ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 85 * PRAHA 18. VIII. 1960 * ČÍSLO 3

O JISTÉ POLOGRUPĚ ENDOMORFISMŮ NA JEDNODUŠE USPOŘÁDANÉ MNOŽINĚ, II

BEDŘICH PONDĚLÍČEK, Poděbrady

(Došlo dne 13. března 1959)

Článek je druhou částí autorovy práce [1] a zobecňuje některé výsledky § 2 článku [2] pro pologrupu Γ s vlastností (γ), zavedenou v 1. části práce, která je jistou pologrupou endomorfismů na jednoduše uspořádané množině $\mathfrak{M}$. V článku se studují vztahy mezi vlastnostmi pologrupy Γ a uspořádáním množiny $\mathfrak{M}$.

V článku budeme používat označení a pojmů, uvedených v práci [1].

Definice 1. *Nechť $\Gamma \subset \mathfrak{H}$, $Q \subset \mathfrak{M}$. Řekneme, že Γ je transitivní na Q, jestliže ke každým dvěma $x, y \in Q$ existuje $f \in \Gamma$ takové, že $f(x) = y$ nebo $x = f(y)$.*

Jestliže $Q = \mathfrak{M}$, potom řekneme, že Γ je transitivní.

Lemma 1. *Nechť $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je transitivní, potom množina $\mathfrak{M}[\Gamma]$ má nejvýše jeden prvek.*

Důkaz. Nechť $\mathfrak{M}[\Gamma]$ má dva různé prvky x, y, potom existuje $f \in \Gamma$ takové, že $f(x) = y$ nebo $f(y) = x$. Tedy $y = f(x) = x$ nebo $x = f(y) = y$, což v obou případech je spor.

Lemma 2. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je transitivní na $\mathfrak{M}(\Gamma)$, potom Γ je divergentní.*

Důkaz je zřejmý.

Lemma 3. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je transitivní, silně monocyklická a má vlastnost (γ), potom bod $x \in \mathfrak{M}$ je koncovým bodem množiny $\mathfrak{M}$ tehdy a jen tehdy, jestliže $x \in \mathfrak{M}[\Gamma]$.*

Důkaz. Nechť x je levý koncový bod množiny $\mathfrak{M}$. Předpokládejme, že $x \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, potom existuje $f \in \Gamma$ takové, že $x < f(x)$. Nechť $x = f(u)$, kde $u \in \mathfrak{M}$, a tedy $x < u$. Zřejmě $f(x) \leqq f(u) = x$, a to je spor. Stejným způsobem dojdeme ke sporu v případě, že x je pravý koncový bod množiny $\mathfrak{M}$. Tedy $x \in \mathfrak{M}[\Gamma]$.

Nechť $x \in \mathfrak{M}[\Gamma]$ a není koncovým bodem množiny $\mathfrak{M}$. Zřejmě existují $u, v \in \mathfrak{M}$ taková, že $u < x < v$. Množina $\mathfrak{M}$ má tedy aspoň tři prvky, z čehož vyplývá, že transitivní pologrupa Γ má aspoň jeden endomorfismus $f \neq e$. Z předpokladu, že Γ je silně monocyklická pologrupa a z lemmatu 1 vyplývá, že $u, v \in \mathfrak{M}(f)$. Tedy $u \neq f(u) \leqq f(x) = x \leqq f(v) \neq v$, a to je spor, protože Γ je silně monocyklická pologrupa, která nemá oboustranné cykly.

Lemma 4. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je transitivní, komutativní a silně monocyklická. Nechť $f(u) = f(v)$, kde $u, v \in \mathfrak{M}$ $(u \neq v)$ a $f \in \Gamma$, potom $f(u) \in \mathfrak{M}[\Gamma]$.*

Důkaz. Označme $x = f(u)$. Z transitivnosti Γ vyplývá, že existuje $g \in \Gamma$ takové, že $g(u) = v$ nebo $g(v) = u$. Nechť tedy $g(u) = v$, potom $x = f(v) = fg(u) = g\,f(u) = g(x)$. Zřejmě $g \neq e$, a tedy $x \in \mathfrak{M}[g] = \mathfrak{M}[\Gamma]$. Stejným způsobem dokážeme lemma pro případ, že $g(v) = u$.

Definice 2. *Řekneme, že pologrupa Γ endomorfismů na $\mathfrak{M}$ má vlastnost (β), jestliže platí:*

Nechť $f, g \in \Gamma$ $(f \neq g)$, $f(x) = g(x)$, kde $x \in \mathfrak{M}$, potom $f(x) \in \mathfrak{M}[\Gamma]$.

Lemma 5. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je silně monocyklická a má vlastnost (γ), potom má též vlastnost (β).*

Důkaz. Nechť $f, g \in \Gamma$ $(f \neq g)$, $f(x) = g(x)$, kde $x \in \mathfrak{M}$. Zřejmě $f = rg$ nebo $g = rf$, kde $r \in \Gamma$ a $r \neq e$. Nechť $f = rg$, a tedy $f(x) = r\,g(x) = r\,f(x)$, z čehož vyplývá, že $f(x) \in \mathfrak{M}[r] = \mathfrak{M}[\Gamma]$. Stejně tak i v případě, že $g = rf$.

Lemma 6. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je transitivní, komutativní, monocyklická a má vlastnost (γ). Nechť množina $\mathfrak{M}$ má levý (pravý) koncový bod, potom tento bod je význačným bodem cyklů všech $f \in \Gamma$ $(f \neq e)$ a pro všechna $f \in \Gamma$ platí $f \leqq e$ $(f \geqq e)$.*

Důkaz. Podle poznámky 2 v [1] je Γ silně monocyklická. Nechť y je levý koncový bod množiny $\mathfrak{M}$. Z lemmat 1 a 3 vyplývá, že $\{y\} = \mathfrak{M}[\Gamma]$. Nejdříve dokážeme, že pro všechna $f \in \Gamma$ platí $f \leqq e$. Předpokládejme opak, což podle věty 2 z práce [1] znamená, že existuje $f \in \Gamma$ takové, že $f > e$. Zřejmě existuje $x \in \mathfrak{M}$ takové, že $y < x$, potom též existuje $g \in \Gamma$ takové, že $g(x) = y$, a tedy $g < e$. Zvolme $u \in \mathfrak{M}$ a $n \in N$ tak, že $f^n(u) = x$. Zřejmě $g\,f^n(u) = g(x) = y < u$, a tedy $f^n g < e$ pro všechna $n \in N$, a to je spor, protože podle věty 3 a poznámky 2 v práci [1] je Γ archimedovsky uspořádaná pologrupa. Nyní dokážeme, že y je význačným bodem cyklů všech $f \in \Gamma$ $(f \neq e)$. Předpokládejme opak, což znamená, že existuje $f \in \Gamma$ $(f < e)$ takové, že pro všechna $x \in \mathfrak{M}$ $(y < x)$ a všechna $n \in N$ platí $y < f^n(x)$. Zřejmě existuje $g \in \Gamma$ takové, že $g(x) = y < f^n(x)$, a tedy $g < f^n$ pro všechna $n \in N$, a to je podle lemmatu 4 práce [1] spor.

Věta 1. *Nechť $\mathfrak{M}$ je jednoduše uspořádaná množina bez koncových bodů, potom každá transitivní, komutativní a monocyklická pologrupa endomorfismů na $\mathfrak{M}$, která má vlastnost (γ), je pologrupou automorfismů na $\mathfrak{M}$.*

Důkaz. Z věty 3 a poznámky 2 v práci [1] vyplývá, že Γ je silně monocyklická pologrupa. Nechť $f \in \Gamma$ a $f(u) = f(v)$, kde $u, v \in \mathfrak{M}$ $(u \neq v)$. Z lemmatu 4 vyplývá, že $f(u) \in \mathfrak{M}[\Gamma]$, a tedy podle lemmatu 3 je $f(u)$ koncový bod množiny $\mathfrak{M}$, a to je spor. Tedy f je automorfismus na $\mathfrak{M}$, a tím je důkaz věty 1 ukončen.

Nechť jednoduše uspořádaná množina $\mathfrak{M}$ má aspoň dva prvky. *Skokem* množiny $\mathfrak{M}$ rozumíme její podmnožinu $\{a, b\}$ ($a < b$; $a, b \in \mathfrak{M}$) takovou, že neexistuje $x \in \mathfrak{M}$, aby $a < x < b$. *Isolovaným bodem* množiny $\mathfrak{M}$ rozumíme každý její nekoncový bod, který je bodem průniku dvou různých skoků množiny $\mathfrak{M}$ a každý její koncový bod, který je bodem některého skoku množiny $\mathfrak{M}$.

Věta 2. *Jednoduše uspořádaná množina $\mathfrak{M}$ se skokem, jehož žádný bod není koncovým bodem množiny $\mathfrak{M}$, je typu ω^* nebo $\omega^* \oplus \omega$ nebo ω tehdy a jen tehdy, jestliže existuje transitivní, komutativní a monocyklická pologrupa Γ endomorfismů na $\mathfrak{M}$, která má vlastnost* (γ).

Důkaz. 1. Nechť množiny $\mathfrak{M}$ je typu ω^*. Můžeme předpokládat, že množina $\mathfrak{M}$ je jednoduše uspořádanou množinou Z všech celých nekladných čísel. Nechť $k \in Z$, potom definujme endomorfismus f_k následujícím způsobem:

$$f_k(x) = \min\,(0, x - k)\,, \quad \text{kde} \quad x \in Z\,.$$

Zřejmě platí $f_k f_l = f_{k+l}$ ($k, l \in Z$). Množina všech endomorfismů f_k ($k \in Z$) tvoří požadovanou pologrupu.

Nechť množina $\mathfrak{M}$ je typu $\omega^* \oplus \omega$. Můžeme předpokládat, že množina $\mathfrak{M}$ je jednoduše uspořádanou množinou C všech celých čísel. Zřejmě množina všech celých translací tvoří požadovanou pologrupu. Stejným způsobem dokážeme existenci požadované pologrupy v případě, že množina $\mathfrak{M}$ je typu ω.

2. Nechť existuje pologrupa Γ endomorfismů na $\mathfrak{M}$, která je transitivní, komutativní, monocyklická a která má vlastnost (γ). Nechť $\{a, b\}$ ($a < b$; $a, b \in \mathfrak{M}$) je skok množiny $\mathfrak{M}$. Pologrupa Γ je zřejmě silně monocyklická, a tudíž podle lemmatu 3 $a, b \in \mathfrak{M}(\Gamma)$. Nejdříve dokážeme, že každý bod množiny $\mathfrak{M}$ je isolovaný.

Nechť $x \in \mathfrak{M}(\Gamma)$. Zřejmě existuje $f \in \Gamma$ takové, že $f(b) = x$ nebo $f(x) = b$. Nechť $f(b) = x$. Jestliže $f(a) = x$, potom podle lemmatu 4 $x \in \mathfrak{M}[\Gamma]$, a to je spor. Tedy $f(a) < x$. Jestliže existuje $u \in \mathfrak{M}$ takové, že $f(a) < u < x$, potom existuje $v \in \mathfrak{M}$ tak, že $u = f(v)$, a tudíž $a < v < b$, a to je spor. Nechť $f(x) = b$. Zřejmě existuje $u \in \mathfrak{M}$ takové, že $f(u) = a$, a tedy $u < x$. Jestliže existuje $v \in \mathfrak{M}$ takové, že $u < v < x$, potom $a = f(u) \leqq f(v) \leqq f(x) = b$, a tudíž a nebo $b \in \mathfrak{M}[\Gamma]$, a to je spor. Dokázali jsme tedy, že x je pravým koncovým bodem skoku množiny $\mathfrak{M}$. Stejným způsobem dokážeme, že x je levým koncovým bodem některého skoku množiny $\mathfrak{M}$, a tedy x je isolovaný bod.

Nechť $x \in \mathfrak{M}[\Gamma]$, potom x je koncovým bodem množiny (viz lemma 3). Nechť tedy x je levým koncovým bodem. Zřejmě existuje $f \in \Gamma$ takové, že $f(b) = a$ nebo $f(a) = b$. Jestliže $f(a) = b$, potom $f > e$, a to je spor (viz lemma 6). Platí tedy $f(b) = a$. Podle lemmatu 6 existuje $u \in \mathfrak{M}$ ($x < u$) takové, že $f(u) = x$. Jestliže existuje $v \in \mathfrak{M}$ takové, že $x < v < u$, potom $f(v) = x$. Zřejmě existuje

$g \in \Gamma$, kde $g(u) = b$ nebo $g(b) = u$. Nechť $g(u) = b$, potom $g(x) = g\,f(u) = f\,g(u) = f(b) = a$, a tedy $g > e$, což je podle lemmatu 6 spor. Nechť $g(b) = u$, potom $g(a) = g\,f(b) = f\,g(b) = f(u) = x$ a existuje $w \in \mathfrak{M}$ takové, že $g(w) = v$, a tudíž $a < w < b$, a to je spor. Dokázali jsme tedy, že x je isolovaný bod množiny $\mathfrak{M}$. Stejným způsobem dokážeme, že pravý koncový bod x množiny $\mathfrak{M}$ je isolovaný.

Nyní dokážeme, že mezi dvěma body množiny $\mathfrak{M}$ leží pouze konečný počet bodů množiny $\mathfrak{M}$. Předpokládejme opak. Nechť tedy existují $x, y, x_n, y_n \in \mathfrak{M}$ $(n \in N)$ tak, že

$$x < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < y_n < \ldots < y_1 < y\,,$$

kde $\{x_{n-1}, x_n\}, \{y_n, y_{n-1}\}$ tvoří skoky množiny $\mathfrak{M}$ $(x_0 = x, y_0 = y)$. Nemá-li $\mathfrak{M}$ koncové body, pak Γ je pologrupa automorfismů (podle věty 1). Existují automorfismy f, g na $\mathfrak{M}$ tak, že $f(x) = x_1$, $g(x) = y$, $f \in \Gamma$ nebo $f^{-1} \in \Gamma$ a $g \in \Gamma$ nebo $g^{-1} \in \Gamma$. Platí $f^n(x) = x_n$, $f^n < g$, což je ve sporu s lemmatem 4 v [1]. Má-li $\mathfrak{M}$ levý koncový bod, pak podle lemmatu 6 existuje $f, g \in \Gamma$ tak, že $f(x_2) = x_1$, $g(y) = x$; platí tedy $g < f < e$ a přitom $f^n(x_{n+1}) = x_1$, tedy $g < f^n$, a to je spor. Stejně nemůže nastat duální případ (existence pravého koncového bodu v $\mathfrak{M}$).

Množina $\mathfrak{M}$ je nutně typu ω^* nebo $\omega^* \oplus \omega$ nebo ω, protože podle předpokladu má aspoň dva prvky a podle lemmat 1 a 3 nemá dva různé koncové body. Tím je důkaz věty 2 ukončen.

Poznámka 1. Předpoklad ve větě 2, že žádný bod skoku není koncovým bodem množiny $\mathfrak{M}$, je nutný, protože, jak ukazuje následující příklad, existuje množina se skokem, jehož jeden bod je koncovým bodem této množiny, která není ani typu ω^* ani $\omega^* \oplus \omega$ ani ω a která má transitivní, komutativní a monocyklickou pologrupu Γ endomorfismů s vlastností (γ): Buď $\mathfrak{M}$ množinou reálných čísel, kde $\mathfrak{M} = \langle 0, +\infty) - (0, 1)$. Nechť α je nezáporné reálné číslo. Definujme potom endomorfismus f_α následujícím způsobem:

$$f_\alpha(x) = x - \alpha,\ x \geqq \alpha + 1\,, \quad f_\alpha(x) = 0,\ x < \alpha + 1\,,$$

kde $x \in \mathfrak{M}$. Zřejmě $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$. Množina všech endomorfismů f_α, kde α je libovolné nezáporné reálné číslo, zřejmě tvoří pologrupu, která má požadované vlastnosti.

Nechť $A \subset \mathfrak{M}$ $(A \neq \emptyset)$. Řekneme, že množina A je *shora omezená*, jestliže existuje $y \in \mathfrak{M}$ takové, že pro všechna $x \in A$ platí $x \leqq y$. Bod y nazveme *horní závorou* množiny A. Nechť A je shora omezená podmnožina množiny $\mathfrak{M}$. Nechť $y \in \mathfrak{M}$ je její horní závora. Jestliže ke každému $x \in \mathfrak{M}$ $(x < y)$ existuje $x' \in A$ takové, že $x < x'$, potom y nazveme *supremem* množiny A a označíme $y = \sup\limits_{x \in A} x = \sup A$. Zřejmě ke každé shora omezené podmnožině množiny $\mathfrak{M}$ existuje nejvýše jedno supremum. Řekneme, že množina $\mathfrak{M}$ je *bez mezer*, jestliže ke každé shora omezené její podmnožině existuje supremum.

Nechť Γ je pologrupa endomorfismů na $\mathfrak{M}$. Nechť Δ je množina všech automorfismů na $\mathfrak{M}$, které jsou obsaženy v Γ. Symbolem Δ^{-1} označme množinu inversních automorfismů k automorfismům z Δ. *Rozšířením* pologrupy Γ endomorfismů na $\mathfrak{M}$ *o inversní prvky* budeme rozumět množinu $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \Delta^{-1}$.

Lemma 7. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je transitivní, komutativní, monocyklická a má vlastnost* (γ). *Nechť množina $\mathfrak{M}$ nemá koncové body, potom rozšíření pologrupy Γ o inversní prvky tvoří monocyklickou grupu automorfismů na $\mathfrak{M}$.*

Důkaz. Z věty 1 vyplývá, že Γ je pologrupou automorfismů na $\mathfrak{M}$. Zřejmě $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \Delta^{-1} \subset \mathfrak{S}$. Dokážeme nejdříve, že $f, g \in \overline{\Gamma} \Rightarrow fg^{-1} \in \overline{\Gamma}$. Nechť tedy $f, g \in \overline{\Gamma}$. Jestliže $f, g \in \Gamma$, potom $f = gr$ nebo $g = fr$, kde $r \in \Gamma$. Zřejmě $r = fg^{-1}$ nebo $r = gf^{-1}$, a tedy buď $fg^{-1} \in \Gamma \subset \overline{\Gamma}$ anebo $gf^{-1} \in \Gamma \Rightarrow fg^{-1} \in \overline{\Gamma}$. Jestliže $f \in \Gamma$, $g \bar{\in} \Gamma$, potom $g^{-1} \in \Gamma \Rightarrow fg^{-1} \in \Gamma \subset \overline{\Gamma}$. Jestliže $f \bar{\in} \Gamma$, $g \in \Gamma$, potom $f^{-1} \in \Gamma \Rightarrow gf^{-1} \in \Gamma \Rightarrow fg^{-1} \in \overline{\Gamma}$. Jestliže $f, g \bar{\in} \Gamma$, potom $f^{-1}, g^{-1} \in \Gamma$, a tedy buď $fg^{-1} \in \Gamma \subset \overline{\Gamma}$ anebo $gf^{-1} \in \Gamma \Rightarrow fg^{-1} \in \overline{\Gamma}$. Množina $\overline{\Gamma}$ tedy tvoří grupu, a zřejmě každý její prvek je monocyklický.

Poznámka 2. Následující příklad ukazuje, že rozšíření pologrupy automorfismů na $\mathfrak{M}$ o inversní prvky nemusí tvořit grupu. Buď $\mathfrak{M}$ množinou všech reálných čísel. Nechť $\alpha \in \mathfrak{M}$, definujme potom automorfismus f_α následujícím způsobem:

$$f_\alpha(x) = x + \alpha\,, \quad \text{kde} \quad x \in \mathfrak{M}\,.$$

Zřejmě $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$. Množina Γ všech automorfismů f_α, kde $\alpha = k + l\sqrt{2}$ (k, l jsou celá nezáporná čísla) tvoří komutativní a monocyklickou pologrupu, která není transitivní a nemá vlastnost (γ). Rozšíření $\overline{\Gamma}$ pologrupy Γ o inversní prvky zřejmě netvoří grupu, neboť $f_1, f_{-\sqrt{2}} \in \overline{\Gamma}$, ale $f_{1-\sqrt{2}} \bar{\in} \overline{\Gamma}$.

Definice 3. *Řekneme, že jednoduše uspořádaná aditivní pologrupa reálných čísel má vlastnost* (δ), *jestliže obsahuje aspoň jedno z čísel α, $-\alpha$ (α je libovolné reálné číslo).*

Poznámka 3. Zřejmě aditivní pologrupa všech nekladných nebo všech nezáporných nebo všech reálných čísel má vlastnost (δ). Existenci jiné aditivní pologrupy reálných čísel, která má vlastnost (δ), ukazuje následující příklad. Nechť $H = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ je taková Hamelova base reálných čísel (viz [3]), kde $0 < \alpha_0 < \alpha_1$. Množina A všech reálných čísel α tvaru $\alpha = a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \ldots$ kde $a_0, a_1, \ldots$ jsou racionální čísla, při čemž jich je jen konečně mnoho různých od nuly a $a_0 \leqq 0$, zřejmě tvoří aditivní pologrupu, která má vlastnost (δ), Pologrupa A neobsahuje ani všechna kladná ani všechna záporná reálná čísla. protože $\alpha_0 - \alpha_1 < 0$, $\alpha_0 > 0$ a $\alpha_0 - \alpha_1$, $\alpha_0 \bar{\in} A$.

Věta 3. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$, která má vlastnost* ($\gamma$), *je transitivní, komutativní a monocyklická. Nechť množina $\mathfrak{M}$ nemá koncové body.*

a) *Jestliže množina $\mathfrak{M}$ má skok, potom pologrupa Γ je isomorfní s jednoduše* *uspořádanou aditivní pologrupou všech celých nekladných nebo všech celých nezáporných nebo všech celý čísel.*

b) *Jestliže množina $\mathfrak{M}$ má aspoň dva prvky a nemá mezer a skoků, potom pologrupa Γ je isomorfní s jednoduše uspořádanou aditivní pologrupou reálných čísel, která má vlastnost* (δ).

Důkaz plyne z lemmatu 7 a věty 8 práce [2], jestliže si uvědomíme, že aditivní pologrupa celých čísel, která obsahuje aspoň jedno z čísel n, $-n$ (kde n je celé číslo), je pologrupou všech celých nezáporných nebo všech celých nekladných nebo všech celých čísel.[1])

Pro množinu $\mathfrak{M}$, která má koncový bod platí obdobná věta.

Věta 4. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$, která má vlastnost* ($\gamma$), *je transitivní, komutativní a monocyklická. Nechť množina $\mathfrak{M}$ má levý (pravý) koncový bod.*

a) *Jestliže množina $\mathfrak{M}$ má skok, jehož žádný bod není koncovým bodem množiny $\mathfrak{M}$, potom pologrupa Γ je isomorfní s jednoduše uspořádanou aditivní pologrupou všech celých nekladných (nezáporných) čísel.*

b) *Jestliže množina $\mathfrak{M}$ má aspoň dva prvky a nemá mezer a skoků, potom pologrupa Γ je isomorfní s jednoduše uspořádanou aditivní pologrupou všech nekladných (nezáporných) reálných čísel.*

Dříve než přistoupíme k důkazu této věty, dokážeme dvě lemmata.

Lemma A. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 4, potom množina $\mathfrak{M}$ je antipodobná s uspořádanou pologrupou Γ.*

Důkaz. Zřejmě v obou případech množina $\mathfrak{M}$ má aspoň dva prvky a nemá mezer (viz větu 2). Předpokládejme, že množina $\mathfrak{M}$ má levý koncový bod y. Definujme zobrazení φ pologrupy Γ do množiny $\mathfrak{M}$ následujícím způsobem:

$$\varphi(f) = \sup F \; (f \in \Gamma) ,$$

kde F je množina všech $x \in \mathfrak{M}$ takových, že $f(x) = y$. Jestliže $y < x < f[\varphi(f)]$, potom existuje $u \in \mathfrak{M}$ tak, že $f(u) = x$. Zřejmě $u < \varphi(f)$, a tedy existuje $v \in \mathfrak{M}$ tak, že $f(v) = y$ a $u < v$, z čehož plyne, že $x \leqq y$, a to je spor. Jestliže $\{y, f[\varphi(f)]\}$ je skok množiny $\mathfrak{M}$, potom existuje $x \in \mathfrak{M}$ takové, že $\{x, \varphi(f)\}$ je opět skok. Zřejmě $x < \varphi(f)$, a tedy existuje $u \in \mathfrak{M}$ tak, že $f(u) = y$ a $x < u$, z čehož plyne, že $\varphi(f) \leqq u \Rightarrow f[\varphi(f)] \leqq y$, a to je spor. Platí tedy $y = f[\varphi(f)]$.

Nyní dokážeme, že zobrazení φ je prosté. Předpokládejme opak. Nechť tedy existují $f, g \in \Gamma$ ($f \neq g$) taková, že $\varphi(f) = \varphi(g)$. Nechť $f = rg$, kde $r \in \Gamma$. Nechť $y < x$ ($x \in \mathfrak{M}$), potom existuje $u \in \mathfrak{M}$ tak, že $x = g(u)$. Zřejmě $\varphi(f) = \varphi(g) < u$, z čehož plyne, že $y < f(u) = r\, g(u) = r(x)$, a tedy podle lemmatu 6 $r = e$. Tedy $f = g$, a to je spor.

[1]) Dokážeme, že zmíněná pologrupa obsahuje všechna celá čísla, obsahuje-li číslo kladné i záporné. Nechť a (b) je nejmenší (největší) kladné (záporné) číslo pologrupy. Je-li c číslo pologrupy, potom $c = ap + r$ (kde p, r jsou celá čísla a $0 \leqq r < a$) a $r = c - pa$ patří do pologrupy, a tedy $r = 0$, což znamená, že a/c. Podobně dokážeme, že b/c. Pologrupa nutně obsahuje 1 nebo -1, a tudíž $a = 1$ a $b = -1$. Odtud tvrzení.

Dále dokážeme, že φ je zobrazení plné. Zřejmě $\varphi(e) = y$. Nechť je tedy dáno $x \in \mathfrak{M}$ takové, že $y < x$. Zřejmě existuje $f \in \Gamma$ $(f \neq e)$ takové, že $y = f(x)$, a tedy existuje $u \in \mathfrak{M}$ takové, že $x = f(u)$ a $x < u$. Nechť Δ je množinou všech $h \in \Gamma$ takových, že $h(x) = y$. Zřejmě $h(u) < u$ pro $h \in \Delta$. Označme $v = \sup_{h \in \Delta} \{h(u)\}$. Zřejmě $x \leqq v \leqq u$, protože $f \in \Delta$. Z transitivnosti a z lemmatu 6 vyplývá, že existuje $g \in \Gamma$ takové, že $v = g(u)$. Jestliže $y < z < g(x) = g\,f(u) = f\,g(u) = f(v)$, potom existuje $w \in \mathfrak{M}$ tak, že $z = f(w)$. Zřejmě $w < v$, a tedy existuje $h \in \Delta$ takové, že $w < h(u)$, potom $y < z \leqq f\,h(u) = h\,f(u) = h(x) = y$, a to je spor. Jestliže $\{y, g(x)\}$ tvoří skok, potom existuje $w \in \mathfrak{M}$ takové, že $\{w, v\}$ tvoří též skok. Zřejmě $w < v$, a tedy existuje $h \in \Delta$ takové, že $w < h(u)$, potom $y < g(x) = f(v) = f\,h(u) = h\,f(u) = h(x) = y$, a to je spor. Tedy $y = g(x)$. Zřejmě $g \in \Delta$, $g \neq e$, a tedy $v < u$. Předpokládejme, že existuje $w \in \mathfrak{M}$ takové, že $x < w$ a $g(w) = y$. Zřejmě existuje $r \in \Gamma$ takové, že $x = r(w)$, a tedy $r \neq e$. Dále existuje $z \in \mathfrak{M}$ takové, že $y = r(z)$ a $y < z$. Zřejmě $z < w$, a tedy existuje $k \in \Gamma$ takové, že $z = k(w)$. Ze vztahu $y = r(z) = r\,k(w) = k\,r(w) = k(x)$ vyplývá, že $k \in \Delta$. Tedy platí $g < k$, protože $g(w) = y < z = k(w)$, a tudíž $g(u) \leqq k(u)$. Jestliže $g(u) < k(u)$, potom $v < k(u)$, a to je spor. Jestliže $g(u) = k(u)$, potom podle lemmatu 5 $y = v$, a to je spor.

Zbývá dokázat, že φ je antipodobné zobrazení. Předpokládejme opak. Nechť tedy existují $f, g \in \Gamma$ $(f \leqq g)$ taková, že $\varphi(f) < \varphi(g)$. Potom $g[\varphi(g)] = y = f[\varphi(f)] < f[\varphi(g)]$, a tudíž $g < f$, a to je spor. Platí tedy $\varphi(f) \geqq \varphi(g)$, a tím je důkaz lemmatu A ukončen, protože stejným způsobem bychom dokázali lemma A v případě, že množina $\mathfrak{M}$ má pravý koncový bod.

Lemma B. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 4, potom pro $f, g \in \Gamma$ $(f \neq e)$ platí $u = \varphi(fg)$ tehdy a jen tehdy, jestliže $g(u) = \varphi(f)$.*

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat lemma B pro případ, že množina $\mathfrak{M}$ má levý koncový bod. Užijme označení z důkazu lemmatu A. Nechť $u = \varphi(fg)$. Jestliže $\varphi(f) < g(u)$, potom $y < f\,g(u) = f\,g[\varphi(fg)] = y$, a to je spor. Jestliže $g(u) < \varphi(f)$, potom existuje $v \in \mathfrak{M}$ takové, že $\varphi(f) = g(v)$, a tedy $u < v$. Podle předpokladu je $\varphi(fg) = u < v$, a tudíž $y < f\,g(v) = f[\varphi(f)] = y$, a to je spor. Tedy $g(u) = \varphi(f)$.

Nechť $g(u) = \varphi(f)$. Zřejmě $f\,g(u) = f[\varphi(f)] = y$, a tudíž $u \leqq \varphi(fg)$. Jestliže $u < \varphi(fg)$, potom z nerovnosti $f \neq e$ a z lemmatu 4 vyplývá, že $y < \varphi(f) = g(u) < g[\varphi(fg)]$, z čehož $y < f\,g[\varphi(fg)] = y$, a to je spor. Tedy $u = \varphi(fg)$.

Důkaz věty. Dokážeme větu pro případ, že množina $\mathfrak{M}$ má levý koncový bod y. Nechť $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \times \{1\} \cup \overline{\mathfrak{M}} \times \{0\}$, kde $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} - \{y\}$. Množinu $\mathfrak{M}'$ uspořádáme následujícím způsobem:

$$(x, 1) < (z, 1) \Leftrightarrow x < z\,, \quad \text{kde} \quad x, z \in \mathfrak{M}\,;$$
$$(x, 0) < (z, 1)\,, \quad \text{kde} \quad x \in \overline{\mathfrak{M}},\ z \in \mathfrak{M}\,;$$
$$(x, 0) < (z, 0) \Leftrightarrow x > z\,, \quad \text{kde} \quad x, z \in \overline{\mathfrak{M}}\,.$$

Zřejmě $\mathfrak{M}'$ tvoří jednoduše uspořádanou množinu bez koncových bodů.

Nechť e' je identický automorfismus na $\mathfrak{M}'$. Nechť $f \in \Gamma$ ($f \neq e$). Definujme monocyklický automorfismus f' na $\mathfrak{M}'$ následujícím způsobem:

$$f'(x, 1) = (f(x), 1), \quad \text{kde} \quad \varphi(f) \leqq x \in \mathfrak{M};$$
$$f'(x, 1) = (\varphi(r), 0), \quad \text{kde} \quad \varphi(f) > x \in \overline{\mathfrak{M}} \text{ a } r \in \Gamma \ (r \neq e)$$

takové, že $x = r[\varphi(f)]$ (podle lemmatu 5 existuje právě jedno r);

$$f'(y, 1) = (\varphi(f), 0);$$
$$f'(x, 0) = (u, 0), \quad \text{kde} \quad x, u \in \overline{\mathfrak{M}} \text{ a } x = f(u)$$

(podle lemmatu 4 existuje právě jedno u).

Nejdříve dokážeme vztah $(fg)' = f'g'$ pro $f, g \in \Gamma$. Pro $f = e$ nebo $g = e$ je důkaz triviální. Nechť tedy $f \neq e \neq g$, potom platí $y < \varphi(g) < \varphi(fg)$. Jestliže $\varphi(fg) \leqq x \in \mathfrak{M}$, potom podle lemmatu B $\varphi(f) = g[\varphi(fg)] \leqq g(x)$, a platí tedy $(fg)'(x, 1) = (f\,g(x), 1) = f'(g(x), 1) = f'\,g'(x, 1)$. Jestliže $\varphi(g) < x < \varphi(fg)$ ($x \in \mathfrak{M}$), potom $y < g(x) < \varphi(f) = g[\varphi(fg)]$, a existují tedy $r, h \in \Gamma$ taková, že $x = r[\varphi(fg)]$ a $g(x) = h[\varphi(f)]$. Dle lemmatu 5 $r = h$, protože $h[\varphi(f)] = g(x) = g\,r[\varphi(fg)] = r\,g[\varphi(fg)] = r[\varphi(f)]$. Tedy $(fg)'(x, 1) = (\varphi(r), 0) = (\varphi(h), 0) = f'(g(x), 1) = f'\,g'(x, 1)$. Jestliže $x = \varphi(g)$, potom existuje $r \in \Gamma$ takové, že $r[\varphi(fg)] = x = \varphi(g) = f[\varphi(fg)]$, z čehož $r = f$. Tedy $(fg)'(x, 1) = (\varphi(f), 0) = f'(y, 1) = f'\,g'(x, 1)$. Jestliže $\varphi(g) > x \in \overline{\mathfrak{M}}$, potom existují $r, h \in \Gamma$ taková, že $x = r[\varphi(fg)]$ a $x = h[\varphi(g)]$. Dle lemmatu 5 $hf = r$, protože $r[\varphi(fg)] = h[\varphi(g)] = h\,f[\varphi(fg)]$. Tedy $(fg)'(x, 1) = (\varphi(r), 0) = f'(\varphi(h), 0) = f'\,g'(x, 1)$, protože $f[\varphi(r)] = f[\varphi(fh)] = \varphi(h)$. Jestliže $x = y$, potom $(fg)'(x, 1) = (\varphi(fg), 0) = f'(\varphi(g), 0) = f'\,g'(x, 1)$, protože $f[\varphi(fg)] = \varphi(g)$. Jestliže $x \in \overline{\mathfrak{M}}$, potom $(fg)'(x, 0) = (u, 0)$, kde $f\,g(u) = x (u \in \overline{\mathfrak{M}})$ a $f'\,g'(x, 0) = f'(v, 0) = (w, 0)$, kde $g(v) = x$ a $f(w) = v$ ($v, w \in \overline{\mathfrak{M}}$). Dle lemmatu 4 $u = w$, protože $y < x = g(v) = g\,f(w) = f\,g(w) = f\,g(u)$.

Nyní dokážeme, že $f < g$ $(f, g \in \Gamma) \Rightarrow f' < g'$. Implikace zřejmě platí, jestliže $g = e$. Nechť tedy $f < g < e$ ($f, g \in \Gamma$), potom $y < \varphi(g) < \varphi(f)$. Tedy $f'(y, 1) = (\varphi(f), 0) < (\varphi(g), 0) = g'(y, 1)$, z čehož $f' < g'$.

Označme Γ' množinu všech f', kde $f \in \Gamma$. Zřejmě Γ' tvoří monocyklickou a komutativní pologrupu automorfismů na $\mathfrak{M}'$, která má vlastnost (γ). Pologrupy Γ a Γ' jsou isomorfní a podobné.

Zbývá dokázat, že pologrupa Γ' je na $\mathfrak{M}'$ transitivní. Jestliže $(x, 1) \leqq (z, 1)$, kde $x, z \in \overline{\mathfrak{M}}$, potom existuje $f \in \Gamma$ takové, že $x = f(z)$ a $\varphi(f) < z$. Tedy $f'(z, 1) = (f(z), 1) = (x, 1)$. Jestliže $(y, 1) \leqq (z, 1)$, kde $z \in \mathfrak{M}$, potom existuje $f \in \Gamma$ takové, že $z = \varphi(f)$. Tedy $f'(z, 1) = (f(z), 1) = (y, 1)$. Jestliže $(x, 0) < (z, 1)$, kde $x \in \overline{\mathfrak{M}}$ a $z \in \mathfrak{M}$, potom existují $f, g \in \Gamma$ taková, že $x = \varphi(f)$ a $z = \varphi(g)$. Tedy $f'\,g'(z, 1) = f'(g(z), 1) = f'(y, 1) = (\varphi(f), 0) = (x, 0)$. Jestliže $(x, 0) \leqq (z, 0)$, kde $x, z \in \overline{\mathfrak{M}}$, potom existuje $f \in \Gamma$ takové, že $z = f(x)$. Tedy $f'(z, 0) = (x, 0)$.