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_{in} \mathbf{e}_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n) ,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

pro jejíž koeficienty ω platí kromě rovnic $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ vztahy

$$
\begin{gathered}
\omega_3 = \omega_4 = \ldots = \omega_n = 0 , \\
\omega_{2k-1,2k+1} + i\omega_{2k,2k+1} = R_k(\omega_1 - i\omega_2) , \\
\omega_{2k-1,2k+1} - i\omega_{2k,2k+1} = R_k(\omega_1 + i\omega_2) , \\
\omega_{2k-1,2k+2} + i\omega_{2k,2k+2} = iR_k(\omega_1 - i\omega_2) , \\
\omega_{2k-1,2k+2} - i\omega_{2k,2k+2} = - iR_k(\omega_1 + i\omega_2) , \\
\omega_{2k-1,2k+3} = \omega_{2k-1,2k+4} = \ldots = \omega_{2k-1,n} = 0 , \\
\omega_{2k,2k+3} = \omega_{2k,2k+4} = \ldots = \omega_{2k,n} = 0 \\
(i = + \sqrt{-1};\ k = 1, 2, \ldots, m - 1;\ R_k > 0) ,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

z nichž je třeba vypustiti rovnice vzniklé z rovnic napsaných v posledních dvou řádcích pro $k = m - 1$, jestliže $2m = n$. Podmínky integrability soustavy (2) jsou vyjádřeny relacemi

$$\text{(3)} \qquad \left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(\frac{dR_k}{R_k} + i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,,$$

$$\left[(\omega_1 + i\omega_2)\left(\frac{dR_k}{R_k} - i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,,$$

$$[(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j})] = 0\,,$$

$$[(\omega_1 + i\omega_2)(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})] = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m - 1;\ j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n)\,,$$

z nichž je třeba vynechati rovnice napsané v posledních dvou řádcích, jestliže $2m = n$.

V závěru výše zmíněné první části pojednání [2] jest obsaženo několik poznámek o uvedených plochách v případě, že jejich kružnice normální křivosti řádu $1, 2, \ldots, m - 1$ mají v každém bodě plochy konstantní poloměry. Pro $2m = n$ jsou tyto plochy podrobně studovány v pojednání [3], a to jak z hlediska metrického, tak i projektivního; v dalším se proto nebudeme tímto případem blíže zabývati. Zjištění existence uvažovaných ploch v obecném případě $2m < n$ vede k příliš dlouhým a obtížným výpočtům a nebylo proto v citované práci [2] provedeno. Výjimku zde tvoří nejjednodušší případ $2m + 1 = n$, o němž bylo pro $m = 2$ podrobně pojednáno v práci [1].

Úkolem tohoto pojednání jest ukázat, že charakteristické projektivní vlastnosti ploch pětirozměrného prostoru, studovaných ve zmíněné práci [1], lze bez obtíží rozšířit na prostor s konstantní křivostí libovolné liché dimense.

2. V dalších úvahách *se budeme zabývati plochami $\boldsymbol{M}$ prostoru $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ s konstantní křivostí c, jejichž indikatrice normální křivosti řádu* $1, 2, \ldots, m - 1$ *jsou v každém bodě M plochy kružnicemi se středy v bodě M a s konstantními poloměry.*

Podle označení užitého v pojednání [2] je $R_1R_2 \ldots R_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m - 1)$ poloměr kružnice normální křivosti řádu k a předcházející předpoklad o těchto poloměrech je tedy totožný s požadavkem, aby všechny funkce R_k uvedené v (2) byly konstantní. Vzhledem k tomuto předpokladu dostaneme z vnějších relací (3) rovnice, které lze po jednoduché úpravě psáti ve tvaru

$$\text{(4)} \qquad \omega_{2k+1,2k+2} = (k + 1)\,\omega_{12} \quad (k = 1, 2, \ldots, m - 1)\,,$$

$$\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1} = A(\omega_1 - i\omega_2)\,,$$

$$\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1} = B(\omega_1 + i\omega_2)\,,$$

kde A, B jsou funkce parametrů, na nichž závisí volba reperu přiřazeného k ploše.

Vnějším diferencováním rovnic (4) pak obdržíme po úpravě vztahy

$$R_k^2 = \frac{1}{2} k(k+1) R_1^2 - \frac{1}{2} (k-1)(k+2) \frac{c}{2}, \tag{5}$$

$$AB = m(m+1) R_1^2 - (m-1)(m+2) \frac{c}{2},$$

$$[(\omega_1 - i\omega_2)(\mathrm{d}A + i\overline{m+1}\, A\omega_{12})] = 0,$$

$$[(\omega_1 + i\omega_2)(\mathrm{d}B - i\overline{m+1}\, B\omega_{12})] = 0,$$

které jsou podmínkami integrability soustavy diferenciálních rovnic (2), (4), jimiž jsou analyticky definovány uvažované plochy $\boldsymbol{M}$. Odtud je patrno, že je třeba — podobně jako v případě $m = 2$ uvažovaném v práci [1] — rozlišiti dvě možnosti podle toho, zda obě funkce A, B jsou různé od nuly nebo zda právě jedna z nich jest identicky rovna nule; vzhledem k souměrnosti příslušných vztahů budeme v dalším předpokládati $A = 0$, $B \neq 0$. Případ, že obě funkce A, B by byly identicky rovny nule, by vedl k plochám, které jsou vnořeny do prostoru dimense menší než $2m + 1$.

Buď nejprve $AB \neq 0$ a označme příslušnou plochu $\boldsymbol{M}$ v tomto případě $\boldsymbol{M}_1$. Z rovnic (5) pak snadno získáme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} + i(m+1)\,\omega_{12} = 0, \tag{6}$$

jejíž vnější diferenciál dává relaci

$$2R_1^2 - c = 0. \tag{7}$$

Podmínky integrability soustavy diferenciálních rovnic určujících uvažované plochy $\boldsymbol{M}_1$ jsou tedy vyjádřeny první rovnicí (5) a rovnicí (7). Odtud plyne, že *minimální plochy $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru existují v libovolném $(2m + 1)$-rozměrném prostoru $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ s kladnou konstantní křivostí a závisí jen na konstantách.*

Z předcházejících vztahů plyne bezprostředně rovnost $R_k^2 = R_1^2 = \dfrac{c}{2}$ $(k = 1, 2, \ldots, m - 1)$, kterou je popsána závislost mezi jednotlivými veličinami R_k. Odtud pak vychází pro poloměr kružnice normální křivosti řádu k hodnota R_1^k, jejíž souvislost s křivostí c prostoru $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ je z předchozího zřejmá.

Buď nyní $A = 0$, $B \neq 0$ a označme příslušnou plochu $\boldsymbol{M}$ v tomto případě $\boldsymbol{M}_2$. Druhá z rovnic (5) má za tohoto předpokladu tvar

$$m(m+1) R_1^2 - (m-1)(m+2) \frac{c}{2} = 0 \tag{8}$$

a z vnějších kvadratických relací (5) zůstává pouze druhá. Odtud plyne, že *minimální plochy $\boldsymbol{M}_2$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru existují v libovolném $(2m + 1)$-rozměrném prostoru $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ s kladnou konstantní křivostí a závisí na jedné funkci jedné proměnné.*

Rovnicí (8) a první rovnicí (5) jsou v tomto případě vyjádřeny vztahy mezi veličinami R_k a křivostí c prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$.

3. V dalších úvahách odvodíme charakteristické projektivní vlastnosti uvažovaných ploch M užitím výsledků a označení uvedených v pojednání [4]. Zvláště připomeňme, že $\mathbf{P}_{2m+1}$ je projektivní rozšíření prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$, jehož absolutní kvadrikou je regulární kvadratická nadplocha $\mathbf{A}$ o rovnici $\frac{1}{c}x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$. Zaveďme dále označení $E_k = \mathbf{e}_{2k-1} + i\mathbf{e}_{2k}$, $E_{-k} = \mathbf{e}_{2k-1} - i\mathbf{e}_{2k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $\Omega_1 = \omega_1 + i\omega_2$, $\Omega_{-1} = \omega_1 - i\omega_2$, pomocí něhož lze soustavu rovnic (1) s koeficienty danými v (2) nahraditi soustavou

$$
\begin{aligned}
(9)\quad \mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1E_{-1}\,,\\
\mathrm{d}E_1 &= -\,c\Omega_1M - i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,,\\
\mathrm{d}E_{-1} &= -\,c\Omega_{-1}M + i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1E_{-2}\,,\\
\mathrm{d}E_k &= -\,R_{k-1}\Omega_1E_{k-1} - i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,,\\
\mathrm{d}E_{-k} &= -\,R_{k-1}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} + R_k\Omega_1E_{-(k+1)}\,,\\
\mathrm{d}E_m &= -\,R_{m-1}\Omega_1E_{m-1} - i\omega_{2m-1,2m}E_m + (\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1})\,\mathbf{e}_{2m+1}\,,\\
\mathrm{d}E_{-m} &= -\,R_{m-1}\Omega_{-1}E_{-(m-1)} + i\omega_{2m-1,2m}E_{-m} + (\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1})\,\mathbf{e}_{2m+1}\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_{2m+1} &= -\,\tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1})\,E_m - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1})\,E_{-m}\\
&\quad (k = 2, 3, \ldots, m-1)\,.
\end{aligned}
$$

V této soustavě není vzhledem k pozdějším úvahám dosazeno podle (4).

4. Všimneme si nejprve ploch M_1 s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru a dokážeme následující větu, která popisuje jejich charakteristické vlastnosti:

Věta 1. *Plocha $(2m + 1)$-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ může býti definována jako minimální plocha M_1 s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru, vnořená do $(2m + 1)$-rozměrného neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť mající tyto vlastnosti: 1° Jest autopolární vzhledem k regulární kvadrice $\mathbf{A}$ prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ a periodická s periodou $2(m + 1)$; 2° Má oba invarianty stejné a konstantní.*

Důkaz. Ve větě 3.3 z pojednání [4] bylo dokázáno, že existence sdružené sítě s vlastností 1° na ploše projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby plocha prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ mohla býti považována za minimální plochu M_1 s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořenou do neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$. Příslušná sdružená síť je tvořena křivkami, které jsou v neeukleidovské metrice určené kvadrikou $\mathbf{A}$ minimálními křivkami na uvažované ploše. Poznamenejme, že uvedené vlastnosti plochy prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ lze analyticky vyjádřiti při vhodné volbě pohyblivého reperu soustavou diferenciálních rovnic (9) s podmínkami integrability (3), při čemž funkce A, B v (4) nejsou současně rovny nule a křivky sdružené sítě jsou určeny diferenciální rovnicí $\Omega_1\Omega_{-1} = 0$. K dokončení důkazu předcházející věty stačí tedy ukázati, že vlastnost 2° je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby všechny uvažované kružnice normální křivosti plochy $\boldsymbol{M}_1$ měly v příslušné neeukleidovské metrice konstantní poloměry.

Ukážeme nejprve, že sdružená síť minimálních křivek na ploše $\boldsymbol{M}_1$ prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$ má oba invarianty stejné a konstantní. Na základě rovnic (5) lze pro jednoduchost položiti $A = 1$ a z (6) pak vychází $\omega_{12} = 0$. Odtud plyne vzhledem k rovnicím struktury prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$, že Ω_1 a Ω_{-1} jsou úplnými diferenciály, a můžeme proto položiti $\Omega_1 = du$, $\Omega_{-1} = dv$. Ze soustavy (9) pak vychází $M_{uv} = -\frac{1}{2}cM$ a odtud pro invarianty uvažované sítě plyne $h = k = -\frac{1}{2}c$. Síť minimálních křivek na ploše $\boldsymbol{M}_1$ má tedy skutečně oba invarianty stejné a konstantní.

Předpokládejme naopak, že sdružená síť křivek $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ na ploše, určené v projektivním prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ soustavou diferenciálních rovnic (9), má oba invarianty stejné a konstantní. Položíme-li $\Omega_1 = e^p\, du$, $\Omega_{-1} = e^q\, dv$, obdržíme snadno z rovnic struktury $i\omega_{12} = q_u\, du - p_v\, dv$ a ze soustavy (9) odvodíme rovnici $M_{uv} = -\frac{1}{2}ce^{p+q}M$, z níž získáme pro uvažované invarianty hodnoty $h = k = -\frac{1}{2}ce^{p+q}$. Z rovnic struktury užitých na formu ω_{12} obdržíme po jednoduchém výpočtu

$$(10) \qquad (p + q)_{uv} = \tfrac{1}{2}(2R_1^2 - c)\, e^{p+q}\,.$$

Poněvadž invarianty h, k jsou konstantní, je také $p + q$ konstantní a to nastane podle (10) právě tehdy, když $2R_1^2 - c = 0$. Je tedy R_1 konstantní a odtud na základě rovnic (3) postupně odvodíme, že všechny veličiny R_k vyskytující se v soustavě (9) jsou konstantní. Předcházejícími úvahami je provedena zbývající část důkazu věty 1.

Právě dokázaná věta je přímým rozšířením výsledku odvozeného O. Borůvkou v pojednání [1].

5. Přistoupíme nyní k zjištění charakteristických projektivních vlastností ploch $\boldsymbol{M}_2$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru a dokážeme za tím účelem tuto větu:

Věta 2. *Plocha $(2m + 1)$-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_2$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru, vnořená do $(2m + 1)$-rozměrného neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť mající tyto vlastnosti: 1° Jest autopolárné vzhledem k regulární kvadrice $\mathbf{A}$ prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$, její první, druhé, ..., m-té laplaceovské transformace leží na kvadrice $\mathbf{A}$ a její posloupnost laplaceovských transformací se ukončí v jednom směru po m transformacích Goursatovým způsobem a v druhém směru po $m + 1$ transformacích Laplaceovým způsobem; 2° Křivky, v jejichž směru se příslušná posloupnost ukončí Goursatovým způsobem, jsou racionální normální křivky vnořené do lineárních podprostorů dimense m projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$.*

Důkaz. Při důkazu této věty vyjdeme z výsledku odvozeného ve větě 3.5 z pojednání [4], kde jest ukázáno, že existence sdružené sítě s vlastností 1° na ploše projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby plocha prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ mohla býti považována za minimální plochu $\boldsymbol{M}_2$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořenou do neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$. Uvedené vlastnosti jsou analyticky vyjádřeny při vhodné volbě pohyblivého reperu soustavou diferenciálních rovnic (9) s podmínkami integrability (3), při čemž právě jedna z funkcí A, B v (4) je rovna nule; v dalším se opět omezíme na dříve uvažovaný případ $A = 0$, $B \neq 0$. Podobně jako v předcházejícím případě jsou křivky uvedené sdružené sítě dány rovnicí $\Omega_1\Omega_{-1} = 0$ a v neeukleidovské metrice určené kvadrikou $\mathbf{A}$ jsou minimálními křivkami na uvažované ploše. K dokončení důkazu předcházející věty je tedy třeba dokázati, že vlastnost 2° je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby poloměry všech kružnic normální křivosti plochy $\boldsymbol{M}_2$ byly v příslušné neeukleidovské metrice konstantní.

Dokážeme nejprve, že křivky $\Omega_1 = 0$, v jejichž směru se posloupnost laplaceovských transformací sítě minimálních křivek na ploše $\boldsymbol{M}_2$ ukončí Goursatovým způsobem, jsou racionální normální křivky lineárních podprostorů dimense m. Vzhledem k předpokladu $A = 0$, $B \neq 0$ a vzhledem k poslední rovnici (5) lze bez újmy na obecnosti položiti $B = 1$, takže forma ω_{12} je lineárně závislá na Ω_1. Podél libovolné křivky soustavy $\Omega_1 = 0$ na uvažované ploše je tedy $\omega_{12} = 0$ a z rovnic struktury pak vyplývá, že podél této křivky je Ω_{-1} úplným diferenciálem. Každá z uvažovaných křivek jest určena soustavou diferenciálních rovnic (9), v níž je třeba podle (4) dosaditi $\Omega_1 = 0$, $\omega_{2k-1,2k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $\omega_{2m-1,2m+1} \pm i\omega_{2m,2m+1} = 0$. Položíme-li ještě $\Omega_{-1} = \mathrm{d}v$ a označíme-li čárkou derivace podle v, dostaneme tím zvláště soustavu diferenciálních rovnic

$$(11) \qquad M' = \tfrac{1}{2}E_1\,, \quad E'_k = R_kE_{k+1}\,, \quad E'_m = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m - 1)\,,$$

z níž se bezprostředně zjistí, že uvažovaná křivka je vnořena do lineárního podprostoru dimense m vnořeného do projektivního rozšíření $\mathbf{P}_{2m+1}$ prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$. Ze soustavy (11) vychází dále diferenciální rovnice $M^{(m+1)} = 0$, jejímž obecným integrálem je polynom stupně m v proměnné v tvaru $M = C_0 + C_1v + \ldots + C_mv^m$. Odtud je patrno, že uvažovaná křivka $\Omega_1 = 0$ na ploše $\boldsymbol{M}_2$ je racionální normální křivka stupně m.

Předpokládejme naopak, že křivky $\Omega_1 = 0$ na ploše, určené v projektivním prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ soustavou diferenciálních rovnic (9), jsou racionálními normálními křivkami vnořenými do lineárních podprostorů dimense m prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$. Abychom zjednodušili následující výpočty, zavedeme bod E_0 tím, že položíme $M = \frac{1}{2}E_0$. Ze soustavy (9) snadno plyne, že všechny oskulační prostory řádu alespoň m libovolné z uvažovaných křivek mají dimensi m a že tedy tyto křivky jsou vnořeny do lineárních podprostorů dimense m prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$.

Pohybuje-li se bod E_0 po určité křivce soustavy $\Omega_1 = 0$, je podle (4) a (9)

$$
\begin{aligned}
(12) \qquad \mathrm{d}E_k &= -\, i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,, \\
\mathrm{d}E_m &= -\, i\omega_{2m-1,2m}E_m \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1)
\end{aligned}
$$

a odtud plyne, že bod E_m nemění svou polohu a že prostor $[E_1E_2 \ldots E_m]$ je pevný. Přiřaďme ke každé přímce $[E_0E_m]$ pohyblivý reper tvořený přímkami $[E_jE_m]$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$ procházejícími pevným bodem E_m a ležícími v pevném prostoru $[E_1E_2 \ldots E_m]$. Užijeme-li soustavy diferenciálních rovnic (9) s $\Omega_1 = 0$, dostaneme po jednoduchém výpočtu

$$
\begin{aligned}
(13) \qquad \mathrm{d}[E_0E_m] &= -\, i\omega_{2m-1,2m}[E_0E_m] + \Omega_{-1}[E_1E_m]\,, \\
\mathrm{d}[E_{k-1}E_m] &= -\, i(\omega_{2k-3,2k-2} + \omega_{2m-1,2m})[E_{k-1}E_m] + R_{k-1}\Omega_{-1}[E_kE_m]\,, \\
\mathrm{d}[E_{m-1}E_m] &= -\, i(\omega_{2m-3,2m-2} + \omega_{2m-1,2m})[E_{m-1}E_m] \quad (k = 2, 3, \ldots, m-1)\,.
\end{aligned}
$$

Poněvadž uvažovaná křivka je racionální normální křivkou stupně m, je příbuznost mezi body E_1 ležícími na tečnách křivky v bodech E_0 a přímkami $[E_0E_m]$ projektivitou. Abychom našli analytické podmínky pro to, aby příbuznost mezi body E_1 a přímkami $[E_0E_m]$ byla projektivitou, přepišme předcházející dvě soustavy diferenciálních rovnic tím, že místo bodu E_j $(j = 2, 3, \ldots, m)$ zavedeme bod $\dfrac{1}{R_1R_2 \ldots R_{j-1}}\, E_j$. Po jednoduchém výpočtu dostaneme ze soustavy diferenciálních rovnic (12) ekvivalentní soustavu tvaru

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}E_1 &= -\, i\omega_{12}E_1 + \Omega_{-1}E_2\,, \\
\mathrm{d}E_k &= \left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} + \ldots + \frac{\mathrm{d}R_{k-1}}{R_{k-1}} - i\omega_{2k-1,2k}\right) E_k + \Omega_{-1}E_{k+i}\,, \\
\mathrm{d}E_m &= \left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} + \ldots + \frac{\mathrm{d}R_{m-1}}{R_{m-1}} - i\omega_{2m-1,2m}\right) E_m \quad (k = 2, 3, \ldots, m-1)
\end{aligned}
$$

a soustavu diferenciálních rovnic (13) nahradíme soustavou

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}[E_0E_m] &= -\, i\omega_{2m-1,2m}[E_0E_m] + \Omega_{-1}[E_1E_m]\,, \\
\mathrm{d}[E_1E_m] &= -\, i(\omega_{12} + \omega_{2m-1,2m})[E_1E_m] + \Omega_{-1}[E_2E_m]\,, \\
\mathrm{d}[E_{k-1}E_m] &= \left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} + \ldots + \frac{\mathrm{d}R_{k-2}}{R_{k-2}} - i \,.\, \overline{\omega_{2k-3,2k-2} + \omega_{2m-1,2m}}\right) [E_{k-1}E_m] + \\
&\qquad + \Omega_{-1}[E_kE_m]\,, \\
\mathrm{d}[E_{m-1}E_m] &= \left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} + \ldots + \frac{\mathrm{d}R_{m-2}}{R_{m-2}} - i \,.\, \overline{\omega_{2m-3,2m-2} + \omega_{2m-1,2m}}\right) [E_{m-1}E_m] \\
&\qquad (k = 3, 4, \ldots, m-1)\,.
\end{aligned}
$$

Z předcházejících dvou soustav plyne, že uvažovaná příbuznost je projektivitou tehdy a jen tehdy, když

$$
(14) \qquad \frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} + i(\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1)\,.
$$