ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

3

85

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 85 • Č. 3 • STR. 263—388 • PRAHA 18. VIII. 1960

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky“*)
SVAZEK 85 (1960)

OBSAH

Články:

Bedřich Pondělíček, Poděbrady: O jisté pologrupě endomorfismů na jedné uspořádané množině, II 263
Ladislav Drs, Praha: Centrální axonometrie v n-rozměrném prostoru 274
Karel Svoboda, Brno: Poznámka o minimálních plochách s kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru 291
Josef Vala, Brno: O Cartanově parametru na nepřímkových plochách 300
Vladimír Doležal, Praha: O nejednoznačnosti řešení soustavy diferenciálních rovnic .. 311
Milan Sekanina, Brno: O jisté vlastnosti soustav nezávislých prvků v abelovské grupě 338
Alois Švec, Praha: Geometrický význam projektivních normál rovinné vrstvy křivek 342
Hana Svobodová a *Jiří Vaníček*, Praha: Optimální regulace 345
Ярослав Курцвеил, Прага: Заметка по колеблющимся решениям уравнения $y'' + f(x)y^{2n-1} = 0$ 357

Různé:

Otakar Leminger, Ústí nad Labem: Poznámka o praktickém použití křivky kochleoidy 359

Recense:

Otakar Zich a kol.: Moderní logika (*K. Čulík*) 361
K. Prachar, Primzahlverteilung; *W. Specht*, Elementare Beweise der Primzahlsätze (*V. Jarník*) 364
Sophie Piccard: Sur le bases des groupes d'ordre fini (*K. Rychlík*) 372
Pál Imre: Térláttatós ábrázoló mértan (Deskriptívna geometria v anaglyfoch (*K. Rečičár*) 373
Josef Filip: Prehľad deskriptivnej geometrie (*K. Drábek*) 375
André Angot: Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry (*V. Doležal*) 375

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 85 * PRAHA 18. VIII. 1960 * ČÍSLO 3

O JISTÉ POLOGRUPĚ ENDOMORFISMŮ NA JEDNODUŠE USPOŘÁDANÉ MNOŽINĚ, II

BEDŘICH PONDĚLÍČEK, Poděbrady

(Došlo dne 13. března 1959)

Článek je druhou částí autorovy práce [1] a zobecňuje některé výsledky § 2 článku [2] pro pologrupu Γ s vlastností (γ), zavedenou v 1. části práce, která je jistou pologrupou endomorfismů na jednoduše uspořádané množině $\mathfrak{M}$. V článku se studují vztahy mezi vlastnostmi pologrupy Γ a uspořádáním množiny $\mathfrak{M}$.

V článku budeme používat označení a pojmů, uvedených v práci [1].

Definice 1. *Nechť $\Gamma \subset \mathfrak{H}$, $Q \subset \mathfrak{M}$. Řekneme, že Γ je transitivní na Q, jestliže ke každým dvěma $x, y \in Q$ existuje $f \in \Gamma$ takové, že $f(x) = y$ nebo $x = f(y)$.*

Jestliže $Q = \mathfrak{M}$, potom řekneme, že Γ je transitivní.

Lemma 1. *Nechť $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je transitivní, potom množina $\mathfrak{M}[\Gamma]$ má nejvýše jeden prvek.*

Důkaz. Nechť $\mathfrak{M}[\Gamma]$ má dva různé prvky x, y, potom existuje $f \in \Gamma$ takové, že $f(x) = y$ nebo $f(y) = x$. Tedy $y = f(x) = x$ nebo $x = f(y) = y$, což v obou případech je spor.

Lemma 2. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je transitivní na $\mathfrak{M}(\Gamma)$, potom Γ je divergentní.*

Důkaz je zřejmý.

Lemma 3. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je transitivní, silně monocyklická a má vlastnost (γ), potom bod $x \in \mathfrak{M}$ je koncovým bodem množiny $\mathfrak{M}$ tehdy a jen tehdy, jestliže $x \in \mathfrak{M}[\Gamma]$.*

Důkaz. Nechť x je levý koncový bod množiny $\mathfrak{M}$. Předpokládejme, že $x \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, potom existuje $f \in \Gamma$ takové, že $x < f(x)$. Nechť $x = f(u)$, kde $u \in \mathfrak{M}$, a tedy $x < u$. Zřejmě $f(x) \leqq f(u) = x$, a to je spor. Stejným způsobem dojdeme ke sporu v případě, že x je pravý koncový bod množiny $\mathfrak{M}$. Tedy $x \in \mathfrak{M}[\Gamma]$.

Nechť $x \in \mathfrak{M}[\Gamma]$ a není koncovým bodem množiny $\mathfrak{M}$. Zřejmě existují $u, v \in \mathfrak{M}$ taková, že $u < x < v$. Množina $\mathfrak{M}$ má tedy aspoň tři prvky, z čehož vyplývá, že transitivní pologrupa Γ má aspoň jeden endomorfismus $f \neq e$. Z předpokladu, že Γ je silně monocyklická pologrupa a z lemmatu 1 vyplývá, že $u, v \in \mathfrak{M}(f)$. Tedy $u \neq f(u) \leqq f(x) = x \leqq f(v) \neq v$, a to je spor, protože Γ je silně monocyklická pologrupa, která nemá oboustranné cykly.

Lemma 4. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je transitivní, komutativní a silně monocyklická. Nechť $f(u) = f(v)$, kde $u, v \in \mathfrak{M}$ $(u \neq v)$ a $f \in \Gamma$, potom $f(u) \in \mathfrak{M}[\Gamma]$.*

Důkaz. Označme $x = f(u)$. Z transitivnosti Γ vyplývá, že existuje $g \in \Gamma$ takové, že $g(u) = v$ nebo $g(v) = u$. Nechť tedy $g(u) = v$, potom $x = f(v) = fg(u) = g\,f(u) = g(x)$. Zřejmě $g \neq e$, a tedy $x \in \mathfrak{M}[g] = \mathfrak{M}[\Gamma]$. Stejným způsobem dokážeme lemma pro případ, že $g(v) = u$.

Definice 2. *Řekneme, že pologrupa Γ endomorfismů na $\mathfrak{M}$ má vlastnost* (β), *jestliže platí:*

Nechť $f, g \in \Gamma$ $(f \neq g)$, $f(x) = g(x)$, kde $x \in \mathfrak{M}$, potom $f(x) \in \mathfrak{M}[\Gamma]$.

Lemma 5. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je silně monocyklická a má vlastnost* (γ), *potom má též vlastnost* (β).

Důkaz. Nechť $f, g \in \Gamma$ $(f \neq g)$, $f(x) = g(x)$, kde $x \in \mathfrak{M}$. Zřejmě $f = rg$ nebo $g = rf$, kde $r \in \Gamma$ a $r \neq e$. Nechť $f = rg$, a tedy $f(x) = r\,g(x) = r\,f(x)$, z čehož vyplývá, že $f(x) \in \mathfrak{M}[r] = \mathfrak{M}[\Gamma]$. Stejně tak i v případě, že $g = rf$.

Lemma 6. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je transitivní, komutativní, monocyklická a má vlastnost* (γ). *Nechť množina $\mathfrak{M}$ má levý (pravý) koncový bod, potom tento bod je význačným bodem cyklů všech $f \in \Gamma$ $(f \neq e)$ a pro všechna $f \in \Gamma$ platí $f \leqq e$ $(f \geqq e)$.*

Důkaz. Podle poznámky 2 v [1] je Γ silně monocyklická. Nechť y je levý koncový bod množiny $\mathfrak{M}$. Z lemmat 1 a 3 vyplývá, že $\{y\} = \mathfrak{M}[\Gamma]$. Nejdříve dokážeme, že pro všechna $f \in \Gamma$ platí $f \leqq e$. Předpokládejme opak, což podle věty 2 z práce [1] znamená, že existuje $f \in \Gamma$ takové, že $f > e$. Zřejmě existuje $x \in \mathfrak{M}$ takové, že $y < x$, potom též existuje $g \in \Gamma$ takové, že $g(x) = y$, a tedy $g < e$. Zvolme $u \in \mathfrak{M}$ a $n \in N$ tak, že $f^n(u) = x$. Zřejmě $g\,f^n(u) = g(x) = y < u$, a tedy $f^n g < e$ pro všechna $n \in N$, a to je spor, protože podle věty 3 a poznámky 2 v práci [1] je Γ archimedovsky uspořádaná pologrupa. Nyní dokážeme, že y je význačným bodem cyklů všech $f \in \Gamma$ $(f \neq e)$. Předpokládejme opak, což znamená, že existuje $f \in \Gamma$ $(f < e)$ takové, že pro všechna $x \in \mathfrak{M}$ $(y < x)$ a všechna $n \in N$ platí $y < f^n(x)$. Zřejmě existuje $g \in \Gamma$ takové, že $g(x) = y < f^n(x)$, a tedy $g < f^n$ pro všechna $n \in N$, a to je podle lemmatu 4 práce [1] spor.

Věta 1. *Nechť $\mathfrak{M}$ je jednoduše uspořádaná množina bez koncových bodů, potom každá transitivní, komutativní a monocyklická pologrupa endomorfismů na $\mathfrak{M}$, která má vlastnost* (γ), *je pologrupou automorfismů na $\mathfrak{M}$.*

Důkaz. Z věty 3 a poznámky 2 v práci [1] vyplývá, že Γ je silně monocyklická pologrupa. Nechť $f \in \Gamma$ a $f(u) = f(v)$, kde $u, v \in \mathfrak{M}$ $(u \neq v)$. Z lemmatu 4 vyplývá, že $f(u) \in \mathfrak{M}[\Gamma]$, a tedy podle lemmatu 3 je $f(u)$ koncový bod množiny $\mathfrak{M}$, a to je spor. Tedy f je automorfismus na $\mathfrak{M}$, a tím je důkaz věty 1 ukončen.

Nechť jednoduše uspořádaná množina $\mathfrak{M}$ má aspoň dva prvky. *Skokem* množiny $\mathfrak{M}$ rozumíme její podmnožinu $\{a, b\}$ $(a < b;\ a, b \in \mathfrak{M})$ takovou, že neexistuje $x \in \mathfrak{M}$, aby $a < x < b$. *Isolovaným bodem* množiny $\mathfrak{M}$ rozumíme každý její nekoncový bod, který je bodem průniku dvou různých skoků množiny $\mathfrak{M}$ a každý její koncový bod, který je bodem některého skoku množiny $\mathfrak{M}$.

Věta 2. *Jednoduše uspořádaná množina $\mathfrak{M}$ se skokem, jehož žádný bod není koncovým bodem množiny $\mathfrak{M}$, je typu ω^* nebo $\omega^* \oplus \omega$ nebo ω tehdy a jen tehdy, jestliže existuje transitivní, komutativní a monocyklická pologrupa Γ endomorfismů na $\mathfrak{M}$, která má vlastnost* (γ).

Důkaz. 1. Nechť množiny $\mathfrak{M}$ je typu ω^*. Můžeme předpokládat, že množina $\mathfrak{M}$ je jednoduše uspořádanou množinou Z všech celých nekladných čísel. Nechť $k \in Z$, potom definujme endomorfismus f_k následujícím způsobem:

$$f_k(x) = \min\,(0, x - k)\,, \quad \text{kde} \quad x \in Z\,.$$

Zřejmě platí $f_k f_l = f_{k+l}$ $(k, l \in Z)$. Množina všech endomorfismů f_k $(k \in Z)$ tvoří požadovanou pologrupu.

Nechť množina $\mathfrak{M}$ je typu $\omega^* \oplus \omega$. Můžeme předpokládat, že množina $\mathfrak{M}$ je jednoduše uspořádanou množinou C všech celých čísel. Zřejmě množina všech celých translací tvoří požadovanou pologrupu. Stejným způsobem dokážeme existenci požadované pologrupy v případě, že množina $\mathfrak{M}$ je typu ω.

2. Nechť existuje pologrupa Γ endomorfismů na $\mathfrak{M}$, která je transitivní, komutativní, monocyklická a která má vlastnost (γ). Nechť $\{a, b\}$ $(a < b;$ $a, b \in \mathfrak{M})$ je skok množiny $\mathfrak{M}$. Pologrupa Γ je zřejmě silně monocyklická, a tudíž podle lemmatu 3 $a, b \in \mathfrak{M}(\Gamma)$. Nejdříve dokážeme, že každý bod množiny $\mathfrak{M}$ je isolovaný.

Nechť $x \in \mathfrak{M}(\Gamma)$. Zřejmě existuje $f \in \Gamma$ takové, že $f(b) = x$ nebo $f(x) = b$. Nechť $f(b) = x$. Jestliže $f(a) = x$, potom podle lemmatu 4 $x \in \mathfrak{M}[\Gamma]$, a to je spor. Tedy $f(a) < x$. Jestliže existuje $u \in \mathfrak{M}$ takové, že $f(a) < u < x$, potom existuje $v \in \mathfrak{M}$ tak, že $u = f(v)$, a tudíž $a < v < b$, a to je spor. Nechť $f(x) = b$. Zřejmě existuje $u \in \mathfrak{M}$ takové, že $f(u) = a$, a tedy $u < x$. Jestliže existuje $v \in \mathfrak{M}$ takové, že $u < v < x$, potom $a = f(u) \leqq f(v) \leqq f(x) = b$, a tudíž a nebo $b \in \mathfrak{M}[\Gamma]$, a to je spor. Dokázali jsme tedy, že x je pravým koncovým bodem skoku množiny $\mathfrak{M}$. Stejným způsobem dokážeme, že x je levým koncovým bodem některého skoku množiny $\mathfrak{M}$, a tedy x je isolovaný bod.

Nechť $x \in \mathfrak{M}[\Gamma]$, potom x je koncovým bodem množiny (viz lemma 3). Nechť tedy x je levým koncovým bodem. Zřejmě existuje $f \in \Gamma$ takové, že $f(b) = a$ nebo $f(a) = b$. Jestliže $f(a) = b$, potom $f > e$, a to je spor (viz lemma 6). Platí tedy $f(b) = a$. Podle lemmatu 6 existuje $u \in \mathfrak{M}$ $(x < u)$ takové, že $f(u) = x$. Jestliže existuje $v \in \mathfrak{M}$ takové, že $x < v < u$, potom $f(v) = x$. Zřejmě existuje

$g \in \Gamma$, kde $g(u) = b$ nebo $g(b) = u$. Nechť $g(u) = b$, potom $g(x) = g\,f(u) = f\,g(u) = f(b) = a$, a tedy $g > e$, což je podle lemmatu 6 spor. Nechť $g(b) = u$, potom $g(a) = g\,f(b) = f\,g(b) = f(u) = x$ a existuje $w \in \mathfrak{M}$ takové, že $g(w) = v$, a tudíž $a < w < b$, a to je spor. Dokázali jsme tedy, že x je isolovaný bod množiny $\mathfrak{M}$. Stejným způsobem dokážeme, že pravý koncový bod x množiny $\mathfrak{M}$ je isolovaný.

Nyní dokážeme, že mezi dvěma body množiny $\mathfrak{M}$ leží pouze konečný počet bodů množiny $\mathfrak{M}$. Předpokládejme opak. Nechť tedy existují $x, y, x_n, y_n \in \mathfrak{M}$ $(n \in N)$ tak, že

$$x < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < y_n < \ldots < y_1 < y\,,$$

kde $\{x_{n-1}, x_n\}, \{y_n, y_{n-1}\}$ tvoří skoky množiny $\mathfrak{M}$ $(x_0 = x, y_0 = y)$. Nemá-li $\mathfrak{M}$ koncové body, pak Γ je pologrupa automorfismů (podle věty 1). Existují automorfismy f, g na $\mathfrak{M}$ tak, že $f(x) = x_1$, $g(x) = y$, $f \in \Gamma$ nebo $f^{-1} \in \Gamma$ a $g \in \Gamma$ nebo $g^{-1} \in \Gamma$. Platí $f^n(x) = x_n$, $f^n < g$, což je ve sporu s lemmatem 4 v [1]. Má-li $\mathfrak{M}$ levý koncový bod, pak podle lemmatu 6 existuje $f, g \in \Gamma$ tak, že $f(x_2) = x_1$, $g(y) = x$; platí tedy $g < f < e$ a přitom $f^n(x_{n+1}) = x_1$, tedy $g < f^n$, a to je spor. Stejně nemůže nastat duální případ (existence pravého koncového bodu v $\mathfrak{M}$).

Množina $\mathfrak{M}$ je nutně typu ω^* nebo $\omega^* \oplus \omega$ nebo ω, protože podle předpokladu má aspoň dva prvky a podle lemmat 1 a 3 nemá dva různé koncové body. Tím je důkaz věty 2 ukončen.

P o z n á m k a 1. Předpoklad ve větě 2, že žádný bod skoku není koncovým bodem množiny $\mathfrak{M}$, je nutný, protože, jak ukazuje následující příklad, existuje množina se skokem, jehož jeden bod je koncovým bodem této množiny, která není ani typu ω^* ani $\omega^* \oplus \omega$ ani ω a která má transitivní, komutativní a monocyklickou pologrupu Γ endomorfismů s vlastností (γ): Buď $\mathfrak{M}$ množinou reálných čísel, kde $\mathfrak{M} = \langle 0, +\infty) - (0, 1)$. Nechť α je nezáporné reálné číslo. Definujme potom endomorfismus f_α následujícím způsobem:

$$f_\alpha(x) = x - \alpha,\ x \geqq \alpha + 1\,, \quad f_\alpha(x) = 0,\ x < \alpha + 1\,,$$

kde $x \in \mathfrak{M}$. Zřejmě $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$. Množina všech endomorfismů f_α, kde α je libovolné nezáporné reálné číslo, zřejmě tvoří pologrupu, která má požadované vlastnosti.

Nechť $A \subset \mathfrak{M}$ $(A \neq \emptyset)$. Řekneme, že množina A je *shora omezená*, jestliže existuje $y \in \mathfrak{M}$ takové, že pro všechna $x \in A$ platí $x \leqq y$. Bod y nazveme *horní závorou* množiny A. Nechť A je shora omezená podmnožina množiny $\mathfrak{M}$. Nechť $y \in \mathfrak{M}$ je její horní závora. Jestliže ke každému $x \in \mathfrak{M}$ $(x < y)$ existuje $x' \in A$ takové, že $x < x'$, potom y nazveme *supremem* množiny A a označíme $y = \sup\limits_{x \in A} x = \sup A$. Zřejmě ke každé shora omezené podmnožině množiny $\mathfrak{M}$ existuje nejvýše jedno supremum. Řekneme, že množina $\mathfrak{M}$ je *bez mezer*, jestliže ke každé shora omezené její podmnožině existuje supremum.

Nechť Γ je pologrupa endomorfismů na $\mathfrak{M}$. Nechť Δ je množina všech automorfismů na $\mathfrak{M}$, které jsou obsaženy v Γ. Symbolem Δ^{-1} označme množinu inversních automorfismů k automorfismům z Δ. *Rozšířením* pologrupy Γ endomorfismů na $\mathfrak{M}$ *o inversní prvky* budeme rozumět množinu $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \Delta^{-1}$.

Lemma 7. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ je transitivní, komutativní, monocyklická a má vlastnost (γ). Nechť množina $\mathfrak{M}$ nemá koncové body, potom rozšíření pologrupy Γ o inversní prvky tvoří monocyklickou grupu automorfismů na $\mathfrak{M}$.*

Důkaz. Z věty 1 vyplývá, že Γ je pologrupou automorfismů na $\mathfrak{M}$. Zřejmě $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \Delta^{-1} \subset \mathfrak{S}$. Dokážeme nejdříve, že $f, g \in \overline{\Gamma} \Rightarrow fg^{-1} \in \overline{\Gamma}$. Nechť tedy $f, g \in \overline{\Gamma}$. Jestliže $f, g \in \Gamma$, potom $f = gr$ nebo $g = fr$, kde $r \in \Gamma$. Zřejmě $r = fg^{-1}$ nebo $r = gf^{-1}$, a tedy buď $fg^{-1} \in \Gamma \subset \overline{\Gamma}$ anebo $gf^{-1} \in \Gamma \Rightarrow fg^{-1} \in \overline{\Gamma}$. Jestliže $f \in \Gamma$, $g \bar{\in} \Gamma$, potom $g^{-1} \in \Gamma \Rightarrow fg^{-1} \in \Gamma \subset \overline{\Gamma}$. Jestliže $f \bar{\in} \Gamma$, $g \in \Gamma$, potom $f^{-1} \in \Gamma \Rightarrow gf^{-1} \in \Gamma \Rightarrow fg^{-1} \in \overline{\Gamma}$. Jestliže $f, g \bar{\in} \Gamma$, potom $f^{-1}, g^{-1} \in \Gamma$, a tedy buď $fg^{-1} \in \Gamma \subset \overline{\Gamma}$ anebo $gf^{-1} \in \Gamma \Rightarrow fg^{-1} \in \overline{\Gamma}$. Množina $\overline{\Gamma}$ tedy tvoří grupu, a zřejmě každý její prvek je monocyklický.

Poznámka 2. Následující příklad ukazuje, že rozšíření pologrupy automorfismů na $\mathfrak{M}$ o inversní prvky nemusí tvořit grupu. Buď $\mathfrak{M}$ množinou všech reálných čísel. Nechť $\alpha \in \mathfrak{M}$, definujme potom automorfismus f_α následujícím způsobem:

$$f_\alpha(x) = x + \alpha\,, \quad \text{kde} \quad x \in \mathfrak{M}\,.$$

Zřejmě $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$. Množina Γ všech automorfismů f_α, kde $\alpha = k + l\sqrt{2}$ (k, l jsou celá nezáporná čísla) tvoří komutativní a monocyklickou pologrupu, která není transitivní a nemá vlastnost (γ). Rozšíření $\overline{\Gamma}$ pologrupy Γ o inversní prvky zřejmě netvoří grupu, neboť $f_1, f_{-\sqrt{2}} \in \overline{\Gamma}$, ale $f_{1-\sqrt{2}} \bar{\in} \overline{\Gamma}$.

Definice 3. *Řekneme, že jednoduše uspořádaná aditivní pologrupa reálných čísel má vlastnost (δ), jestliže obsahuje aspoň jedno z čísel α, $-\alpha$ (α je libovolné reálné číslo).*

Poznámka 3. Zřejmě aditivní pologrupa všech nekladných nebo všech nezáporných nebo všech reálných čísel má vlastnost (δ). Existenci jiné aditivní pologrupy reálných čísel, která má vlastnost (δ), ukazuje následující příklad. Nechť $H = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ je taková Hamelova base reálných čísel (viz [3]), kde $0 < \alpha_0 < \alpha_1$. Množina A všech reálných čísel α tvaru $\alpha = a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \ldots$ kde $a_0, a_1, \ldots$ jsou racionální čísla, při čemž jich je jen konečně mnoho různých od nuly a $a_0 \leqq 0$, zřejmě tvoří aditivní pologrupu, která má vlastnost (δ), Pologrupa A neobsahuje ani všechna kladná ani všechna záporná reálná čísla. protože $\alpha_0 - \alpha_1 < 0$, $\alpha_0 > 0$ a $\alpha_0 - \alpha_1$, $\alpha_0 \bar{\in} A$.

Věta 3. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$, která má vlastnost ($\gamma$), je transitivní, komutativní a monocyklická. Nechť množina $\mathfrak{M}$ nemá koncové body.*

a) *Jestliže množina $\mathfrak{M}$ má skok, potom pologrupa Γ je isomorfní s jednoduše* *uspořádanou aditivní pologrupou všech celých nekladných nebo všech celých nezáporných nebo všech celý čísel.*

b) *Jestliže množina $\mathfrak{M}$ má aspoň dva prvky a nemá mezer a skoků, potom pologrupa Γ je isomorfní s jednoduše uspořádanou aditivní pologrupou reálných čísel, která má vlastnost* (δ).

Důkaz plyne z lemmatu 7 a věty 8 práce [2], jestliže si uvědomíme, že aditivní pologrupa celých čísel, která obsahuje aspoň jedno z čísel n, $-n$ (kde n je celé číslo), je pologrupou všech celých nezáporných nebo všech celých nekladných nebo všech celých čísel.[1])

Pro množinu $\mathfrak{M}$, která má koncový bod platí obdobná věta.

Věta 4. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$, která má vlastnost* ($\gamma$), *je transitivní, komutativní a monocyklická. Nechť množina $\mathfrak{M}$ má levý (pravý) koncový bod.*

a) *Jestliže množina $\mathfrak{M}$ má skok, jehož žádný bod není koncovým bodem množiny $\mathfrak{M}$, potom pologrupa Γ je isomorfní s jednoduše uspořádanou aditivní pologrupou všech celých nekladných (nezáporných) čísel.*

b) *Jestliže množina $\mathfrak{M}$ má aspoň dva prvky a nemá mezer a skoků, potom pologrupa Γ je isomorfní s jednoduše uspořádanou aditivní pologrupou všech nekladných (nezáporných) reálných čísel.*

Dříve než přistoupíme k důkazu této věty, dokážeme dvě lemmata.

Lemma A. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 4, potom množina $\mathfrak{M}$ je antipodobná s uspořádanou pologrupou Γ.*

Důkaz. Zřejmě v obou případech množina $\mathfrak{M}$ má aspoň dva prvky a nemá mezer (viz větu 2). Předpokládejme, že množina $\mathfrak{M}$ má levý koncový bod y. Definujme zobrazení φ pologrupy Γ do množiny $\mathfrak{M}$ následujícím způsobem:

$$\varphi(f) = \sup F \ (f \in \Gamma)\,,$$

kde F je množina všech $x \in \mathfrak{M}$ takových, že $f(x) = y$. Jestliže $y < x < f[\varphi(f)]$, potom existuje $u \in \mathfrak{M}$ tak, že $f(u) = x$. Zřejmě $u < \varphi(f)$, a tedy existuje $v \in \mathfrak{M}$ tak, že $f(v) = y$ a $u < v$, z čehož plyne, že $x \leqq y$, a to je spor. Jestliže $\{y, f[\varphi(f)]\}$ je skok množiny $\mathfrak{M}$, potom existuje $x \in \mathfrak{M}$ takové, že $\{x, \varphi(f)\}$ je opět skok. Zřejmě $x < \varphi(f)$, a tedy existuje $u \in \mathfrak{M}$ tak, že $f(u) = y$ a $x < u$, z čehož plyne, že $\varphi(f) \leqq u \Rightarrow f[\varphi(f)] \leqq y$, a to je spor. Platí tedy $y = f[\varphi(f)]$.

Nyní dokážeme, že zobrazení φ je prosté. Předpokládejme opak. Nechť tedy existují $f, g \in \Gamma$ ($f \neq g$) taková, že $\varphi(f) = \varphi(g)$. Nechť $f = rg$, kde $r \in \Gamma$. Nechť $y < x$ ($x \in \mathfrak{M}$), potom existuje $u \in \mathfrak{M}$ tak, že $x = g(u)$. Zřejmě $\varphi(f) = \varphi(g) < u$, z čehož plyne, že $y < f(u) = r\,g(u) = r(x)$, a tedy podle lemmatu 6 $r = e$. Tedy $f = g$, a to je spor.

[1]) Dokážeme, že zmíněná pologrupa obsahuje všechna celá čísla, obsahuje-li číslo kladné i záporné. Nechť a (b) je nejmenší (největší) kladné (záporné) číslo pologrupy. Je-li c číslo pologrupy, potom $c = ap + r$ (kde p, r jsou celá čísla a $0 \leqq r < a$) a $r = c - pa$ patří do pologrupy, a tedy $r = 0$, což znamená, že a/c. Podobně dokážeme, že b/c. Pologrupa nutně obsahuje 1 nebo -1, a tudíž $a = 1$ a $b = -1$. Odtud tvrzení.

Dále dokážeme, že φ je zobrazení plné. Zřejmě $\varphi(e) = y$. Nechť je tedy dáno $x \in \mathfrak{M}$ takové, že $y < x$. Zřejmě existuje $f \in \Gamma$ $(f \neq e)$ takové, že $y = f(x)$, a tedy existuje $u \in \mathfrak{M}$ takové, že $x = f(u)$ a $x < u$. Nechť Δ je množinou všech $h \in \Gamma$ takových, že $h(x) = y$. Zřejmě $h(u) < u$ pro $h \in \Delta$. Označme $v = \sup_{h \in \Delta} \{h(u)\}$. Zřejmě $x \leqq v \leqq u$, protože $f \in \Delta$. Z transitivnosti a z lemmatu 6 vyplývá, že existuje $g \in \Gamma$ takové, že $v = g(u)$. Jestliže $y < z < g(x) = g\,f(u) = f\,g(u) = f(v)$, potom existuje $w \in \mathfrak{M}$ tak, že $z = f(w)$. Zřejmě $w < v$, a tedy existuje $h \in \Delta$ takové, že $w < h(u)$, potom $y < z \leqq f\,h(u) = h\,f(u) = h(x) = y$, a to je spor. Jestliže $\{y, g(x)\}$ tvoří skok, potom existuje $w \in \mathfrak{M}$ takové, že $\{w, v\}$ tvoří též skok. Zřejmě $w < v$, a tedy existuje $h \in \Delta$ takové, že $w < h(u)$, potom $y < g(x) = f(v) = f\,h(u) = h\,f(u) = h(x) = y$, a to je spor. Tedy $y = g(x)$. Zřejmě $g \in \Delta$, $g \neq e$, a tedy $v < u$. Předpokládejme, že existuje $w \in \mathfrak{M}$ takové, že $x < w$ a $g(w) = y$. Zřejmě existuje $r \in \Gamma$ takové, že $x = r(w)$, a tedy $r \neq e$. Dále existuje $z \in \mathfrak{M}$ takové, že $y = r(z)$ a $y < z$. Zřejmě $z < w$, a tedy existuje $k \in \Gamma$ takové, že $z = k(w)$. Ze vztahu $y = r(z) = r\,k(w) = k\,r(w) = k(x)$ vyplývá, že $k \in \Delta$. Tedy platí $g < k$, protože $g(w) = y < z = k(w)$, a tudíž $g(u) \leqq k(u)$. Jestliže $g(u) < k(u)$, potom $v < k(u)$, a to je spor. Jestliže $g(u) = k(u)$, potom podle lemmatu 5 $y = v$, a to je spor.

Zbývá dokázat, že φ je antipodobné zobrazení. Předpokládejme opak. Nechť tedy existují $f, g \in \Gamma$ $(f \leqq g)$ taková, že $\varphi(f) < \varphi(g)$. Potom $g[\varphi(g)] = y = f[\varphi(f)] < f[\varphi(g)]$, a tudíž $g < f$, a to je spor. Platí tedy $\varphi(f) \geqq \varphi(g)$, a tím je důkaz lemmatu A ukončen, protože stejným způsobem bychom dokázali lemma A v případě, že množina $\mathfrak{M}$ má pravý koncový bod.

Lemma B. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 4, potom pro $f, g \in \Gamma$ $(f \neq e)$ platí $u = \varphi(fg)$ tehdy a jen tehdy, jestliže $g(u) = \varphi(f)$.*

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat lemma B pro případ, že množina $\mathfrak{M}$ má levý koncový bod. Užijme označení z důkazu lemmatu A. Nechť $u = \varphi(fg)$. Jestliže $\varphi(f) < g(u)$, potom $y < f\,g(u) = f\,g[\varphi(fg)] = y$, a to je spor. Jestliže $g(u) < \varphi(f)$, potom existuje $v \in \mathfrak{M}$ takové, že $\varphi(f) = g(v)$, a tedy $u < v$. Podle předpokladu je $\varphi(fg) = u < v$, a tudíž $y < f\,g(v) = f[\varphi(f)] = y$, a to je spor. Tedy $g(u) = \varphi(f)$.

Nechť $g(u) = \varphi(f)$. Zřejmě $f\,g(u) = f[\varphi(f)] = y$, a tudíž $u \leqq \varphi(fg)$. Jestliže $u < \varphi(fg)$, potom z nerovnosti $f \neq e$ a z lemmatu 4 vyplývá, že $y < \varphi(f) = g(u) < g[\varphi(fg)]$, z čehož $y < f\,g[\varphi(fg)] = y$, a to je spor. Tedy $u = \varphi(fg)$.

Důkaz věty. Dokážeme větu pro případ, že množina $\mathfrak{M}$ má levý koncový bod y. Nechť $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \times \{1\} \cup \overline{\mathfrak{M}} \times \{0\}$, kde $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} - \{y\}$. Množinu $\mathfrak{M}'$ uspořádáme následujícím způsobem:

$$(x, 1) < (z, 1) \Leftrightarrow x < z\,, \quad \text{kde} \quad x, z \in \mathfrak{M}\,;$$
$$(x, 0) < (z, 1)\,, \quad \text{kde} \quad x \in \overline{\mathfrak{M}},\ z \in \mathfrak{M}\,;$$
$$(x, 0) < (z, 0) \Leftrightarrow x > z\,, \quad \text{kde} \quad x, z \in \overline{\mathfrak{M}}\,.$$

Zřejmě $\mathfrak{M}'$ tvoří jednoduše uspořádanou množinu bez koncových bodů.

Nechť e' je identický automorfismus na $\mathfrak{M}'$. Nechť $f \in \Gamma$ $(f \neq e)$. Definujme monocyklický automorfismus f' na $\mathfrak{M}'$ následujícím způsobem:

$$f'(x, 1) = (f(x), 1), \quad \text{kde} \quad \varphi(f) \leqq x \in \mathfrak{M};$$
$$f'(x, 1) = (\varphi(r), 0), \quad \text{kde} \quad \varphi(f) > x \in \overline{\mathfrak{M}} \text{ a } r \in \Gamma \ (r \neq e)$$

takové, že $x = r[\varphi(f)]$ (podle lemmatu 5 existuje právě jedno r);

$$f'(y, 1) = (\varphi(f), 0);$$
$$f'(x, 0) = (u, 0), \quad \text{kde} \quad x, u \in \overline{\mathfrak{M}} \text{ a } x = f(u)$$

(podle lemmatu 4 existuje právě jedno u).

Nejdříve dokážeme vztah $(fg)' = f'g'$ pro $f, g \in \Gamma$. Pro $f = e$ nebo $g = e$ je důkaz triviální. Nechť tedy $f \neq e \neq g$, potom platí $y < \varphi(g) < \varphi(fg)$. Jestliže $\varphi(fg) \leqq x \in \mathfrak{M}$, potom podle lemmatu B $\varphi(f) = g[\varphi(fg)] \leqq g(x)$, a platí tedy $(fg)'(x, 1) = (f\,g(x), 1) = f'(g(x), 1) = f'\,g'(x, 1)$. Jestliže $\varphi(g) < x < \varphi(fg)$ $(x \in \mathfrak{M})$, potom $y < g(x) < \varphi(f) = g[\varphi(fg)]$, a existují tedy $r, h \in \Gamma$ taková, že $x = r[\varphi(fg)]$ a $g(x) = h[\varphi(f)]$. Dle lemmatu 5 $r = h$, protože $h[\varphi(f)] = g(x) = g\,r[\varphi(fg)] = r\,g[\varphi(fg)] = r[\varphi(f)]$. Tedy $(fg)'(x, 1) = (\varphi(r), 0) = (\varphi(h), 0) = f'(g(x), 1) = f'\,g'(x, 1)$. Jestliže $x = \varphi(g)$, potom existuje $r \in \Gamma$ takové, že $r[\varphi(fg)] = x = \varphi(g) = f[\varphi(fg)]$, z čehož $r = f$. Tedy $(fg)'(x, 1) = (\varphi(f), 0) = f'(y, 1) = f'\,g'(x, 1)$. Jestliže $\varphi(g) > x \in \overline{\mathfrak{M}}$, potom existují $r, h \in \Gamma$ taková, že $x = r[\varphi(fg)]$ a $x = h[\varphi(g)]$. Dle lemmatu 5 $hf = r$, protože $r[\varphi(fg)] = h[\varphi(g)] = h\,f[\varphi(fg)]$. Tedy $(fg)'(x, 1) = (\varphi(r), 0) = f'(\varphi(h), 0) = f'\,g'(x, 1)$, protože $f[\varphi(r)] = f[\varphi(fh)] = \varphi(h)$. Jestliže $x = y$, potom $(fg)'(x, 1) = (\varphi(fg), 0) = f'(\varphi(g), 0) = f'\,g'(x, 1)$, protože $f[\varphi(fg)] = \varphi(g)$. Jestliže $x \in \overline{\mathfrak{M}}$, potom $(fg)'(x, 0) = (u, 0)$, kde $f\,g(u) = x (u \in \overline{\mathfrak{M}})$ a $f'\,g'(x, 0) = f'(v, 0) = (w, 0)$, kde $g(v) = x$ a $f(w) = v$ $(v, w \in \overline{\mathfrak{M}})$. Dle lemmatu 4 $u = w$, protože $y < x = g(v) = g\,f(w) = f\,g(w) = f\,g(u)$.

Nyní dokážeme, že $f < g$ $(f, g \in \Gamma) \Rightarrow f' < g'$. Implikace zřejmě platí, jestliže $g = e$. Nechť tedy $f < g < e$ $(f, g \in \Gamma)$, potom $y < \varphi(g) < \varphi(f)$. Tedy $f'(y, 1) = (\varphi(f), 0) < (\varphi(g), 0) = g'(y, 1)$, z čehož $f' < g'$.

Označme Γ' množinu všech f', kde $f \in \Gamma$. Zřejmě Γ' tvoří monocyklickou a komutativní pologrupu automorfismů na $\mathfrak{M}'$, která má vlastnost (γ). Pologrupy Γ a Γ' jsou isomorfní a podobné.

Zbývá dokázat, že pologrupa Γ' je na $\mathfrak{M}'$ transitivní. Jestliže $(x, 1) \leqq (z, 1)$, kde $x, z \in \mathfrak{M}$, potom existuje $f \in \Gamma$ takové, že $x = f(z)$ a $\varphi(f) < z$. Tedy $f'(z, 1) = (f(z), 1) = (x, 1)$. Jestliže $(y, 1) \leqq (z, 1)$, kde $z \in \mathfrak{M}$, potom existuje $f \in \Gamma$ takové, že $z = \varphi(f)$. Tedy $f'(z, 1) = (f(z), 1) = (y, 1)$. Jestliže $(x, 0) < (z, 1)$, kde $x \in \overline{\mathfrak{M}}$ a $z \in \mathfrak{M}$, potom existují $f, g \in \Gamma$ taková, že $x = \varphi(f)$ a $z = \varphi(g)$. Tedy $f'\,g'(z, 1) = f'(g(z), 1) = f'(y, 1) = (\varphi(f), 0) = (x, 0)$. Jestliže $(x, 0) \leqq (z, 0)$, kde $x, z \in \overline{\mathfrak{M}}$, potom existuje $f \in \Gamma$ takové, že $z = f(x)$. Tedy $f'(z, 0) = (x, 0)$.

Dokončení důkazu je velmi snadné, jestliže si uvědomíme, že

a) pologrupa Γ' automorfismů na $\mathfrak{M}'$ splňuje předpoklady věty 3,
b) pologrupy Γ a Γ' jsou isomorfní a podobné,
c) podle lemmatu 6 pro všechna $f \in \Gamma$ platí $f \leqq e$.

Literatura

[1] *B. Pondělíček*: O jisté pologrupě endomorfismů na jednoduše uspořádané množině, I, Čas. pro pěstování matematiky, *84* (1959), 177—182.

[2] *F. Šik*: Automorphismen geordneter Mengen, Čas. pro pěstování matematiky, *83* (1958), 1—22.

[3] *G. Hamel*: Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$, Mathematische Annalen, *60* (1905), 459—462.

Резюме

ОБ ОПРЕДЕЛЕННОЙ ПОЛУГРУППЕ ЭНДОМОРФИЗМОВ НА ПРОСТО УПОРЯДОЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ, II

БЕДРЖИХ ПОНДЕЛИЧЕК (Bedřich Pondělíček), Poděbrady

Статья исходит из работы [1] и обобщает некоторые результаты 2§ статьи [2] для определенной полугруппы эндоморфизмов на просто упорядоченном множестве $\mathfrak{M}$. Здесь доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$—просто упорядоченное множество без концов, то всякая транзитивная, коммутативная и моноциклическая полугруппа эндоморфизмов на $\mathfrak{M}$, которая обладает свойством (γ), является полугруппой афтоморфизмов на $\mathfrak{M}$.*

Теорема 2. *Просто упорядоченное множество $\mathfrak{M}$, обладающее скачком, которого никакая точка не является концом множества $\mathfrak{M}$, является множеством типа ω^* или $\omega^* \oplus \omega$ или ω тогда и только тогда, если существует транзитивная, коммутативная и моноцилическая полугруппа Γ эндоморфизмов на $\mathfrak{M}$, которая обладает свойством (γ).*

Теорема 4. *Пусть Γ—полугруппа эндоморфизмов на $\mathfrak{M}$, которая обладает свойством (γ) и она является транзитивной, коммутативной и моноциклической. Пусть множество $\mathfrak{M}$ содержит левый (правый) конец.*

a) *Если множество $\mathfrak{M}$ обладает скачком, которого никакая точка не является концом множества $\mathfrak{M}$, то полугруппа Γ изоморфна просто упорядоченной аддитивной полугруппе всех целых неположительных (неотрицательных) чисел.*

б) *Если множество $\mathfrak{M}$ содержит по крайней мере два элемента и не обладает ни скачком ни простветом, то полугруппа Γ изоморфна просто упорядоченной аддитивной полугруппе всех неположительных (неотрицательных) действительных чисел.*

Теорема 3. *Пусть Γ—полугруппа эндоморфизмов на $\mathfrak{M}$, которая обладает свойством* (γ) *и она является транзитивной, коммутативной и моноциклической. Пусть множество $\mathfrak{M}$ без концов.*

а) *Если множество $\mathfrak{M}$ обладает скачком, то полугруппа Γ изоморфна просто упорядоченной аддитивной полугруппе всех целых неположительных или целых неотрицательных или всех целых чисел.*

б) *Если множество $\mathfrak{M}$ содержит по крайней мере два элемента и не обладает ни скачком ни просветом, то полугруппа Γ изоморфна просто упорядоченной аддитивной полугруппе действительных чисел, которая обладает свойством* (δ).

Мы будем говорить, что просто упорядоченная аддитивная полугруппа действительных чисел обладает свойством (δ), если она содержит по крайней мере одно из чисел α, $-\alpha$ (α произвольное действительное число).

Zusammenfassung

ÜBER EINE HALBGRUPPE DER ENDOMORPHISMEN AUF EINER EINFACH GEORDNETEN MENGE, II

Bedřich Pondělíček, Poděbrady

Der vorliegende Artikel ist eine Fortsetzung der Arbeit [1] und verallgemeinert einige Resultate §2, Artikel [2] für eine Halbgruppe der Endomorphismen auf einer einfach geordneten Menge $\mathfrak{M}$. Es werden folgende Sätze beweisen:

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine einfach geordnete Menge ohne Endpunkte. Dann ist jede transitive, kommutative und monozyklische Halbgruppe der Endomorphismen auf $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft* (γ) *eine Halbgruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$.*

Satz 2. *Eine einfach geordnete Menge $\mathfrak{M}$ mit einem Sprung, dessen kein Punkt der Endpunkt der Menge $\mathfrak{M}$ ist, ist dann und nur dann vom Typus ω^* oder $\omega^* \oplus \omega$ oder ω, wenn eine transitive, kommutative und monozyklische Halbgruppe Γ der Endomorphismen auf $\mathfrak{M}$ existiert, welche die Eigenschaft* (γ) *hat.*

Satz 4. *Es sei Γ eine transitive, kommutative und monozyklische Halbgruppe der Endomorphismen auf $\mathfrak{M}$, welche die Eigenschaft* (γ) *hat. Die Menge $\mathfrak{M}$ habe den linken (rechten) Endpunkt.*

a) *Wenn die Menge* $\mathfrak{M}$ *einen Sprung hat, dessen kein Punkt der Endpunkt der Menge* $\mathfrak{M}$ *ist, so ist die Halbgruppe* Γ *isomorph mit der einfach geordneten additiven Halbgruppe aller ganzen nichtpositiven (nichtnegativen) Zahlen.*

b) *Wenn die Menge* $\mathfrak{M}$ *mindestens zwei Punkte und keine Lücken und keine Sprünge hat, dann ist die Halbgruppe* Γ *isomorph mit der einfach geordneten additiven Halbgruppe aller nichtpositiven (nichtnegativen) reellen Zahlen.*

Satz 3. *Es sei* Γ *eine transitive kommutative und monozyklische Halbgruppe der Endomorphismen auf* $\mathfrak{M}$, *welche die Eigenschaft* (γ) *hat, Die Menge* $\mathfrak{M}$ *habe keine Endpunkte.*

a) *Wenn die Menge* $\mathfrak{M}$ *einen Sprung hat, dann ist die Halbgruppe* Γ *isomorph mit der einfach geordneten additiven Halbgruppe aller ganzen nichtpositiven oder aller ganzen nichtnegativen oder aller ganzen Zahlen.*

b) *Wenn die Menge* $\mathfrak{M}$ *mindestens zwei Punkte und keine Lücken und keine Sprünge hat, dann ist die Halbgruppe* Γ *mit einer einfach geordneten additiven Halbgruppe der reellen Zahlen, welche die Eigenschaft* (δ) *hat, isomorph.*

Man sagt, dass eine einfach geordnete additive Halbgruppe der reellen Zahlen die Eigenschaft (δ) hat, wenn sie mindestens eine der Zahlen α, $-\alpha$ (α ist eine beliebige reelle Zahl) enthält.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE V n-ROZMĚRNÉM PROSTORU

LADISLAV DRS, Praha

(Došlo dne 26. května 1959)

V článku se vyšetřují vlastnosti axonometrických soustav, tj. vlastnosti středového průmětu souřadnicové soustavy do vlastní nadroviny. Na základě těchto vlastností se pak uvádějí konstrukce axonometrických soustav.

I. ÚVOD

Definice 1. *Souřadnicová soustava v* $\mathbf{P}^n$ [1]) je uspořádaná skupina n bodových trojic O, A_i, B_i $(0 \neq A_i \neq B_i \neq O)$, přičemž body O, A_i, B_i leží na přímce x_i, *rameni* soustavy a ramena $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou lineárně nezávislá. Označíme ji $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$.

Definice 2. Uspořádaná skupina n bodových trojic O', A'_i, B'_i $(O' \neq A'_i \neq B'_i \neq O')$, přičemž body O', A'_i, B'_i leží na přímce x'_i a přímky $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ lineárně vytvářejí vlastní nadrovinu, je *d-konfigurace*, přímky $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ jsou *ramena* této d-konfigurace. Označíme ji $\mathfrak{K}^n = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$.

Definice 3. *Axonometrická soustava* je průmět souřadnicové soustavy z některého bodu, který neleží na žádném rameni soustavy do některé vlastní nadroviny.[2]) *Každá axonometrická soustava je d-konfigurací.*

Vyšetřujme promítání, při němž se souřadnicová soustava $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ s rameny $x_1, x_2, \ldots, x_n$ promítá do axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ s rameny $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Pak volbou reálných čísel $l_1, l_2, \ldots, l_n$ lze k bodu L, který má v souřadnicové soustavě na rameni x_i souřadnici l_i snadno sestrojit jeho průmět L'. Ten má na rameni x'_i souřadnici l_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, neboť sousouřadnice jsou při promítání invariantní.

Budeme se dále zabývat otázkou, kdy je daná d-konfigurace průmětem některé souřadnicové soustavy shodné s danou souřadnicovou soustavou. Důkazy známých vět budeme uvádět jen tam, kde jsou potřebné pro další úvahy.

[1]) $\mathbf{P}^n$ $(n \geqq 3)$ je n-rozměrný rozšířený eukleidovský prostor.

[2]) Mluvíme-li o průmětu, předpokládáme, že střed promítání neleží v průmětně.

Jsou-li v souřadnicové soustavě $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nevlastní, nazveme ji „normalisovanou soustavou".[3])

Věta 1. *Nechť v d-konfiguraci $\mathfrak{K}^n = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ jsou $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ nevlastní body. Pak tato konfigurace je průmětem souřadnicové soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ shodné s danou normalisovanou soustavou $\mathfrak{S}^{n\cdot} = \{O^\cdot, A^\cdot_i, B^\cdot_i\}_1^n$ právě tehdy, když simplexy $\mathfrak{A}^\cdot = \{A^\cdot_1, A^\cdot_2, \ldots, A^\cdot_n\}$, $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ jsou podobné.*[4])

Důkaz. Podmínka je nutná. Nechť daná konfigurace $\mathfrak{K}^n$ je průmětem souřadnicové soustavy $\mathfrak{S}^n$ shodné se soustavou $\mathfrak{S}^{n\cdot}$ z bodu C. Body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pak leží v nadrovině $\gamma \parallel \pi$, $C \in \gamma$.[5]) Dále jest $x_i \parallel CB_i$, takže průsečíky A_i, B'_i přímek x_i, CB_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, s nadrovinami γ, π jsou vrcholy podobných simplexů $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$; tedy i simplexy $\mathfrak{A}^\cdot$, $\mathfrak{B}'$ jsou podobné.

Podmínka je dostačující. Nechť $\mathfrak{A}^\cdot$, $\mathfrak{B}'$ jsou podobné simplexy. Modul jejich podobnosti budiž m.[6])

K simplexu $\{O^\cdot, A^\cdot_1, A^\cdot_2, \ldots, A^\cdot_n\}$ stanovíme podobný simplex $\{C, B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ a tím určíme dvojznačně bod C. Na přímce $O'C$ stanovíme (opět dvojznačně) bod O tak, aby platilo $CO = m \,.\, CO'$. Sestrojíme přímku x_i, $O \in x_i \parallel \parallel CB'_i$, její průsečík s nadrovinou γ, $C \in \gamma \parallel \pi$ označíme A_i, její nevlastní bod B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Simplex $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ je shodný se simplexem $\mathfrak{A}^\cdot = \{A^\cdot_1, A^\cdot_2, \ldots, A^\cdot_n\}$ a souřadnicová soustava $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ takto vzniklá je shodná se soustavou $\mathfrak{S}^{n\cdot}$ a jejím průmětem z bodu C do nadroviny π je právě $\mathfrak{S}^{n\prime}$.

Definice 4. Jakoukoli část některé d-konfigurace nazveme *částečnou konfigurací.*

Poučka 1. *Nechť je dána částečná konfigurace $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, B'_1, A'_2, B'_2\}$*[7]) *s nevlastními body A'_1, A'_2, a dále normalisovaná soustava $\mathfrak{S}^{n\cdot} = \{O^\cdot, A^\cdot_i, B^\cdot_i\}_1^n$. Pak existuje axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ s nevlastními body $A'_1, A'_2, \ldots, A'_1{}^n$, která je průmětem souřadnicové soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ shodné se $\mathfrak{S}^{n\cdot}$.*

Důkaz. a) Budiž $n = 3$. Je-li $x'_1 = O'A'_1 \neq x'_2 = O'A'_2$ určíme v rovině $x'_1x'_2$ simplex $\mathfrak{B}^3 = \{B'_1, B'_2, B'_3\}$ podobný simplexu $\mathfrak{A}^3 = \{A^\cdot_1, A^\cdot_2, A^\cdot_3\}$. Přímka $O'B'_3 = x'_3$ je určena dvojznačně. Její nevlastní bod budiž A'_3. Pak je $\{O', A'_i, B'_i\}_1^3$ hledaná axonometrická soustava. Je-li $x'_1 = x'_2$, sestrojme simplex $\mathfrak{B}^3$

[3]) V práci [7] tzv. „normalisovaná desarguesovská konfigurace".

[4]) Viz [7] věta 1, [8] věta 8, 2, [12] str. 104.

[5]) π značí pevnou vlastní nadrovinu. Písmeny malé řecké abecedy označujeme nadroviny.

[6]) Modul podobnosti dvou simplexů $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ je m, platí-li pro délky d_1, d_2 odpovídajících si úseček $d_2 = md_1$.

[7]) Zápis znamená, že existuje d-konfigurace $\{O^*, A_i{}^*, B_i{}^*\}_1{}^n$ tak, že $O^* = O'$, $A_1{}^* = A_1{}'$, $B_1{}^* = B_1{}'$, $A_2{}^* = A_2{}'$, $B_2{}^* = B_2{}'$. Analogicky při dalších zápisech částečných konfigurací.

podobný $\mathfrak{A}^3$ v libovolné rovině $\varrho \supset x_1'$. Vezmeme-li za x_3' libovolnou z přímek vzniklých otáčením přímky $O'B_3'$ kolem x_1' a za A_3' její nevlastní bod, pak je $\{O', A_i', B_i'\}_1^3$ hledaná axonometrická soustava. Bod C simplexu $\{C, B_1', B_2', B_3'\}$ podobného simplexu $\{O^{\cdot}, A_1^{\cdot}, A_2^{\cdot}, A_3^{\cdot}\}$ je středem promítání, z něhož se normalisovaná soustava $\{O, A_i, B_i\}_1^3$ shodná se soustavou $\{O^{\cdot}, A_i^{\cdot}, B_i^{\cdot}\}_1^3$ (a jejíž konstrukce je uvedena v důkazu věty 1) promítá do $\{O', A_i', B_i'\}_1^3$.

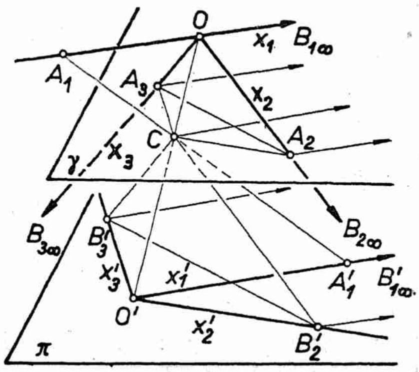
b) Podle a) sestrojíme axonometrickou soustavu $\mathfrak{S}^{3'} = \{O', A_i', B_i'\}_1^3$, střed promítání C a normalisovanou soustavu $\mathfrak{S}^3 = \{O, A_i', B_i'\}_1^3$, promítající se z C do $\mathfrak{S}^{3'}$. Soustavu rozšíříme na normalisovanou soustavu $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ shodnou s danou soustavou $\mathfrak{S}^n$. Pak promítneme $\mathfrak{S}^n$ z bodu C do libovolné nadroviny ϱ, která obsahuje výchozí částečnou konfiguraci $\mathfrak{k}$ a neobsahuje bod C. Průmětem soustavy $\mathfrak{S}^n$ z bodu C je hledaná axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n'} = \{O', A_i', B_i'\}_1^n \supset \{O', A_i', B_i'\}_1^3$.

Poučku lze dokázat ještě jiným způsobem při němž provádíme konstrukce pouze v prostoru $\mathbf{P}^{n-1}$. Podle a) platí poučka pro $n = 3$. Nechť platí pro $m = n - 1$. Simplex $\{B_1', B_2', \ldots, B_{n-1}'\}$ je podobný simplexu $\{A_1^{\cdot}, A_2^{\cdot}, \ldots, A_{n-1}^{\cdot}\}$. V nadrovině $\pi \supset \{O', A_i', B_i'\}_1^{n-1}$ sestrojíme způsobem, který bude dále uveden, bod B_n' tak, aby simplexy $\{B_1', B_2', \ldots, B_n'\}$, $\{A_1^{\cdot}, A_2^{\cdot}, \ldots, A_n^{\cdot}\}$ byly podobné. Položme $x_n' = O'B_n'$ a dále označme A_n' nevlastní bod přímky x_n'. Pak je konfigurace $\{O', A_i', B_i'\}_1^n$ axonometrickou soustavou. Otáčíme-li v π přímku $B_n'B_{n-1}'$ kolem podprostoru $\langle B_1', B_2', \ldots, B_{n-2}\rangle$, pak vznikne regulus $\mathbf{R}$ kvadratické variety. Body B_{n-1}', B_n' se otáčejí po kružnicích b_{n-1}', b_n'. Každá z povrchových přímek kuželové plochy $\langle O', b_{n-1}'\rangle$ může být vybrána za přímku x_{n-1}'. Protíná-li takto zvolená přímka x_{n-1}' kružnici b_{n-1}' v bodě B_{n-1}', pak přímka regulu $\mathbf{R}$ jdoucí bodem B_{n-1}' protíná kružnici b_n' v bodě B_n', takže $x_n' = O'B_n'$. Tím je určen simplex $\mathfrak{B}' = \{B_1', B_2', \ldots, B_n'\}$ podobný simplexu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ a podle věty 1 je vskutku $\{O', A_i', B_i'\}_1^n$ axonometrickou soustavou, která je průmětem určité souřadnicové soustavy $\{O, A_i, B_i\}_1^n$ shodné s $\{O^{\cdot}, A^{\cdot}, B_i^{\cdot}\}_1^n$.

Poučka 2. *Nechť je $2 \leq m < n$. Nechť je dána částečná konfigurace $\mathfrak{k} = \{O', A_i', B_i'\}_1^m$ s nevlastními body $A_1', A_2', \ldots, A_m'$ a normalisovaná soustava $\mathfrak{S}^{n\cdot} = \{O^{\cdot}, A_i^{\cdot}, B_i^{\cdot}\}_1^n$ taková, že simplexy $\mathfrak{B}' = \{B_1', B_2', \ldots, B_m'\}$, $\mathfrak{A}^{\cdot} = \{A_1^{\cdot}, A_2^{\cdot}, \ldots, A_m^{\cdot}\}$ jsou podobné. Pak existuje axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n'} = \{O', A_i', B_i'\}_1^n$ s nevlastními body $A_1', A_2', \ldots, A_n'$, která je průmětem soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ shodné se $\mathfrak{S}^{n\cdot}$.*

Důkaz. Podle věty 1 existuje střed C a soustava $\mathfrak{S}^m = \{O, A_i, B_i\}_1^m$ shodná se $\mathfrak{S}^{m\cdot} = \{O^{\cdot}, A_i^{\cdot}, B^{\cdot}\}_1^m$ taková, že průmět $\mathfrak{S}^m$ z C do $(m - 1)$-roviny částečné konfigurace $\mathfrak{k}$ je právě $\mathfrak{k}$. Soustavu $\mathfrak{S}^m$ rozšíříme na soustavu $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_{i1}^n\}$ shodnou s danou soustavou $\mathfrak{S}^{n\cdot}$. Promítneme-li $\mathfrak{S}^n$ z bodu C do libovolné nadroviny ϱ, která obsahuje konfiguraci $\mathfrak{k}$ a neobsahuje bod C, získáme hledanou axonometrickou soustavu $\mathfrak{S}^{n'}$.

Poučka 3. *Nechť je dána částečná konfigurace $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, A'_2, A'_3\}$ s nevlastními body A'_1, A'_2, A'_3, dále normalisovaná soustava $\mathfrak{S}^{n\cdot} = \{O^{\cdot}, A^{\cdot}_i, B^{\cdot}_i\}_1^n$ a nechť je $\sphericalangle A'_1O'A'_3 \neq \sphericalangle A^{\cdot}_1A^{\cdot}_2A^{\cdot}_3$. Pak existuje axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n'} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ s nevlastními body $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, která je průmětem soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ shodné se $\mathfrak{S}^{n\cdot}$.*



Obr. 1.

Důkaz. a) $n = 3$. Je-li $\sphericalangle A^{\cdot}_1A^{\cdot}_2A^{\cdot}_3 \neq \sphericalangle A'_1O'A'_3$ a pohybují-li se první dva vrcholy simplexu $\{B'_1, B'_2, B'_3\}$ podobného simplexu $\{A^{\cdot}_1, A^{\cdot}_2, A^{\cdot}_3\}$ v rovině $\langle O', A'_1, A'_2, A'_3\rangle$ po přímkách x'_1, x'_2, pohybuje se třetí vrchol po elipse e se středem O. Průsečíky elipsy e s přímkou x'_3 stanoví dvě polohy trojúhelníka $B'_1B'_2B'_3$ podobného s $A^{\cdot}_1A^{\cdot}_2A^{\cdot}_3$, majícího vrchol B'_3 na x'_3. Odtud plyne podle věty 1 důkaz.

b) Podle a) sestrojíme axonometrickou soustavu $\mathfrak{S}^{3'} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^3$, střed promítání C a normalisovanou soustavu $\mathfrak{S}^3 = \{O, A_i, B_i\}_1^3$, která se z C promítá do $\mathfrak{S}^{3'}$. Soustavu $\mathfrak{S}^3$ rozšíříme na normalisovanou soustavu $\mathfrak{S}^n$ shodnou se $\mathfrak{S}^{n\cdot}$. Pak promítneme $\mathfrak{S}^n$ z bodu C do libovolné nadroviny ϱ, která obsahuje částečnou konfiguraci $\mathfrak{k}$ a neobsahuje bod C. Průmětem soustavy $\mathfrak{S}^n$ z C je hledaná axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n'} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$.

Věta 2. *Nechť je dána d-konfigurace $\mathfrak{K}^n = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ v π s nevlastními body $B'_1, B'_2, \ldots, B'_k, A'_{k+1}, A'_{k+2}, \ldots, A'_n$, $1 \leqq k < n$ a normalisovaná soustava $\mathfrak{S}^{n\cdot} = \{O^{\cdot}, A^{\cdot}_i, B^{\cdot}_i\}_1^n$. Potom je konfigurace $\mathfrak{K}^n$ průmětem souřadnicové soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ shodné se $\mathfrak{S}^{n\cdot}$ právě tehdy, když simplexy $\{B^{\cdot}_1, B^{\cdot}_2, \ldots, B^{\cdot}_k, A^{\cdot}_{k+1}, A^{\cdot}_{k+2}, \ldots, A^{\cdot}_n\}$ a $\{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ jsou podobné a když dále platí $O^{\cdot}A^{\cdot}_1 : O'A'_1 = O^{\cdot}A^{\cdot}_2 : O'A'_2 = \ldots = O^{\cdot}A^{\cdot}_k : O'A'_k = m$, kde m je modul podobnosti obou simplexů.*

Důkaz. (Obr. 1.) Podmínky jsou nutné. Nechť je $\mathfrak{K}^n$ průmět normalisované soustavy $\mathfrak{S}^n$ shodné se $\mathfrak{S}^{n\cdot}$ z bodu C. Pak z věty 1 plyne, že simplexy $\{B^{\cdot}_1, B^{\cdot}_2, \ldots, B^{\cdot}_k, A^{\cdot}_{k+1}, A^{\cdot}_{k+2}, \ldots, A^{\cdot}_n\}$, $\{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ jsou podobné. Je-li m modul jejich podobnosti, platí dále $CO : CO' = m$. Protože nevlastním bodům $B_1, B_2, \ldots, B_k$ odpovídají nevlastní body $B'_1, B'_2, \ldots, B'_k$ platí $x_1 \parallel x'_1$, $x_2 \parallel x'_2, \ldots, x_k \parallel x'_k$ a tedy $OA_1 : O'A'_1 = OA_2 : O'A'_2 = \ldots = OA_k : O'A'_k = CO : CO' = m$,

Podmínky stačí. Nechť simplexy $\{B^{\cdot}_1, B^{\cdot}_2, \ldots, B^{\cdot}_k, A^{\cdot}_{k+1}, A^{\cdot}_{k+2} \ldots, A^{\cdot}_n\}$ a $\{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ jsou podobné. Pak k simplexu $\{O^{\cdot}, B^{\cdot}_1, B^{\cdot}_2, \ldots, B^{\cdot}_k, A^{\cdot}_{k+1}, A^{\cdot}_{k+2}, \ldots, A^{\cdot}_n\}$ stanovíme simplex podobný $\{C, B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$. Budiž m modul podobnosti obou simplexů. Bod C zvolme za střed promítání. Na přímce CO' najdeme dvojznačně bod O z podmínky $CO : CO' = m$. Bodem O vedeme přímky

$x_1 = OB'_1,\ x_2 = OB'_2, \ldots, x_k = OB'_k,\ x_{k+1} \parallel CB'_{k+1},\ x_{k+2} \parallel CB'_{k+2}, \ldots, x_n \parallel CB'_n$. Pak je $x_1 \parallel x'_1,\ x_2 \parallel x'_2, \ldots, x_k \parallel x'_k$. Budiž dále $A_i = x_i \cap \gamma$, $i = k + 1, k + 2, \ldots, n$, kde γ je bodem C vedená nadrovina rovnoběžně s π, B_i budiž nevlastní bod přímky x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zvolme na přímce x_i bod A_i tak, aby $OA_i : O'A'_i = m$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Pak přímka $A_iA'_i$ prochází bodem C, $i = 1, 2, \ldots, k$, a takto určená normalisovaná soustava $\{O, A_i, B_i\}_1^n$ se z bodu C promítá právě do konfigurace $\mathfrak{K}^n$.

Poučka 4. *Nechť je dána částečná konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, B'_1, A'_2, B'_2\}$ *v* π *s nevlastními body* A'_1, B'_2 *a dále normalisovaná soustava* $\mathfrak{S}^{3\cdot} = \{O^\cdot, A^\cdot_i, B^\cdot_i\}_1^3$. *Pak existuje axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{3'} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^3$ *s nevlastním bodem* A'_3, *která je průmětem soustavy* $\mathfrak{S}^3 = \{O, A_i, B_i\}_1^3$ *shodné se* $\mathfrak{S}^{3\cdot}$.

Důkaz. Nechť platí předpoklady poučky. Pak určíme v π simplex $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, B'_3\}$ podobný simplexu $\{A^\cdot_1, B^\cdot_2, A^\cdot_3\}$ tak, aby modul jejich podobnosti byl $m = O^\cdot A^\cdot_2 : O'A'_2$. Pak je přímka $O'B'_3$ třetím ramenem a nevlastní bod A'_3 přímky $O'B'_3$ bodem axonometrické soustavy $\{O', A'_i, B'_i\}_1^3$, která je průmětem soustavy shodné se $\mathfrak{S}^{3\cdot}$.

Poučka 5. *Nechť je dána konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, B'_1, A'_2, B'_2\}$ v π *s nevlastními body a)* A'_1, A'_2, *b)* A'_1, B'_2 *a normalisovaná soustava* $\mathfrak{S}^{3\cdot} = \{O^\cdot, A^\cdot_i, B^\cdot_i\}_1^3$. *Pak existuje axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{3'} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^3$ *s nevlastním bodem* B'_3, *která je průmětem soustavy shodné se* $\mathfrak{S}^{3\cdot}$.

Důkaz. Nechť platí předpoklady poučky. Pak určíme v rovině π simplex $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, B'_3\}$ podobný simplexu a) $\{A^\cdot_1, A^\cdot_2, B^\cdot_3\}$, b) $\{B^\cdot_1, B^\cdot_2, A^\cdot_3\}$. Pak přímka $O'B'_3$ je třetím ramenem axonometrické soustavy $\{O', A'_i, B'_i\}_1^3$, jejíž bod A'_3 určíme z podmínky a) $O^\cdot A^\cdot_3 : O'A'_3 = A^\cdot_1A^\cdot_2 : B'_1B'_2$, b) $O^\cdot A^\cdot_2 : O'A'_2 = O'A'_3 : O'A'_3$, a která je průmětem soustavy shodné se $\mathfrak{S}^{3\cdot}$.

Poučka 6. *Nechť je dána konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, B'_1, A'_2, B'_2\}$ *v* π *s nevlastními body* A'_1, A'_2 *a normalisovaná souřadnicová soustava* $\mathfrak{S}^{4\cdot} = \{O^\cdot, A^\cdot_i, B^\cdot_i\}_1^4$. *Pak v prostoru* π *existuje axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{4'} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^4$ *s nevlastními body a)* A'_3, B'_4, *b)* B'_3, B'_4, *která je průmětem soustavy shodné se soustavou* $\mathfrak{S}^{4\cdot}$.

Důkaz. Nechť platí předpoklady poučky. Pak určíme v π simplex $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, B'_3, B'_4\}$ podobný simplexu a) $\{A^\cdot_1, A^\cdot_2, A^\cdot_3, A^\cdot_4\}$, b) $\{A^\cdot_1, A^\cdot_2, B^\cdot_3, B^\cdot_4\}$ tak, aby modul podobnosti těchto simplexů byl $m = A^\cdot_1A^\cdot_2 : B'_1B'_2$. Při každé poloze bodů B'_3, B'_4 vzniklé otáčením simplexu $\mathfrak{B}'$ v π kolem $B'_1B'_2$ mohou být přímky $O'B'_3, O'B'_4$ vzaty za ramena x'_3, x'_4 axonometrické soustavy $\{O', A'_i, B'_i\}_1^4$ v níž jsou body A'_3, A'_4 určeny takto:

a) A'_3 je nevlastní bod přímky x'_3, $O^\cdot A^\cdot_4 : O'A'_4 = m$,

b) $O^\cdot A^\cdot_3 : O'A'_3 = O^\cdot A^\cdot_4 : O'A'_4 = m$.

Tato axonometrická soustava je průmětem soustavy shodné se $\mathfrak{S}^{4\cdot}$.

Poučka 7. *Nechť je dána konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A_1', B_1', A_2', B_2'\}$ *v* π *s nevlastními body* A_1', B_2' *a normalisovaná soustava* $\mathfrak{S}^{4\cdot} = \{O^\cdot, A_i^\cdot, B_i^\cdot\}_1^4$. *Pak existuje v prostoru* π *axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{4\prime} = \{O', A_i', B_i'\}_1^4$ *s nevlastními body a)* A_3', A_4', *b)* B_3', A_4', *c)* B_3', B_4', *která je průmětem soustavy shodné se* $\mathfrak{S}^{4\cdot}$.

Důkaz. Nechť platí předpoklady poučky. Pak v π určíme simplex $\mathfrak{B}' = \{B_1', B_2', B_3', B_4'\}$ podobný simplexu a) $\{A_1^\cdot, B_2^\cdot, A_3^\cdot, A_4^\cdot\}$, b) $\{A_1^\cdot, B_2^\cdot, B_3^\cdot, A_4^\cdot\}$, c) $\{A_1^\cdot, B_2^\cdot, B_3^\cdot, B_4^\cdot\}$ tak, aby modul podobnosti obou simplexů byl $m = O^\cdot A_2^\cdot : O'A_2'$. Podle poučky 6 zvolíme ramena x_3', x_4' axonometrické soustavy $\{O', A_i', B_i'\}_1^4$, v níž jsme body A_3', A_4' určili takto:

a) A_3', A_4' jsou nevlastní body přímek x_3', x_4',
b) $O^\cdot A_3^\cdot : O'A_3' = m$, A_4' je nevlastní bod přímky x_4',
c) $O^\cdot A_3^\cdot : O'A_3' = O^\cdot A_4^\cdot : O'A_4' = m$.

Tato axonometrická soustava je průmětem soustavy shodné se $\mathfrak{S}^{4\cdot}$.

Poučka 8. *Nechť je dána částečná konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A_1', B_1', A_2', A_3'\}$ *v rovině* π *s nevlastními body* B_1', A_2', A_3' *a normalisovaná soustava* $\mathfrak{S}^{3\cdot} = \{O^\cdot, A_i^\cdot, B_i^\cdot\}_1^3$. *Pak existuje axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{3\prime} = \{O', A_i', B_i'\}_1^3$, *která je průmětem soustavy shodné se* $\mathfrak{S}^{3\cdot}$.

Důkaz. Nechť platí předpoklady poučky. V π sestrojíme simplex $\{B_1', B_2', B_3'\}$ podobný simplexu $\{B_1^\cdot, A_2^\cdot, A_3^\cdot\}$ tak, aby modul jejich podobnosti byl $m = O^\cdot A_1^\cdot : O'A_1'$ a aby jeho body B_2', B_3' ležely na přímkách $O'A_2'$, $O'A_3'$. Je-li $\overline{B}$ určen z podmínek $\sphericalangle B_1'O'\overline{B} = \sphericalangle B_1^\cdot A_2^\cdot A_3^\cdot$, $A_2^\cdot A_3^\cdot : O'\overline{B} = O^\cdot A_1^\cdot : O'A_1' = m$, pak přímka vedená bodem $\overline{B}$ rovnoběžně s $O'A_2'$ protne $O'A_3'$ v B_3'; tím je určena poloha simplexu $\{B_1', B_2', B_3'\}$ a tím i axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{3\prime} = \{O', A_i', B_i'\}_1^3$, která je průmětem soustavy shodné se $\mathfrak{S}^3$.

Normalisovanou soustavu s navzájem kolmými rameny nazveme *orthogonální soustavou.*

Věta 3. *Axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A_i', B_i'\}_1^n$ *v* π *s nevlastními body* $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ *je průmětem orthogonální soustavy* $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ *tehdy, když orthogonální průmět* C^0 *středu promítání* C *do* π *je orthocentrem simplexu* $\{B_1', B_2', \ldots, B_n'\}$.

Důkaz. Nechť průmětem orthogonální soustavy $\mathfrak{S}^n$ z bodu C do π je axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n\prime}$. Protože je $CB_i' \parallel x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, je n-hran $\langle CB_1', CB_2', \ldots, CB_n'\rangle$ pravoúhlý a bod C se promítá kolmo do π do orthocentra simplexu $\{B_1', B_2', \ldots, B_n'\}$.

Platí-li v normalisované soustavě $OA_i = a$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nazveme ji *rovnoramennou soustavou.*

Věta 4. *Axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A_i', B_i'\}_1^n$ *v* π *s nevlastními body* $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ *je průmětem rovnoramenné soustavy* $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ *právě tehdy, když orthogonální průmět* C^0 *středu promítání* C *je střed hypersféry v* π, *určené body* $B_1', B_2', \ldots, B_n'$.

Důkaz. Nechť je axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n\prime}$ průmětem rovnoramenné soustavy $\mathfrak{S}^n$, při promítání z C do π. Protože je $OA_i = a$, $x_i \parallel CB_i'$, $CA_i \parallel x_i'$ je též $CB_i' = m \,.\, a$, $i = 1, 2, \ldots, n$, kde m je modul podobnosti simplexů $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\{B_1', B_2', \ldots, B_n'\}$. Je-li tedy C střed hypersféry o poloměru $m \,.\, a$, pak její průnik, s nadrovinou π je hypersféra v π (procházející body $B_1', B_2', \ldots, B_n'$), jejíž střed je orthogonální průmět bodu C do π.

Nechť je C střed promítání a $\mathfrak{S}^n$ souřadnicová soustava, promítající se z C do $\mathfrak{S}^{n\prime}$. Nechť je dále orthogonální průmět C^0 bodu C do π střed hypersféry v π, určené body $B_1', B_2', \ldots, B_n'$. Pak platí $CB_i' = k$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Protože je $CA_i \parallel x_i'$, $CB_i' \parallel x_i$, je $OA_i = k \,.\, OC : O'C = k : m = a$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tj. soustava $\mathfrak{S}^n$ je rovnoramenná.

Věta 5. *Axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A_i', B_i'\}_1^n$ v nadrovině π s nevlastními body $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ je průmětem rovnoramenné orthogonální soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ z bodu C tehdy, když simplex $\{B_1', B_2', \ldots, B_n'\}$ je pravidelný a orthogonální průmět C^0 bodu C do π je jeho orthocentrum.*

Důkaz plyne z vět 5 a 4.

II. ORTOGONÁLNÍ ROVNORAMENNÁ SOUSTAVA

V tomto odstavci se budeme zabývat výhradně ortogonální rovnoramennou soustavou. Nazveme ji krátce *o. r. soustavou.* Dále budeme předpokládat, že body $B_1', B_2', \ldots, B_n'$ jsou lineárně nezávislé.

V d-konfiguraci $\mathfrak{K}^n = \{O', A_1', B_2'\}_1^n$ *v* π *označme* $P_{ij} = A_i'A_j' \cap B_i'B_j'$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Jsou-li body $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ lineárně nezávislé, leží $\binom{n}{2}$ bodů P_{ij} v nadpřímce p^{n-2} [8]) (je to osa perspektivity dvou perspektivně položených simplexů $\mathfrak{A}' = \{A_1', A_2', \ldots, A_n'\}$, $\mathfrak{B}' = \{B_1', B_2', \ldots, B_n'\}$, středem perspektivity je bod O'). Leží-li body $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ v nadpřímce, označme ji též p^{n-2}. Budiž P harmonický pól nadpřímky p^{n-2} vzhledem k simplexu $\mathfrak{B}'$. Pak je jednoznačně určena kvadratická varieta v π s polárním simplexem $\mathfrak{B}'$, jejíž polárně sdružená nadpřímka k pólu P je právě p^{n-2}. Tato varieta je imaginární.[9]) Involuce I_{ij} sdružených pólů na přímce $B_i'B_j'$ má páry $B_i', B_j'; P_{ij}, Q_{ij} = \langle P, B_1', B_2', \ldots, B_{i-1}', B_{i+1}, \ldots, B_{j-1}', B_{j+1}, \ldots, B_n'\rangle \cap B_i'B_j'$.[10]) Tyto páry se rozdělují, involuce I_{ij} je eliptická a její samodružné body, tj. hledané průsečíky jsou imaginární. Z konstruktivních důvodů budeme proto dále uvažovat varietu, která předchozí varietu reálně zastupuje. Její antipolární simplex je $\mathfrak{B}'$ a její antipolárně sdružená nadpřímka s bodem P je p^{n-2}. Nazveme tuto reálnou varietu *přidruženou* k dané konfiguraci $\mathfrak{K}^n$. (Viz [5], věta 4 [6], věta 8, 4.)

---

[8]) Nadpřímka = prostor dimense $n - 2$.
[9]) Neprotíná totiž reálně žádnou přímku $B_i'B_j'$ simplexu $\mathfrak{B}'$.
[10]) $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$ je symbol pro prostor vytvořený body $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

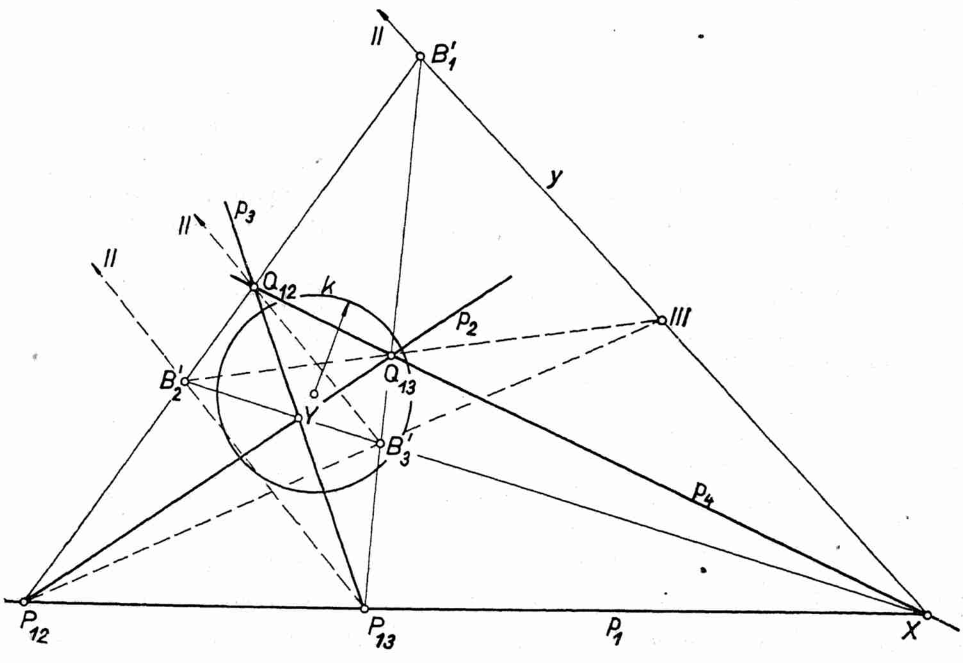
Poučka 9. *d-konfigurace* $\mathfrak{K}^n = \{O', A'_i, B'_i\}^n$ *v* π *je centrálním průmětem některé o. r. soustavy* $\mathfrak{S}^n\{O, A_i, B_i\}_1^n$ *tehdy a jen tehdy, když body* P_{ij}, Q_{ij} *jsou společným párem těchto dvou involucí:*[11])

1. *involuce* I_{ij}^I, *jejíž samodružné body jsou* B'_i, B'_j,

2. *involuce* I_{ij}^{II} *sdružených antipólů variety v na přímce* $B'_iB'_j$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Důkaz. Nechť je d-konfigurace $\mathfrak{K}^n$ průmětem o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n$. Pro bod P, tj. pro harmonický pól nadpřímky p^{n-2} vzhledem k simplexu $\mathfrak{B}'$ platí $(B'_i, B'_j, P_{ij}, Q_{ij}) = -1$,[12]) takže body P_{ij}, Q_{ij} jsou párem involuce I_{ij}^I. Přidruženou varietou dané konfigurace je podle věty 4 v [5] sféra v, bod P je s nadpřímkou p^{n-2} antipolárně sdružen vzhledem ke sféře v a proto body P_{ij}, Q_{ij} náleží také involuci I_{ij}^{II}. Involuce I_{ij}^I je hyperbolická, neboť má reálné samodružné body. Involuce I_{ij}^{II} je naproti tomu eliptická. Společný pár P_{ij}, Q_{ij} je tedy reálný.

Nechť body P_{ij}, Q_{ij} jsou společným párem involucí I_{ij}^I, I_{ij}^{II} na přímce $B'_iB'_j$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$. V rovině $\langle B'_1, B'_2, B'_1\rangle$ leží tyto body vždy po třech na čtyřech přímkách (obr. 2). Uvažujme nejprve jen dva páry P_{12}, Q_{12}; P_{13}, Q_{13}. Určují čtyrroh o stranách $P_{12}Q_{12} = B'_1B'_2$, $P_{13}Q_{13} = B'_1B'_3$, $p_1 = P_{12}P_{13}$, $p_2 = P_{12}Q_{13}$, $p_3 = P_{13}Q_{12}$, $P_4 = Q_{12}Q_{13}$. Bod B'_1 je vrcholem diagonálního trojúhelníka tohoto čtyrrohu, body B'_2, B'_3 leží na protilehlé straně. Zbývající



Obr.2.

[11]) Dále přejímáme symboliku z předchozích úvah.
[12]) Symbol znamená dvojpoměr.

vrcholy $X = p_1 \cap p_4$, $Y = p_2 \cap p_3$ diagonálního trojúhelníka jsou jednak harmonicky sdruženy vzhledem k základním bodům B'_2, B'_3 (jak plyne z vlastností úplného čtyrrohu), jednak antipolárně sdružené vzhledem ke kružnici k, určené antipolárním trojúhelníkem $B'_1B'_2B'_3$, jak nyní dokážeme. Antipolára y bodu Y vzhledem ke k je spojnicí antipólů II, III přímek p_2, p_3, tj. bodů $II = Q_{13}B'_3 \cap P_{13}B'_2$, $III = Q_{13}B'_2 \cap P_{12}B'_3$. Antipolára $y = II\,III$ prochází bodem B'_1. Bod II (III) je diagonálním vrcholem čtyrrohu $P_{13}B'_3Q_{12}B'_2$ ($P_{12}B'_3Q_{13}B'_2$), jehož dalším diagonálním vrcholem je bod Y a proto antipolára y odděluje s přímkou B'_1Y harmonicky přímky $B'_1B'_2$, $B'_1B'_3$, tj. prochází bodem X. Body X, Y jsou proto společnými body involucí I^I_{23}, I^{II}_{23} na přímce $B'_2B'_3$. Kdyby byl tento pár jiný, než dříve sestrojený pár P_{23}, Q_{23}, měly by obě involuce více než jeden společný pár, což není možné a proto $X = P_{23}$, $Y = Q_{23}$. Definujme rekurentně $\langle p_1, P_{14}\rangle = \mathbf{P}^2$, $\langle \mathbf{P}^2, P_{15}\rangle = \mathbf{P}^3, \ldots, \langle \mathbf{P}^{n-3}, P_{1n}\rangle = p^{n-2}$. Harmonický pól P nadpřímky p^{n-2} vzhledem k simplexu $\mathfrak{B}'$ je též antipólem této nadpřímky vzhledem ke sféře, určené antipolárním simplexem $\mathfrak{B}'$. Daná konfigurace má přidruženou sféru a je tedy v důsledku věty 4 v [5] axonometrickou soustavou.

Poučka 10. *d-konfigurace $\mathfrak{K}^n = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ v π je průmětem některé o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ právě tehdy, když body P_{ij}, Q_{ij} jsou samodružné body involuce I_{ij} na přímce $B'_iB'_j$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Obecný pár L^a, L^h této involuce je takto definován: s libovolným bodem $L \in B'_iB'_j$ je L^a antipolárně sdružen vzhledem ke sféře, určené antipolárním simplexem $\mathfrak{B}'$, a bod L^h harmonicky sdružen vzhledem k základním bodům B'_i, B'_j.*

Důkaz. Poučky 9, 10 jsou ekvivalentní. Nechť platí poučka 10. Pak je $(B'_i, B'_j, P_{ij}, Q_{ij}) = -1$, neboť P_{ij}, Q_{ij} jsou samodružné body involuce I_{ij} a oddělují harmonicky její pár B'_i, B'_j. Označíme-li totiž $B'_i = L$, je $L^a = B'_i$, $L^h = B'_i$. Body P_{ij}, Q_{ij} jsou tedy též párem involuce I^I_{ij} z poučky 9. Označíme-li $L = P_{ij}$, je $L^a = L^h = Q_{ij}$. Body P_{ij}, Q_{ij} jsou též párem involuce I^{II}_{ij} z poučky 9.

Nechť platí poučka 9. Páry L, L^a tvoří involuci I^{II}_{ij}, páry L, L^h involuci I^I_{ij}. Jejich společný pár je $P_{ij} = L$, $Q_{ij} = L^a = L^h$ ($Q_{ij} = L$, $P_{ij} = L^a = L^h$). Páry L^a, L^h, tvoří tedy involuci, jejíž samodružné body jsou P_{ij}, Q_{ij}, tj. involuci I_{ij}. Poučka 9 a proto i poučka 10 je tím dokázána.

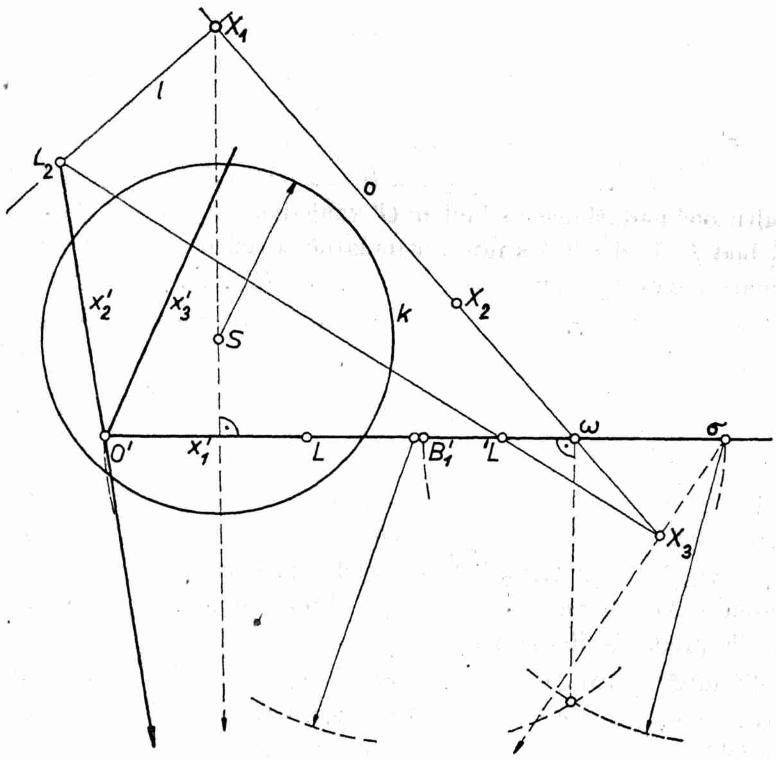
Poučky 9, 10 se hodí ke konstrukci axonometrických soustav, které jsou průměty o. r. souřadnicových soustav a lze jimi nahradit větu 4 v [5], resp. 8,4 v [6], která je pro praktické konstrukce nevhodná. Použití těchto pouček k takovým konstrukcím pro $n = 3$ je obsaženo v [2] a [3].

Úvahy další části tohoto odstavce se budou týkat konstrukcí axonometrických soustav z částečných konfigurací. Na základě axonometrické konfigurace lze pak řešit[13]) metrické úlohy centrální axonometrie nepřímo a to tím způso-

[13]) Až na podobnost, jak vyplývá z toho, že axonometrickou soustavou není určena o. r. soustava jednoznačně. Vlastní bod $O \neq C$ lze totiž volit na přímce CO' libovolně a tím získáváme o. r. soustavy navzájem podobné.

bem, že je převedeme na úlohy v Mongeově promítání, které užívá týchž souřadnicových os. Úlohy polohy lze však řešit snadno přímo, což zde nebudeme uvádět.

Poučka 11. *Nechť je dána částečná konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ *v nadrovině* π. *Pak axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{n\prime} = \}O', A'_i, B'_i\}$ *v* π, *která je průmětem některé o. r. soustavy* $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$, *existuje právě tehdy, když simplex* $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ *je antipolárním simplexem hypersféry v* π.



Obr. 3.

Důkaz. Nechť je $\mathfrak{S}^{n\prime}$ průmětem o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n$. Pak je podle věty 4 v [5] simplex $\mathfrak{B}'$ antipolárním simplexem určité sféry.

Podmínka je dostačující: Sféru určenou antipolárním simplexem $\mathfrak{B}'$ označme k. Podle poučky 9 nebo 10 určíme nadpřímku p^{n-2} a dále body $A'_2, A'_3, \ldots, A'_n$ tak, aby simplexy $\{A'_1, A'_2, \ldots, A'_n\}$ a $\mathfrak{B}'$ byly perspektivně položeny, v perspektivitě s osou p^{n-2} a středem O'. Tím je určena axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$, která je průmětem o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ určené takto:

Laguerrův bod C sféry k je střed promítání, libovolný vlastní bod přímky $O'C$ různý od C je bodem O soustavy, přímka $x_i \parallel CB'_i$ jejím ramenem, na němž je bod A_i určen vztahem $A_i = x_i \cap CA'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Poučka 12. *Nechť je dána hypersféra k nadroviny π a částečná konfigurace $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n\}$ v π a nechť dále a) přímky $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ jsou různé, b) přímky x'_1, x'_2 splývají. Pak v π existuje axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n'} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ s přidruženou sférou k, která je průmětem některé o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ tehdy a jen tehdy, a) když involuce I definovaná v důkazu věty je hyperbolická, b) když $(n - 3)$-rozměrný prostor, antipolárně sdružený s přímkou x'_1 vzhledem ke k, leží v nadpřímce $\langle x'_3, x'_4, \ldots, x'_n\rangle$.*

Důkaz (obr. 3). a) Nechť je $\mathfrak{S}^{n'}$ průmětem o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n$. Pak je podle poučky 11 simplex $\mathfrak{B}'$ antipolárním simplexem variety k. Prostor $(n - 3)$-rozměrný, $\mathbf{X}_i$, antipolárně sdružený s přímkou x'_i vzhledem ke k je potom obsažen v nadpřímce $\langle B'_1, B'_2, \ldots, B'_{i-1}, B'_{i+1}, \ldots, B'_n\rangle$. Prostor $\mathbf{X}_i$ je též obsažen v antipolárně sdružené nadpřímce o s bodem O' vzhledem ke k, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zvolme na x'_1 bod L. Budiž l^{n-2} s ním antipolárně sdružená nadpřímka vzhledem ke k a označme dále $x'_2 \cap l^{n-2} = L_2$, $x'_3 \cap l^{n-2} = L_3, \ldots, x'_n \cap l^{n-2} = L_n$.

Budiž $'L = \langle L_2, \mathbf{X}_n\rangle \cap x'_1$. Body L, $'L$ takto definované tvoří páry involuce I (pár O', $O \cap x'_1 = \omega$, střed σ na přímce $(x'_2 \cap S\mathbf{X}_1)\mathbf{X}_n)$. Když body L, $'L$ splynou, je příslušná nadpřímka $\langle L_2, \mathbf{X}_n\rangle$ právě protilehlou nadpřímkou simplexu $\mathfrak{B}'$, $L = {}'L = B'_1$, $L_2 = B'_2, \ldots, L_n = B'_n$. Samodružné body involuce I jsou tedy reálné a involuce je hyperbolická.

Nechť je naopak involuce I z předchozí úvahy hyperbolická. Budiž B'_i její samodružný bod, b^{n-2} s ním antipolárně sdružená nadpřímka vzhledem ke k, $b^{n-2} \cap x'_i = B'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Podle poučky 11 určíme dále body $A'_2, A'_3, \ldots, A'_n$ axonometrické soustavy $\{O', A'_i, B'_i\}_1^n$, která je průmětem o. r. soustavy určené podle předcházející poučky.

b) Nechť je $\mathfrak{S}^{n'}$ průmětem *o. r.* soustavy $\mathfrak{S}^n$. Rameno x'_1 je hranou $B'_1B'_2$ antipolárního simplexu sféry k. $(n - 3)$-rozměrný prostor $\mathbf{X}_1 = \langle B'_3, B'_4, \ldots, B'_n\rangle$ b je protilehlým prostorem simplexu $\mathfrak{B}'$ k přímce x'_1 a je proto s x'_1 antipolárně sdružen vzhledem ke k. Proto leží v antipolárně sdružené nadpřímce $\langle x'_3, x'_4, \ldots, x'_n\rangle$ s přímkou x'_1 vzhledem ke k.

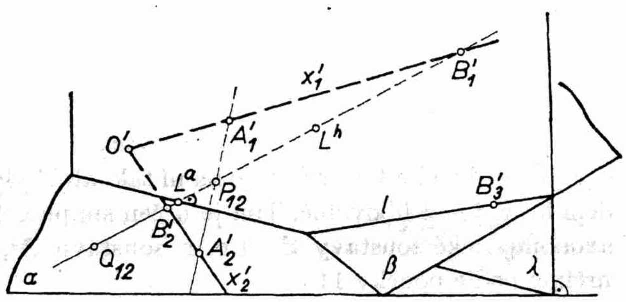
Nechť $(n - 3)$-rozměrný prostor antipolárně sdružený s přímkou $x'_1 = x'_2$ leží v nadpřímce $\langle x'_4, x'_3, \ldots, x'_n\rangle$. Označme B'_i jeho průsečík s x'_i, $i = 3, 4, \ldots, n$. Na přímce x'_1 zvolme libovolně bod $B'_1 \neq O'$, bod B'_2 určeme jako průsečík přímky x'_1 s nadpřímkou, antipolárně sdruženou s bodem B'_1 vzhledem ke k. Tím je určen simplex $\mathfrak{B}'$ axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{n'}$, jejíž body $A'_2, A'_3, \ldots, A'_n$ určíme podle poučky 11 a která je průmětem o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n$ určené podle předchozí poučky. Poučka je tím dokázána.

Dále jsou uvedeny dvě poučky platné pro prostor $\mathbf{P}^4$.

Poučka 13. *Nechť je dána částečná konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, A'_2, B'_1, B'_2\}$ *v rovině* $\alpha \subset \pi$ *a rovina* $\beta \neq \alpha$, $\beta \subset \pi$. *Budiž dále a) nejvýš jeden z bodů* B'_1, B'_2 *nevlastní, b) body* B'_1, B'_2 *nevlastní,* $O'A'_1 \perp O'A'_2$, $O'A'_1 = O'A'_2$. *Pak v* π *existuje axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{4'} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^4$ *s bodem* B'_3 *v* β, *která je průmětem některé o. r. soustavy* $\mathfrak{S}^4 = \{O, A_i, B_i\}_1^4$.

Důkaz (obr. 4). 1. Nechť je $O'A'_1 = x'_1 \neq O'A'_2 = x'_2$. V rovině β sestrojíme bod B'_3 axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{4'}$ takto:

Je-li $P_{12} = A'_1A'_2 \cap B'_1B'_2$, pak sestrojme bod Q_{12} z relace $(P_{12}, Q_{12}, B'_1, B'_2) = -1$. Body P_{12}, Q_{12} jsou samodružné body involuce z poučky 10. K nevlastnímu bodu L přímky $B'_1B'_2$ jsou přiřazeny body L^a, L^h (pár involuce) podle vztahů $(L, L^h, B'_1, B'_2) = -1$, $(L^h, L^a, P_{12}, Q_{12}) = -1$. Rovina $\lambda \subset \pi$ kolmá k $B'_1B'_2$ procházející bodem L^a nechť protne rovinu β v přímce l.



Obr. 4.

Jsou-li body B'_1, B'_2 vlastní, zvolme $B'_3 \in l$ vně koule o průměru $B'_1B'_2$. Bod L^a je uvnitř úsečky $B'_1B'_2$ a rovina λ je v souhlase s poučkou 11 uvnitř pásu, omezeného rovinami kolmými k přímce $B'_1B'_2$, jdoucími body B'_1, B'_2.

Je-li bod B'_1 vlastní a B'_2 nevlastní, pak $L^a = B'_1$ a bod B'_3 zvolme kdekoli na $l = \lambda \cap \beta$, $\lambda \perp B'_1B'_2$, $B'_1 \in \lambda$.

Jsou-li body B'_1, B'_2 nevlastní, a jsou splněny předpoklady poučky, zvolme za B'_3 libovolný vlastní bod roviny β.

Tím jsme ve všech případech sestrojili antipolární simplex určité kružnice v $\langle B'_1, B'_2, B'_3 \rangle$. Bod B'_4, vrchol antipolárního simplexu $\mathfrak{B}'$ určité kulové plochy k, obsahující tuto kružnici, určíme takto:

Nechť jsou body B'_1, B'_2, B'_3 vlastní. Bod B'_4 volíme pak na kolmici k jejich rovině orthocentrem V trojúhelníka $B'_1B'_2B'_3$ vně kulové plochy se středem V opsané nad hlavní kružnicí, která je určena body B'_1, B'_2, B'_3.

Nechť body B'_1, B'_2, jsou vlastní, bod B'_3 nevlastní. Bod B'_4 zvolíme pak uvnitř pásu, který je omezen kolmicemi v bodech B'_1, B'_2 na rovinu $\langle B'_1, B'_2, B'_3 \rangle$ a současně vně kružnice v této kolmé rovině nad průměrem $B'_1B'_2$.

Nechť bod B'_1 je vlastní, body B'_2, B'_3, nevlastní. Bod $B'_4 \neq B'_1$ zvolíme pak na kolmici bodem B'_1 k rovině $\langle B'_1, B'_2, B'_3 \rangle$.

Tím je ve všech případech určen simplex $\mathfrak{B}'$ hledané axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{4'}$, jejíž body A'_3, A'_4 určíme podle poučky 11 a která je průmětem o. r. soustavy, určené podle poučky 11.

2. Nechť $x_1' = x_2'$. Konstrukci bodu B_3' axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{4'}$ provedeme takto: Její bodové trojice $A_1'A_2'A_3'$, $B_1'B_2'B_3'$ jsou perspektivní. Střed perspektivity je O', osa perspektivity je p_1. Pro bod $P_{12} = p_1 \cap x_3'$ platí proto podmínka $(O', P_{12}, A_1', B_1') = (O', P_{12}, A_2', B_2')$[14]) a určíme-li ještě bod Q_{12} z podmínky $(P_{12}, Q_{12}, B_1', B_2') = -1$, lze potom postupovat stejně, jako v důkaze části 1. Tím je poučka dokázána.

Poučka 14. *Nechť je v nadrovině π dána kulová plocha k a částečná konfigurace $\mathfrak{k} = \{O', A_1', B_1', x_2'\}$. Nechť dále body O', B_1' nejsou antipolárně sdružené vzhledem ke k. Pak existuje axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{4'} = \{O', A_i', B_i'\}_1^4$, která je průmětem určité o. r. soustavy $\mathfrak{S}^4 = \{O, A_i, B_i\}_1^4$ s přidruženou kulovou plochou k.*

Důkaz. Antipolární simplex $\mathfrak{B}' = \{B_1', B_2', B_3', B_4'\}$ kulové plochy k axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{4'}$ má vrchol B_2' na x_2' v průsečíku roviny β antipolárně sdružené s bodem B_1' vzhledem ke k. Body B_3', B_4' v β leží na antipoláře přímky $B_1'B_2'$ vzhledem ke k a zvolme je na ní tak aby byly antipolárně sdružené vzhledem ke k, jinak libovolně. Tím je určen simplex $\mathfrak{B}'$ a body A_2', A_3', A_4' hledané axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{4'}$ i o. r. soustavu $\mathfrak{S}^4$, která se do $\mathfrak{S}^{4'}$ promítá už určíme podle poučky 11.

III. DEGENEROVANÁ CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE

V tomto odstavci se budeme zabývat průmětem souřadnicové soustavy (z definice 1) při promítání z bodu C, který leží na rameni soustavy, do průmětny π.

Definice 5. *Degenerovaná konfigurace* je uspořádaná skupina $n - 1$ bodových trojic $O' \neq A_i' = B_i' \neq O'$, přičemž body O', A_i', B_i' leží na přímce x_i', rameni konfigurace, $i = 2, 3, \ldots, n$, ramena $x_2', x_3', \ldots, x_n'$ vytvářejí vlastní nadrovinu π a dále je $O' = x_1' = A_1' = B_1'$.

Definice 6. *Degenerovaná axonometrická soustava* je průmět souřadnicové soustavy z bodu $C \neq O$, který leží na rameni x_1, do nadroviny π. *Každá degenerovaná axonometrická soustava je degenerovanou konfigurací.*[15])

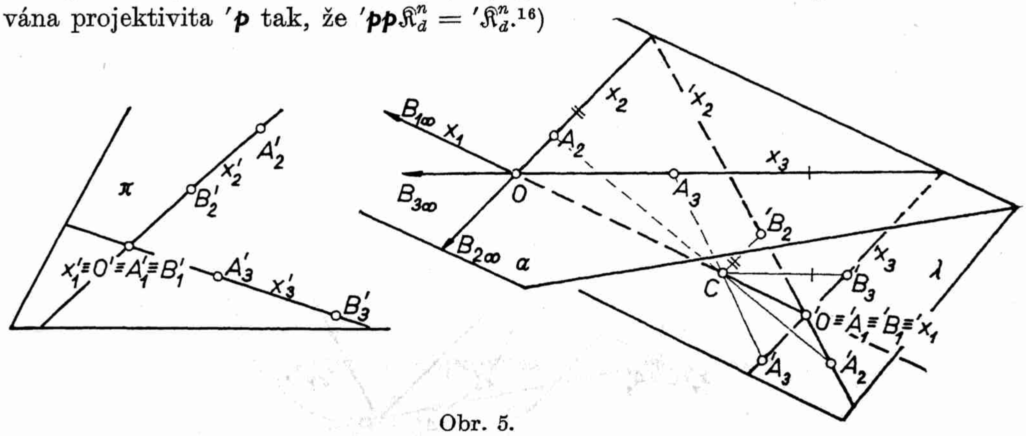
Nás bude dále zajímat úloha obrácená: kdy lze degenerovanou konfiguraci pokládat za průmět souřadnicové soustavy.

Věta 6. *Nechť je dána degenerovaná konfigurace $\mathfrak{K}_d^n = \{O', A_i', B_i'\}_1^n$ v nadrovině π a souřadnicová soustava $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$. Pak lze určit projektivní transformaci mezi π a libovolnou vlastní nadrovinou λ tak, že konfigurace $'\mathfrak{K}_d^n$, která v této transformaci odpovídá konfiguraci $\mathfrak{K}_d^n$, je průmětem soustavy $\mathfrak{S}^n$ z bodu $C \in x_1$, $C \neq O$, C non $\in \lambda$.*

[14]) Konstrukci bodu P_{12} viz např. v Deskriptivní geometrii I, F. Kadeřávek, J. Klíma, J. Kounovský, str. 27.

[15]) Jestliže ovšem definujeme, že i průmět bodu $X = C$ přímky x_1 je O'.

Důkaz (obr. 5). Budiž $\langle O', A'_2, \ldots, A'_n \rangle = \pi$, $\langle O, A_2, \ldots, A_n \rangle = \alpha$. Existuje právě jedna projektivita p mezi nadrovinami π, α pro niž platí $p\ A'_i = A_i$, $pB'_i = B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Souřadnicová soustava $\mathfrak{S}^n$ se promítá z libovolného bodu $C \in x_1$, $C \neq O$ do libovolné vlastní nadroviny λ non $\ni C$ v degenerovanou konfiguraci $'\mathfrak{K}^n_d$. Mezi nadrovinami π, λ je promítáním z centra C zprostředkována projektivita $'p$ tak, že $'pp\mathfrak{K}^n_d = '\mathfrak{K}^n_d$.[16])



Obr. 5.

Věta 7. *Nechť $\{O', A'_i, B'_i\}^n_2$ je axonometrická soustava s nevlastními body $B'_2, B'_3, \ldots, B'_k, A'_{k+1}, A'_{k+2}, \ldots, A'_n$, jejíž ramena vytvářejí vlastní nadrovinu π a která je průmětem normalisované soustavy $\{O, A_i, B_i\}^n_2$ z bodu C. Pak je průmětem normalisované soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}^n_1$ z bodu C do π degenerovaná konfigurace $\mathfrak{K}^n_d = \{O', A'_i, B'_i\}^n_1$ právě tehdy, když $C \in x_1$, $C \neq O$.*

Důkaz. Je-li průmětem $\mathfrak{S}^n$ degenerovaná konfigurace $\mathfrak{K}^n_d$ musí být $C \in x_1$. Naopak, je-li $C \in x_1$ je $\mathfrak{S}^{n\prime}$ podle poučky 8 degenerovanou konfigurací.

Věta 8. *Normalisovaná soustava $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}^n_1$, která se promítá do degenerované axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{n\prime}_d = \{O', A'_i, B'_i\}^n_1$ v π s nevlastními body A'_2, $A'_3, \ldots, A'_n$ je orthogonální tehdy, když střed promítání $C \neq O$ leží na rameni x_1 a když orthogonální průmět C^0 bodu C do π je orthocentrum simplexu $\{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$.*

Věta 9. *Normalisovaná soustava $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}^n_1$, která se promítá do degenerované axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^n_d = \{O', A'_i, B'_i\}^n_1$ v π s nevlastními body $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ je rovnoramenná právě tehdy, když $C \in x_1$, $C \neq O$ a když orthogonální průmět C^0 bodu C do π je střed hypersféry určené body $B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$.*

Důkaz obou vět vyplývá z vět 4, 5 a 9.

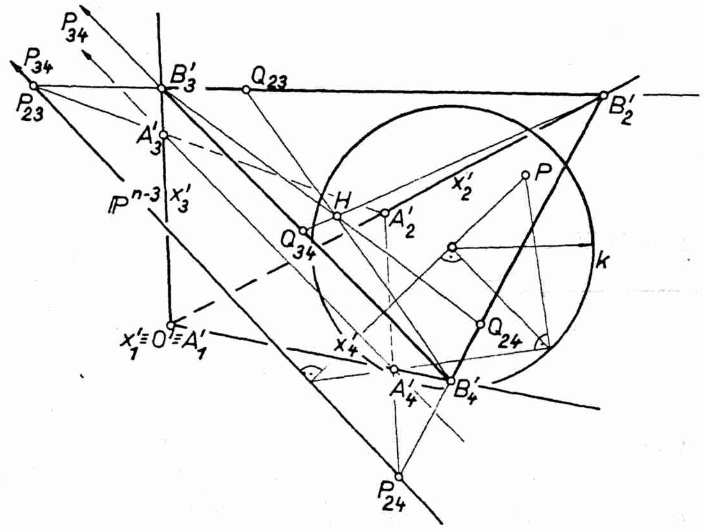
Další úvahy se budou týkat průmětu orthogonální rovnoramenné soustavy, kterou opět krátce nazveme *o. r. soustavou.*

Předpokládejme, že body $B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$ jsou lineárně nezávislé a označíme opět $P_{ij} = B'_iB'_j \cap A'_iA'_j$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, n$ (obr. 6). Body P_{ij} vytvářejí

[16]) Analogický důkaz pro nedegenerované konfigurace viz [5] věta 6.

podprostor $\mathbf{P}^{n-3}$. Bod Q_{ij} určíme opět vždy ze vztahu $(Q_{ij}, P_{ij}, B'_i, B'_j) = -1$.

Budiž dále: H harmonický pól podprostoru $\mathbf{P}^{n-3}$ vzhledem k simplexu $\{B'_2, B'_3, \ldots, B'_n\}$, k hypersféra (existuje-li) v nadrovině $\langle B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\rangle$, určená antipolárním simplexem $\mathfrak{B}'$, tzv. přidružená sféra ke konfiguraci $\mathfrak{K}^n_d$, P v podprostoru $\langle B'_2, B'_3, \ldots, B'_n\rangle$ antipolárně přidružený bod k podprostoru $\mathbf{P}^{n-3}$ vzhledem ke k.



Obr. 6.

Věta 10. *Degenerovaná konfigurace $\mathfrak{K}^n_d = \{O', A'_i, B'_i\}^n_1$ v π je průmětem některé o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}^n_1$, právě tehdy, když simplex $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ je antipolárním simplexem sféry k a když dále platí $P = H$. Středem promítání je pak Laguerrův bod sféry k a leží na x_1.*

Důkaz. Budiž $\mathfrak{S}^{n\prime}$ průmět soustavy $\mathfrak{S}^n$ z vlastního bodu $C \in x_1$, $C \neq O$ do π. Pak je $\mathfrak{S}^{n\prime}$ degenerovaná konfigurace. Simplex $\mathfrak{B}'$ je antipolárním simplexem sféry k, neboť jde o základní kvadratickou varietu polarity, která vznikne jako průnik pravoúhlé polarity $\mathbf{P}$ v $\mathbf{P}^n$ s páry $\langle C, B'_i\rangle$, $\langle C, B'_1, B'_2, \ldots, B'_{i-1}, B'_{i+1}, \ldots, B'_n\rangle$ s nadrovinou π, tedy sféra k. Bod H je společný bod $(n-3)$-rozměrných podprostorů $\langle B'_2, \ldots, B'_{i-1}, B'_{i+1}, \ldots, B'_{j-1}, B'_{j+1}, \ldots, B'_n, Q_{ij}\rangle$, neboť pro body P_{ij}, Q_{ij} platí $(P_{ij}, Q_{ij}, B'_i, B'_j) = -1$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, n$. Body P_{ij}, Q_{ij} jsou ale zároveň antipolárně sdružené vzhledem ke k, neboť $CP_{ij} \perp CQ_{ij}$ $(CP_{ij} \parallel A_iA_j$, $CQ_{ij} \parallel O\bar{Q}_{ij}$, kde $\bar{Q}_{ij}$ je střed úsečky A_iA_j a tedy $A_iA_j \perp O\bar{Q}_{ij})$, tj. antipolárně sdružený bod P s $n-3$ rozměrným podprostorem $\mathbf{P}^{n-3}$ v $\langle B'_2, B'_3, \ldots, B'_n\rangle$ vzhledem ke k je též harmonickým pólem pod prostoru $\mathbf{P}^{n-3}$ k simplexu $\{B'_2, B'_3, \ldots, B'_n\}$.

Nechť je $\mathfrak{B}'$ antipolárním simplexem sféry k a nechť $P = H$. Dokážeme, že existuje o. r. soustava $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}^n_1$, jejímž průmětem je daná konfigurace

$\mathfrak{K}_d^n = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$. Zvolme za střed promítání C Laguerrův bod sféry k. Promítnutím polarity $\mathbf{P}'$ v nadrovině π, určené základní varietou k z bodu C vznikne orthogonální polarita $\mathbf{P}$. Zvolme na CO' vlastní bod $O \neq C$. Přímky $x_1 = CB'_1$, $x_2 \parallel CB'_2, \ldots, x_n \parallel CB'_n$ jsou navzájem kolmé, neboť páry B'_i, $\langle B'_2, \ldots, B'_{i-1}, B'_{i+1}, \ldots, B'_n \rangle$, $i = 2, \ldots, n$ jsou sdružené v $\mathbf{P}'$. Budiž $A_i = x_i \cap CA'_i$, $P_{ij} = B'_iB'_j \cap A'_iA'_j$. Pak je $CP_{ij} \parallel A_iA_j \parallel \langle x_i, x_j \rangle$. Budiž dále Q_{ij} průsečík nadpřímky $\langle O, H, B'_2, \ldots, B'_{i-1}, B'_{i+1}, \ldots, B'_{j-1}, B'_{j+1}, \ldots, B'_n \rangle$ s přímkou $B'_jB'_i$, tj. nechť platí $(P_{ij}, Q_{ij}, B'_i, B'_j) = -1$. Přímka $O\bar{Q}_{ij} \parallel CQ_{ij}$ protne A_iA_j v $\bar{Q}_{ij}$. Protože se P_{ij} promítne do nevlastního bodu přímky A_iA_j, je $\bar{Q}_{ij}$ středem úsečky A_iA_j. Přímka $O'Q_{ij} = B'_iQ_{ij}$ je polárně sdružená s bodem P_{ij} v rovině $x'_ix'_j$ vzhledem ke kružnici $k \cap x'_ix'_j$, takže je $CP_{ij} \perp COQ_{ij}$ v prostoru $\langle C, B'_1, B'_i, B'_j \rangle$, tj. $A_iA_j \perp O\bar{Q}_{ij}$ a tedy v pravoúhlém trojúhelníku OA_iA_j protíná výška $O\bar{Q}_{ij}$ přeponu A_iA_j ve středu přepony, z čehož plyne $OA_i = OA_j$. Tím je dokázáno, že délky $OA_2, \ldots, OA_n$ jsou stejné. Budiž j jejich společná délka. Zvolme na x_1 bod A_1 tak, aby $OA_1 = j$; bod B_1 budiž nevlastní bod přímky x_1. Tím je určena soustava $\mathfrak{S}^n$, která se z C promítá do $\mathfrak{K}_d^n$ a věta je dokázána.

Literatura

[1] *Н. Ф. Четверухин:* Основная теорема аксонометрии и построение аксонометрических систем в центральной проекции. Сборник статей „Методы начертательной геометрии и её приложения, Москва 1955, 105—111.

[2] *L. Drs:* O základní větě centrální axonometrie. Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 165 až 174.

[3] *L. Drs:* O centrální axonometrii. Čas. pro pěst. mat. *83* (1958), 330—335.

[4] *V. Havel:* Základní věty centrální axonometrie. Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 175 až 180.

[5] *V. Havel:* O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie. Mat.-fyz. čas. SAV, *VII*, 2—1957, 94—107.

[6] *V. Havel:* O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie II, III. Mat.-fyz. čas. SAV, *VIII*, 2—1958, 103—114.

[7] *V. Havel:* Sdružené normalisované desarguesovské konfigurace. Spisy přír. fak. univ. v Brně, 1958, 157—160.

[8] *V. Havel:* O singulární afinitě a kolineaci. Sborník VUT v Brně, 1959, sešit 1/2.

[9] *Z. Kowalski:* Poznámka o degenerovaném průmětu souřadnicového systému v centrální axonometrii. Sborník VUT v Brně, 1958, 83—90.

[10] *Е. А. Мчедлишвили:* Построение центральной проекции точки по аксонометрическим осям. Юбилейний сборник трудов Груз. полит. инст. № *17,* 1948, 43—73.

[11] *Е. А. Мчедлишвили:* Элементарное доказательство основной теоремы центрального проектирования. Труды Тбил. гос. унив., том *56,* 1955, 141—144.

[12] *Е. А. Мчедлишвили:* Об основном предложении центральной аксонометрии. Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике, 1958, 104—108.

Резюме

ЦЕНТРАЛЬНАЯ АКСОНОМЕТРИЯ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ЛАДИСЛАВ ДРС (Ladislav Drs), Прага

Содержанием этой работы является изучение свойств центральной проекции системы координат (общей и ортогональной) из точки в собственную гиперплоскость, т. е. изучение свойств разных аксонометрических систем. Кроме того, в работе приводятся конструкции аксонометрических систем при различном задании некоторых из их элементов.

Zusammenfassung

DIE ZENTRALE AXONOMETRIE IM n-DIMENSIONALEN RAUME

Ladislav Drs, Praha

In dieser Arbeit studiert man Eigenschaften der Projektion von Axenkreuzen (allgemeinen und orthogonalen) aus einem eigenen Zentrum in eine eigene Hyperebene (kurz, Eigenschaften verschiedener Axonometrien). Weiter enthält die Arbeit Konstruktionen von Axonometrien, wenn verschiedene Elemente von ihnen gegeben sind.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

POZNÁMKA O MINIMÁLNÍCH PLOCHÁCH S KRUŽNICEMI NORMÁLNÍ KŘIVOSTI KONSTANTNÍHO POLOMĚRU

KAREL SVOBODA, Brno

(Došlo dne 23. června 1959)

V této práci jsou odvozeny nutné a postačující podmínky k tomu, aby plocha $(2m + 1)$-rozměrného projektivního prostoru mohla býti považována za minimální plochu $(2m + 1)$-rozměrného prostoru s konstantní křivostí, jejíž indikatrice normální křivosti až do řádu $m - 1$ jsou kružnicemi konstantních poloměrů.

1. V první části obsáhlého pojednání [2], věnovaného teorii normální křivosti plochy v n-rozměrném prostoru $\mathbf{S}_n$ $(n \geqq 4)$ s konstantní křivostí c, studoval prof. O. BORŮVKA existenční otázky a základní vlastnosti ploch, jejichž indikatrice normální křivosti řádu $1, 2, \ldots, m - 1$ $(2 \leqq m \leqq [\frac{1}{2}n])$ jsou v každém bodě M plochy kružnicemi se středy v tomto bodě. Tyto plochy jsou při vhodné volbě reperu přiřazeného k ploše definovány soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{gathered} dM = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_n \mathbf{e}_n , \\ d\mathbf{e}_i = - c\omega_i M + \omega_{i1} \mathbf{e}_1 + \omega_{i2} \mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_{in} \mathbf{e}_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n) , \end{gathered} \tag{1}$$

pro jejíž koeficienty ω platí kromě rovnic $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ vztahy

$$\begin{gathered} \omega_3 = \omega_4 = \ldots = \omega_n = 0 , \\ \omega_{2k-1,2k+1} + i\omega_{2k,2k+1} = R_k(\omega_1 - i\omega_2) , \\ \omega_{2k-1,2k+1} - i\omega_{2k,2k+1} = R_k(\omega_1 + i\omega_2) , \\ \omega_{2k-1,2k+2} + i\omega_{2k,2k+2} = iR_k(\omega_1 - i\omega_2) , \\ \omega_{2k-1,2k+2} - i\omega_{2k,2k+2} = - iR_k(\omega_1 + i\omega_2) , \\ \omega_{2k-1,2k+3} = \omega_{2k-1,2k+4} = \ldots = \omega_{2k-1,n} = 0 , \\ \omega_{2k,2k+3} = \omega_{2k,2k+4} = \ldots = \omega_{2k,n} = 0 \\ (i = + \sqrt{-1};\ k = 1, 2, \ldots, m - 1;\ R_k > 0) , \end{gathered} \tag{2}$$

z nichž je třeba vypustiti rovnice vzniklé z rovnic napsaných v posledních dvou řádcích pro $k = m - 1$, jestliže $2m = n$. Podmínky integrability soustavy (2) jsou vyjádřeny relacemi

$$
\begin{gathered}
\left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} + i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,, \\
\left[(\omega_1 + i\omega_2)\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} - i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,, \\
[(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j})] = 0\,, \\
[(\omega_1 + i\omega_2)(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})] = 0 \\
(k = 1, 2, \ldots, m - 1;\ j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n)\,,
\end{gathered} \tag{3}
$$

z nichž je třeba vynechati rovnice napsané v posledních dvou řádcích, jestliže $2m = n$.

V závěru výše zmíněné první části pojednání [2] jest obsaženo několik poznámek o uvedených plochách v případě, že jejich kružnice normální křivosti řádu $1, 2, \ldots, m - 1$ mají v každém bodě plochy konstantní poloměry. Pro $2m = n$ jsou tyto plochy podrobně studovány v pojednání [3], a to jak z hlediska metrického, tak i projektivního; v dalším se proto nebudeme tímto případem blíže zabývati. Zjištění existence uvažovaných ploch v obecném případě $2m < n$ vede k příliš dlouhým a obtížným výpočtům a nebylo proto v citované práci [2] provedeno. Výjimku zde tvoří nejjednodušší případ $2m + 1 = n$, o němž bylo pro $m = 2$ podrobně pojednáno v práci [1].

Úkolem tohoto pojednání jest ukázat, že charakteristické projektivní vlastnosti ploch pětirozměrného prostoru, studovaných ve zmíněné práci [1], lze bez obtíží rozšířit na prostor s konstantní křivostí libovolné liché dimense.

2. V dalších úvahách *se budeme zabývati plochami* $\boldsymbol{M}$ *prostoru* $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ *s konstantní křivostí c, jejichž indikatrice normální křivosti řádu* $1, 2, \ldots, m - 1$ *jsou v každém bodě* M *plochy kružnicemi se středy v bodě* M *a s konstantními poloměry.*

Podle označení užitého v pojednání [2] je $R_1R_2 \ldots R_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m - 1)$ poloměr kružnice normální křivosti řádu k a předcházející předpoklad o těchto poloměrech je tedy totožný s požadavkem, aby všechny funkce R_k uvedené v (2) byly konstantní. Vzhledem k tomuto předpokladu dostaneme z vnějších relací (3) rovnice, které lze po jednoduché úpravě psáti ve tvaru

$$
\begin{gathered}
\omega_{2k+1,2k+2} = (k + 1)\,\omega_{12} \quad (k = 1, 2, \ldots, m - 1)\,, \\
\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1} = A(\omega_1 - i\omega_2)\,, \\
\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1} = B(\omega_1 + i\omega_2)\,,
\end{gathered} \tag{4}
$$

kde A, B jsou funkce parametrů, na nichž závisí volba reperu přiřazeného k ploše.

Vnějším diferencováním rovnic (4) pak obdržíme po úpravě vztahy

$$(5)\qquad R_k^2 = \frac{1}{2}\,k(k+1)\,R_1^2 - \frac{1}{2}\,(k-1)(k+2)\,\frac{c}{2}\,,$$

$$AB = m(m+1)\,R_1^2 - (m-1)(m+2)\,\frac{c}{2}\,,$$

$$[(\omega_1 - i\omega_2)(\mathrm{d}A + i\,\overline{m+1}\,A\omega_{12})] = 0\,,$$

$$[(\omega_1 + i\omega_2)(\mathrm{d}B - i\,\overline{m+1}\,B\omega_{12})] = 0\,,$$

které jsou podmínkami integrability soustavy diferenciálních rovnic (2), (4), jimiž jsou analyticky definovány uvažované plochy $\boldsymbol{M}$. Odtud je patrno, že je třeba — podobně jako v případě $m = 2$ uvažovaném v práci [1] — rozlišiti dvě možnosti podle toho, zda obě funkce A, B jsou různé od nuly nebo zda právě jedna z nich jest identicky rovna nule; vzhledem k souměrnosti příslušných vztahů budeme v dalším předpokládati $A = 0$, $B \neq 0$. Případ, že obě funkce A, B by byly identicky rovny nule, by vedl k plochám, které jsou vnořeny do prostoru dimense menší než $2m + 1$.

Buď nejprve $AB \neq 0$ a označme příslušnou plochu $\boldsymbol{M}$ v tomto případě $\boldsymbol{M}_1$. Z rovnic (5) pak snadno získáme rovnici

$$(6)\qquad \frac{\mathrm{d}A}{A} + i(m+1)\,\omega_{12} = 0\,,$$

jejíž vnější diferenciál dává relaci

$$(7)\qquad 2R_1^2 - c = 0\,.$$

Podmínky integrability soustavy diferenciálních rovnic určujících uvažované plochy $\boldsymbol{M}_1$ jsou tedy vyjádřeny první rovnicí (5) a rovnicí (7). Odtud plyne, že *minimální plochy $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru existují v libovolném $(2m + 1)$-rozměrném prostoru $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ s kladnou konstantní křivostí a závisí jen na konstantách.*

Z předcházejících vztahů plyne bezprostředně rovnost $R_k^2 = R_1^2 = \dfrac{c}{2}$ $(k = 1, 2, \ldots, m - 1)$, kterou je popsána závislost mezi jednotlivými veličinami R_k. Odtud pak vychází pro poloměr kružnice normální křivosti řádu k hodnota R_1^k, jejíž souvislost s křivostí c prostoru $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ je z předchozího zřejmá.

Buď nyní $A = 0$, $B \neq 0$ a označme příslušnou plochu $\boldsymbol{M}$ v tomto případě $\boldsymbol{M}_2$. Druhá z rovnic (5) má za tohoto předpokladu tvar

$$(8)\qquad m(m+1)\,R_1^2 - (m-1)(m+2)\,\frac{c}{2} = 0$$

a z vnějších kvadratických relací (5) zůstává pouze druhá. Odtud plyne, že *minimální plochy $\boldsymbol{M}_2$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru existují v libovolném $(2m + 1)$-rozměrném prostoru $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ s kladnou konstantní křivostí a závisí na jedné funkci jedné proměnné.*

Rovnicí (8) a první rovnicí (5) jsou v tomto případě vyjádřeny vztahy mezi veličinami R_k a křivostí c prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$.

3. V dalších úvahách odvodíme charakteristické projektivní vlastnosti uvažovaných ploch $\boldsymbol{M}$ užitím výsledků a označení uvedených v pojednání [4]. Zvláště připomeňme, že $\mathbf{P}_{2m+1}$ je projektivní rozšíření prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$, jehož absolutní kvadrikou je regulární kvadratická nadplocha $\mathbf{A}$ o rovnici $\frac{1}{c} x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$. Zaveďme dále označení $E_k = \mathbf{e}_{2k-1} + i\mathbf{e}_{2k}$, $E_{-k} = \mathbf{e}_{2k-1} - i\mathbf{e}_{2k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $\Omega_1 = \omega_1 + i\omega_2$, $\Omega_{-1} = \omega_1 - i\omega_2$, pomocí něhož lze soustavu rovnic (1) s koeficienty danými v (2) nahraditi soustavou

$$
\begin{aligned}
(9)\quad \mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1 E_{-1}\,,\\
\mathrm{d}E_1 &= -\,c\Omega_1 M - i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,,\\
\mathrm{d}E_{-1} &= -\,c\Omega_{-1}M + i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1 E_{-2}\,,\\
\mathrm{d}E_k &= -\,R_{k-1}\Omega_1 E_{k-1} - i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,,\\
\mathrm{d}E_{-k} &= -\,R_{k-1}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} + R_k\Omega_1 E_{-(k+1)}\,,\\
\mathrm{d}E_m &= -\,R_{m-1}\Omega_1 E_{m-1} - i\omega_{2m-1,2m}E_m + (\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1})\,\mathbf{e}_{2m+1}\,,\\
\mathrm{d}E_{-m} &= -\,R_{m-1}\Omega_{-1}E_{-(m-1)} + i\omega_{2m-1,2m}E_{-m} + (\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1})\,\mathbf{e}_{2m+1}\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_{2m+1} &= -\,\tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1})\,E_m - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1})\,E_{-m}\\
&\quad (k = 2, 3, \ldots, m-1)\,.
\end{aligned}
$$

V této soustavě není vzhledem k pozdějším úvahám dosazeno podle (4).

4. Všimneme si nejprve ploch $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru a dokážeme následující větu, která popisuje jejich charakteristické vlastnosti:

Věta 1. *Plocha $(2m + 1)$-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru, vnořená do $(2m + 1)$-rozměrného neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť mající tyto vlastnosti: 1° Jest autopolární vzhledem k regulární kvadrice $\mathbf{A}$ prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ a periodická s periodou $2(m + 1)$; 2° Má oba invarianty stejné a konstantní.*

D ů k a z. Ve větě 3.3 z pojednání [4] bylo dokázáno, že existence sdružené sítě s vlastností 1° na ploše projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby plocha prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ mohla býti považována za minimální plochu $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořenou do neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$. Příslušná sdružená síť je tvořena křivkami, které jsou v neeukleidovské metrice určené kvadrikou $\mathbf{A}$ minimálními křivkami na uvažované ploše. Poznamenejme, že uvedené vlastnosti plochy prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ lze analyticky vyjádřiti při vhodné volbě pohyblivého reperu soustavou diferenciálních rovnic (9) s podmínkami integrability (3), při čemž funkce A, B v (4) nejsou současně rovny nule a křivky sdružené sítě jsou určeny diferenciální rovnicí $\Omega_1 \Omega_{-1} = 0$. K dokončení důkazu předcházející věty stačí tedy ukázati, že vlastnost 2° je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby všechny uvažované kružnice normální křivosti plochy $\boldsymbol{M}_1$ měly v příslušné neeukleidovské metrice konstantní poloměry.

Ukážeme nejprve, že sdružená síť minimálních křivek na ploše $\boldsymbol{M}_1$ prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$ má oba invarianty stejné a konstantní. Na základě rovnic (5) lze pro jednoduchost položiti $A = 1$ a z (6) pak vychází $\omega_{12} = 0$. Odtud plyne vzhledem k rovnicím struktury prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$, že Ω_1 a Ω_{-1} jsou úplnými diferenciály, a můžeme proto položiti $\Omega_1 = du$, $\Omega_{-1} = dv$. Ze soustavy (9) pak vychází $M_{uv} = -\frac{1}{2}cM$ a odtud pro invarianty uvažované sítě plyne $h = k = -\frac{1}{2}c$. Síť minimálních křivek na ploše $\boldsymbol{M}_1$ má tedy skutečně oba invarianty stejné a konstantní.

Předpokládejme naopak, že sdružená síť křivek $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ na ploše, určené v projektivním prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ soustavou diferenciálních rovnic (9), má oba invarianty stejné a konstantní. Položíme-li $\Omega_1 = e^p\,du$, $\Omega_{-1} = e^q\,dv$, obdržíme snadno z rovnic struktury $i\omega_{12} = q_u\,du - p_v\,dv$ a ze soustavy (9) odvodíme rovnici $M_{uv} = -\frac{1}{2}ce^{p+q}M$, z níž získáme pro uvažované invarianty hodnoty $h = k = -\frac{1}{2}ce^{p+q}$. Z rovnic struktury užitých na formu ω_{12} obdržíme po jednoduchém výpočtu

$$(p + q)_{uv} = \tfrac{1}{2}(2R_1^2 - c)\,e^{p+q}\,. \tag{10}$$

Poněvadž invarianty h, k jsou konstantní, je také $p + q$ konstantní a to nastane podle (10) právě tehdy, když $2R_1^2 - c = 0$. Je tedy R_1 konstantní a odtud na základě rovnic (3) postupně odvodíme, že všechny veličiny R_k vyskytující se v soustavě (9) jsou konstantní. Předcházejícími úvahami je provedena zbývající část důkazu věty 1.

Právě dokázaná věta je přímým rozšířením výsledku odvozeného O. Borůvkou v pojednání [1].

5. Přistoupíme nyní k zjištění charakteristických projektivních vlastností ploch $\boldsymbol{M}_2$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru a dokážeme za tím účelem tuto větu:

Věta 2. *Plocha $(2m + 1)$-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_2$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru, vnořená do $(2m + 1)$-rozměrného neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť mající tyto vlastnosti: 1° Jest autopolárné vzhledem k regulární kvadrice $\mathbf{A}$ prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$, její první, druhé, ..., m-té laplaceovské transformace leží na kvadrice $\mathbf{A}$ a její posloupnost laplaceovských transformací se ukončí v jednom směru po m transformacích Goursatovým způsobem a v druhém směru po $m + 1$ transformacích Laplaceovým způsobem; 2° Křivky, v jejichž směru se příslušná posloupnost ukončí Goursatovým způsobem, jsou racionální normální křivky vnořené do lineárních podprostorů dimense m projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$.*

Důkaz. Při důkazu této věty vyjdeme z výsledku odvozeného ve větě 3.5 z pojednání [4], kde jest ukázáno, že existence sdružené sítě s vlastností 1° na ploše projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby plocha prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ mohla býti považována za minimální plochu $\boldsymbol{M}_2$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořenou do neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$. Uvedené vlastnosti jsou analyticky vyjádřeny při vhodné volbě pohyblivého reperu soustavou diferenciálních rovnic (9) s podmínkami integrability (3), při čemž právě jedna z funkcí A, B v (4) je rovna nule; v dalším se opět omezíme na dříve uvažovaný případ $A = 0$, $B \neq 0$. Podobně jako v předcházejícím případě jsou křivky uvedené sdružené sítě dány rovnicí $\Omega_1\Omega_{-1} = 0$ a v neeukleidovské metrice určené kvadrikou $\mathbf{A}$ jsou minimálními křivkami na uvažované ploše. K dokončení důkazu předcházející věty je tedy třeba dokázati, že vlastnost 2° je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby poloměry všech kružnic normální křivosti plochy $\boldsymbol{M}_2$ byly v příslušné neeukleidovské metrice konstantní.

Dokážeme nejprve, že křivky $\Omega_1 = 0$, v jejichž směru se posloupnost laplaceovských transformací sítě minimálních křivek na ploše $\boldsymbol{M}_2$ ukončí Goursatovým způsobem, jsou racionální normální křivky lineárních podprostorů dimense m. Vzhledem k předpokladu $A = 0$, $B \neq 0$ a vzhledem k poslední rovnici (5) lze bez újmy na obecnosti položiti $B = 1$, takže forma ω_{12} je lineárně závislá na Ω_1. Podél libovolné křivky soustavy $\Omega_1 = 0$ na uvažované ploše je tedy $\omega_{12} = 0$ a z rovnic struktury pak vyplývá, že podél této křivky je Ω_{-1} úplným diferenciálem. Každá z uvažovaných křivek jest určena soustavou diferenciálních rovnic (9), v níž je třeba podle (4) dosaditi $\Omega_1 = 0$, $\omega_{2k-1,2k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $\omega_{2m-1,2m+1} \pm i\omega_{2m,2m+1} = 0$. Položíme-li ještě $\Omega_{-1} = \mathrm{d}v$ a označíme-li čárkou derivace podle v, dostaneme tím zvláště soustavu diferenciálních rovnic

$$(11) \qquad M' = \tfrac{1}{2}E_1\,, \quad E'_k = R_kE_{k+1}\,, \quad E'_m = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m - 1)\,,$$

z níž se bezprostředně zjistí, že uvažovaná křivka je vnořena do lineárního podprostoru dimense m vnořeného do projektivního rozšíření $\mathbf{P}_{2m+1}$ prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$. Ze soustavy (11) vychází dále diferenciální rovnice $M^{(m+1)} = 0$, jejímž obecným integrálem je polynom stupně m v proměnné v tvaru $M = C_0 + C_1v + \ldots + C_mv^m$. Odtud je patrno, že uvažovaná křivka $\Omega_1 = 0$ na ploše $\boldsymbol{M}_2$ je racionální normální křivka stupně m.

Předpokládejme naopak, že křivky $\Omega_1 = 0$ na ploše, určené v projektivním prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ soustavou diferenciálních rovnic (9), jsou racionálními normálními křivkami vnořenými do lineárních podprostorů dimense m prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$. Abychom zjednodušili následující výpočty, zavedeme bod E_0 tím, že položíme $M = \frac{1}{2}E_0$. Ze soustavy (9) snadno plyne, že všechny oskulační prostory řádu alespoň m libovolné z uvažovaných křivek mají dimensi m a že tedy tyto křivky jsou vnořeny do lineárních podprostorů dimense m prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$.

Pohybuje-li se bod E_0 po určité křivce soustavy $\Omega_1 = 0$, je podle (4) a (9)

$$\mathrm{d}E_k = -\, i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,, \tag{12}$$
$$\mathrm{d}E_m = -\, i\omega_{2m-1,2m}E_m \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1)$$

a odtud plyne, že bod E_m nemění svou polohu a že prostor $[E_1E_2 \ldots E_m]$ je pevný. Přiřaďme ke každé přímce $[E_0E_m]$ pohyblivý reper tvořený přímkami $[E_jE_m]$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$ procházejícími pevným bodem E_m a ležícími v pevném prostoru $[E_1E_2 \ldots E_m]$. Užijeme-li soustavy diferenciálních rovnic (9) s $\Omega_1 = 0$, dostaneme po jednoduchém výpočtu

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[E_0E_m] &= -\, i\omega_{2m-1,2m}[E_0E_m] + \Omega_{-1}[E_1E_m]\,,\\
\mathrm{d}[E_{k-1}E_m] &= -\, i(\omega_{2k-3,2k-2} + \omega_{2m-1,2m})[E_{k-1}E_m] + R_{k-1}\Omega_{-1}[E_kE_m]\,,\\
\mathrm{d}[E_{m-1}E_m] &= -\, i(\omega_{2m-3,2m-2} + \omega_{2m-1,2m})[E_{m-1}E_m] \quad (k = 2, 3, \ldots, m-1)\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

Poněvadž uvažovaná křivka je racionální normální křivkou stupně m, je příbuznost mezi body E_1 ležícími na tečnách křivky v bodech E_0 a přímkami $[E_0E_m]$ projektivitou. Abychom našli analytické podmínky pro to, aby příbuznost mezi body E_1 a přímkami $[E_0E_m]$ byla projektivitou, přepišme předcházející dvě soustavy diferenciálních rovnic tím, že místo bodu E_j $(j = 2, 3, \ldots, m)$ zavedeme bod $\dfrac{1}{R_1R_2 \ldots R_{j-1}}\, E_j$. Po jednoduchém výpočtu dostaneme ze soustavy diferenciálních rovnic (12) ekvivalentní soustavu tvaru

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E_1 &= -\, i\omega_{12}E_1 + \Omega_{-1}E_2\,,\\
\mathrm{d}E_k &= \left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} + \ldots + \frac{\mathrm{d}R_{k-1}}{R_{k-1}} - i\omega_{2k-1,2k}\right)E_k + \Omega_{-1}E_{k+i}\,,\\
\mathrm{d}E_m &= \left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} + \ldots + \frac{\mathrm{d}R_{m-1}}{R_{m-1}} - i\omega_{2m-1,2m}\right)E_m \quad (k = 2, 3, \ldots, m-1)
\end{aligned}$$

a soustavu diferenciálních rovnic (13) nahradíme soustavou

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[E_0E_m] &= -\, i\omega_{2m-1,2m}[E_0E_m] + \Omega_{-1}[E_1E_m]\,,\\
\mathrm{d}[E_1E_m] &= -\, i(\omega_{12} + \omega_{2m-1,2m})[E_1E_m] + \Omega_{-1}[E_2E_m]\,,\\
\mathrm{d}[E_{k-1}E_m] &= \left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} + \ldots + \frac{\mathrm{d}R_{k-2}}{R_{k-2}} - i\,.\,\overline{\omega_{2k-3,2k-2} + \omega_{2m-1,2m}}\right)[E_{k-1}E_m] +\\
&\qquad + \Omega_{-1}[E_kE_m]\,,\\
\mathrm{d}[E_{m-1}E_m] &= \left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} + \ldots + \frac{\mathrm{d}R_{m-2}}{R_{m-2}} - i\,.\,\overline{\omega_{2m-3,2m-2} + \omega_{2m-1,2m}}\right)[E_{m-1}E_m]\\
&\qquad (k = 3, 4, \ldots, m-1)\,.
\end{aligned}$$

Z předcházejících dvou soustav plyne, že uvažovaná příbuznost je projektivitou tehdy a jen tehdy, když

$$\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} + i(\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1)\,. \tag{14}$$

Z tvaru těchto rovnic plyne, že jejich vnějším diferencováním dostaneme tytéž vztahy jako vnějším diferencováním soustavy rovnic $\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2} = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, m - 1$), která je však ekvivalentní se soustavou rovnic napsaných v prvním řádku (4). Odtud plyne, že z rovnic (14) získáme vnějším diferencováním první dvě rovnice (5), v nichž $A = 0$, a že tedy všechny veličiny R_k ($k = 1, 2, \ldots, m - 1$) jsou konstantní. Předcházejícími úvahami je dokončen důkaz věty 2.

Dokázaná věta je rozšířením výsledku odvozeného O. Borůvkou v pojednání [1].

6. Postupu důkazu předcházející věty lze použíti také v případě ploch, které jsou definovány soustavou (9) za předpokladu, že obě funkce A, B v (4) jsou současně rovny nule. Tyto plochy jsou vnořeny do prostoru $\boldsymbol{S}_{2m}$ dimense $2m$ a byly v předcházejících úvahách vyloučeny. Pro tyto plochy se příslušná posloupnost laplaceovských transformací sdružené sítě ukončí v obou směrech po m transformacích Goursatovým způsobem a všechny křivky tvořící sdruženou síť na ploše jsou racionálními normálními křivkami vnořenými do m-rozměrných prostorů.

Literatura

[1] *O. Borůvka*: Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante. Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university *106*, 1928.

[2] *O. Borůvka*: Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante. Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university I, *165*, 1932; II, *212*, 1935; III, *214*, 1935.

[3] *O. Borůvka*: Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce. Journal de mathématiques pures et appliquées *12*, 1933, 337—383.

[4] *K. Svoboda*: Projektivní vlastnosti minimálních ploch s kružnicemi normální křivosti. Časopis pro pěstování matematiky *83*, 1958, 287—316.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ О МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С ОКРУЖНОСТЯМИ НОРМАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПОСТОЯННОГО РАДИУСА

КАРЕЛ СВОБОДА (Karel Svoboda), Брно

В настоящей работе изучаются минимальные поверхности $\boldsymbol{M}$ с $m - 1$ окружностями нормальной кривизны постоянных радиусов, погруженные в $(2m + 1)$-мерное пространство $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ постоянной кривизны. Эти поверхности определены системой дифференциальных уравнений (9), коэффициенты которой выполняют соотношения (4). Поверхность $\boldsymbol{M}$ обозначена через $\boldsymbol{M}_1$ или через $\boldsymbol{M}_2$ смотря по тому, отличны ли обе функции A, B в (4) от нуля или равна ли именно одна из них тождественно нулю.

Необходимые и достаточные условия для того, чтобы поверхность проективного пространства $\boldsymbol{P}_{2m+1}$ могла быть определена как минимальная поверхность с $m - 1$ окружностями нормальной кривизны неевклидова пространства $\boldsymbol{S}_{2m+1}$, содержатся в теоремах, доказанных в работе [4]. Для того, чтобы радиусы окружностей нормальной кривизны поверхности $\boldsymbol{M}$ были постоянными, необходимо и достаточно, чтобы — в случае поверхности $\boldsymbol{M}_1$ — инварианты сопряженной сети, образованной минимальными кривыми, были одинаковы и постоянны, или чтобы — в случае поверхности $\boldsymbol{M}_2$ — кривые, в направлении которых последовательность преобразований Лапласа сопряженной сети, образованной минимальными кривыми, окончена по способу Гурсата, были рациональными нормальными кривыми линейных пространств размерности m.

Résumé

REMARQUE SUR LES SURFACES MINIMA A CIRCONFÉRENCES DE COURBURE NORMALE DE RAYON CONSTANT

KAREL SVOBODA, Brno

Dans ce Mémoire, on étudie les surfaces minima $\boldsymbol{M}$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale de rayons constants qui se trouvent plongées dans un espace $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ à $2m + 1$ dimensions à courbure constante. Ces surfaces sont déterminées par le système d'équations différentielles (9) dont les coefficients satisfont aux relations (4). On désigne la surface $\boldsymbol{M}$ par $\boldsymbol{M}_1$ ou bien $\boldsymbol{M}_2$ suivant que les deux fonctions A, B dans (4) sont différentes de zéro ou bien précisément une de ces fonctions s'annule identiquement.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface de l'espace projectif $\boldsymbol{P}_{2m+1}$ puisse être définie comme une surface minimum à $m - 1$ circonférences de courbure normale d'un espace non-euclidien $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ sont fournies par les théorèmes démontrés dans le Mémoire [4]. Pour que les rayons des circonférences de courbure normale d'une surface $\boldsymbol{M}$ soient constants, il faut et il suffit que — dans le cas d'une surface $\boldsymbol{M}_1$ — les invariants du réseau conjugué formé par les courbes minima soient égaux et constants, ou bien que — dans le cas d'une surface $\boldsymbol{M}_2$ — les courbes, dans le sens desquelles la suite des transformations laplaciennes du réseau conjugué formé par les courbes minima s'arrête de la manière de Goursat, soient des courbes rationnelles normales d'un sous-espace linéaire à m dimensions.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

O CARTANOVĚ PARAMETRU NA NEPŘÍMKOVÝCH PLOCHÁCH

JOSEF VALA, Brno

(Došlo dne 26. června 1959)

Buď $\frac{dv}{du} = B(u, v)$ diferenciální rovnice vrstvy čar na ploše Ψ vztažené na asymptotiky. Tuto vrstvu nazývám u-parametrisující vrstvou B_u, jestliže podél každé asymptotiky $v = v_0$ tečny k čarám vrstvy tvoří přímkovou plochu, na níž existuje Riccatiho soustava (R-soustava) čar (tj. soustava čar vytínající na tvořicích přímkách projektivní bodové řady), která obsahuje čáru $v = v_0$, pro niž u je Cartanovým parametrem ve smyslu M. BARNERA [1]. Analogicky jsou definovány vrstvy B_v. Existuje-li na Ψ nekonečně mnoho vrstev, které jsou jak B_u tak B_v, tvoří úplná soustava těchto čar hypergeodetický systém. Zvláštní pozornost je věnována plochám koincidenčním.

Pojem Cartanova parametru nerozvinutelné přímkové plochy Φ projektivního prostoru S_3, přesněji řečeno R-soustavy asymptotik plochy Φ, byl zaveden E. CARTANEM v práci [4]. M. BARNER zobecnil pojem Cartanova parametru pro libovolný R-systém plochy Φ v práci [1]. B. SEGRE ve svých přednáškách [6] použil původní Cartanovy definice ke studiu čar na některých nepřímkových plochách, zvláště plochách koincidenčních.

V této práci se vychází z výsledků B. Segreho, jejichž rozšíření je umožněno citovaným zobecněním pojmu Cartanova parametru, které podal M. Barner.

a) Přímková nerozvinutelná plocha Φ nechť je vytvořena jako soustava přímek spojujících dvojice korespondujících bodů řídicích čar C_y, C_z opsaných body $y(u)$, $z(u)$, kde u je proměnný parametr v jistém intervalu. Předpokládejme, že existují a jsou spojité všechny derivace y', z', y'', z'', atd., které jsou v dalším uvedeny, a že je $(y, z, y', z') \neq 0$. Pak

$$x = y(u) + v\, z(u) \tag{1}$$

je bod vytvořující při proměnných u, v plochu Φ, k níž nechť náleží soustava diferenciálních rovnic

$$y'' = \alpha_{11}y + \alpha_{12}z + \beta_{11}y' + \beta_{12}z'\,, \quad z'' = \alpha_{21}y + \alpha_{22}z + \beta_{21}y' + \beta_{22}z'\,, \tag{1a}$$

kde, jak lze dokázati, volbou faktoru homogenity lze vždy docíliti, aby bylo

(2a) $$\beta_{11} + \beta_{22} = 0\,.$$

Křivky $v =$ konst. plochy Φ vytvořují na Φ soustavu R (Doppelverhältnisschar, Riccatiho soustavu) čar a ve smyslu citované práce M. Barnera nutná a postačující podmínka pro to, aby parametr u byl Cartanovým parametrem této soustavy R, za předpokladu (2a) je

(2b) $$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0 \quad \text{(Barner [1], str. 55 a 52)}\,.$$

Uveďme, že podmínkami (2ab) je Cartanův parametr souřadnicové soustavy R dán až na lineární transformace tvaru

$$u = \frac{\alpha_1 u^* + \alpha_3}{\gamma_1 u^* + \gamma_3}\,; \quad \alpha_1, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_3 = \text{konst}\,, \quad \alpha_1\gamma_3 - \gamma_1\alpha_3 \neq 0,$$

spojíme-li je se změnou faktoru homogenity

$$y^* = \frac{(\alpha_1\gamma_3 - \gamma_1\alpha_3)^{\frac{1}{2}}}{\gamma_1 u - \alpha_1}\, y\,, \quad z^* = \frac{(\alpha_1\gamma_3 - \gamma_1\alpha_3)^{\frac{1}{2}}}{\gamma_1 u - \alpha_1}\, z\,. \quad \text{(Barner [1], str. 55.)}$$

b) Nepřímková plocha Ψ nechť je vztažena na asymptotiky a vytvořena bodem $x = x(u, v)$; je integrální plochou soustavy diferenciálních rovnic

(3) $$x_{uu} = \beta x_v + p_{11}x\,, \quad x_{vv} = \gamma x_u + p_{22}x\,.$$

Současně platí

(3a) $$(x, x_u, x_v, x_{uv}) = \text{konst}\,.$$

Podmínky integrability soustavy (3), jak známo, jsou:

(4a) $$(2p_{11} + \beta_v)_v = 2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u\,,$$

(4b) $$(2p_{22} + \gamma_u)_u = 2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v\,,$$

(4c) $$\beta(2p_{22} + \gamma_u)_v + 2\beta_v(2p_{22} + \gamma_u) - \beta_{vvv} = \\ = \gamma(2p_{11} + \beta_v)_u + 2\gamma_u(2p_{11} + \beta_v) - \gamma_{uuu}\,.$$

(Segre [6], str. 90, Lane [5], str. 120.)

Poznámka. Diferenciální rovnice plochy Ψ vztažené na asymptotiky mají obecně tvar

$$x_{uu} = \alpha x_u + \beta x_v + p_{11}x\,, \quad x_{vv} = \gamma x_u + \delta x_v + p_{22}x\,.$$

Vhodnou normalisací souřadnic $x(u, v)$ (G. Bol [2], str. 107) lze vždy dosáhnouti splnění relace (3a); jestliže je splněna, pak nutně platí $\alpha = \delta = 0$.

Definice 1. *Transformací* **T** *asymptotických parametrů u, v plochy Ψ rozumějme transformaci (podle G. Bola „Sterntransformation“)*

(5) $$u = f(u^*)\,, \quad v = g(v^*)\,,$$

je-li spojena s normalisací faktoru homogenity

(5a) $$x^* = f_{u^*}^{-\frac{1}{2}} g_{v^*}^{-\frac{1}{2}} x \,.$$

Snadným výpočtem vychází, že po transformaci $\boldsymbol{T}$ plocha Ψ je integrální plochou soustavy diferenciálních rovnic

$$x^*_{u^*u^*} = \beta^* x^*_{v^*} + p^*_{11} x^* \,, \quad x^*_{v^*v^*} = \gamma^* x^*_{u^*} + p^*_{22} x^* \,,$$

kde

(6) $$\beta^* = f'^2 g'^{-1} \beta \,, \quad \gamma^* = f'^{-1} g'^2 \gamma \,, \quad p_{11} = f'^{-2}(p^*_{11} + \mathbf{f}' - \mathbf{f}^2 - \beta^* \mathbf{g}) \,,$$
$$p_{22} = g'^{-2}(p^*_{22} + \mathbf{g}' - \mathbf{g}^2 - \gamma^* \mathbf{f}) \,,$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}\frac{f''}{f'} \,, \quad \mathbf{g} = \frac{1}{2}\frac{g''}{g'} \,, \quad f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u^*} \,, \quad g' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v^*} \,, \quad \text{atp.} \quad \text{(Bol [3], str. 1)} \,.$$

Z uvedené soustavy diferenciálních rovnic pak snadno plyne:

(6a) $$\begin{gathered} 2p_{11} + \beta_v = f'^{-2}(2p^*_{11} + \beta^*_{v^*}) + 2f'^{-2}(-\mathbf{f}^2 + \mathbf{f}') \,, \\ 2p_{22} + \gamma_u = g'^{-2}(2p^*_{22} + \gamma^*_{u^*}) + 2g'^{-2}(-\mathbf{g}^2 + \mathbf{g}') \,, \\ (2p_{11} + \beta_v)_v = f'^{-2} g'^{-1}(2p^*_{11} + \beta^*_{v^*})_{v^*} \,, \\ (2p_{22} + \gamma_u)_u = f'^{-1} g'^{-2}(2p^*_{22} + \gamma^*_{u^*})_{u^*} \,, \\ \beta_u = -2f'^{-4} f'' g' \beta^* + f'^{-3} g' \beta^*_{u^*} \,, \quad \gamma_u = f'^{-1} f'' g'^{-2} \gamma^* + g'^{-2} \gamma^*_{u^*} \,, \\ \beta_v = f'^{-2} g'^{-1} g'' \beta^* + f'^{-2} \beta^*_{v^*} \,, \quad \gamma_v = -2f' g'^{-4} g'' \gamma^* + f' g'^{-3} \gamma^*_{v^*} \,. \end{gathered}$$

$\boldsymbol{T}_u$, resp. $\boldsymbol{T}_v$ nechť je onen zvláštní případ transformace $\boldsymbol{T}$, kde $f(u^*) = \dfrac{\alpha_1 u^* + \alpha_3}{\gamma_1 u^* + \gamma_3}$, g je libovolná funkce proměnné v^*, resp. $g(v^*) = \dfrac{\beta_2 v^* + \beta_3}{\gamma_2 v^* + \gamma_3}$, f je libovolná funkce proměnné u^*, při čemž $\alpha_1, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 = \text{konst.}$; $\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1 \neq 0$, $\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 \neq 0$. Přímým výpočtem snadno dostaneme, že transformace $\boldsymbol{T}$ je transformací $\boldsymbol{T}_u$, resp. $\boldsymbol{T}_v$ tehdy a jen tehdy, platí-li $\mathbf{f}' - \mathbf{f}^2 = 0$, resp. $\mathbf{g}' - \mathbf{g}^2 = 0$.

c) Jestliže koeficienty soustavy (3) splňují kromě podmínek (4abc) ještě podmínku $(2p_{11} + \beta_v)_v = 0$, pak plochu označme Ψ_1, podobně, je-li splněna podmínka $(2p_{22} + \gamma_u)_u = 0$, pak plochu označme Ψ_2. Je zřejmé, jestliže plocha Ψ je současně plochou Ψ_1 i Ψ_2, pak je koincidenční plochou $\Psi_{1,2}$ a obráceně. (Bol [3], str. 38—9.)

Geometricky lze plochy Ψ_1 a Ψ_2 charakterisovat tím, že v každém jejich bodě kanonická tečna 2. druhu splývá s jednou z asymptotických tečen plochy.

Z rovnic (6a) snadno vyplývá: Na ploše Ψ_1 lze zvoliti asymptotické parametry u^*, v^* (čili transformaci $\boldsymbol{T}$) tak, že platí $2p^*_{11} + \beta^*_{v^*} = 0$; nalezení těchto parametrů vyžaduje řešení dif. rovnice

$$2\varphi[f(u^*)] f'^4 = 2f''' f' - 3f''^2 \,, \quad \text{kde} \quad \varphi(u) = 2p_{11} + \beta_v \,.$$

Podobně na ploše Ψ_2 lze zvoliti parametry u^*, v^* tak, že platí $2p^*_{22} + \gamma^*_{u^*}$; nalezení těchto parametrů předpokládá řešiti dif. rovnici

$$2\bar{\varphi}[g(v^*)]\, g'^4 = 2g'''g' - 3g''^2\,, \quad \text{kde} \quad \bar{\varphi}(v) = 2p_{22} + \gamma_u\,.$$

Důležitost volby těchto parametrů bude objasněna v odstavci d.

Jestliže asymptotické parametry u, v na ploše Ψ_1 jsou již tak voleny, že platí $2p_{11} + \beta_v = 0$, pak tato relace je dle (6a) invariantní pouze při transformaci $\boldsymbol{T}_u$. Podobně, platí-li pro plochu Ψ_2 vztaženou na asymptotické parametry u, v: $2p_{22} + \gamma_u = 0$, pak tato relace je invariantní pouze při transformaci $\boldsymbol{T}_v$.

d) Každá přímková plocha, dotýkající se nepřímkové plochy Ψ podél její asymptotiky $v = v_0$ je vytvořena bodem

(7) $$\xi = y + rz\,,$$

kde

(7a) $$y = x(u, v_0)\,, \quad z = A(u, v_0)\, x(u, v_0) + \lambda_1(u, v_0)\, x_u(u, v_0) + \\ + \lambda_2(u, v_0)\, x_v(u, v_0)\,,$$

při čemž u a r jsou parametry.

Definice 2. *Označením $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$ rozumějme soustavu R-čar plochy* (7), *jejíž čáry jsou dány rovnicí $r =$* konst.

Poznámka 1. Je zřejmé, že každá soustava $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$ leží na přímkové ploše $\Phi(v_0, B)$, která

1. se dotýká plochy Ψ podél její asymptotiky $v = v_0$,
2. jejíž tvořicí přímky se dotýkají čar systému $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{\lambda_2(u, v)}{\lambda_1(u, v)} = B(u, v)$

v bodech asymptotiky $v = v_0$.

Z této definice je zřejmé, že přímková plocha $\Phi(v_0, B)$ závisí pouze na poměru $\dfrac{\lambda_2(u, v)}{\lambda_1(u, v)} = B(u, v)$ koeficientů λ_1, λ_2.

Definice 3. *Vrstvu čar $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{\lambda_2(u, v)}{\lambda_1(u, v)} = B(u, v)$ nazývejme u-parametrisující vrstvou čar (soustavou B_u-čar), splňuje-li $B(u, v)$ podmínku*

(8) $$2\beta\,\frac{\partial B}{\partial u} = B^2(2p_{11} + \beta_v) + B\beta_u - \beta^2\,.$$

Jestliže plocha Ψ je vztažena na jiné asymptotické parametry u^*, v^*, pak stejným způsobem lze na ní definovat vrstvu čar $\dfrac{dv^*}{du^*} = B^*(u^*, v^*)$.

Poznámka 2. Jestliže plocha $\Phi(v_0, B)$ vytvořená bodem (7) má splňovati podmínku $(y, z, y', z') = \text{konst} \neq 0$, je nutné, aby bylo $\lambda_{2u} = 0$, jak vychází snadným počtem. V odstavcích d), e) budeme vždy předpokládat, že tato podmínka je splněna, tj. že λ_2 je funkcí pouze parametru v; $\lambda_2 = \lambda_2(v)$.

Věta 1. *Pro soustavy $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$ platí pro všechna v_0 simultanně: u je Cartanovým parametrem pro každou $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$, jakmile B splňuje podmínku* (8).

Důkaz. Derivováním rovnic (7a) s přihlédnutím k (3) vychází:

$$
\begin{aligned}
y &= x\,, \\
y_u &= x_u\,, \\
y_{uu} &= \beta x_v + p_{11}x\,, \\
z &= Ax + \lambda_1 x_u + \lambda_2 x_v\,, \\
z_u &= x(A_u + \lambda_1 p_{11}) + x_u(A + \lambda_{1u}) + x_v(\lambda_1\beta) + x_{uv}\lambda_2\,, \\
z_{uu} &= x[A_{uu} + p_{11}A + 2\lambda_{1u}p_{11} + \lambda_1 p_{11u} + \lambda_2(\beta p_{22} + p_{11v})] + \\
&\quad + x_u[2A_u + \lambda_1 p_{11} + \lambda_{1uu} + \lambda_2\beta\gamma] + \\
&\quad + x_v[\beta A + 2\beta\lambda_{1u} + \lambda_1\beta_u + \lambda_2(\beta_v + p_{11})] + \\
&\quad + x_{uv}(\lambda_1\beta)\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Jestliže do (1a) položíme za y, y', y'', resp. z, z', z'' výrazy (9) pro y, y_u, y_{uu}, resp. z, z_u, z_{uu}, obdržíme dvě rovnice, které jsou splněny identicky tehdy a jen tehdy, platí-li soustavy

$$
\begin{gathered}
\begin{aligned}
p_{11} &= \alpha_{11} + \alpha_{12}A + \beta_{12}(A_u + \lambda_1 p_{11})\,, \\
0 &= \alpha_{12}\lambda_1 + \beta_{11} + \beta_{12}(A + \lambda_{1u})\,, \\
\beta &= \alpha_{12}\lambda_2 + \beta_{12}\lambda_1\beta\,, \\
0 &= \beta_{12}\lambda_2\,,
\end{aligned} \\
A_{uu} + p_{11}A + 2\lambda_{1u}p_{11} + \lambda_1 p_{11u} + \lambda_2(\beta p_{22} + p_{11v}) = \\
= \alpha_{21} + \alpha_{22}A + \beta_{22}(A_u + \lambda_1 p_{11})\,, \\
2A_u + \lambda_1 p_{11} + \lambda_{1uu} + \lambda_2\beta\gamma = \alpha_{22}\lambda_1 + \beta_{21} + \beta_{22}(A + \lambda_{1u})\,, \\
\beta A + 2\beta\lambda_{1u} + \lambda_1\beta_u + \lambda_2(\beta_v + p_{11}) = \alpha_{22}\lambda_2 + \beta_{22}\lambda_1\beta\,, \\
\lambda_1\beta = \beta_{22}\lambda_2\,.
\end{gathered}
\tag{9a}
$$

Odtud snadno dostaneme:

$$
\begin{gathered}
\beta_{11} + \beta_{22} = 0\,, \\
\alpha_{11} + \alpha_{22} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\left[2\beta\,\frac{\lambda_{1u}\lambda_2}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\,(2p_{11} + \beta_v) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,\beta_u - \beta^2\right].
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Dosadíme-li $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = B$ $(\lambda_{2u} = 0)$, dostaneme pro $\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0$ podmínku (8).

Věta 1 byla dokázána za předpokladu $\lambda_1 \,.\, \lambda_2 \neq 0$ (čímž vylučujeme, že uvažovaný systém čar $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = B(u, v)$ je systémem asymptotik.

Jestliže však $\lambda_1 = 0$, pak tvořicí přímky plochy $\Phi(v_0, B)$ jsou tečnami asymptotik $u =$ konst. plochy Ψ v bodech asymptotiky $v = v_0$. Soustavu $R(v_0, A, 0, \lambda_2)$ tvoří pak podle (7), (7a) čáry vytvořené body

$$
\xi = x(u, v_0) + r[A(u, v_0)\, x(u, v_0) + \lambda_2(u, v_0)\, x_v(u, v_0)]\,. \tag{11}
$$

Větu 1 pak nahrazuje

Věta 2. *Parametr u ve vyjádření* (11) *soustavy $R(v_0, A, 0, \lambda_2)$ je jejím Cartanovým parametrem (při každé hodnotě $v = v_0 =$ konst.), platí-li $2p_{11} + \beta_v = 0$.*

Důkaz. Z rovnic (9a) vychází pro $\lambda_1 = 0$, za předp. $\lambda_2 \neq 0$,

$$\beta_{11} + \beta_{22} = 0\,, \quad \alpha_{11} + \alpha_{22} = 2p_{11} + \beta_v\,.$$

Podmínka $\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0$ vyjadřuje, že plocha Ψ je plochou Ψ_1.

Věta 3. *Nutná podmínka, aby u byl Cartanovým parametrem systému $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$ a aby tento systém R byl soustavou asymptotik, je, že Ψ je plochou Ψ_1, na níž jsou parametry voleny tak, že platí $2p_{11} + \beta_v = 0$.*

Důkaz. Aby systém $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$ byl systémem asymptotik (za předp. $\lambda_{2u} = 0$), je nutno a stačí, aby bylo $\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$, což lze dokázat snadným výpočtem. Odtud pak dle (9a) snadno dostaneme:

$$\lambda_1 = 0\,, \quad 2A_u + \lambda_2\beta\gamma = 0\,, \quad \alpha_{11} + \alpha_{22} = 2p_{11} + \beta_v\,.$$

Poznámka 3. Ve všech větách vpředu uvedených se předpokládá $\lambda_2 \neq 0$, tj. že uvedený R-systém neleží na ploše tečen asymptotiky $v = v_0$.

e) **Věta 4.** *Je-li $\mathbf{T}$ transformací parametrů u, v podle definice 1 v nové parametry u^*, v^*, pak každá u-parametrisující vrstva čar plochy Ψ se transformuje v u^*-parametrisující vrstvu čar plochy Ψ tehdy a jen tehdy, jestliže $\mathbf{T}$ je transformací $\mathbf{T}_u$.*

Důkaz. u-parametrisující vrstva čar $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = B(u, v)$ na ploše Ψ nechť má v nové soustavě rovnici $\dfrac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}u^*} = B^*(u^*, v^*)$, kde zřejmě platí

$$B(u, v) = f'^{-1}g'\,B^*(u^*, v^*)\,. \tag{12}$$

Podle definice 3 je funkce $B(u, v)$ integrálem dif. rovnice (8). Do této rovnice dosaďme za $B(u, v)$ z rovnice (12) a za $\beta, \beta_u, \beta_v, 2p_{11} + \beta_v$ z (6), (6a). Po snadné úpravě pak vychází parciální dif. rovnice pro $B^*(u^*, v^*)$:

$$2\beta^*\frac{\partial B^*}{\partial u^*} = B^{*2}(2p^*_{11} + \beta^*_{v^*}) + B^*\beta^*_{u^*} - \beta^{*2} + 2B^{*2}(\mathbf{f}' - \mathbf{f}^2)\,. \tag{13}$$

Vrstva čar $\dfrac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}u^*} = B^*(u^*, v^*)$ je u^*-parametrisující vrstvou čar tehdy a jen tehdy, platí-li ve (13) $\mathbf{f}' - \mathbf{f}^2 = 0$, transformace $\mathbf{T}$ je tedy transformací $\mathbf{T}_u$.

Uvažujme kongruenci $\mathbf{K}$ přímek

$$\xi = x + r\{A(u, v)\,x + \varphi(v)[B(u, v)]^{-1}\,x_u(u, v) + \varphi(v)\,x_v(u, v)\}\,. \tag{14}$$

Přímky této kongruence jsou tečnami vrstvy čar $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = B(u, v)$, která nechť je u-parametrisující vrstvou čar na ploše Ψ. Plochy $u =$ konst., $v =$ konst. kongruence **K** nazývejme parametrickými *v-plochami*, resp. *u-plochami* kongruence **K**. Podle věty 1 čáry $r =$ konst. vytvářejí na každé parametrické u-ploše ($v = v_0$) soustavu $R(v_0, A, \varphi B^{-1}, \varphi)$, pro kterou je parametr u Cartanovým parametrem.

Nechť $\mathbf{T}(\xi)$ je transformace $\mathbf{T}$ parametrů u, v, spojená s normalisací faktoru při ξ podle rovnice

$$\xi^* = f_{u^*}^{-\frac{1}{2}} g_{v^*}^{-\frac{1}{2}} \xi .$$

Je-li $\mathbf{T}_u(\xi)$ zvláštním případem transformace $\mathbf{T}(\xi)$ pro $f(u^*) = \dfrac{\alpha_1 u^* + \alpha_3}{\gamma_1 u^* + \gamma_3}$, $\alpha_1, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_3 =$ konst., $\alpha_1\gamma_3 - \gamma_1\alpha_3 \neq 0$, g je libovolná funkce parametru v^*, pak platí

Věta 5. *Budiž dána kongruence* **K** *tečen u-parametrisující vrstvy čar* $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = B^*(u, v)$ *plochy* Ψ *rovnicí* (14). *Při transformaci* $\mathbf{T}_u(\xi)$ *parametrů* u, v *tvoří čáry* $r =$ konst. *na každé přímkové* u^**-ploše kongruenci* **K** (*tj. na ploše podél níž* $\mathrm{d}v^* = 0$) *parametrický R-systém, pro nějž* u^* *je opět Cartanovým parametrem.*

Důkaz. Podle definice 1 snadno vychází

$$x_u = \tfrac{1}{2} f'^{-\frac{3}{2}} f'' g'^{\frac{1}{2}} x^* + f'^{-\frac{1}{2}} g'^{\frac{1}{2}} x^*_{u^*} ,$$
$$x_v = \tfrac{1}{2} f'^{\frac{1}{2}} g'^{-\frac{3}{2}} g'' x^* + f'^{\frac{1}{2}} g'^{-\frac{1}{2}} x^*_{v^*} .$$

Dosazením do rovnice (14) a po úpravě pak plyne

$$\xi^* = x^* + r\{x^*[A^* + \tfrac{1}{2}\varphi^* B^{*-1} f'^{-1} f'' g'^{-1} + \tfrac{1}{2}\varphi^* g'^{-2} g''] + x^*_{u^*}[g'^{-1}\varphi^* B^{*-1}] + x^*_{v^*}[g'^{-1}\varphi^*] , \tag{15}$$

kde $B^{*-1} = f'^{-1} g' B^{-1}$, $A(u, v) = A^*(u^*, v^*)$, $\varphi(v) = \varphi^*(v^*)$. Čáry $\dfrac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}u^*} = B^*(u^*, v^*)$ tvoří podle věty 4 u^*-parametrisující vrstvu. Výraz $g'^{-1}\varphi^*$ závisí pouze na parametru v^*. Správnost věty je pak zřejmá podle věty 1 a poznámky 2.

f) Každá přímková plocha dotýkající se plochy Ψ podél její asymptotiky $u = u_0$ je vytvořena bodem $\xi = y + rz$, kde

$$y = x(u_0, v) , \tag{16}$$
$$z = \bar{A}(u_0, v)\, x(u_0, v) + \bar{\lambda}_1(u_0, v)\, x_u(u_0, v) + \bar{\lambda}_2(u_0, v)\, x_v(u_0, v) .$$

Definice 2a. Označením $R(u_0, \bar{A}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ rozumějme soustavu R-čar plochy (16), jejíž čáry jsou dány rovnicí $r =$ konst. Každá soustava $R(u_0, \bar{A}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ leží na přímkové ploše $\Phi(u_0, \bar{B})$, která

1. dotýká se plochy Ψ podél její asymptotiky $u = u_0$,

2. její tvořicí přímky se dotýkají čar systému $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \dfrac{\bar{\lambda}_2(u, v)}{\bar{\lambda}_1(u, v)} = \bar{B}(u, v)$ v bodech asymptotiky $u = u_0$.

Vrstvu čar $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \bar{B}(u, v)$ nazývejme v-parametrisující vrstvou plochy Ψ, splňuje-li $\bar{B}(u, v)$ podmínku

$$2\gamma \frac{\partial \bar{B}}{\partial v} = -(2p_{22} + \gamma_u) - \bar{B}\gamma_v + \bar{B}^2\gamma^2 . \tag{17}$$

Pro plochy $\Phi(u_0, \bar{B})$, v-parametrisující vrstvy čar $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \bar{B}(u, v)$ a soustavy $R(u_0, \bar{A}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ lze odvoditi věty analogické větám 1 až 5.

g) **Definice 4.** *Vrstvu čar* $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = B(u, v)$ *na ploše* Ψ *nazývejme* (u, v)*-parametrisující vrstvou čar, vyhovuje-li* $B(u, v)$ *podmínkám* (8), (17), *tj. soustavě parciálních diferenciálních rovnic*

$$2\beta \frac{\partial B}{\partial u} = B^2(2p_{11} + \beta_v) + B\beta_u - \beta^2 , \tag{18}$$

$$2\gamma \frac{\partial B}{\partial v} = -(2p_{22} + \gamma_u) - B\gamma_v + B^2\gamma^2 .$$

Podle této definice a předcházejících odstavců je zřejmé, že (u, v)-parametrisující vrstva čar je současně u-parametrisující i v-parametrisující vrstvou čar na ploše Ψ.

Soustava (18) je úplně integrabilní, platí-li tyto podmínky:

$$\beta\gamma(2p_{11} + \beta_v)_v - (2p_{11} + \beta_v)(2p_{22} + \gamma_u)_u = 0 , \tag{19a}$$

$$\beta\gamma(2p_{22} + \gamma_u)_u - (2p_{22} + \gamma_u)(2p_{11} + \beta_v)_v = 0 , \tag{19b}$$

$$-(2p_{11} + \beta_v)(2p_{22} + \gamma_u) + \beta\gamma[\log(\beta\gamma)]_{uv} + \beta^2\gamma^2 = 0 . \tag{19c}$$

Jestliže koeficienty β, γ, p_{11}, p_{22} diferenciálních rovnic plochy Ψ [(3)] vyhovují mimo rovnic (4) ještě podmínkám (19), pak — a jen tehdy — existuje na ploše nekonečně mnoho (u, v)-parametrisujících vrstev čar $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = B(u, v)$. Podobně lze definovat na ploše Ψ, vztažené na asymptotické parametry u^*, v^*, — (u^*, v^*)-parametrisující vrstvu čar $\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}u^*} = B^*(u^*, v^*)$.

Věta 6. *Jestliže na ploše* Ψ *existuje nekonečně mnoho* (u, v)*-parametrisujících vrstev čar* $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = B(u, v)$, *pak jejích úplná soustava tvoří systém hypergeodetický.*

Důkaz. Z rovnic (18) snadno vychází

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} = \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} B = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^3 \frac{\gamma}{2} + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 \left[\frac{1}{2\beta}(2p_{11} + \beta_v) - \frac{\gamma_v}{2\gamma}\right] +$$
$$+ \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)\left[\frac{\beta_u}{2\beta} - \frac{1}{2\gamma}(2p_{22} + \gamma_u)\right] - \frac{\beta}{2} .$$

h) Souřadnice $x = x(u, v)$ koincidenční plochy $\Psi_{1,2}$ nechť vyhovují soustavě diferenciálních rovnic

$$x_{uu} = x_v + (cu + h)\, x\,, \quad x_{vv} = x_u + (cv + k)\, x\,, \tag{20}$$

$c, h, k =$ konst. (Segre [6], str. 102). Podle rovnic (3) tedy zřejmě platí:

Věta 7. *Na koincidenční ploše $\Psi_{1,2}$ o rovnicích (20) existuje nekonečně mnoho (u, v)-parametrisujících vrstev čar $\frac{dv}{du} = B(u, v)$ tehdy a jen tehdy, je-li $c = 0$, $h \,.\, k = \frac{1}{4}$.*

Důkaz. Rovnice (4abc) a (19ab) jsou splněny pro všechny hodnoty c, h, k, rovnice (19c) pouze pro $c = 0$, $h \,.\, k = \frac{1}{4}$. Integrací soustavy (18) snadno dostaneme

$$\log\,[\sqrt{2h}B - 1] - \log\,[\sqrt{2h}B + 1] = u + \frac{v}{2h} + C\,, \quad C = \text{konst}\,.$$

Při transformaci T parametrů u, v plochy $\Psi_{1,2}$ platí podle (6) a (6a)

$$\beta^* = f'^2 g'^{-1}\,, \quad \gamma^* = f'^{-1} g'^2\,, \tag{21}$$

$$2(cf + h) = f'^{-2}(2p^*_{11} + \beta^*_{v^*}) + 2f'^{-2}(-\,\mathbf{f}^2 + \mathbf{f}')\,,$$

$$2(cg + k) = g'^{-2}(2p^*_{22} + \gamma^*_{u^*}) + 2g'^{-2}(-\,\mathbf{g}^2 + \mathbf{g}')\,.$$

Věta 8. *Na koincidenční ploše $\Psi_{1,2}$, vztažené na asymptotické parametry u^*, v^*, pro niž jsou splněny podmínky (21), existuje nekonečně mnoho (u^*, v^*)-parametrisujících vrstev čar $\frac{dv^*}{du^*} = B^*(u^*, v^*)$, vyhovují-li funkce f, g relacím*

$$2f'^2(cf + h) - 2(-\,\mathbf{f}^2 + \mathbf{f}') = mf'^2\,, \quad 2g'^2(cg + k) - 2(-\,\mathbf{g}^2 + \mathbf{g}') = m^{-1}g'^2\,;$$
$$m = \text{konst} \neq 0\,.$$

Důkaz. Rovnice (4abc), (19ab), kde místo u je třeba dosadit u^* atp., jsou pro funkce $\beta^*, \gamma^*, p^*_{11}, p^*_{22}$ splněny podle (6a), (20), (21). Dosadíme-li z rovnice (21) do (19c), kde opět místo u píšeme u^* atp., dostaneme po snadné úpravě:

$$[2f'^2(cf + h) - 2(-\,\mathbf{f}^2 + \mathbf{f}')]\, f'^{-2} = [2g'^2(cg + k) - 2(-\,\mathbf{g}^2 + \mathbf{g}')]^{-1}\, g'^2\,.$$

Výraz na levé straně závisí pouze na proměnné u^*, pravá strana pouze na proměnné v^*. Odtud ihned vycházejí hledané relace.

Pracováno v semináři diferenciální geometrie prof. dr. J. KLAPKY.

Literatura

[1] *M. Barner*: Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen, Math. Zeitschr. Bd. *62*, 1955

[2] *G. Bol*: Projektive Differentialgeometrie, I. Teil, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1950.

[3] *G. Bol*: Projektive Differentialgeometrie, II. Teil, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1954.

[4] *E. Cartan*: Sur les développantes d'une surface réglée, Bull. Acad. roumaine, t. 14, 1931.

[5] *E. P. Lane*: A treatise on projective differential geometry, The university of Chicago Press, 1942.

[6] *B. Segre*: Proprietà locali e globali di varietà e di transformazioni differenziabili con speciale riguardo ai casi analitici ed algebrici, Roma-Instituto Matematico dell'università, 1956.

Резюме

О ПАРАМЕТРЕ КАРТАНА НА НЕЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

ИОСЕФ ВАЛА (Josef Vala), Брно

В работе расматриваются свойства семейств линий $\frac{dv}{du} = B(u, v)$ (семейство B_u), где $B(u, v)$ является решением дифференциального уравнения (8), на нелинейчатой поверхности Ψ, координаты поверхности Ψ являются решением дифференциальных уравнений (3). Касательные к линиям семейства B_u в точках u-линии ($v = v_0$) определяют линейчатую поверхность $\Phi(v_0, B)$, (7), на которой можно найти системы R, которые содержат линию $v = v_0$ (ситемы $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$, где $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = B$), так что u является параметром Картана (в смысле обобщения М. Барнера) на поверхности $\Phi(v_0, B)$.

Далее рассматриваются изменения семейства B_u и системы $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$ при трансформации T, (5), (5a) параметров u и v. (Системы R-линий на поверхности представляют однопараметрическую систему линий, которые пересекают образующие этой поверхности в проективном ряде точек.) Подобно можно определять семейства B_v на поверхности Ψ.

Далее рассматривается случай, когда на поверхности Ψ существует бесконечное множество семейств B_u так, что эти семейства B_u являются семействами B_v. Особенно простым является изучение в том случае, когда поверхность Ψ является коинцидентной поверхностью.

Zusammenfassung

DER CARTANISCHE PARAMETER AUF DEN FLÄCHEN, DIE KEINE REGELFLÄCHEN SIND

JOSEF VALA, Brno

In dieser Arbeit werden einige Eigenschaften der Kurvenschar $\frac{dv}{du} = B(u, v)$ (der u-parametrisierenden Kurvenschar B_u) auf der Fläche Ψ, die keine Regelfläche ist, studiert. $B(u, v)$ ist eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (8). Die Ableitungsgleichungen der Fläche Ψ sind in der Form (3) gegeben. Die Tangenten der Kurven der B_u-Schar in den Punkten der u-Kurve ($v = v_0$) bilden eine Regelfläche $\Phi(v_0, B)$ (7). Auf dieser kann man R-Systeme, die die Linie $v = v_0$ (Systeme $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$, wo $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = B$ ist) enthalten, so wählen, daß der Parameter u im Sinne der Verallgemeinerung von M. Barner ein Cartanischer Parameter auf der Fläche $\Phi(v_0, B)$ ist.

Weiter studiert man die Änderungen der B_u-Scharen und der Systeme $R(v_0, A, \lambda_1, \lambda_2)$ bei der Transformation **T**, (5), (5a), der Parameter u, v. (Unter der Bezeichnung R-System versteht man ein solches einparametrisches System von Linien auf der Regelfläche, die die Erzeugenden dieser Regelfläche in den projektiven Punktreihen schneiden.) Ähnlich kann man die B_v-Scharen auf der Fläche Ψ definieren.

Weiter studiert man den Fall, wo auf der Fläche unendlich viele Scharen B_u, die gleichzeitig B_v-Scharen sind, existieren. Besonders einfach ist der Fall, wenn die F lächeΨ eine Koinzidenzfläche ist.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

O NEJEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ SOUSTAVY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha

(Došlo dne 3. července 1959)

V tomto článku je sestrojen příklad, který ukazuje, že z jednoznačnosti řešení rovnice $\frac{dx}{dt} = g(x)$ nemusí plynout jednoznačnost řešení rovnice $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\, d\sigma(\tau)$, kde $\sigma(\tau)$ je spojitá reálná funkce s konečnou variací.

Problémy řešené v tomto článku se vyskytly při studiu zobecněných diferenciálních rovnic, které zavedl J. KURZWEIL v článku [1], zvláště pak při studiu Diracovy funkce v nelineárních diferenciálních rovnicích v kap. 5 článku [2].

Tam se v pomocné větě 5,1 dokazuje následující: Buď $\chi(\eta)$, $\eta \geqq 0$ rostoucí spojitá funkce, $\chi(0) = 0$, $\int_0^1 \frac{d\eta}{\chi(\eta)} = \infty$. Buď $\sigma(t)$, $t \in \langle 0, S\rangle$ spojitá reálná funkce s konečnou variací. Buď $g(x) = [g_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)]$ spojitá vektorová funkce na otevřené množině $D \subset E_m$ taková, že

$$\|g(x_*) - g(x^*)\| \leqq \chi(\|x_* - x^*\|) \quad \text{pro} \quad x_*, x^* \in D\,. \tag{0,1}$$

Buď $x_0 \in D$, $t_0 \in \langle 0, S\rangle$. Potom rovnice $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\, d\sigma(\tau)$ má nejvýše jedno řešení.

Ve větě 5,1 se pak dokazuje následující: Buď $f(x, t) = [f_1(x_1, \ldots, x_m, t), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_m, t)]$ spojitá vektorová funkce pro $x \in D$, $t \in \langle -T_1, T_1\rangle$. Buď $g(x)$ funkce, která splňuje předpoklady pomocné věty 5,1. Nechť $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ je spojitá reálná funkce na $\langle -T_1, T_1\rangle$, $\Phi_n(t) = \int_{-T_1}^{t} \varphi_n(\tau)\, d\tau$. Nechť $\varphi_n(t)$ splňuje následující podmínky:

(0,2) $$\limsup_{n\to\infty} \int_{-T_1}^{T_1} |\varphi_n(\tau)|\, \mathrm{d}\tau = L < \infty\,,$$

(0,3) $$\lim_{n\to\infty} \int_{-T_1}^{t} |\varphi_n(\tau)|\, \mathrm{d}\tau = 0 \quad \text{pro} \quad -T_1 \leqq t < 0\,,$$

(0,4) $$\lim_{n\to\infty} \int_{t}^{T_1} |\varphi_n(\tau)|\, \mathrm{d}\tau = 0 \quad \text{pro} \quad 0 < t \leqq T_1\,;$$

(0,5) $$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = 0 \quad \text{pro} \quad -T_1 \leqq t < 0\,,$$

(0,6) $$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = 1 \quad \text{pro} \quad 0 < t \leqq T_1\,.$$

Buď $u(t)$, $t \in \langle -T_0, 0\rangle$, $(0 < T_0 < T_1)$ řešení rovnice $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t)$ určené jednoznačně počáteční podmínkou. Buď $v(t)$, $t \in \langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\rangle$ řešení rovnice $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(x)$ jednoznačně určené počáteční podmínkou $v(-\frac{1}{2}) = u(0)$. Buď $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0\rangle$ řešení rovnice $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t)$ jednoznačně určené počáteční podmínkou $w(0) = v(\frac{1}{2})$.

Nechť $y_n \to u(-T_0)$ pro $n \to \infty$. Potom řešení $x_n(t)$, rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t) + g(x)\,.\,\varphi_n(t)\,,$$

$x_n(-T_0) = y_n$ (ne nutně jednoznačné), je definováno na intervalu $\langle -T_0, T_0\rangle$ (pro dosti velká n) a platí

(0,7) $$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = u(t) \quad \text{pro} \quad -T_0 \leqq t < 0\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = w(t) \quad \text{pro} \quad 0 < t \leqq T_0\,.$$

V tomto článku ukážeme, že podmínku (0,1), kterou musí splňovat funkce $g(x)$ nelze nahradit slabší podmínkou: nechť $g(x)$ je spojitá vektorová funkce na množině $D \subset E_m$ taková, že rovnice $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\, \mathrm{d}\tau$ má pro $x_0 \in D$, $t_0 \in \langle 0, S\rangle$ právě jedno řešení. V kapitole II sestrojíme na množině $\langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ funkci $g(x, y)$ takovou, že pro $t_0 \in \langle 0, 8\pi\rangle$ $x_0 \in \langle 0, \pi\rangle$, $y_0 \in \langle 0, 1\rangle$ má systém

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\,, \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau), y(\tau))\, \mathrm{d}\tau.$$

právě jedno řešení. V kapitole III sestrojíme spojitou reálnou funkci s konečnou variací $\sigma(t)$, $t \in \langle 0, 8\pi\rangle$ takovou, že systému

$$x(t) = \int_0^t \mathrm{d}\sigma(\tau)\,, \quad y(t) = \int_0^t g(x(\tau), y(\tau))\, \mathrm{d}\sigma(\tau)$$

vyhovují řešení dvě. Podobně v kapitole IV sestrojíme funkci $f(y, t)$ a posloupnost funkcí $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ tak, že řešení systému

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_n(t), \quad \frac{dy}{dt} = f(y, t) + g(x, y) \cdot \varphi_n(t)$$

nebude mít vlastnost (0,7).

I

Nejprve sestrojíme dělení intervalu $\langle 0, Y \rangle$, $Y > 0$ (obdobné dělení intervalu při konstrukci Cantorova diskontinua), které budeme v dalším potřebovat. Zvolme čísla $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $a_1 \neq b_1$ tak, aby $2a_1 + 3b_1 = 1$ a sestrojme posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ takto: $a_n = a_1 \cdot b_1^{n-1}$, $b_n = b_1^n$. Pak zřejmě platí následující vztahy:

$$(1,1) \qquad a_n : b_n = a_1 : b_1, \quad 2a_n + 3b_n = b_{n-1}, \quad 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} a_n = 1, \\ \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$

Nyní při prvém kroku sestrojíme body $Y_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ tak, aby platilo

$$Y_1^{(1)} = Y_3^{(1)} - Y_2^{(1)} = Y - Y_4^{(1)} = b_1 \cdot Y, \quad Y_2^{(1)} - Y_1^{(1)} = Y_4^{(1)} - Y_3^{(1)} = a_1 \cdot Y.$$

Podle (1,1) je zřejmé, že takové dělení lze provést. Rozdělili jsme tak interval $\langle 0, Y \rangle$ na pět dílů, z nichž dva jsou délky $a_1 \cdot Y$ a tři délky $b_1 \cdot Y$. Při druhém kroku vynecháme otevřené intervaly délky $a_1 \cdot Y$ a intervaly délky $b_1 \cdot Y$ rozdělíme opět na pět dílů, a to ve stejném poměru jako interval $\langle 0, Y \rangle$. Stejným způsobem postupujeme dále. Po n-tém kroku máme sestrojeny body

$$(1,2) \qquad D(n) = \{0, Y; Y_1^{(1)}, \ldots, Y_4^{(1)}; Y_1^{(2)}, \ldots, Y_{12}^{(2)}; \ldots; Y_1^{(n)}, \ldots, Y_{4.3^n-1}^{(n)}\}.$$

Při $n + 1$ kroku vynecháme otevřené intervaly délek $a_1 \cdot Y, a_2 \cdot Y, \ldots, a_n \cdot Y$ a intervaly délek $b_n \cdot Y$ budeme dělit ve stejném poměru jako interval $\langle 0, Y \rangle$, tj. sestrojíme body $Y_1^{(n+1)}, \ldots, Y_{4.3^n}^{(n+1)}$ tak, aby platilo: Jestliže $Y_*, Y^* \in D(n)$, $Y^* - Y_* = b_n Y$ (tj. koncové body intervalu délky $b_n Y$) pak

$$(1,3) \qquad Y^* - Y_{4s}^{(n+1)} = Y_{4s-1}^{(n+1)} - Y_{4s-2}^{(n+1)} = Y_{4s-3}^{(n+1)} - Y_* = b_{n+1} \cdot Y, \\ Y_{4s}^{(n+1)} - Y_{4s-1}^{(n+1)} = Y_{4s-2}^{(n+1)} - Y_{4s-3}^{(n+1)} = a_{n+1} \cdot Y.$$

Podle (1,1) lze takové dělení provést. Intervalů délky $b_n \cdot Y$ je zřejmě 3^n, je tedy $s = 1, 2, \ldots, 3^n$; intervalů délky $a_n \cdot Y$ je $2 \cdot 3^{n-1}$.

Snadno se dokáže následující tvrzení:

Věta 1,1. *Buď* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} (Y_{2l-1}^{(n)}, Y_{2l}^{(n)})$, $B = \langle 0, Y \rangle - A$. *Pak platí: množina A je otevřená, množina B je uzavřená, má mohutnost kontinua a míru* 0.

II

Než přistoupíme ke konstrukci funkce g dokážeme následující větu:

Věta 2,1. *Nechť funkce φ, ψ mají spojitou první derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí $\varphi(x) < \psi(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Nechť funkce χ má spojitou první derivaci na intervalu $\langle\varphi(a), \psi(a)\rangle$ a nechť $\chi(\varphi(a)) = \varphi'(a)$, $\chi(\psi(a)) = \psi'(a)$. Nechť funkce χ^* má spojitou první derivaci na intervalu $\langle\varphi(b), \psi(b)\rangle$ a nechť $\chi^*(\varphi(b)) = \varphi'(b)$, $\chi^*(\psi(b)) = \psi'(b)$.*

Definujme množinu P takto: Bod $[x, y] \in P$, jestliže platí

$$a \leqq x \leqq b\,, \quad \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\,.$$

Buď $0 < \varepsilon < 1$. Potom na množině P existuje spojitá funkce h mající tyto vlastnosti:

$$(2,1) \qquad \begin{aligned} 1.\ h(x, \varphi(x)) &= \varphi'(x) \quad \text{pro} \quad x \in \langle a, b\rangle\,,\\ h(x, \psi(x)) &= \psi'(x) \quad \text{pro} \quad x \in \langle a, b\rangle\,,\\ h(a, y) &= \chi(y) \quad \text{pro} \quad y \in \langle\varphi(a), \psi(a)\rangle\,,\\ h(b, y) &= \chi^*(y) \quad \text{pro} \quad y \in \langle\varphi(b), \psi(b)\rangle\,. \end{aligned}$$

2. *Každým bodem $[x_0, y_0] \in P$ prochází právě jedno řešení diferenciální rovnice*

$$(2,2) \qquad y' = h(x, y)\,.$$

3. *Buďte u_1, u_2 dvě řešení rovnice (2,2). Nechť $u_1(a) - u_2(a) = A > 0$, potom platí*

$$(2,3) \qquad A\,.\,\frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\psi(a) - \varphi(a)}\,(1 - \varepsilon) \leqq u_1(x) - u_2(x) \leqq A\,.\,\frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\psi(a) - \varphi(a)}\,(1 + \varepsilon)\,,$$

$$u_1(b) - u_2(b) = A\,.\,\frac{\psi(b) - \varphi(b)}{\psi(a) - \varphi(a)}\,.$$

Podobně platí: Buďte v_1, v_2 dvě řešení rovnice (2,2). Nechť $v_1(b) - v_2(b) = B > 0$. Potom

$$(2,4) \qquad B\,.\,\frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\psi(b) - \varphi(b)}\,(1 - \varepsilon) \leqq v_1(x) - v_2(x) \leqq B\,.\,\frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\psi(b) - \varphi(b)}\,(1 + \varepsilon)\,,$$

$$v_1(a) - v_2(a) = B\,.\,\frac{\psi(a) - \varphi(a)}{\psi(b) - \varphi(b)}\,.$$

Důkaz. Označme P_1 množinu bodů $[x, y]$ pro které platí

$$a + \delta_1 \leqq x \leqq b - \delta_2\,, \quad \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\,,$$

kde $0 < \delta_i < \dfrac{b - a}{2}$, $(i = 1, 2)$. Definujeme funkci h na množině P_1 takto:

$$h(x, y) = \frac{y - \varphi(x)}{\psi(x) - \varphi(x)}\,.\,\psi'(x) + \frac{\psi(x) - y}{\psi(x) - \varphi(x)}\,.\,\varphi'(x)\,.$$

Zřejmě $h(x, \varphi(x)) = \varphi'(x)$, $h(x, \psi(x)) = \psi'(x)$. Funkce h je na množině P_1 spojitá a platí $|h(x, y)| \leqq |\psi'(x)| + |\varphi'(x)|$.

Buď $[\bar{x}, \bar{y}] \in P_1$. Označme $\lambda = \dfrac{\bar{y} - \varphi(\bar{x})}{\psi(\bar{x}) - \varphi(\bar{x})}$. Pak funkce $H(x, \lambda) = \lambda\, \psi(x) + (1 - \lambda) \,.\, \varphi(x)$ je řešení rovnice (2,2) jdoucí bodem $[\bar{x}, \bar{y}]$. Zřejmě platí

$$H(x, \lambda_1) - H(x, \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)\ (\psi(x) - \varphi(x))\,. \tag{2,5}$$

Nyní označme P_2 množinu bodů $[x, y]$, pro které platí

$$a \leqq x \leqq a + \delta_1\,, \quad \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)$$

a P_3 množinu bodů $[x, y]$, pro které platí

$$b - \delta_2 \leqq x \leqq b\,, \quad \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\,.$$

Na množinách P_2, P_3 nemůžeme definovat funkci h stejně jako na množině P_1, protože by nemuselo platit $h(a, y) = \chi(y)$ resp. $h(b, y) = \chi^*(y)$.

Označme $H(x, \lambda) = \lambda\, \psi(x) + (1 - \lambda)\, \varphi(x)$ pro $x \in \langle a, a + \delta_1\rangle$ a nechť funkce ν má spojitou první derivaci pro $x \in \langle a, a + \delta_1\rangle$ a nechť splňuje následující podmínky

$$\nu(a) = \nu(a + \delta_1) = \nu'(a + \delta_1) = 0\,, \quad \nu'(a) = 1\,, \quad |\nu'(x)| \leqq 1\,,$$

$$0 \leqq |\nu(x)| \leqq \varepsilon \,.\, \frac{|\psi(x) - \varphi(x)|}{M \,.\, |\psi(a) - \varphi(a)| + |\psi'(a) - \varphi'(a)|}\,,$$

kde M je kladné a $M \geqq \max\limits_{y \in \langle\varphi(a),\, \psi(a)\rangle} |\chi'(y)|$.

Protože pro $0 \leqq \lambda \leqq 1$ je $H(a, \lambda) \in \langle\varphi(a), \psi(a)\rangle$, můžeme definovat

$$H^*(x, \lambda) = H(x, \lambda) + \nu(x) \,.\, [\chi(H(a, \lambda)) - H_1'(a, \lambda)]\,, \quad \left(H_1' = \frac{\partial H}{\partial x}\,,\ H_2' = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\right).$$

Nyní platí

$$H^*(a, \lambda) = H(a, \lambda)\,, \quad H^*(a + \delta_1, \lambda) = H(a + \delta_1, \lambda)\,,$$
$$H^*(x, 0) = H(x, 0) = \varphi(x)\,, \quad H^*(x, 1) = H(x, 1) = \psi(x)\,.$$

Funkce H^* má spojité parciální derivace $H_1^{*\prime}$, $H_2^{*\prime}$ a platí

$$H_1^{*\prime}(a, \lambda) = \chi(H(a, \lambda))\,, \quad H_1^{*\prime}(a + \delta_1, \lambda) = H_1'(a + \delta_1, \lambda)$$

($H_1^{*\prime}$ zde znamená derivaci zleva resp. zprava).

Dokážeme, že každým bodem $[x_0, y_0] \in P_2$ prochází právě jedna křivka H^*. Buď $\lambda_1 > \lambda_2$, pak

$$H^*(x, \lambda_1) - H^*(x, \lambda_2) =$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_2) \,.\, (\psi(x) - \varphi(x)) + \nu(x)[\chi(H(a, \lambda_1)) - \chi(H(a, \lambda_2)) -$$
$$- H_1'(a, \lambda_1) + H_1'(a, \lambda_2)]\,.$$

Protože $(\lambda_1 - \lambda_2) \,.\, (\psi(x) - \varphi(x)) > 0$, a protože

$$|\nu(x)| \,.\, |\chi(H(a, \lambda_1)) - \chi(H(a, \lambda_2)) - H_1'(a, \lambda_1) + H_1'(a, \lambda_2)| \leqq$$
$$\leqq |\nu(x)| \,.\, [M(\lambda_1 - \lambda_2) \,.\, (\psi(a) - \varphi(a)) + (\lambda_1 - \lambda_2) \,.\, |\psi'(a) - \varphi'(a)|] \leqq$$
$$\leqq \varepsilon \,.\, (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi(x) - \varphi(x))$$

je

$$(2,6) \qquad H^*(x, \lambda_1) - H^*(x, \lambda_2) > 0$$

a dokonce

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \,.\, (\psi(x) - \varphi(x)) \,.\, (1 - \varepsilon) \leqq H^*(x, \lambda_1) - H^*(x, \lambda_2) \leqq$$
$$\leqq (\lambda_1 - \lambda_2) \,.\, [\psi(x) - \varphi(x)] \,.\, (1 + \varepsilon) \,.$$

Buď $[x_0, y_0] \in P_2$. Funkce $H^*(x, \lambda)$ je spojitá na intervalu $0 \leqq \lambda \leqq 1$ podle (2,6), rostoucí v λ pro každé $x \in \langle a, a + \delta_1 \rangle$ a nabývá všech hodnot od $\varphi(x)$ do $\psi(x)$. Existuje tedy právě jedno $\lambda = \lambda_0$ takové, že $y_0 = H^*(x_0, \lambda_0)$. Křivka $H^*(x, \lambda_0)$ prochází bodem $[x_0, y_0]$ a podle (2,6) žádná jiná křivka $H^*(x, \lambda)$, $\lambda \neq \lambda_0$ nemůže bodem $[x_0, y_0]$ procházet.

Funkci h na množině P_2 budeme definovat takto: nalezneme křivku H^*, která prochází bodem $[x, y] \in P_2$, sestrojíme její tečnu v tomto bodě a směrnice této tečny bude hodnota funkce h v bodě $[x, y]$.

Snadno se ukáže, že takto definovaná funkce h je na P_2 spojitá a lipschitzovská vzhledem k y, a že platí

$$h(x, H^*(x, \lambda)) = H_1^{*\prime}(x, \lambda) \quad \text{pro} \quad a \leqq x \leqq a + \delta_1 \,, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1 \,,$$
$$h(a, y) = \chi(y) \quad \text{pro} \quad \varphi(a) \leqq y \leqq \psi(a) \,.$$

Stejným způsobem, pomocí křivek H^{**} definujeme funkci h na množině P_3. Tím jsme sestrojili funkci h na celé množině P. Z konstrukce je zřejmé, že h je na P spojitá a že je splněno (2,1).

Hledáme řešení diferenciální rovnice (2,2) pro $a \leqq x \leqq b$. Definujme křivku G takto:

$$G(x, \lambda) = H^*(x, \lambda) \quad \text{pro} \quad x \in \langle a, a + \delta_1 \rangle \,,$$
$$G(x, \lambda) = H(x, \lambda) \quad \text{pro} \quad x \in \langle a + \delta_1, b - \delta_2 \rangle \,,$$
$$G(x, \lambda) = H^{**}(x, \lambda) \quad \text{pro} \quad x \in \langle b - \delta_2, b \rangle \,.$$

Pak tato křivka má v každém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou derivaci a platí

$$G_1'(x, \lambda) = h(x, G(x, \lambda)) \,.$$

Přitom libovolným bodem $[x_0, y_0] \in P$ prochází právě jedna křivka G.

Buďte u_1, u_2 dvě řešení rovnice (2,2) taková, že $u_1(a) - u_2(a) = A > 0$. Potom $u_1(x) = G(x, \lambda_1)$, $u_2(x) = G(x, \lambda_2)$ a podle (2,5) a (2,6) je

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \,.\, (\psi(x) - \varphi(x))(1 - \varepsilon) \leqq$$
$$\leqq G(x, \lambda_1) - G(x, \lambda_2) \leqq (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi(x) - \varphi(x))(1 + \varepsilon) \,.$$

Protože

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{G(a, \lambda_1) - G(a, \lambda_2)}{\psi(a) - \varphi(a)} = \frac{u_1(a) - u_2(a)}{\psi(a) - \varphi(a)} = \frac{A}{\psi(a) - \varphi(a)} \,,$$

platí

$$A \,.\, \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\psi(a) - \varphi(a)} (1 - \varepsilon) \leqq G(x, \lambda_1) - G(x, \lambda_2) \leqq A \,.\, \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\psi(a) - \varphi(a)} (1 + \varepsilon)$$

a

$$G(b, \lambda_1) - G(b, \lambda_2) = H^{**}(b, \lambda_1) - H^{**}(b, \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi(b) - \varphi(b)) = $$
$$= A \, \frac{\psi(b) - \varphi(b)}{\psi(a) - \varphi(a)} \, .$$

Stejně se dokáže (2,4). Tím je věta 2,1 úplně dokázána.

Poznámka. Z důkazu věty 2,1 plyne

Je-li $[x, y] \in P_1$ pak $|h(x, y)| \leqq |\psi'(x)| + |\varphi'(x)|$. Je-li $[x, y] \in P_2$ pak $|h(x, y)| = |H_1^{*\prime}(x, \lambda)|$, kde λ vyhovuje rovnici $y = H^*(x, \lambda)$, a platí

$$|h(x, y)| \leqq |\psi'(x)| + |\varphi'(x)| + \max_{y \in \langle \varphi(a), \psi(a) \rangle} |\chi(y)| + |\psi'(a)| + |\varphi'(a)| \leqq$$
$$\leqq |\psi'(x)| + |\varphi'(x)| + 3 \, . \max_{y \in \langle \varphi(a), \psi(a) \rangle} |\chi(y)| \, .$$

Podobně, je-li $[x, y] \in P_3$ pak

$$|h(x, y)| \leqq |\psi'(x)| + |\varphi'(x)| + 3 \, . \max_{y \in \langle \varphi(b), \psi(b) \rangle} |\chi^*(y)| \, .$$

Odtud plyne pro $[x, y] \in P$

(2,7) $$|h(x, y)| \leqq |\psi'(x)| + |\varphi'(x)| + 3 \, . \, (\max_{\langle \varphi(a), \psi(a) \rangle} |\chi(y)| + \max_{\langle \varphi(b), \psi(b) \rangle} |\chi^*(y)|) \, .$$

Nyní přistoupíme ke konstrukci funkce g (viz obr. 1). Definičním oborem této funkce bude interval $Q_1^{(0)} = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ (na ose y) sestrojíme dělení $Y_i^{(k)}$ popsané v části I (tj. položíme $Y = 1$). Přitom, jak se později ukáže, je nutné volit $\frac{1}{16} < b_1 < 2a_1$. Označme $\psi_1^{(0)}, \psi_2^{(0)}$ funkci identicky rovnou nule resp. jedné na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Při prvém kroku sestrojíme na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ funkce

$$\psi_1^{(1)}(x) = -\tfrac{1}{2}a_1 \cos x + \frac{Y_1^{(1)} + Y_2^{(1)}}{2} \, , \quad \psi_2^{(1)}(x) = \tfrac{1}{2}a_1 \cos x + \frac{Y_3^{(1)} + Y_4^{(1)}}{2} \, ,$$

a označme

$$P_1^{(1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} \left[\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \pi, \ \psi_1^{(0)}(x) \leqq y \leqq \psi_1^{(1)}(x) \right] ,$$
$$P_2^{(1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} \left[0 \leqq x \leqq \frac{3\pi}{4}, \ \psi_1^{(1)}(x) \leqq y \leqq \psi_2^{(1)}(x) \right] ,$$
$$P_3^{(1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} \left[\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \pi, \ \psi_2^{(1)}(x) \leqq y \leqq \psi_2^{(0)}(x) \right] ,$$
$$Q_1^{(1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} \left[0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}, \ \psi_1^{(0)}(x) \leqq y \leqq \psi_1^{(1)}(x) \right] ,$$
$$Q_2^{(1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} \left[\frac{3\pi}{4} \leqq x \leqq \pi, \ \psi_1^{(1)}(x) \leqq y \leqq \psi_2^{(1)}(x) \right] ,$$
$$Q_3^{(1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} \left[0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}, \ \psi_2^{(1)}(x) \leqq y \leqq \psi_2^{(0)}(x) \right] .$$

Při druhém kroku budeme na množinách $Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}$ postupovat stejně jako na celém intervalu $Q_1^{(0)} = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Předpokládejme, že jsme provedli n kroků. Máme sestrojeny funkce

$$\Psi(n) = \{\psi_1^{(0)}, \psi_2^{(0)}; \psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}; \psi_1^{(2)}; \ldots, \psi_6^{(2)}; \ldots; \psi_1^{(n)}, \ldots, \psi_{2.3^{n-1}}^{(n)}\}$$

a definovány množiny

$$P_1^{(1)}, \ldots, P_3^{(1)}; P_1^{(2)}, \ldots, P_9^{(2)}; \ldots; P_1^{(n)}, \ldots, P_{3^n}^{(n)}; Q_1^{(n)}, \ldots, Q_{3^n}^{(n)}$$

takové, že

$$\left(\bigcup_{r=1}^{n} \bigcup_{s=1}^{3^r} P_s^{(r)}\right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{3^n} Q_s^{(n)}\right) = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle .$$

Při $(n + 1)$-ním kroku budeme na množinách $Q_s^{(n)}$, $(s = 1, 2, \ldots, 3^n)$ postupovat stejně jako na celém intervalu $Q_1^{(0)} = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Buď

$$Q_s^{(n)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} [a \leqq x \leqq b,\ \psi_*(x) \leqq y \leqq \psi^*(x)] .$$

kde $b - a = \frac{\pi}{4^n}$, $\psi_*, \psi^* \in \Psi(n)$ jsou monotonní funkce mající spojitou první derivaci. Přitom rozdíl $\psi^*(x) - \psi_*(x)$ je monotonní a nabývá minima b_n v některém koncovém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$ — označme tento bod x_1. Platí

$$\psi_*(x) \leqq \psi_*(x_1) = Y_* < Y^* = \psi^*(x_1) \leqq \psi^*(x) ; \quad \psi^{*\prime}(x_1) = \psi_*'(x_1) = 0 ,$$

$(Y_*, Y^* \in D(n)$, $\psi_*'(x_1)$, $\psi^{*\prime}(x_1)$ zde znamená derivaci zprava resp. zleva). S vyjímkou množiny $Q_1^{(0)}$ existuje vždy právě jeden takový bod x_1. Buď

$$Y_* < Y_{4s-3}^{(n+1)} < Y_{4s-2}^{(n+1)} < Y_{4s-1}^{(n+1)} < Y_{4s}^{(n+1)} < Y^* , \quad (Y_i^{(n+1)} \in D(n + 1)) .$$

Nyní sestrojíme na intervalu $\langle a, b \rangle$ funkce

$$\psi_{2s-1}^{(n+1)}(x) = -\frac{a_{n+1}}{2} \cos 4^n(x - x_1) + \frac{1}{2} (Y_{4s-3}^{(n+1)} + Y_{4s-2}^{(n+1)}) ,$$

$$\psi_{2s}^{(n+1)}(x) = \frac{a_{n+1}}{2} \cos 4^n(x - x_1) + \frac{1}{2} (Y_{4s-1}^{(n+1)} + Y_{4s}^{(n+1)}) .$$

Buďte dále $x_2, x_3, x_4 \in \langle a, b \rangle$ takové, že

$$|x_1 - x_2| = \frac{\pi}{4^{n+1}} , \quad |x_1 - x_3| = \frac{3\pi}{4^{n+1}} , \quad |x_1 - x_4| = \frac{\pi}{4^n}$$

(tj. x_4 je druhý koncový bod intervalu $\langle a, b \rangle$).

Označme pro $[x, y] \in Q_s^{(n)}$:

$$P_{3s-2}^{(n+1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} [|x - x_4| \leqq |x_2 - x_4|,\ \psi_*(x) \leqq y \leqq \psi_{2s-1}^{(n+1)}(x)] ,$$

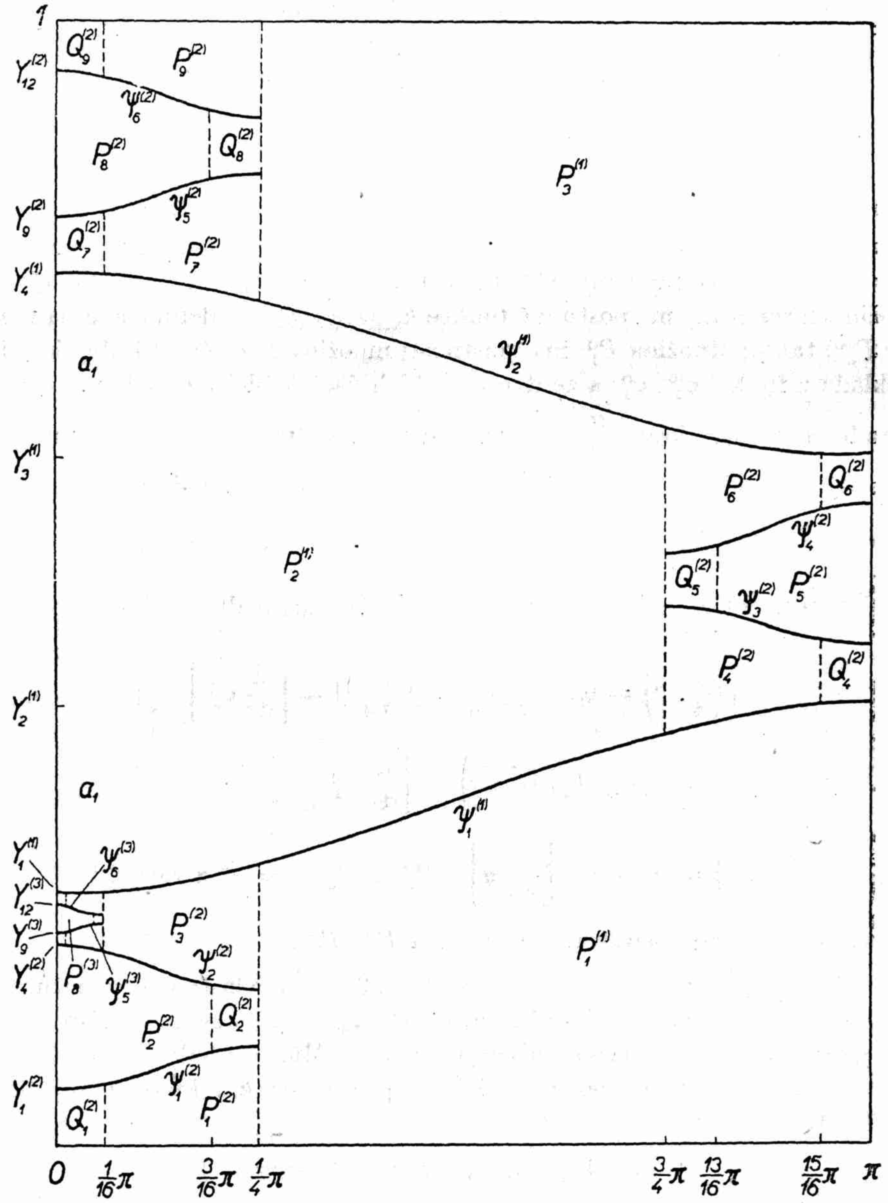
$$P_{3s-1}^{(n+1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} [|x - x_1| \leqq |x_3 - x_1|,\ \psi_{2s-1}^{(n+1)}(x) \leqq y \leqq \psi_{2s}^{(n+1)}(x)] ,$$

$$P_{3s}^{(n+1)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} [|x - x_4| \leqq |x_2 - x_4|,\ \psi_{2s}^{(n+1)}(x) \leqq y \leqq \psi^*(x)] ,$$

$$Q_{3s-2}^{(n+1)} = \underset{[x,y]}{\mathscr{E}} \left[|x - x_1| \leqq |x_2 - x_1|,\ \psi_*(x) \leqq y \leqq \psi_{2s-1}^{(n+1)}(x)\right],$$

$$Q_{3s-1}^{(n+1)} = \underset{[x,y]}{\mathscr{E}} \left[|x - x_4| \leqq |x_3 - x_4|,\ \psi_{2s-1}^{(n+1)}(x) \leqq y \leqq \psi_{2s}^{(n+1)}(x)\right],$$

$$Q_{3s}^{(n+1)} = \underset{[x,y]}{\mathscr{E}} \left[|x - x_1| \leqq |x_2 - x_1|,\ \psi_{2s}^{(n+1)}(x) \leqq y \leqq \psi^*(x)\right].$$



Obr. 1.

Množiny $Q^{(n+1)}_{3s-2}$, $Q^{(n+1)}_{3s-1}$, $Q^{(n+1)}_{3s}$ mají zřejmě týž charakter jako množina $Q^{(n)}_s$. Protože $s = 1, 2, \ldots, 3^n$ obdržíme tak při $n + 1$ kroku funkce $\psi^{(n+1)}_1, \ldots, \psi^{(n+1)}_{2.3^n}$ a množiny $P^{(n+1)}_1, \ldots, P^{(n+1)}_{3^n+1}$; $Q^{(n+1)}_1, \ldots, Q^{(n+1)}_{3^n+1}$. Z konstrukce vyplývá, že jsou-li ψ^*, ψ_* částí hranice množiny $P^{(n+1)}_{3s-2}$ resp. $P^{(n+1)}_{3s}$ a x_*, x^* body intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že $|x_1 - x_*| < |x_1 - x^*|$ pak

$$\psi^*(x_*) - \psi_*(x_*) < \psi^*(x^*) - \psi_*(x^*) ;$$

jsou-li ψ^*, ψ_* částí hranice množiny $P^{(n+1)}_{3s-1}$, pak

$$\psi^*(x_*) - \psi_*(x_*) > \psi^*(x^*) - \psi_*(x^*) .$$

Dále se snadno dokáže, že jestliže $[x_4, y] \in P^{(n+1)}_{3s-2}$ nebo $[x_4, y] \in P^{(n+1)}_{3s}$, pak platí $[x_4, y] \in P^{(n)}_s$, a jestliže $[x_1, y] \in P^{(n+1)}_{3s-1}$, pak platí jedno z těchto tří tvrzení: a) $x_1 = 0$, b) $x_1 = \pi$, c) existuje dvojice (i, r), $r \leqq n - 1$ tak, že $[x_1, y] \in P^{(r)}_i$.

Funkce $\psi^{(n)}_i$ $(n = 1, 2, \ldots; \ i = 1, 2, \ldots, 2 \,.\, 3^{n-1})$ rozdělí nám množinu $\langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ na množiny $P^{(n)}_s$ $(n = 1, 2, \ldots; \ s = 1, 2, \ldots, 3^n)$. Na těchto množinách sestrojujeme postupně funkce $h_{n,s}(x, y)$ ($h_{n,s}$ je definována na množině $P^{(n)}_s$) takto: Množina $P^{(1)}_1$ má vlastnosti množiny P z věty 2,1. Její hranice se skládá z funkcí $\psi^{(0)}_1$, $\psi^{(1)}_1$ a ze dvou svislých úseček, delší z nich má x-ovou souřadnici rovnu π, kratší $\frac{\pi}{4}$. Můžeme tedy podle věty 2,1 sestrojit na množině $P^{(1)}_1$ spojitou funkci $h_{1,1}(x, y)$ takovou, že splňuje body 2, 3 věty 2,1 a že

$$h_{1,1}(x, \psi^{(0)}_1(x)) = 0\,, \quad h_{1,1}(x, \psi^{(1)}_1(x)) = \tfrac{1}{2}a_1 \sin x\,, \quad h_{11}(\pi, y) = 0\,;$$

$h_{1,1}\left(\frac{\pi}{4}, y\right)$ nechť je funkce se spojitou první derivací podle y taková, že

$$h_{1,1}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = 0\,, \quad h_{1,1}\left(\frac{\pi}{4}, \psi^{(1)}_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\psi^{(1)}_1\right]_{x=\frac{\pi}{4}}\,;$$

$$0 \leqq h_{1,1}\left(\frac{\pi}{4}, y\right) \leqq \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\psi^{(1)}_1\right]_{x=\frac{\pi}{4}}\,,$$

$$h_{1,1}\left(\frac{\pi}{4}, y\right) = 0 \quad \text{pro} \quad \left[\frac{\pi}{4}, y\right] \notin P^{(2)}_1 \cup P^{(2)}_3 \quad (= \chi^* \text{ z věty 2,1})\,.$$

Stejně budeme postupovat na množinách $P^{(1)}_2$, $P^{(1)}_3$.

Množina $P^{(n)}_s$ $(n = 1, 2, \ldots; \ s = 1, 2, \ldots, 3^n)$ má vlastnosti množiny P z věty 2,1. Její hranice se skládá z funkcí ψ^*, $\psi_* \in \Psi(n)$ a ze dvou svislých úseček, delší z nich nechť má souřadnici $\bar{x}$, kratší $\tilde{x}$. Můžeme tedy postupně podle věty 2,1 sestrojovat na množinách $P^{(n)}_s$ spojité funkce $h_{n,s}$, které splňují body 2 a 3 věty 2,1 a že

$$h_{n,s}(x, \psi_*(x)) = \psi'_*(x)\,, \quad h_{n,s}(x, \psi^*(x)) = \psi^{*\prime}(x)\,,$$
$$h_{n,s}(\bar{x}, y) = 0 \quad \text{pro} \quad \bar{x} = 0 \quad \text{nebo} \quad \bar{x} = \pi\,;$$

je-li $0 \neq \bar{x} \neq \pi$, pak podle (2,8) máme již definováno $h_{r,i}(\bar{x}, y)$ ($r = 1, 2, \ldots, n - 1$) a definujeme $h_{n,s}(\bar{x}, y) = h_{r,i}(\bar{x}, y)$; $h_{n,s}(\tilde{x}, y)$ nechť je funkce se spojitou první derivací dle y taková, že

$$h_{n,s}(\tilde{x}, \psi^*(\tilde{x})) = \psi^{*\prime}(\tilde{x}) \, , \quad h_{n,s}(\tilde{x}, \psi_*(\tilde{x})) = \psi_*'(\tilde{x}) \, ,$$
$$|h_{n,s}(\tilde{x}, y)| \leqq \max \left(|h_{n,s}(\tilde{x}, \psi^*(\tilde{x}))| \, , \ |h_{n,s}(\tilde{x}, \psi_*(\tilde{x}))|\right) ,$$
$$h_{n,s}(\tilde{x}, y) = 0 \quad \text{pro} \quad [\tilde{x}, y] \text{ non } \in P_{3s-2}^{(n+1)} \cup P_{3s}^{(n+1)} \, . \tag{2,9}$$

Funkci g definujeme na $\langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ takto:

$$g(x, y) = h_{n,s}(x, y) \quad \text{pro} \quad [x, y] \in P_s^{(n)} \, ,$$

$$g(x, y) = 0 \quad \text{pro} \quad [x, y] \in \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle - \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s=1}^{3^n} P_s^{(n)} \, .$$

Označíme-li Ψ množinu všech funkcí $\psi_l^{(n)}$, kde $n = 1, 2, \ldots$; $l = 1, 2, \ldots, 2 \, . \, 3^{n-1}$, pak zřejmě platí

Věta 2,2. *Množina Ψ je spočetná.*

Označme C množinu těch bodů $[x, y] \in \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ pro které platí: Ke každému přirozenému číslu n existuje přirozené číslo s ($1 \leqq s \leqq 3^n$) takové, že $[x, y] \in Q_s^{(n)}$.

Věta 2,3. *Množina C je neprázdná. Buď $[x_0, y_0] \in C$. Pak $[x, y_0]$ non $\in C$ pro všechna $x \neq x_0$ a $[0, y_0] \in B$, kde B je množina zavedená ve větě 1,1. Zobrazení $[x_0, y_0] \to [0, y_0]$ je prosté.*

Důkaz. Z konstrukce plyne, že všechny koncové body funkcí $\psi_k^{(n)}$ s vyjímkou bodů $[\pi, 0]$, $[\pi, 1]$ patří do množiny C. Koncovým bodem funkce $\psi_k^{(n)}$, která má definiční interval $\langle x_*, x^*\rangle$ rozumíme body $[x^*, \psi_k^{(n)}(x^*)]$, $[x_*, \psi_k^{(n)}(x_*)]$.

Buď nyní $[x_0, y_0] \in C$ a buďte $l_1, l_2, \ldots$ přirozená čísla taková, že $[x_0, y_0] \in Q_{l_1}^{(1)} \cap \cap Q_{l_2}^{(2)} \cap \ldots$. Potom zřejmě platí $Q_{l_1}^{(1)} \supset Q_{l_2}^{(2)} \supset \ldots$; $d(Q_{l_i}^{(i)}) \to 0$. $Q_{l_1}^{(1)} \cap Q_{l_2}^{(2)} \cap \ldots$ je tedy jednobodová množina, která obsahuje právě bod $[x_0, y_0]$. Existuje proto prosté zobrazení, které přiřazuje bodu $[x_0, y_0] \in C$ posloupnost $l_1, l_2, \ldots$.

Buď B množina na ose y, zavedená ve větě 1,1. Očíslujme intervaly délky b_n postupně od osy x čísly $1, 2, \ldots, 3^n$ a označme je $B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, \ldots, B_{3^n}^{(n)}$. Pak $[0, \tilde{y}_0] \in B \Rightarrow [0, \tilde{y}_0] \in B_{k_1}^{(1)} \cap B_{k_2}^{(2)} \cap \ldots$. Opět platí $B_{k_1}^{(1)} \supset B_{k_2}^{(2)} \supset \ldots$, $d(B_{k_i}^{i}) \to 0$ a tedy do množiny $B_{k_1}^{(1)} \cap B_{k_2}^{(2)} \cap \ldots$ patří právě bod $[0, \tilde{y}_0]$. Existuje tedy prosté zobrazení, které přiřazuje bodu $[0, \tilde{y}_0] \in B$ posloupnost $k_1, k_2, \ldots$. Odtud plyne, že existuje prosté zobrazení bodů $[x_0, y_0] \in C$ na body $[0, \tilde{y}_0] \in B$.

Dokážeme, že $y_0 = \tilde{y}_0$. Vezměme bod $[x_0, \tilde{y}_0]$. Je zřejmé, že $[x_0, \tilde{y}_0]$ patří do těchže $Q_{l_i}^{(n)}$ jako $[x_0, y_0]$.

Věta 2,4. *Funkce g je na intervalu $\langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ spojitá.*

Důkaz. V bodech $[x_0, y_0]$ non $\in C$ dokážeme spojitost snadno. Je třeba vyšetřiti pouze body $[x_0, y_0] \in C$.

1. Platí $[x_0, y_0] \in C \Rightarrow g(x_0, y_0) = 0$. Nechť $[x_0, y_0] \in C$. Pak buď

$$[x_0, y_0] \in \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle - \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{3^n} P_l^{(n)},$$

v tomto případě bylo přímo definováno $g(x_0, y_0) = 0$; nebo

$$[x_0, y_0] \operatorname{non} \in \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle - \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{3^n} P_l^{(n)}.$$

V tomto případě existuje takové přirozené N, že $[x_0, y_0] \in \bigcup_{n=1}^{N} \bigcup_{l=1}^{3^n} P_l^{(n)}$, ale $[x_0, y_0] \operatorname{non} \in \bigcup_{n=1}^{N-1} \bigcup_{l=1}^{3^n} P_l^{(n)}$. Nechť dále $[x_0, y_0] \in Q_m^{(N-1)} \Rightarrow [x_0, y_0]$ patří do právě jedné z množin $P_{3m-2}^{(N)}, P_{3m-1}^{(N)}, P_{3m}^{(N)}$. Nechť patří např. do $P_{3m-2}^{(N)}$, pak ale $[x_0, y_0] \in Q_{3m-2}^{(N)}$ a dále $[x_0, y_0] \in Q_{3(3m-2)-1}^{(N+1)}$. Z toho plyne $[x_0, y_0] \in Q_{3(3m-2)-1}^{(N+1)} \cap P_{3m-2}^{(N)}$ a podle (2,9) plyne, že $g(x_0, y_0) = 0$. Stejně pro $[x_0, y_0] \in P_{3m-1}^{(N)}$ a $[x_0, y_0] \in P_{3m}^{(N)}$.

2. Dokážeme, že $[x, y] \in P_l^{(n)} \Rightarrow |g(x, y)| \leqq \Phi(n)$, kde $\lim_{n\to\infty} \Phi(n) = 0$. Z konstrukce plyne, že buď

$$P_l^{(n)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]}\left[x_* + \frac{\pi}{4^n} \leqq x \leqq x_* + \frac{\pi}{4^{n-1}},\quad \psi_*(x) \leqq y \leqq \psi^*(x)\right],$$

nebo

$$P_l^{(n)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]}\left[x_* - \frac{\pi}{4^{n-1}} \leqq x \leqq x_* - \frac{\pi}{4^n},\quad \psi_*(x) \leqq y \leqq \psi^*(x)\right],$$

kde $\psi^*, \psi_* \in \Psi(n)$, derivace $\psi^{*\prime}(x_*) = \psi_*'(x_*) = 0$. Dále alespoň jedna z funkcí ψ^*, ψ_*, např. $\psi_* = \psi_{l_1}^{(n)}$, a nechť $\psi^* = \psi_{l_2}^{(k)}$, kde $1 \leqq k \leqq n$. Potom podle poznámky za větou 2,1 je

$$\begin{aligned}(2,10)\qquad |g(x, y)| \leqq |\psi_*'(x)| + |\psi^{*\prime}(x)| + 3\left[\max\left(\left|\psi_*'\left(x_* + \frac{\pi}{4^n}\right)\right|;\right.\right.\\ \left.\left.\left|\psi^{*\prime}\left(x_* + \frac{\pi}{4^n}\right)\right|\right) + \max\left(\left|\psi_*'\left(x_* + \frac{\pi}{4^{n-1}}\right)\right|;\ \left|\psi^{*\prime}\left(x_* + \frac{\pi}{4^{n-1}}\right)\right|\right)\right],\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}(2,11)\qquad |g(x, y)| \leqq |\psi_*'(x)| + |\psi^{*\prime}(x)| + 3\left[\max\left(\left|\psi_*'\left(x_* - \frac{\pi}{4^{n-1}}\right)\right|;\right.\right.\\ \left.\left.\left|\psi^{*\prime}\left(x_* - \frac{\pi}{4^{n-1}}\right)\right|\right) + \max\left(\left|\psi_*'\left(x_* - \frac{\pi}{4^n}\right)\right|;\ \left|\psi^{*\prime}\left(x_* - \frac{\pi}{4^n}\right)\right|\right)\right].\end{aligned}$$

Odhadneme výraz (2,10). Odhad výrazu (2,11) je zřejmě zcela obdobný. Protože podle předpokladu je $\frac{1}{4} < 4b_1 < 2a_1 + 3b_1 = 1$ platí

$$|\psi_*'(x)| \leqq \frac{a_n}{2} \cdot 4^{n-1} = \frac{a_1}{2}(4b_1)^{n-1} \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty,$$

$$|\psi^{*\prime}(x)| \leqq \frac{a_n}{2} \cdot 4^{n-1} = \frac{a_1}{2}(4b_1)^{n-1} \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty,\quad k = n,$$

$$|\psi^{*\prime}(x)| \leqq \left|\frac{a_k}{2}\,4^{k-1}\,.\,\sin 4^{k-1}\,.\,x\right| \leqq \left|\frac{a_k}{2}\,4^{k-1}\,.\,\sin 4^{k-1}\left(x_* + \frac{\pi}{4^{n-1}}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{a_1}{2}\,(4b_1)^{k-1}\,.\,\sin\frac{\pi}{4^{n-k}}\right| = \frac{a_1}{2}\,.\,(4b_1)^{n-1}\,.\,\frac{\sin\dfrac{\pi}{4^{n-k}}}{\dfrac{\pi}{4^{n-k}}}\,.\,\frac{\pi}{(16b_1)^{n-k}} \to 0$$

$$\text{pro } n \to \infty \text{ a } k = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

a tedy zřejmě existuje zmíněná funkce $\Phi(n)$.

Z těchto dvou výsledků se již snadno dokáže, že funkce g je v $[x_0, y_0] \in C$ spojitá.

Věta 2,5. *Diferenciální rovnice*

$$y' = g(x, y) \tag{2,12}$$

má právě jedno řešení jdoucí bodem $[x_0, y_0] \in \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

Důkaz. Existence takového řešení plyne ze spojitosti funkce g. Jestliže $[x_0, y_0]$ non $\in C$, pak máme lokální jednoznačnost zaručenu větou 2,1. Stačí opět vyšetřovat pouze body množiny C.

1. Nechť $[x_0, y_0]$ je koncový bod funkce $\psi_{2l-1}^{(n+1)}$. Z konstrukce funkce g víme, že body $[x, \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x)] \in Q_l^{(n)}$. Použijeme-li označení, které jsme zavedli při konstrukci funkce g, potom platí $|x - x_1| \leqq |x_4 - x_1| = \frac{\pi}{4^n}$ a $\psi_{2l-1}^{(n+1)}(x) \in \langle Y_{4l-3}^{(n+1)}, Y_{4l-2}^{(n+1)}\rangle$. Vyšetřujme bod $[x_1, \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x_1)]$; při vyšetřování bodu $[x_4, \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x_4)]$ a také bodů $[x_1, \psi_{2l}^{(n+1)}(x_1)]$, $[x_4, \psi_{2l}^{(n+1)}(x_4)]$ bychom postupovali stejně.

Buď u libovolné řešení rovnice (2,12) takové, že $u(x_1) = \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x_1)$. Potom zřejmě není možné, aby $u(x) > \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x)$ pro $|x - x_1| \leqq |x_3 - x_1|$, protože

$$\mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]}\left[|x - x_1| \leqq |x_3 - x_1|, \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x) \leqq y \leqq \psi_{2l}^{(n+1)}(x)\right] = P_{3l-1}^{(n+1)}\,.$$

Dokážeme, že není možné ani aby $u(x) < \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x)$. Vybereme posloupnost funkcí $\psi_s^{(n+k+1)}$, kde $s = 2\,.\,3^{(k-1)}\,.\,(3l-2)$ a $k = 1,2,\ldots$. Z konstrukce funkce g je zřejmé, že pro $|x - x_1| \leqq \frac{\pi}{4^{n+k}}$ je

$$\psi_s^{(n+k+1)}(x) = \tfrac{1}{2}a_{n+k+1}\,.\,\cos 4^{n+k}(x - x_1) + \tfrac{1}{2}(Y_{2s-1}^{(n+k+1)} + Y_{2s}^{(n+k+1)})\,.$$

Zřejmě pro $k \to \infty$ je

$$\psi_{2l-1}^{(n+1)}(x_1) - \psi_s^{(n+k+1)}(x_1) = Y_{4l-3}^{(n+1)} - Y_{2s}^{(n+k+1)} = b_{n+k+1} \to 0\,, \tag{2,13}$$

$$\psi_{2l-1}^{(n+1)}(\bar{x}) - \psi_s^{(n+k+1)}(\bar{x}) = \frac{a_{n+1}}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^k}\right) + a_{n+k+1} + b_{n+k+1}\,,$$

kde $|\bar{x} - x_1| = \frac{\pi}{4^{n+k}}$.

Dále: Existuje jediné řešení rovnice (2,12) pro $\frac{\pi}{4^{n+k}} \leqq |x - x_1| \leqq x_4$, které prochází bodem $[\bar{x}, \psi_s^{(n+k+1)}(\bar{x})]$, neboť toto řešení prochází množinami $P_{3k-1.(3l-2)}^{(n+k)}$, $P_{3k-2.(3l-2)}^{(n+k-1)}, \ldots, P_{3l-2}^{(n+1)}$. Nazveme toto řešení prodloužením funkce $\psi_s^{(n+k+1)}$ na celou množinu $Q_l^{(n)}$ a takto prodlouženou funkci $\psi_s^{(n+k+1)}$ označíme v_k.

Je patrné, že u nemůže protnout žádnou funkci v_k uvnitř $Q_l^{(n)}$. Ale v_k konverguje na $Q_l^{(n)}$ stejnoměrně k $\psi_{2l-1}^{(n+1)}$, neboť: Buď $|x - x_1| \leqq \frac{\pi}{4^{n+k}}$, pak podle (2,13) je $(\psi_{2l-1}^{(n+1)}(x) - v_k(x)) \leqq (\psi_{2l-1}^{(n+1)}(\bar{x}) - v_k(\bar{x})) \leqq \left[\frac{1}{2} a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^k}\right) + a_{n+k+1} + \right.$

$$\left. + b_{n+k+1}\right] \cdot \frac{a_{n+k} + b_{n+k} + \frac{1}{2}a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^{k-1}}\right)}{b_{n+k}} \cdots \frac{a_{n+1} + b_{n+1} + \psi_*(x_4)}{b_{n+1}}(1+\varepsilon),$$

nebo

$$\frac{\pi}{4^{n+k-m+1}} \leqq |x - x_1| \leqq \frac{\pi}{4^{n+k-m}}\ (m = 1, 2, \ldots, k),$$

pak $[x, v_k(x)] \in P_{3k-m.(3l-2)}^{(n+k-m+1)}$ a platí podle (2,3) resp. (2,4)

$$(2,14)\quad \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x) - v_k(x) \leqq \left[a_{n+k+1} + b_{n+k+1} + \frac{1}{2}a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^k}\right)\right].$$

$$\cdot \frac{a_{n+k} + b_{n+k} + \frac{1}{2}a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^{k-1}}\right)}{b_{n+k}} \cdots \frac{a_{n+2} + b_{n+2} + \frac{1}{2}a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)}{b_{n+2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{a_{n+1} + b_{n+1} + \psi_*(x_4)}{b_{n+1}}(1+\varepsilon).$$

Snadno zjistíme, že pro $\frac{1}{16} < b_1 < \frac{1}{4}$ je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 - \cos \pi \cdot 4^{-x}}{b_1^x} = 0$. Existuje tedy k_0 takové, že pro $k \geqq k_0$ je $\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^k}\right) < b_1^k$ a $\frac{1}{2}a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^k}\right) < a_{n+k+1}$. Můžeme tedy pro $k \geqq k_0$ přepsat (2,14) takto:

$$\psi_{n-1}^{(k+1)}(x) - v_k(x) \leqq [2a_{n+k+1} + b_{n+k+1}] \cdot \frac{2a_{n+k} + b_{n+k}}{b_{n+k}} \cdots \frac{2a_{n+k_0+1} + b_{n+k_0+1}}{b_{n+k_0+1}} \cdot$$

$$\cdot \frac{a_{n+k_0} + b_{n+k_0} + \frac{1}{2}a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^{k_0-1}}\right)}{b_{n+k_0}} \cdots \frac{a_{n+2} + b_{n+2} + \frac{1}{2}a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)}{b_{n+2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{a_{n+1} + b_{n+1} + \psi_*(x_4)}{b_{n+1}}(1+\varepsilon) = (2a_1 \cdot b_1^{n+k_0} + b_1^{n+k_0+1}) \cdot b_1^{k-k_0} \cdot \left(1 + 2\frac{a_1}{b_1}\right)^{k-k_0} \cdot$$

$$\cdot \frac{a_{n+k_0} + b_{n+k_0} + \frac{1}{2}a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4^{k_0-1}}\right)}{b_{n+k_0}} \cdots \frac{a_{n+2} + b_{n+2} + \frac{1}{2}a_{n+1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)}{b_{n+2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{a_{n+1} + b_{n+1} + \psi_*(x_4)}{b_{n+1}} \cdot (1 + \varepsilon) = (2a_1 b_1^{n+k_0} + b_1^{n+k_0+1}) \cdot$$

$$\cdot \frac{a_{n+k_0} + b_{n+k_0} + \frac{1}{2} a_{n+1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4^{k_0-1}}\right)}{b_{n+k_0}} \cdot$$

$$\dots \frac{a_{n+2} + b_{n+2} + \frac{1}{2} a_{n+1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right)}{b_{n+2}} \cdot \frac{a_{n+1} + b_{n+1} + \psi_*(x_4)}{b_{n+1}} \cdot$$

$$\cdot (b_1 + 2a_1)^{k-k_0} \to 0 \quad \text{pro} \quad k \to \infty \, .$$

Musí tedy být $u(x) = \psi_{2l-1}^{(n+1)}$ a to je jediné řešení rovnice (2,12) vyhovující dané počáteční podmínce pro $x \in Q_l^{(4)}$.

Není-li $x_1 = 0$ nebo $x_1 = \pi$ pak na opačnou stranu (tj. mimo množinu $Q_l^{(n)}$) vychází z bodu $[x_1, \psi_{2l-1}^{(n+1)}(x_1)]$ právě jedno řešení, protože $Q_l^{(n)}$ „sousedí" s množinou $P_s^{(r)}$, kde r je některé přirozené číslo $0 \leqq r \leqq n - 1$.

2. Nechť $[x_0, y_0] \in C$ a není koncovým bodem žádné z funkcí množiny Ψ. Nechť $[x_0, y_0] \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_{l_n}^{(n)}$ a nechť

$$Q_{l_n}^{(n)} = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} \left[x_n^* \leqq x \leqq x_n^* + \frac{\pi}{4^n}, \quad \psi_n^*(x) \leqq y \leqq \psi_n^{**}(x) \right],$$

kde $\psi_n^*, \psi_n^{**} \in \Psi(n)$. Buďte u_1, u_2 řešení rovnice (2,12) jdoucí bodem $[x_0, y_0]$. Podobně jako v první části důkazu prodloužíme funkce ψ_n^*, ψ_n^{**} na celý interval $\langle 0, \pi \rangle$. Označíme-li prodloužení těchto funkcí v_n resp. w_n pak zřejmě $\{v_n\}$ je rostoucí, $\{w_n\}$ je klesající posloupnost funkcí a stejně jako v první části dokážeme, že $|v_n(x) - w_n(x)| \to 0$ stejnoměrně pro $n \to \infty$.

Řešení u_1 a u_2 nemohou, jak plyne z první části důkazu, žádnou z funkcí v_n, w_n protnout a tedy $|u_1(x) - u_2(x)| < |v_n(x) - w_n(x)|$ pro všechna n. Musí platit $u_1(x) = u_2(x)$ a tedy bodem $[x_0, y_0]$ prochází právě jedno řešení rovnice (2,12).

Poznámka. Je zřejmé, že pro $[x, y] \in E_2 - \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ můžeme položit $g(x, y) = 0$ a spojitost a jednoznačnost řešení rovnice $y' = g(x, y)$ zůstane zachována.

III

Nyní sestrojíme na intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$ funkce σ a η. Na definičním intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$ sestrojíme nejprve dělení popsané v kap. I takové, že za první členy posloupností zvolíme $\frac{1}{8}$ resp. $\frac{1}{4}$.

Buď $T_l^{(n)}$, $(l = 1, 2, \dots, 4 \cdot 3^{n-1})$ dělící body vzniklé při n-tém kroku. Pak intervaly $\langle T_{4k-3}^{(n)}, T_{4k-2}^{(n)} \rangle$, $\langle T_{4k-1}^{(n)}, T_{4k}^{(n)} \rangle$, $k = 1, 2, \dots, 3^{n-1}$ mají délku $\frac{\pi}{4^{n-1}}$.

Definujme funkci σ' takto

$$\sigma'(t) = (-1)^{k-1} \quad \text{pro} \quad t \in (T^{(n)}_{4k-3}, T^{(n)}_{4k-2}) ,$$
$$\sigma'(t) = (-1)^{k} \quad \text{pro} \quad t \in (T^{(n)}_{4k-1}, T^{(n)}_{4k}) .$$

Podle věty 1,1 máme tímto předpisem definovánu funkci σ' skoro všude na intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$. Podle známých vět z integrálního počtu platí následující věty:

Věta 3,1. *Funkce σ' má Lebesgueův integrál v intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$.*

Věta 3,2. *Funkce σ definovaná vztahem $\sigma(t) = \int_0^t \sigma'(\tau)\, \mathrm{d}\tau$ pro $t \in \langle 0, 8\pi \rangle$ je absolutně spojitá, lipschitzovská s konstantou jedna a platí $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sigma(t) = \sigma'(t)$ skoro všude v $\langle 0, 8\pi \rangle$.*

Z definice funkce σ dokážeme následující větu:

Věta 3,3. *Buď $\langle T_*, T^* \rangle$ interval délky $\frac{2\pi}{4^{n-2}}$ sestrojený při dělení intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$, $T^{(n)}_{4r-3}, T^{(n)}_{4r-2}, T^{(n)}_{4r-1}, T^{(n)}_{4r}$ jeho dělící body. Pak platí*

(3,1) $$\sigma(T_*) = \sigma(T^{(n)}_{4r-3}) = \sigma(T^{(n)}_{4r}) = \sigma(T^*) ,$$

$$\sigma(T^{(n)}_{4r-2}) - \sigma(T^{(n)}_{4r-3}) = \sigma(T^{(n)}_{4r-1}) - \sigma(T^{(n)}_{4r}) = (-1)^{r-1} \cdot \frac{\pi}{4^{n-1}} .$$

Důkaz.

$$\sigma(T^{(n)}_{4r-3}) = \sigma(T_*) + \int_{T_*}^{T^{(n)}_{4r-3}} \sigma'(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \sigma(T_*) + (-1)^{r-1} \int_0^{T^{(n)}_1} \sigma'(\tau)\, \mathrm{d}\tau =$$
$$= \sigma(T_*) + \sum_{m=n+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2.3^{m-n-1}} (-1)^{r-1} \cdot \Big(\int_{T^{(m)}_{4l-3}}^{T^{(m)}_{4l-2}} \sigma'(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \int_{T^{(m)}_{4l-1}}^{T^{(m)}_{4l}} \sigma'(\tau)\, \mathrm{d}\tau \Big) = \sigma(T_*) .$$

Stejně se spočte, že $\sigma(T^*) = \sigma(T^{(n)}_{4r})$ a $\sigma(T^{(n)}_{4r}) = \sigma(T^{(n)}_{4r-3})$. Vztahy (3,1) plynou přímo z definice funkce σ.

Nyní stejným způsobem budeme definovat funkci η na intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$ takto

$$\eta'(t) = \frac{a_n}{2} \cdot 4^{n-1} \cdot \sin 4^{n-1}(t - T^{(n)}_{2k-1}) \quad \text{pro} \quad t \in (T^{(n)}_{2k-1}, T^{(n)}_{2k}) ,$$

kde a_n bylo zavedeno při konstrukci funkce g. Stejně jako v předcházejícím máme funkci η' definovánu v intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$ skoro všude a platí:

Věta 3,4. *Funkce η' má v intervalu $\langle 0, 8\pi \rangle$ Lebesgueův integrál.*

Věta 3,5. *Funkce η definovaná vztahem $\eta(t) = \int_0^t \eta'(\tau)\, \mathrm{d}\tau$ pro $t \in \langle 0, 8\pi \rangle$ je absolutně spojitá, rostoucí a skoro všude v $\langle 0, 8\pi \rangle$ je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \eta(t) = \eta'(t)$.*

Nyní dokážeme některé vlastnosti funkce η:

Věta 3,6. *Platí* $\eta(T_k^{(n)}) = Y_k^{(n)}$, *kde* $k = 1, 2, \ldots, 4 \,.\, 3^{n-1}$ ($Y_k^{(n)} \in D(n)$ *provedeného na interval* $\langle 0, 1\rangle$ *při konstrukci funkce* g).

Důkaz. Nejprve dokážeme, že platí

$$(3,2) \qquad \eta(T_{2l}^{(n)}) - \eta(T_{2l-1}^{(n)}) =$$

$$= \int_{T_{2l-1}^{(n)}}^{T_{2l}^{(n)}} \eta'(\tau)\, d\tau = \tfrac{1}{2}a_n \,.\, 4^{n-1} \int_{T_{2l-1}^{(n)}}^{T_{2l}^{(n)}} \sin 4^{n-1}(\tau - T_{2l-1}^{(n)})\, d\tau = a_n \,.$$

Důkaz dokončíme úplnou indukcí. Pro $n = 1$ platí

$$\eta(T_1^{(1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2.3^{n-1}} \int_{T_{2l-1}^{(n+1)}}^{T_{2l}^{(n+1)}} \eta'(\tau)\, d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \,.\, 3^{n-1} a_{n+1} = b_1 = Y_1^{(1)} \,.$$

Podobně

$$\eta(T_2^{(1)}) = Y_2^{(1)}, \quad \eta(T_3^{(1)}) = Y_3^{(1)} \quad \text{a} \quad \eta(T_4^{(1)}) = Y_4^{(1)} \,.$$

Buď nyní $\langle T_*, T^*\rangle$ interval délky $\dfrac{2\pi}{4^{n-1}}$ sestrojený při dělení intervalu $\langle 0,8\,\pi\rangle$ a $T_{4k-3}^{(n+1)}, \ldots, T_{4k}^{(n+1)}$ dělicí body tohoto intervalu. Platí

$$\eta(T_*) = Y_*\,, \quad \eta(T^*) = Y^*\,, \quad Y^* - Y_* = b_n\,; \quad Y_*, Y^* \in D(n)$$

a

$$\eta(T_{4k-3}^{(n+1)}) = \int_0^{T_{4k-3}^{(n+1)}} \eta'(\tau)\, d\tau = \eta(T_*) + \int_{T_*}^{T_{4k-3}^{(n+1)}} \eta'(\tau)\, d\tau = \eta(T_*) + \int_0^{T_1^{(n+1)}} \eta'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \eta(T_*) + \sum_{m=n+2}^{\infty} \sum_{l=1}^{2.3^{m-n-2}} \int_{T_{2l-1}^{(m)}}^{T_{2l}^{(m)}} \eta'(\tau)\, d\tau = \eta(T_*) + \sum_{m=n+2}^{\infty} \sum_{l=1}^{2.3^{m-n-2}} a_m =$$

$$= \eta(T_*) + \sum_{m=n+2}^{\infty} 2 \,.\, 3^{m-n-2} \,.\, a_m = \eta(T_*) + b_{n+1} = Y_{4k-3}^{(n+1)} \,.$$

Podle (1,3) a (3,2) plyne $\eta(T_{4k-2}^{(n+1)}) = Y_{4k-2}^{(n+1)}$ a podobně se dokáží další rovnosti.

Věta 3,7. *Buď* $t \in \langle T_{2k-1}^{(n)}, T_{2k}^{(n)}\rangle$. *Pak platí* $\eta(t) = \psi_k^{(n)}(\sigma(t))$, *kde* $\psi_k^{(n)}$ *bylo definováno v kap. II.*

Důkaz. Buď $t \in \langle T_{2k-1}^{(n)}, T_{2k}^{(n)}\rangle$. Pak jest

$$\eta(t) = \eta(T_{2k-1}^{(n)}) + \int_{T_{2k-1}^{(n)}}^{t} \frac{a_n}{2}\, 4^{n-1} \sin 4^{n-1}(x - T_{2k-1}^{(n)})\, dx =$$

$$= Y_{2k-1}^{(n)} + \frac{a_n}{2} - \frac{a_n}{2} \cos 4^{n-1}(t - T_{2k-1}^{(n)}) = \frac{1}{2}\,(Y_{2k-1}^{(n)} + Y_{2k}^{(n)}) -$$

$$- \frac{a_n}{2} \cos 4^{n-1}(t - T_{2k-1}^{(n)})\,,$$

$$\sigma(t) = \sigma(T_{2k-1}^{(n)}) + \int_{T_{2k-1}^{(n)}}^{t} \sigma'(x)\, dx = \sigma(T_{2k-1}^{(n)}) + (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\,(t - T_{2k-1}^{(n)}) \,.$$

Dále je $\sigma(T^{(n)}_{2k-1}) = \varepsilon_1\pi + \varepsilon_2 \cdot \frac{\pi}{4} + \ldots + \varepsilon_n \frac{\pi}{4^{n-1}}$, $\varepsilon_i = 0, 1, -1$; přitom $\varepsilon_n \neq 0$ pro k sudé, $\varepsilon_n = 0$ pro k liché, a $x_1 = m \frac{\pi}{4^{n-2}}$, kde m je vhodné číslo. Odtud

$$\psi^{(n)}_k(\sigma(t)) = (-1)^k \frac{a_n}{2} \cos 4^{n-1} (\sigma(t) - x_1) + \frac{1}{2} (Y^{(n)}_{2k-1} + Y^{(n)}_{2k}) =$$

$$= (-1)^k \frac{a_n}{2} \cos 4^{n-1} \left[\varepsilon_1\pi + \ldots + \varepsilon_n \frac{\pi}{4^{n-1}} + \right.$$

$$\left. + (t - T^{(n)}_{2k-1}) \cdot (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} - m \frac{\pi}{4^{n-2}}\right] + \frac{1}{2} (Y^{(n)}_{2k-1} + Y^{(n)}_{2k}) =$$

$$= (-1)^k \frac{a_n}{2} \cos \left\{4^{n-1}(t - T^{(n)}_{2k-1})(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} + \varepsilon_n\pi\right\} + \frac{1}{2} (Y^{(n)}_{2k-1} + Y^{(n)}_{2k}) = \eta(t) .$$

Mějme nyní funkci g, definovanou v kap. II. Mějme systém diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{dt} = 1 , \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{3,4}$$

$([x, y] \in \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle)$.

Tento systém je ekvivalentní s rovnicí (2,12) a tedy počátečními podmínkami $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ je dáno právě jedno řešení. Přepišme systém rovnic (3,4) na systém integrálních rovnic

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} d\tau , \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau . \tag{3,5}$$

Také tento systém má právě jedno řešení $[x(t), y(t)]$. Avšak platí:

Věta 3,8. *Buďte σ, η funkce definované v této kapitole. Potom systém integrálních rovnic*

$$x(t) = \int_0^t d\sigma(\tau) , \quad y(t) = \int_0^t g(x(\tau), y(\tau)) \, d\sigma(\tau) \tag{3,6}$$

řeší na intervalu $\langle 0, 8\pi\rangle$ jednak $[\sigma(t), 0]$, jednak $[\sigma(t), \eta(t)]$.

Důkaz. Z konstrukce funkce g plyne, že $g(x, 0) = 0$ a tedy $[\sigma(t), 0]$ je řešením (3,6). Dále ze vztahu

$$\psi^{(n)}_k(\sigma(t)) - \psi^{(n)}_k(\sigma(T^{(n)}_{2k-1})) = \int_{\sigma(T^{(n)}_{2k-1})}^{\sigma(t)} g(x, \psi^{(n)}_k(x)) \, dx$$

vyplývá podle vět 3,6 a 3,7

$$\eta(t) - \eta(T^{(n)}_{2k-1}) = \int_{\sigma(T^{(n)}_{2k-1})}^{\sigma(t)} g(x, \psi^{(n)}_k(x)) \, dx = \int_{T^{(n)}_{2k-1}}^{t} g(\sigma(\tau), \eta(\tau)) \, d\sigma(\tau) .$$

Odtud plyne $\eta(t) = \int_0^t g(\sigma(\tau), \eta(\tau)) \, d\sigma(\tau)$. Tím je důkaz proveden.

IV

Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ posloupnosti, $Y_k^{(n)}$ body a $\psi_k^{(n)}$ funkce zavedené v kapitole II tohoto článku.

Položme $d = \dfrac{3b_1}{2a_1 + 2b_1}$. Nejprve sestrojíme na ose t body A_n $(n = 1, 2, \dots)$ takto: $A_1 = -\dfrac{3b_1}{2a_1 - b_1}$, $A_{n+1} - A_n = d^n$. Zřejmě platí

$$A_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{n+1} - A_n) = A_1 + \sum_{n=1}^{\infty} d^n = 0 . \tag{4,1}$$

Každý interval $\langle A_n, A_{n+1}\rangle$ budeme dále dělit. Při prvním kroku rozdělíme tento interval na tři stejné díly a tak obdržíme body $T_1^{(1)}, T_3^{(1)}$ (index n, který by označoval, že se jedná o body intervalu $\langle A_n, A_{n+1}\rangle$ pro jednodušší psaní vynecháme). Při druhém kroku každý z intervalů $\langle A_n, T_1^{(1)}\rangle$, $\langle T_1^{(1)}, T_3^{(1)}\rangle$, $\langle T_3^{(1)}, A_{n+1}\rangle$ opět rozdělíme na tři stejné díly. Tak obdržíme body $T_1^{(2)}, T_3^{(2)}, \dots, T_{11}^{(2)}$. Tak postupujeme dále, až naposledy při n-tém kroku obdržíme body $T_1^{(n)}$, $T_3^{(n)}, \dots, T_{4.3^{n-1}-1}^{(n)}$. Takto vzniklé intervaly mají délku $\dfrac{d^n}{3^n}$. Dále označme $T_{2l}^{(r)} = T_{2l-1}^{(r)} + \dfrac{d^n}{2 \cdot 3^n}$ $(r = 1, 2, \dots, n;\ l = 1, 2, \dots, 2 \cdot 3^{r-1})$. Tímto způsobem jsme původní interval $\langle A_n, A_{n+1}\rangle$ rozdělili na interval délky $\dfrac{d^n}{3^n}$ a na $(3^n - 1) \cdot 2$ intervalů délky $\dfrac{d^n}{2 \cdot 3^n}$.

Nyní sestrojíme posloupnosti funkcí $\varphi_n(t)$, $\eta_n(t)$, $(n = 1, 2, \dots)$ a funkci $f(y, t)$ pro $t \in \langle A_1, -A_1\rangle$, $y \in (-\infty, \infty)$.

Nechť φ_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ je spojitá funkce taková, že platí:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t) &= 0 \quad \text{pro} \quad t \in \langle A_1, A_n\rangle \cup \langle 0, -A_1\rangle ,\\
\varphi_n(t) &> 0 \quad \text{pro} \quad t \in (A_{n+1}, 0) ,\\
(-1)^{s-1} \cdot \varphi_n(t) &> 0 \quad \text{pro} \quad t \in (T_{4s-3}^{(r)}, T_{4s-2}^{(r)}) ,\\
(-1)^{s} \cdot \varphi_n(t) &> 0 \quad \text{pro} \quad t \in (T_{4s-1}^{(r)}, T_{4s}^{(r)}) ,
\end{aligned}$$

kde $T_{4s-3}^{(r)}, \dots, T_{4s}^{(r)} \in \langle A_n, A_{n+1}\rangle$; $r = 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, 3^{r-1}$. Pro ostatní body intervalu $\langle A_n, A_{n+1}\rangle$ buď $\varphi_n(t) = 0$. Dále nechť platí

$$\int_{T_{4s-3}^{(r)}}^{T_{4s-2}^{(r)}} \varphi_n(\tau)\, d\tau = -\int_{T_{4s-1}^{(r)}}^{T_{4s}^{(r)}} \varphi_n(\tau)\, d\tau = (-1)^{s-1} \cdot \frac{\pi}{4^r} , \quad \int_{A_{n+1}}^{0} \varphi_n(\tau)\, d\tau = 1 . \tag{4,2}$$

Ukážeme, že takto definovaná posloupnost funkcí φ_n konverguje k Diracově funkci podle definice 5,1 článku [2], tj. dokážeme, že jsou splněny podmínky (0,2)—(0,6) tohoto článku.

Platí

$$\int_{A_1}^{-A_1} |\varphi_n(\tau)| \,\mathrm{d}\tau = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{3^{r-1}} \left[(-1)^{s-1} \int_{T_{4s-3}^{(r)}}^{T_{4s-2}^{(r)}} \varphi_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau + (-1)^s \int_{T_{4s-1}^{(r)}}^{T_{4s}^{(r)}} \varphi_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau\right] +$$

$$+ \int_{A_{n+1}}^{0} \varphi_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{3^{r-1}} 2 \,.\, \frac{\pi}{4^r} + 1 = \frac{\pi}{2} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{r-1} + 1 \,,$$

a tedy

$$\limsup_{n \to \infty} \int_{A_1}^{-A_1} |\varphi_n(\tau)| \,\mathrm{d}\tau = \frac{\pi}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{r-1} + 1 = 2\pi + 1 = L < \infty \,.$$

Podmínky (0,3), (0,4) a (0,5) jsou zřejmě splněny, neboť jak plyne z (4,1), od jistého n je $\varphi_n(\tau) = 0$ pro $\tau \in \langle A_1, t\rangle$ resp. je $\varphi_n(\tau) = 0$ pro $\tau \in \langle 0, -A_1\rangle$.

Pro $t \in \langle 0, -A_1\rangle$ platí

$$\int_{A_1}^{t} \varphi_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau = \int_{A_1}^{0} \varphi_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{3^{r-1}} \Big[\int_{T_{4s-3}^{(r)}}^{T_{4s-2}^{(r)}} \varphi_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau + \int_{T_{4s-1}^{(r)}}^{T_{4s}^{(r)}} \varphi_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau\Big] +$$

$$+ \int_{A_{n+1}}^{0} \varphi_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau = \int_{A_{n+1}}^{0} \varphi_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau = 1 \,,$$

a odtud plyne podmínka (0,6).

Obdobným způsobem jako věta 3,3 dokáže se následující tvrzení:

Věta 4,1. *Buď* $\Phi_n(t) = \int_{A_1}^{t} \varphi_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau$ *a nechť* $T_k^{(r)}$ *jsou dělící body intervalu* $\langle A_n, A_{n+1}\rangle$. *Potom platí*

$$\Phi_n(T_1^{(r+1)}) = \Phi_n(T_4^{(r+1)}) = \Phi_n(T_1^{(r)}) = 0 \,.$$

$$\Phi_n(T_{4.3^{r}-3}^{(r+1)}) = \Phi_n(T_{4.3^{r}}^{(r+1)}) = \Phi_n(T_{4.3^{r-1}}^{(r)}) = 0 \,,$$

Buďte $T_*, T^* \in \{T_1^{(1)}, \ldots, T_4^{(1)}, T_1^{(2)}, \ldots, T_{12}^{(2)}, \ldots, T_1^{(r)}, \ldots, T_{4.3^{r-1}}^{(r)}\}$ *takové, že* $T_{4s-4}^{(r+1)} < T_* < T_{4s-3}^{(r+1)} < \ldots < T_{4s}^{(r+1)} < T^* < T_{4s+1}^{(r+1)}$. *Potom*

$$\Phi_n(T_*) = \Phi_n(T_{4s-3}^{(r+1)}) = \Phi_n(T_{4s}^{(r+1)}) = \Phi_n(T^*) \,,$$

$$\Phi_n(T_{4s-2}^{(r+1)}) = \Phi_n(T_{4s-1}^{(r+1)}) \,.$$

Na základě této věty a vztahů (4,2) můžeme definovat funkce η_n ($n = 1, 2, \ldots$) takto (viz obr. 2):

$$\eta_1(A_1) = Y_1^{(1)} \,, \quad \eta_1(t) = \psi_1^{(2)}(\Phi_1(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \langle T_1^{(1)}, T_2^{(1)}\rangle \,,$$

$$\eta_1(t) = \psi_2^{(2)}(\Phi_1(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \langle T_3^{(1)}, T_4^{(1)}\rangle \,, \quad \text{kde} \quad T_1^{(1)}, \ldots, T_4^{(1)} \in \langle A_1, A_2\rangle \,,$$

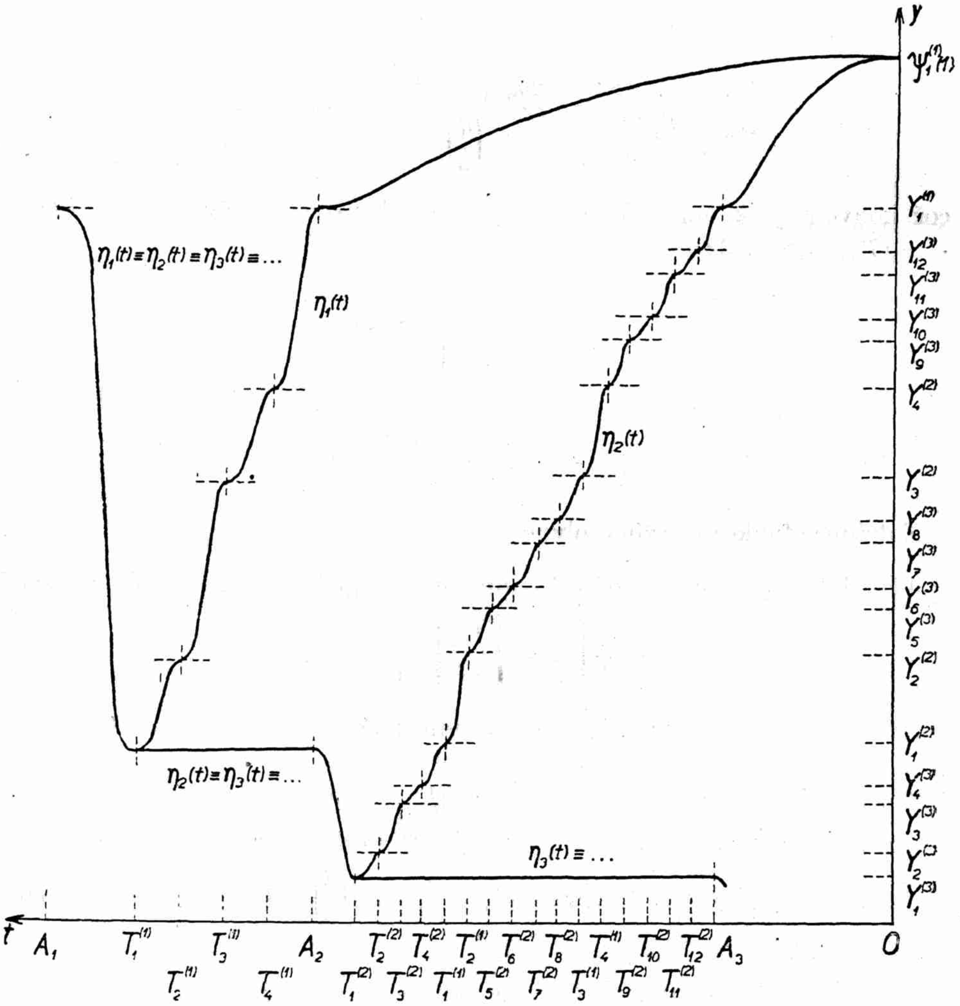
$$\eta_1(t) = \psi_1^{(1)}(\Phi_1(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \langle A_2, -A_1\rangle \,.$$

Na zbytku intervalu $\langle A_1, A_2\rangle$ doplníme funkci η_1 tak, aby měla spojitou první derivaci a aby pro $t \in \langle T_*, T^* \rangle$ platilo $|\eta_1'(t)| \leqq 2 \,.\, \dfrac{\eta_1(T^*) - \eta_1(T_*)}{T^* - T_*}$. Jestliže nyní máme již definovánu funkci η_{n-1}, pak položíme $\eta_n(t) = \eta_{n-1}(t)$ pro $t \in \left\langle A_1, A_{n-1} + \left(\dfrac{d}{3}\right)^{n-1} \right\rangle$, $\eta_n(t) = Y_1^{(n)}$ pro $t \in \left\langle A_{n-1} + \left(\dfrac{d}{3}\right)^{n-1}, A_n \right\rangle$. Na intervalu $\langle A_n, A_{n+1} \rangle$ definujeme funkci η_n takto:

$$\eta_n(t) = \psi_{2s-1}^{(r+1)}(\Phi_n(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \langle T_{4s-3}^{(r)}, T_{4s-2}^{(r)} \rangle\,,$$

$$\eta_n(t) = \psi_{2s}^{(r+1)}(\Phi_n(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \langle T_{4s-1}^{(r)}, T_{4s}^{(r)} \rangle\,,$$

kde $r = 1, 2, \ldots, n$; $s = 1, 2, \ldots, 3^{r-1}$. Na intervalu $\langle A_{n+1}, -A_1 \rangle$ definujeme $\eta_n(t) = \psi_1^{(1)}(\Phi_n(t))$ a na zbytku intervalu $\langle A_n, A_{n+1} \rangle$ doplníme funkci η_n tak, aby



Obr. 2.

měla spojitou první derivaci a aby pro $t \in \langle T^*, T_* \rangle$ platilo $|\eta_n'(t)| \leqq$ $\leqq 2 \dfrac{\eta_n(T^*) - \eta_1(T_*)}{T^* - T_*}$. Zřejmě pro všechna n platí

$$\eta_n(A_1) = Y_1^{(1)}, \quad \eta_n(t) = \psi_1^{(1)}(1) \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, -A_1 \rangle .$$

Věta 4,2. *Buď* $T_1^{(n)} \in \langle A_n, A_{n+1} \rangle$, *potom platí* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\eta_n(A_n) - \eta_n(T_1^{(n)})}{A_n - T_1^{(n)}} = 0$. *Buď* $\langle T_*, T^* \rangle \subset \langle A_n, A_{n+1} \rangle$ *interval, kde* φ_n *je identicky rovno nule. Potom platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n(T^*) - \eta_n(T_*)}{T^* - T_*} = 0 .$$

Důkaz. Protože platí $\eta_n(A_n) = Y_1^{(n)}$ a $\eta_n(T_1^{(n)}) = \psi_1^{(n+1)}(\Phi_n(T_1^{(n)})) = Y_1^{(n+1)}$, je

$$\frac{\eta_n(A_n) - \eta_n(T_1^{(n)})}{A_n - T_1^{(n)}} = \frac{2a_{n+1} + 2b_{n+1}}{\left(\frac{d}{3}\right)^n} = (2a_1 + 2b_1)^{n+1} ,$$

což konverguje k nule pro $n \to \infty$. Dále z konstrukce plyne, že $\eta_n(T^*) -$ $- \eta_n(T_*) = b_{n+1}$. Tedy

$$\frac{\eta_n(T^*) - \eta_n(T_*)}{T^* - T_*} = \frac{b_{n+1}}{\frac{1}{2}\left(\frac{d}{3}\right)^n} = 2b_1(2a_1 + 2b_1)^n$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n(T^*) - \eta_n(T_*)}{T^* - T_*} = 0 .$$

Z definice funkce η_n přímo plyne

Věta 4,3. *Buď* T *dělicí bod intervalu* $\langle A_n, A_{n+1} \rangle$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Potom platí*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\eta_n}{\mathrm{d}t}\right]_{t=T} = \left[\frac{\mathrm{d}\eta_n}{\mathrm{d}t}\right]_{t=A_{n+1}} = 0 .$$

Funkci $f(y, t)$ budeme definovat na množině $y \in (-\infty, \infty)$, $t \in \langle A_1, -A_1 \rangle$. Položme $f(y, t) = \dfrac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}t}$ pro $t \in \left\langle A_1, A_1 + \dfrac{d}{3} \right\rangle$.

Předpokládejme, že máme funkci f definovánu pro všechna y a pro $t \in \left\langle A_1, A_n + \left(\dfrac{d}{3}\right)^n \right\rangle$. Na intervalu $J_n = \left\langle A_n + \left(\dfrac{d}{3}\right)^n, A_{n+1} + \left(\dfrac{d}{3}\right)^{n+1} \right\rangle$ budeme definovat funkci f takto:

Buď $(T_*, T^*) \subset J_n$ takový interval, kde $\varphi_n(t) \neq 0$. Potom pro $t \in (T_*, T^*)$ definujeme $f(y, t) = 0$.

Buď $J_n \supset (T_*, T^*) \neq \left\langle A_{n+1}, A_{n+1} + \left(\frac{d}{3}\right)^{n+1}\right\rangle$ takový interval, kde φ_n je identicky rovno nule. Potom pro $t \in (T_*, T^*)$ definujeme

$$f(y, t) = 0 \qquad \text{pro} \quad y \leqq Y_1^{(n+1)} \quad \text{nebo} \quad y \geqq Y_1^{(1)},$$

$$f(y, t) = \frac{\mathrm{d}\eta_n}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{y - Y_1^{(n+1)}}{\eta_n(t) - Y_1^{(n+1)}} \quad \text{pro} \quad y \in \langle Y_1^{(n+1)}, \eta_n(t)\rangle,$$

$$f(y, t) = \frac{\mathrm{d}\eta_n}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{y - Y_1^{(1)}}{\eta_n(t) - Y_1^{(1)}} \quad \text{pro} \quad y \in \langle \eta_n(t), Y_1^{(1)}\rangle.$$

Buď $t \in \left\langle A_{n+1}, A_{n+1} + \left(\frac{d}{3}\right)^{n+1}\right\rangle$. Potom definujeme

$$f(y, t) = 0 \qquad \text{pro} \quad y \leqq 0 \quad \text{nebo} \quad y \geqq Y_1^{(1)},$$

$$f(y, t) = \frac{\mathrm{d}\eta_{n+1}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{y - Y_1^{(1)}}{\eta_{n+1}(t) - Y_1^{(1)}} \quad \text{pro} \quad y \in \langle \eta_{n+1}(t), Y_1^{(1)}\rangle,$$

$$f(y, t) = \frac{\mathrm{d}\eta_{n+1}}{\mathrm{d}t} \cdot y \qquad \text{pro} \quad y \in \langle 0, \eta_{n+1}(t)\rangle.$$

Buď T dělící bod intervalu $\langle A_n, A_{n+1}\rangle$. Potom položíme $f(y, T) = f(y, A_{n+1}) = f\left(y, A_{n+1} + \left(\frac{d}{3}\right)^{n+1}\right) = 0$. Na intervalu $\langle 0, -A_1\rangle$ definujeme $f(y, t) = 0$.

Z konstrukce funkce f a z vět 4,2 a 4,3 vyplývá

Věta 4,4. *Funkce $f(y, t)$ je pro $y \in (-\infty, \infty)$, $t \in \langle A_1, -A_1\rangle$ spojitá.*

Nyní vyslovíme čtyři věty, jejichž důkazy triviálně plynou z předcházejícího.

Věta 4,5. *Buď $u(t) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(t)$ pro $t \in \langle A_1, 0)$, $u(0) = 0$. Potom funkce $[0, u(t)]$ je jediné řešení soustavy diferenciálních rovnic*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y, t)$$

pro $t \in \langle A_1, 0\rangle$ s počáteční podmínkou $x(A_1) = 0$, $y(A_1) = Y_1^{(1)}$.

Věta 4,6. *Funkce $[t + \frac{1}{2}, 0]$ je jediné řešení soustavy diferenciálních rovnic*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x, y)$$

s počáteční podmínkou $x(-\frac{1}{2}) = 0$, $y(-\frac{1}{2}) = 0$.

Věta 4,7. *Funkce $[1, 0]$ je jediné řešení soustavy diferenciálních rovnic*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y, t)$$

pro $t \in \langle 0, -A_1\rangle$ s počáteční podmínkou $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Věta 4,8. *Funkce* $[\Phi_n(t), \eta_n(t)]$ *je řešení soustavy diferenciálních rovnic*

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_n(t)\,, \quad \frac{dy}{dt} = f(y, t) + \varphi_n(t) \,.\, g(x, y)$$

pro $t \in \langle A_1, -A_1 \rangle$ *s počáteční podmínkou* $x(A_1) = 0$, $y(A_1) = Y_1^{(1)}$.

Z těchto vět 4,5 až 4,8 vyplývá, že není možné, aby byla splněna podmínka (0,7) tohoto článku.

Literatura

[1] *J. Kurzweil*: Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter. Czech. Math. Journal *7* (*82*), 1957, 418—449.

[2] *J. Kurzweil*: Generalized Ordinary Differential Equations. Czech. Math. Journal *8* (*83*), 1958, 360—388.

Резюме

О НЕОДНОЗНАЧНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВЛАДИМИР ДОЛЕЖАЛ (Vladimír Doležal), Прага

Вопросы, рассмотренные в настоящей статье, появились при изучении обобщенных дифференциальных уравнений, понятие которых было введено Я. Курцвейлем в [1], особенно при изучении функции Дирака в нелинейных дифференциальных уравнениях в [2], § 5.

Я. Курцвейль в лемме 5,1 доказывает следующее предложение: Пусть $\chi(\eta)$, $\eta \geqq 0$ — возрастающая непрерывная функция, $\chi(0) = 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{d\eta}{\chi(\eta)} = \infty$. Пусть $\sigma(t)$, $t \in \langle 0, S \rangle$, — непрерывная вещественная функция с ограниченным изменением. Пусть $g(x) = [g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_m(x_1 \ldots, x_m)]$ — непрерывная векторная функция на открытом множестве $D \subset E_m$ такая, что

$$(0,1) \qquad \|g(x_*) - g(x^*)\| \leqq \chi(\|x_* - x^*\|) \quad \text{для} \quad x_*, x^* \in D\,.$$

Пусть $x_0 \in D$, $t_0 \in \langle 0, S \rangle$. Тогда уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\, d\sigma(\tau)$$

имеет самое больше одно решение.

В этой статье на примере показано, что условие (0,1), которое должна выполнять функция $g(x)$, нельзя заменить более слабым условием: Пусть $g(x)$ — непрерывная, векторная функция на множестве $D \subset E_n$ такая, что

уравнение $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau$ имеет для $x_0 \in D$, $t_0 \in \langle 0, S\rangle$ одно и только одно решение.

В главе II мы построим на множестве $\langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ функцию $g(x, y)$, такую, что для $t_0 \in \langle 0, 8\pi\rangle$, $x_0 \in \langle 0, \pi\rangle$, $y_0 \in \langle 0, 1\rangle$ система

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\,, \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau)\,,\ y(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

имеет одно и только одно решение. В главе III мы построим непрерывно вещественную функцию $\sigma(t)$, $t \in \langle 0, 8\pi\rangle$ с ограниченным изменением такую, что системе

$$x(t) = \int_0^t \mathrm{d}\sigma(\tau)\,, \quad y(t) = \int_0^t g(x(\tau)\,,\ y(\tau))\,\mathrm{d}\sigma(\tau)$$

удовлетворяют два решения.

В дальнейшем Я. Курцвейль в теореме 5,1 доказывает следующее предложение: Пусть $f(x, t) = [f_1(x_1, \ldots, x_m, t), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_m, t)]$ — непрерывная векторная функция для $x \in D$, $t \in \langle -T_1, T_1\rangle$. Пусть $g(x)$ — функция, которая выполняет условия леммы 5,1. Пусть $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ — непрерывная вещественная функция для $t \in \langle -T_1, T_1\rangle$, $\Phi_n(t) = \int_{-T_1}^{t} \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Пусть последовательность функцией φ_n выполняет следующие условия:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \int_{-T_1}^{T_1} |\varphi_n(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = L < \infty\,, && \\
&\lim_{n\to\infty} \int_{-T_1}^{t} |\varphi_n(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad && \text{для} \quad -T_1 \leqq t < 0\,, \\
&\lim_{n\to\infty} \int_{t}^{T_1} |\varphi_n(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad && \text{для} \quad 0 < t \leqq T_1\,, \\
&\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = 0 \quad && \text{для} \quad -T_1 \leqq t < 0\,, \\
&\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = 1 \quad && \text{для} \quad 0 < t_1 \leqq T_1\,.
\end{aligned}$$

Пусть решение $u(t)$, $t \in \langle -T_0, 0\rangle$, $\langle 0 < T_0 < T_1\rangle$, уравнения

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t)$$

однозначно определяется начальным условием $u(-T_0) = y_0$. Пусть решение $v(t)$, $t \in \langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\rangle$, уравнения $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(x)$ однозначно определяется начальным условиен $v(-\frac{1}{2}) = u(0)$ и пусть, наконец, решение $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0\rangle$, уравнения (*) однозначно определяется начальным условием $w(0) = v(\frac{1}{2})$. Пусть $y_n \to y_0$ для $n \to \infty$.

Тогда для достаточно больших n существует решение $x_n(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x) \cdot \varphi_n(t) , \quad x_n(-T_0) = y_n ,$$

и

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = u(t) \quad \text{для} \quad -T_0 \leqq t < 0 , \quad \lim_{n\to\infty} x_n(t) = w(t) \quad \text{для} \quad 0 < t \leqq T_0 .$$

В статье мы покажем на примере, что при более слабом условии о функции $g(x)$ это утверждение неправильно.

Summary

ON NON-UNICITY OF SOLUTIONS OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha

The problems considered in this paper have their origin in the theory of generalized ordinary differential equations introduced by J. KURZWEIL in [1], especially in the part concerning the theory of Dirac functions, Chapter 2 of paper [2].

J. Kurzweil has proved, l. c. Lemma 5,1, the following proposition: Let $\chi(\eta)$, $\eta \geqq 0$ be an increasing and continuous function, $\chi(0) = 0$, $\int_{t_0}^{t} \frac{d\eta}{\chi(\eta)} = \infty$. Let $\sigma(t)$, $t \in \langle 0, S\rangle$ be a real continuous function with bounded variation. Let $g(x) = [g_1(x_1, ..., x_m), ..., g_m(x_1, \ldots, x_m)]$ be a vector function, continuous on the open set $D \subset E_m$ and such that

$$(0,1) \qquad \|g(x_*) - g(x^*)\| \leqq \chi(\|x_* - x^*\|) \quad \text{for} \quad x_*, x^* \in D .$$

Let $x_0 \in D$, $t_0 \in \langle 0, S\rangle$. Then the equation $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\, d\sigma(\tau)$ has at most one solution.

In this paper an example is contained showing that the condition (0,1) on the function $g(x)$ cannot be replaced by the weaker condition: Let $g(x)$ be a vector function continuous on the set $D \subset E_m$ such that the equation

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\, d\tau$$

has a unique solution for $x_0 \in D$, $t_0 \in \langle 0, S\rangle$. In Chapter II we construct a function $g(x, y)$ on the set $\langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, such that the system

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} d\tau , \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau), y(\tau))\, d\tau$$

has a unique solution for $t_0 \in \langle 0, 8\pi \rangle$, $x_0 \in \langle 0, \pi \rangle$, $y_0 \in \langle 0, 1 \rangle$. In Chapter III we construct a continuous real function $\sigma(t)$, $t \in \langle 0, 8\pi \rangle$ with bounded variation such that the system

$$x(t) = \int_0^t \mathrm{d}\sigma(\tau)\,, \quad y(t) = \int_0^t g(x(\tau), y(\tau))\, \mathrm{d}\sigma(\tau)\,.$$

has two distinct solutions.

Further, in theorem 5,1, J. Kurzweil proves the following proposition: Let $f(x, t) = [f_1(x_1, \ldots, x_m, t), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_m, t)]$ be a continuous vector function for $x \in D$, $t \in \langle -T_1, T_1 \rangle$. Let $g(x)$ be a function satisfying the conditions of Lemma 5,1.

Let the sequence of real continuous functions $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $t \in \langle -T_1, T_1 \rangle$, fulfil the following conditions:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{-T_1}^{T_1} |\varphi_n(\tau)|\, \mathrm{d}\tau = L < \infty\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-T_1}^{t} |\varphi_n(\tau)|\, \mathrm{d}\tau = 0 \quad \text{for} \quad -T_1 \leqq t < 0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t}^{T_1} |\varphi_n(\tau)|\, \mathrm{d}\tau = 0 \quad \text{for} \quad 0 < t \leqq T_1\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = 0 \quad \text{for} \quad -T_1 \leqq t < 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = 1 \quad \text{for} \quad 0 < t \leqq T_1\,,$$

where $\Phi_n(t) = \int_{T_1}^{t} \varphi_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau$.

Let $u(t)$, $t \in \langle -T_0, 0 \rangle$, $(0 < T_0 < T_1)$ be a unique solution of

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t)\,; \quad u(-T_0) = y_0\,;$$

let the solution $v(t)$ of $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(x)$, $v(-\frac{1}{2}) = u(0)$ be defined for $t \in \langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \rangle$, and let the solution $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ of (*) be unique. Let $y_n \to u(-T_0)$ with $n \to \infty$.

Then there exists a solution $x_n(t)$, $t \in \langle -T_0, T_0 \rangle$ of

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t) + g(x)\,.\,\varphi_n(t)$$

$x_n(-T_0) = y_n$, (not necessarily unique) for n sufficiently large and such that

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = u(t) \quad \text{for} \quad -T_0 \leqq t < 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} x_n(t) = w(t) \quad \text{for} \quad 0 < t \leqq T_0\,.$$

In this article we show an example proving that this proposition is wrong under some weaker conditions on the function $g(x)$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

O JISTÉ VLASTNOSTI SOUSTAV NEZÁVISLÝCH PRVKŮ V ABELOVSKÉ GRUPĚ

MILAN SEKANINA, Brno

(Došlo dne 18. července 1959)

V článku se dokazuje, že každá neprázdná množina nezávislých prvků z abelovské grupy je jejím faktorem ve smyslu Hajósově.

Nechť $\mathfrak{G}$ je abelovská grupa. Neprázdnou podmnožinu M z $\mathfrak{G}$ nazýváme nezávislou, platí-li pro každou neprázdnou konečnou podmnožinu $N = \{a_1, \dots, \dots, a_n\}$ množiny M, že z rovnice $v_1a_1 + \dots + v_na_n = 0$ (0 je nulový prvek grupy $\mathfrak{G}$), kde v_i jsou celá čísla, plyne $v_i = 0$ pro $i = 1, \dots, n$ (viz [1], str. 123).

Nechť M, N jsou dvě neprázdné podmnožiny z $\mathfrak{G}$. Potom $M + N$ značí množinu všech těch prvků z $\mathfrak{G}$, které se dají psát jako součet prvku z M a prvku z N. Dá-li se každý prvek x z $\mathfrak{G}$ psát nanejvýš jedním způsobem jako $m + n$, $m \in M$, $n \in N$, píšeme $M \perp N$. Je-li $\mathfrak{G} = M + N$ a $M \perp N$, píšeme též $M \dot{+} N$ a říkáme, že M a N tvoří faktorisaci grupy $\mathfrak{G}$ ve smyslu Hajósově (viz též [2]) a M a N nazýváme faktory grupy $\mathfrak{G}$.

Dokážeme větu:

Věta. *Nezávislá množina $M \subset \mathfrak{G}$ je faktorem $\mathfrak{G}$ ve smyslu Hajósově.*

Důkaz. I. Nechť M je konečná množina, tedy $M = \{a_1, \dots, a_n\}$. Ukážeme, že

$$\mathfrak{M} = \{a_1, \dots, a_n\} \dot{+} \mathbf{E}[k_1na_1 + k_2(a_2 - 2a_1) + \dots + k_n(a_n - na_1)\,, \\ k_1, k_2, \dots, k_n \text{ probíhají množinu celých čísel}]\,,$$

kde $\mathfrak{M}$ je nejmenší podgrupa z $\mathfrak{G}$ obsahující množinu M, tedy

$$x \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow x = h_1a_1 + h_2a_2 + \dots + h_na_n\,,$$

h_i celé číslo (píše se též $\mathfrak{M} = [M]$). Nechť tedy $x = h_1a_1 + h_2a_2 + \dots + h_na_n$ a

$$h_1 + 2h_2 + \dots + nh_n = gn + s\,,$$

kde $0 < s \leqq n$.

a) Nechť $s \neq 1$. Potom $x = a_s + nga_1 + \sum_{i=2}^{n} k_i(a_i - ia_1)$, kde $k_i = h_i$ pro $i \neq s$, $k_s = h_s - 1$.

b) Nechť $s = 1$. Potom $x = a_1 + gna_1 + \sum_{i=2}^{n} h_i(a_i - ia_1)$. Tedy v obou případech

$$x \in \{a_1, \ldots, a_n\} + E[k_1 na_1 + \ldots + k_n(a_n - na_1),\ k_i \text{ celé}] .$$

Nechť nyní pro jisté ι, i a celá čísla $\varkappa_j$, k_j ($j = 1, \ldots, n$) platí

$$a_\iota + \varkappa_1 na_1 + \sum_{l=2}^{n} \varkappa_l(a_l - la_1) = a_i + k_1 na_1 + \sum_{l=2}^{n} k_l(a_l - la_1) .$$

Použijeme nyní předpokladu, že $a_1, \ldots, a_n$ jsou nezávislé prvky.

1. Nechť $i = \iota$. Potom zřejmě $k_j = \varkappa_j$.

2. Nechť $i = 1 < \iota$. Potom porovnáme koeficienty u a_l a dostaneme rovnice

$$1 + \varkappa_1 n - \sum_{l=2}^{n} l\varkappa_l = nk_1 - \sum_{l=2}^{n} lk_l , \quad \varkappa_2 = k_2, \ldots, \varkappa_i = k_i + 1, \ldots, \varkappa_n = k_n .$$

Odtud plyne $n\varkappa_1 - i = nk_1 - 1$, což je spor, neboť $2 \leqq i < n$ a tedy $n \not\mid i - 1$.

3. Nechť $1 < i < \iota$. Srovnáním koeficientů u a_l plyne

$$n\varkappa_1 - \sum_{l=2}^{n} l\varkappa_l = nk_1 - \sum_{l=2}^{n} lk_l ,$$

$$\varkappa_2 = k_2, \ldots, \varkappa_i = k_i + 1, \ldots, \varkappa_\iota + 1 = k_\iota, \ldots, \varkappa_n = k_n .$$

Odtud dostáváme $n\varkappa_1 - i = nk_1 - \iota$, tedy $i = \iota$, což je spor. Tedy $\mathfrak{M} = \{a_1, \ldots, a_n\} \dotplus \mathbf{E}[k_1 na_1 + \ldots + k_n(a_n - na_1),\ k_j \text{ celé}]$.

Označme $\mathfrak{N} = \mathbf{E}[k_1 na_1 + \ldots + k_n(a_n - na_1),\ k_j \text{ celé}]$. Je-li N systém representantů tříd grupy $\mathfrak{G}$ vzhledem k podgrupě $\mathfrak{M}$, platí podle známých vět o rozkladu grupy v třídy

$$\mathfrak{G} = [\{a_1, \ldots, a_n\} \dotplus \mathfrak{N}] \dotplus N = \{a_1, \ldots, a_n\} \dotplus [\mathfrak{N} \dotplus N] .$$

Tedy $\{a_1, \ldots, a_n\}$ je faktorem grupy $\mathfrak{G}$ ve smyslu Hajósově.

II. Nechť M je nekonečná množina nezávislých prvků z $\mathfrak{G}$. Nechť μ značí počáteční ordinální číslo příslušné k mohutnosti card M. Uspořádejme M v posloupnost $\{a_0, a_1, \ldots, a_\iota, \ldots\}$, $\iota < \mu$. Nechť opět $\mathfrak{M} = [M]$. Je card $\mathfrak{M} =$ card M. Uspořádejme $\mathfrak{M}$ v posloupnost $\{x_0, x_1, \ldots, x_\iota, \ldots\}$, $\iota < \mu$. Množiny A_ι ($\iota < \mu$) definujme takto: $A_\iota = \emptyset$, je-li $x_0 = 0$; $A_\iota = \{a_{\iota_1}, \ldots, a_{\iota_m}\}$, je-li $x_\iota = \alpha_1 a_{\iota_1} + \ldots + \alpha_m a_{\iota_m}$, při čemž $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \neq 0$. Z nezávislosti množiny M plyne jednoznačnost definice množin A_ι.

Nyní budeme transfinitní indukcí definovat posloupnost $\{t_0, \ldots, t_\iota, \ldots\}$, $\iota < \mu$ prvků z M, pro niž platí $M = M \dotplus \bigcup_{\iota<\mu}\{t_\iota\}$, ($\{t_\iota\}$ značí množinu o jediném prvku t).

Položme $t_0 = x_0 - a_0$. Je zřejmě $M \perp \{t_0\}$ a $x_0 \in M \dotplus \{t_0\}$.

Nechť $1 \leqq \nu < \mu$ a předpokládejme, že jsou definována $t_\iota \in \mathfrak{M}$ pro $\iota < \nu$ taková, že $M \perp \bigcup_{\iota<\mu}\{t_\iota\}$ a $x_\iota \in M \dotplus \bigcup_{\delta\leqq\iota}\{t_\delta\}$.

Nechť $x_{\iota_\varkappa} = t_\varkappa + a_0$. Ukážeme, že $\mathfrak{M} \neq M + \bigcup_{\iota<\nu}\{t_\iota\}$. Je totiž card $\bigcup_{\varkappa<\nu} A_{\iota_\varkappa} \cup$ $\cup \{a_0\} <$ card M. Existuje tedy a_{ι_μ} non $\epsilon \bigcup_{\varkappa<\nu} A_{\iota_\varkappa} \cup \{a_0\}$. Protože

$$x \in M + \bigcup_{\iota<\nu}\{t_\iota\} \Rightarrow x = a + x_{\iota_\varkappa} - a_0$$

pro jisté $\iota_\varkappa$ a $a \in M$, platí $2a_{\iota_\mu}$ non $\epsilon\, M \dot{+} \bigcup_{\iota<\nu}\{t_\iota\}$. Jinak by totiž bylo $2a_{\iota_\mu} =$ $= a + x_{\iota_\varkappa} - a_0$, tedy $x_{\iota_\varkappa} = a_0 - a - 2a_{\iota_\mu}$, odkud $a_{\iota_\mu} \in A_{\iota_\varkappa}$, což je spor s volbou a_{ι_μ}.

Nechť ν_1 je první index, pro nějž platí x_{ν_1} non $\epsilon\, M \dot{+} \bigcup_{\iota<\nu}\{t_\iota\}$ (je $\nu_1 \geqq \nu$), nechť a_{ι_ν} non $\epsilon \bigcup_{\varkappa<\nu} A_{\iota_\varkappa} \cup \{a_0\} \cup A_{\nu_1}$. Položme $t_\nu = x_{\nu_1} - a_{\iota_\nu}$. Zřejmě platí $t_\nu \in \mathfrak{M}$ a $x_\nu \in M + \bigcup_{\iota\leqq\nu}\{t_\nu\}$. Ukážeme, že $M \perp \bigcup_{\iota\leqq\nu}\{t_\iota\}$. Připusťme, že $a_\mu + t_\nu = a_\lambda + t_\varkappa$ pro $\varkappa < \nu$. Potom $a_\mu + x_{\nu_1} - a_{\iota_\nu} = a_\lambda + x_{\iota_\varkappa} - a_0$ a tedy $a_{\iota_\nu} = a_\mu + x_{\nu_1} -$ $- a_\lambda - x_{\iota_\varkappa} + a_0$. Kdyby $a_\mu = a_{\iota_\nu}$, potom by bylo $x_{\nu_1} = a_\lambda + t_\varkappa$, což je spor s volbou x_{ν_1}. Tedy $\iota_\nu \neq \mu$ a $a_{\iota_\nu} \in A_{\nu_1} \cup A_{\iota_\varkappa} \cup \{a_0\}$, což je opět spor z volbou a_{ι_ν}. Tedy $M \perp \bigcup_{\iota\leqq\nu}\{t_\iota\}$. Tím je hledaná transfinitní posloupnost sestrojena.

Důkaz tvrzení, že M je faktor, je týž, jako v odstavci I.

Poznámka. V článku [3] bylo dokázáno, že množina $\{0, 1, \alpha\}$, kde α je iracionální číslo, je faktorem grupy reálných čísel ve smyslu Hajósově. Toto tvrzení plyne ihned z naší věty, neboť pro iracionální číslo ε, nezávislé racionálně na α, je $\{\varepsilon, 1 + \varepsilon, \alpha + \varepsilon\}$ nezávislou množinou v množině reálných čísel, tedy faktorem. Tvrzení pak plyne z toho, že je-li A faktorem $\mathfrak{G}$ a $a \in \mathfrak{G}$, je též $A + \{a\}$ faktorem $\mathfrak{G}$.

Literatura

[1] *А. Г. Курош,* Теория групп. Москва, 1953.

[2] *G. Hajós*: Sur la factorisation des groupes abéliens. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, *74* (1949), 157—162.

[3] *K. Koutský* a *M. Sekanina*: Rozklad přímky na shodné trojbodové množiny. Časopis pro pěstování matematiky, *83* (1958), 317—326.

Резюме

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СИСТЕМ НЕЗАВИСИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

МИЛАН СЕКАНИНА (Milan Sekanina), Брно

В статье доказывается теорема, что каждая система M независимых элементов в абелевой группе $\mathfrak{G}$ (см. [1], стр. 123) является множителем $\mathfrak{G}$ в смысле Хайоша, т. е. существует такое подмножество $N \subset \mathfrak{G}$, что каждый элемент из $\mathfrak{G}$ можно однозначно представить в виде суммы $a + b$, где $a \in M$, $b \in N$.

Summary

ON A CERTAIN PROPERTY OF A SET OF INDEPENDENT ELEMENTS OF AN ABELIAN GROUP

Milan Sekanina, Brno

In the paper there is proved that every set M of independent elements of an abelian group $\mathfrak{G}$ (see [1], 123 p.) is a factor of $\mathfrak{G}$ in Hajós' sense; this means that there exists a subset N of $\mathfrak{G}$ such that each element of $\mathfrak{G}$ can be expressed just in one way as $a + b$ where $a \in M$ and $b \in N$.

GEOMETRICKÝ VÝZNAM PROJEKTIVNÍCH NORMÁL ROVINNÉ VRSTVY KŘIVEK

ALOIS ŠVEC, Praha

(Došlo 24. srpna 1959)

Je nalezen další geometrický význam normál vrstvy křivek v S_2, zavedených ZB. NÁDENÍKEM.

V projektivní rovině S_2 buď dána vrstva křivek V; každému bodu $A_0 \in S_2$ buď přiřazen reper A_0, A_1, A_2, pro který $[A_0A_1A_2] = 1$ a $[A_0A_1]$ je tečna v bodě A_0 té křivky vrstvy V, jež jím prochází. V duální rovině S_2^* k S_2 uvažujme duální lokální repery $\alpha_0 = [A_2A_1]$, $\alpha_1 = [A_0A_2]$, $\alpha_2 = [A_1A_0]$; základní rovnice vrstvy jsou

$$\text{(1)} \qquad dA_i = \sum_{j=0}^{2} \omega_{ij}A_j\,, \quad d\alpha_i = -\sum_{j=0}^{2} \omega_{ji}\alpha_j \quad (i = 0, 1, 2)$$

s

$$\text{(2)} \qquad \omega_{12} = \omega_1\,, \quad 3\omega_{11} = b_1\omega_1 + b_2\omega_2\,, \quad \omega_{10} + \omega_{21} = b_2\omega_1 + b_3\omega_2\,,$$

volba $b_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ znamená, že A_2 leží na jedné z i i-tých normál; viz [1]. V dalším naleznu geometrický význam těchto normál, odlišný od Nádeníkem udané charakterisace.

Za tím účelem uvažuji vrstvy V_K, takto vytvořené: Buď dána kolineace $K : S_2 \to S_2$, křivka vrstvy V_K bodem $A \in S_2$ má v něm za tečnu právě přímku $[A, KA]$ (uvažuji ovšem takovou část roviny S_2, jež neobsahuje samodružné body K). Nyní platí, že *pro každý bod A dané vrstvy V existuje ∞^2 kolineací K, pro něž vrstva V_K má s vrstvou V v bodě A analytický styk 2. řádu.* Analyticky se jedná o nalezení takových kolineací $KA_i = \sum_{j=0}^{2} \alpha_{ij}A_j$, pro něž

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned}[(A_0 + dA_0 + \tfrac{1}{2}d^2A_0 + \ldots)(KA_0 + K\,dA_0 + \tfrac{1}{2}K\,d^2A_0 + \ldots)] =\\ = (\Theta_0 + \Theta_1 + \tfrac{1}{2}\Theta_2 + \ldots)(\alpha_2 + d\alpha_2 + \tfrac{1}{2}d^2\alpha_2 + \ldots)\end{aligned}$$

až na veličiny třetího a vyššího řádu (Θ_k je řádu k). Přímým výpočtem se zjistí, že taková nejobecnější kolineace K (nazvěme ji přidruženou) je

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned}KA_0 = a_{00}A_0 + A_1\,, \quad KA_1 = a_{10}A_0 + (a_{00} + \tfrac{1}{2}b_1)\,A_1 + A_2\,,\\ KA_2 = \tfrac{1}{2}b_3A_0 + (b_2 - a_{10})\,A_1 + a_{00}A_2\,.\end{aligned}$$

Snadno se již nahlédne:

V S_2 uvažujme vrstvu V a bod A. Zvolme bod B, jenž neleží na tečně v bodě A křivky vrstvy V, která bodem A prochází. Nutná a postačující podmínka, aby bod B ležel na (1) *první,* (2) *druhé,* (3) *třetí projektivní normále vrstvy V v bodě A, jest existence takové přidružené kolineace K* (V a V_K mají styk právě v bodě A), *pro níž*

(1) *body KB a A jsou lineárně závislé a K^2A leží na $[A, B]$,*
(2) *body KB a A jsou lineárně závislé a K^2A leží na $[KA, B]$,*
(3) *bod B je samodružným bodem K.*

LITERATURA

[1] *Z. Nádeník*: O projektivních diferenciálních invariantech rovinné vrstvy křivek, Čas. pěst. mat. *78* (1953), 229—258.

Резюме

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОЕКТИВНЫХ НОРМАЛЕЙ ПЛОСКОГО СЛОЯ КРИВЫХ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

Пусть дано нулевое соответствие $VA = \alpha$; $A \in \alpha$, $A \in S_2$, $\alpha \in S^*$; S_2 и S_2^* — двойственные друг другу плоскости. Для каждой точки $A \in S_2$ существует ∞^2 коллинеаций K, для которых соответствия V и $V_K A = \{A, KA\}$ имеют аналитическое касание второго порядка. Точка B лежит на i-й ($i = 1, 2, 3$) введеной З. Надеником нормали в точке A, если и только если существует такая коллинеация K, для которой V_K соприкасается с V в точке A и (1) $[KB, A] = 0$, $K^2A \in \{A, B\}$, (2) $[KB, A] = 0$, $K^2A \in \{KA, B\}$, (3) $[KB, B] = 0$. (Здесь $\{R, S\}$ означает прямую, проходящую через точки R, S.)

Résumé

SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DES NORMALES PROJECTIVES D'UNE COUCHE DE COURBES PLANES

ALOIS ŠVEC, Praha

Soit donnée une correspondance nulle $VA = \alpha$; $A \in \alpha$, $A \in S_2$, $\alpha \in S_2^*$; S_2 et S_2^* étant deux plans duals l'un à l'autre. Pour tout point $A \in S_2$ il existe ∞^2 d'homographies K pour lesquelles les correspondances V et $V_K A = \{A, KA\}$ ont un contact analytique de second ordre. Un point B est situé sur la i-ème ($i = 1, 2, 3$) normale — introduite par M. Z. NÁDENÍK — du point A si et seulement s'il existe une homographie K pour laquelle V_K oscule V au point A et (1) $[KB, A] = 0$, $K^2A \in \{A, B\}$, (2) $[KB, A] = 0$, $K^2A \in \{KA, B\}$, (3) $[KB, B] = 0$. (Ici $\{R, S\}$ désigne la droite passant par les points R et S.)

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

OPTIMÁLNÍ REGULACE

HANA SVOBODOVÁ a JIŘÍ VANÍČEK, Praha

(Došlo dne 1. září 1959)

V článku se referuje o výsledcích dosažených v teorii optimální regulace a podává se přehled literatury tohoto oboru.

S rozvojem techniky stále přibývá procesů, které jsou řízeny automaticky, bez přímého zásahu člověka.

Praktický podklad otázek, o kterých se jedná v tomto článku, je asi tento: Chceme, aby se přístroj během své práce udržoval stále v určitém stavu, optimálním pro jeho výkonnost (např. správná rychlost přítoku paliva kosmických raket, dostatečně velký, ale přitom bezpečný počet rozštěpených atomů za jednotku času v atomovém reaktoru, správný počet otáček rotoru turbiny apod.).

První otázka je, jak sestrojit uvažovaný přístroj tak, aby se stále udržoval v tomto optimálním stavu. (Typický příklad zařízení, které nám to zprostředkuje, je známý Wattův regulátor užívaný běžně u parních strojů.)

Ve skutečnosti však na soustavu stále působí řada nahodilých prvků, které ji vychylují z optimální polohy, např. změny zatížení u parní turbiny. Druhý, neméně důležitý problém je tento:

Předpokládejme, že můžeme nějakým způsobem zasahovat do uvažovaného děje tak, že v určitém rozsahu měníme vstupní parametry (např. hloubku, do které jsou spuštěny kadmiové tyče brzdící rozpad v atomovém reaktoru). Otázka je, jak máme tyto parametry měnit, aby se soustava vrátila z libovolné polohy do optimální co nejdříve, za optimální čas, a z kterých poloh je vůbec možno vrátit soustavu do optimální polohy.

Matematická formulace problému je tato:

Nechť T je topologický prostor. Budeme říkat, že je dán regulační proces, je-li dán systém n diferenciálních rovnic

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, u)$$

nebo vektorově

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n,\ x_1(t), \ldots, x_n(t) \tag{1}$$

jsou reálné funkce času t, $u \in T$, $f_i(\mathbf{x}, u)$ jsou spojité funkce v $E_n \times T$ a mají spojité parciální derivace prvního řádu podle proměnných x_j ($j = 1, \ldots, n$) v $E_n \times T$. Regulátorem našeho procesu budeme nazývat zobrazení $u(t)$ intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$ do T.

Budeme říkat, že regulátor $u(t)$ převádí bod ξ_0 v ξ_1, jestliže existuje řešení soustavy (1) s regulátorem $u(t)$ tak, že

$$\mathbf{x}(t_0) = \xi_0\,, \quad \mathbf{x}(t_1) = \xi_1\,.$$

Regulátor budeme nazývat optimální mezi body ξ_0 a ξ_1, jestliže převádí bod ξ_0 v ξ_1 za čas τ a jestliže neexistuje regulátor, který by převáděl bod ξ_0 v ξ_1 za čas kratší.

Úkolem je najít optimální regulátor převádějící libovolný bod ξ do počátku a vyjádřit tento regulátor jako funkci bodu $\mathbf{x}$ (výchylky) místo času t.

Pro obecný případ nelineární soustavy se podařilo sovětským matematikům L. S. Pontrjaginovi a R. V. Gamkrelidzovi odvodit nutnou podmínku pro optimálnost regulátoru, tak zvaný princip maxima (za předpokladu, že funkce $u(t)$ je po částech spojitá a má body nespojitosti pouze prvního druhu).

V [8] je nejprve řešen obecnější problém, najít takový regulátor, aby funkcionál

$$L(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}(t), u(t))\, \mathrm{d}t\,,$$

kde f_0 je funkce spojitá v $E_n \times T$, byl minimální. Pro speciální případ

$$f_0 \equiv 1 \tag{2}$$

dostáváme pak optimální regulátor. Výsledky pro tento důležitý speciální případ lze shrnout v následující větu:

Nechť ψ je libovolná vektorová funkce; označme skalární součin $(\psi, \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)) = H(\psi, \mathbf{x}, u)$ a $\sup\limits_{u \in T} H(\psi, \mathbf{x}, u) = M(\psi, \mathbf{x})$.

Věta 1. *Nechť $u(t)$ je optimální regulátor vzhledem k* (2) *soustavy* (1) *a $\mathbf{x}(t)$ jemu odpovídající řešení soustavy* (1). *Potom existuje taková nenulová vektorová funkce $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, že*

$$H(\psi(t_0), \mathbf{x}(t_0), u(t_0)) \geqq 0\,,$$

a funkce $\psi(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $u(t)$ vyhovují Hamiltonovu systému

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial \psi_j} \quad (j = 1, \ldots, n)\,, \quad \frac{\mathrm{d}\psi_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots, n)\,,$$

přičemž $H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = M(\psi(t), \mathbf{x}(t))$. Ukazuje se kromě toho, že funkce $H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))$ je konstantní, takže $H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) \geqq 0$. Viz [8].

Mnohem úplnějších výsledků lze dosáhnout pro případ lineární soustavy.

Uvažujme systém n diferenciálních rovnic

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}_1 u_1(t) + \ldots + \mathbf{c}_r u_r(t) . \tag{3}$$

O matici $\mathbf{A}$ předpokládáme, že je regulární a nezávisí na t; $\mathbf{x}$, $\mathbf{c}_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ jsou n-členné sloupcové vektory.

Pontrjagin a Gamkrelidze předpokládají, že regulátory $u_j(t)$ jsou po částech spojité a mají body nespojitosti pouze prvního druhu. (Viz [4, 7, 8].)

V naší nepublikované práci, která získala první cenu v celostátní studentské vědecké soutěži za přírodní vědy, je předpokládáno, že regulátory $u_j(t)$ jsou měřitelné funkce. Za prostor T budeme brát kartézský součin r jednorozměrných intervalů $\langle -1, 1 \rangle$.[1])

Pro tento případ byla dokázána Gamkrelidzem [6] a nezávisle na něm námi ve shora uvedené práci existence optimálního regulátoru pro lineární soustavy.

Věta o existenci optimální soustavy regulátorů:

Označme $\Phi = \|\varphi_{ik}\|$ fundamentální matici řešení soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ v $\langle 0, +\infty)$, tj. funkční matici, pro kterou platí $\dot{\Phi} = \mathbf{A}\Phi$. Dále označíme inversní matici $\Phi^{-1} = \Psi$.

Řešení soustavy (3) je určeno vzorcem

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \left(\mathbf{q}_0 + \int_0^t \Psi(\tau) \sum_{j=1}^r \mathbf{c}_j u_j(\tau) \, \mathrm{d}\tau\right) \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, +\infty) . \tag{4}$$

Označme $\mathbf{x}(t, u_1, \ldots, u_r)$ řešení soustavy (3) příslušné k systému regulátorů $\{u_1, \ldots, u_r\}$.

Věta 2. *Nechť existuje systém regulátorů* $\{v_1(t), \ldots, v_r(t)\}$ *definovaných na* $\langle 0, +\infty)$ *a* $T' > 0$ *tak, že pro příslušné řešení soustavy* (3) *je* $\mathbf{x}(T', v_1, \ldots, v_r) = \xi_1$, *kde* $\xi_0 \neq \xi_1 \in E_n$.

Pak existuje systém regulátorů $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ *a číslo* $0 < T \leqq T'$ *tak, že platí:*

1. $\mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r) = \xi_1$,

2. *pro libovolný systém regulátorů* $\{u_1, \ldots, u_r\}$ *a* $0 < t < T$ *je* $\mathbf{x}(t, u_1, \ldots, u_r) \neq \xi_1$.

Důkaz. Buď M množina těch $t \in \langle 0, +\infty)$, ke kterým existuje systém regulátorů $\{u_1, \ldots, u_r\}$ tak, že $\mathbf{x}(t, u_1, \ldots, u_r) = \xi_1$. M je zdola omezena nulou, a protože $T' \in M$, je $M \neq \emptyset$, tedy existuje $\inf M = T$.

Je-li $T = T'$, je nutně $T \in M$ a věta je dokázána. Buď $T < T'$, pak existuje klesající posloupnost $T' = t_0 > t_1 > \ldots$ tak, že $t_n \to T$ a $t_n \in M$. Ze vzorce (4) plyne, že příslušné funkce $u_1^m, \ldots, u_r^m$ je možno volit tak, že $u_j^m(t) = 0$ pro $t \in (t_m, +\infty)$, tedy je

[1]) L. S. Pontrjagin v [8] zobecnil výsledky pro případ, že T je konvexní mnohostěn v E_r.

$$\xi_1 = \mathbf{x}(t_m, u_1^m, \ldots, u_r^m) = \boldsymbol{\Phi}(t_m)\,(\mathbf{q}_0 + \int_0^{t_m} \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^{r} \mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\, \mathrm{d}\tau) =$$
$$= \boldsymbol{\Phi}(t_m)\,(\mathbf{q}_0 + \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^{r} \mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\, \mathrm{d}\tau)\,.$$

Protože u_j^m je měřitelná a omezená, existuje neurčitý Lebesgueův integrál, a označíme-li

$$U_j^m(t) = \int_0^t u_j^m(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,,$$

je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_j^m(t) = u_j^m(t)$ skoro všude. Platí

$$\int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\, \mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\, \mathbf{c}_j\, \mathrm{d}U_j^m(\tau)\,,$$

kde vpravo je Lebesgue-Stieltjesův integrál.

Jest

$$|U_j(\tau_2) - U_j(\tau_1)| \leqq \int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_j^m(\tau)|\, \mathrm{d}\tau \leqq |\tau_2 - \tau_1|\,,$$

takže funkce U_j^m splňují Lipschitzovu podmínku s konstantou 1. Tedy funkce U_j^m jsou stejně spojité a také stejně omezené. Podle Arzelovy věty lze z $\{U_j^m\}$ vybrat posloupnost $\{\tilde{U}_j^m\}$ stejnoměrně konvergentní: $\tilde{U}_j^m \to H_j$. Ze stejnoměrné konvergence $\tilde{U}_j^m \to H_j$ plyne, že také H_j splňuje Lipschitzovu podmínku s konstantou 1 a tedy existuje skoro všude $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} H_j(\tau) = \eta_j(\tau)$ a je

$$|\eta_j(\tau)| = \left|\lim_{t \to \tau} \frac{H_j(t) - H_j(\tau)}{t - \tau}\right| \leqq 1\,.$$

Protože je $|u_j^m| \leqq 1$, jsou variace funkcí U_j^m v intervalu $\langle 0, T' \rangle$ omezeny konstantou T' nezávislou na m a užitím Hellyovy věty [1] dostaneme

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\, \mathbf{c}_j\, \mathrm{d}\tilde{U}_j^m(\tau) = \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\, \mathbf{c}_j\, \mathrm{d}H_j = \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\, \mathbf{c}_j\, \eta_j(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^{T} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\, \mathbf{c}_j\, \eta_j(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

(protože $\eta_j = 0$ pro $t > T$).

Tedy i

$$\lim_{m \to \infty} \boldsymbol{\Phi}(\tilde{t}_m)(\mathbf{q}_0 + \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^{r} \mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\, \mathrm{d}\tau) =$$
$$= \boldsymbol{\Phi}(T)(\mathbf{q}_0 + \int_0^{T} \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^{r} \mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\, \mathrm{d}\tau) = \xi_1\,,$$

což znamená, že $\mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r) = \xi_1$, a tedy $T \in M$.

Pro další vyšetřování je nutno zavést na soustavu omezující předpoklad.

Systém (3) budeme nazývat regulární, jestliže žádný z vektorů $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_r$ neleží v žádném podprostoru $P \subset E_n$ nižší dimense než n, invariantním vzhledem k operátoru $\mathbf{A}$.

Ukazuje se, že pro regulární soustavu mají optimální regulátory zvláště jednoduchý tvar. Mají konečně mnoho bodů nespojitosti a nabývají pouze hodnot 1 a -1. (Ztotožňujeme ovšem funkce, které se liší pouze na množině nulové míry.)

O tvaru řešení platí tato věta:

Věta 3. *Buď* (3) *regulární soustava a* $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ *soustava optimálních regulátorů soustavy* (3) *mezi body* ξ_0 *a* ξ_1. *Pak existuje řešení systému* $\dot{\omega} = -\mathbf{A}'\omega$ *tak, že platí* $\eta_j(t) = \operatorname{sgn}(\omega(t) \,.\, \mathbf{c}_j)$ *skoro všude.*

Naznačíme pouze nejdůležitější etapy důkazu. Označíme $A(t)$ množinu všech bodů $\mathbf{x}(t, u_1, \ldots, u_r)$, kde $\{u_1, \ldots, u_r\}$ je systém regulátorů; dále označíme $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ systém optimálních regulátorů a T optimální čas. Platí:

a) Množina $A(T)$ je konvexní a bod $\xi_1 = \mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r)$ leží na její hranici.

b) Je-li A konvexní množina, potom každým bodem její hranice lze vést nadrovinu R takovou, že A leží celá v jednom poloprostoru vyťatém nadrovinou R.

Existuje tedy nadrovina R procházející bodem ξ_1 taková, že množina $A(T)$ leží celá v jednom poloprostoru vyťatém nadrovinou R. Označme $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ vektor kolmý k R, orientovaný tak, že pro každý systém regulátorů $\{u_1, \ldots, u_r\}$ je

$$\mathbf{a} \,.\, [\mathbf{x}(T, u_1, \ldots, u_r) - \mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r)] \leqq 0 \,. \tag{5}$$

Označme

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} \,.\, \boldsymbol{\Phi}(T)\,, \quad \omega(t) = \mathbf{b} \,.\, \boldsymbol{\Psi}(t)\,. \tag{6}$$

Vektorová funkce $\omega(t)$ definovaná vztahy (6) splňuje soustavu $\dot{\omega} = -\mathbf{A}'\omega$.

c) Je-li systém (3) regulární, jsou vektory $\mathbf{c}_j, \mathbf{A}\mathbf{c}_j, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{c}_j$ lineárně nezávislé.

Z těchto tvrzení již snadno plyne věta o tvaru řešení.

Podle (4) a (5) je

$$\begin{aligned} \mathbf{a}[\mathbf{x}(T, u_1, \ldots, u_r) - \mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r)] &= \\ = \int_0^T \mathbf{a}\, \boldsymbol{\Phi}(\tau)\, \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^r \mathbf{c}_j (u_j(\tau) - \eta_j(\tau))\, \mathrm{d}\tau &= \\ = \int_0^T \omega(\tau) \sum_{j=1}^r \mathbf{c}_j (u_j(\tau) - \eta_j(\tau))\, \mathrm{d}\tau &\leqq 0 \,. \end{aligned} \tag{7}$$

Protože funkce $\omega(\tau) \,.\, \mathbf{c}_j$ mají v intervalu $\langle 0, T\rangle$ pouze konečný počet nulových bodů, platí, že $\operatorname{sgn} \omega(\tau) \,.\, \mathbf{c}_j$ je funkce po částech konstantní s konečným počtem bodů nespojitosti. Stačí tedy dokázat toto:

Je-li $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ systém optimálních regulátorů, je $\eta_j = \operatorname{sgn} \omega(\tau) \,.\, \mathbf{c}_j$, $j = 1, \ldots, r$, skoro všude v $\langle 0, T\rangle$.

Označme G^j_+ množinu těch $t \in \langle 0, T\rangle$ takových, že $\operatorname{sgn} \omega(t) \,.\, \mathbf{c}_j = 1$ a $\eta_j(t) < 1$. Nechť $\mu(G^j_+) > 0$. Definujme systém regulátorů $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r\}$ takto:

$$\vartheta_i = \eta_i \quad \text{pro} \quad i \neq j \quad \text{a} \quad t \in \langle 0, T\rangle\,,$$

$$\vartheta_j = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad t \in G^j_+ \\ \eta_j & \text{pro} \quad t \in \langle 0, T\rangle \dot{-} G^j_+\,. \end{cases}$$

Dosadíme-li do výrazu (7), dostaneme:

$$\int_0^T \omega(\tau) \sum_{k=1}^r \mathbf{c}_k(\vartheta_k(\tau) - \eta_k(\tau))\, d\tau = \int_{G^j_+} \omega(\tau)\, \mathbf{c}_j(1 - \eta_j(\tau))\, d\tau > 0$$

a to je spor s (7). Tedy $\mu(G^j_+) = 0$.

Podobně definujeme G^j_- a dokážeme, že $\mu(G^j_-) = 0$. Tedy $\mu(G^j) = 0$, kde $G^j = \underset{t \in \langle 0,T\rangle}{\mathscr{E}} (\eta_j \neq \operatorname{sign} \omega \,.\, \mathbf{c}_j)$.

Jednoznačnost systému optimálních regulátorů plyne z následující věty:

Věta 4. *Jsou-li $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ a $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r\}$ dva systémy optimálních regulátorů, je $\eta_j = \vartheta_j$, $j = 1, \ldots, r$, skoro všude v $\langle 0, T\rangle$.*

(Při určování optimálního regulátoru vzorcem $\eta_j(t) = \operatorname{sgn} \omega(t) \,.\, \mathbf{c}_j$ tedy nezáleží na volbě nadroviny R.)

Důkaz. Buď $\mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r) = \mathbf{x}(T, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_r) = \xi_1$. Pak také $\mathbf{x}\left(T, \frac{\eta_1 + \vartheta_1}{2}, \ldots, \frac{\eta_r + \vartheta_r}{2}\right) = \xi_1$. Nechť existuje $1 \leq j \leq r$ tak, že $\eta_j \neq \vartheta_j$ na nějaké množině G^j, která nemá nulovou míru. Označme

$$N^j = \underset{t \in \langle 0,T\rangle}{\mathscr{E}} (|\eta_j(t)| \neq 1)\,, \quad M^j = \underset{t \in \langle 0,T\rangle}{\mathscr{E}} (|\vartheta_j(t)| \neq 1)\,;$$

potom $\mu(N^j) = \mu(M^j) = 0$. Ale pak $\frac{\eta_j + \vartheta_j}{2} = 0$ na $G^j \dot{-} (M^j \cup N^j)$, což je spor, protože $\left\{\frac{\eta_1 + \vartheta_1}{2}, \ldots, \frac{\eta_r + \vartheta_r}{2}\right\}$ je systém optimálních regulátorů, a tedy musí být $\left|\frac{\eta_j + \vartheta_j}{2}\right| = 1$ skoro všude.

V praxi není příliš důležité určit optimální regulátory mezi dvěma pevně zvolenými body jako funkce času t, ale je důležité určit je v závislosti na poloze bodu $\mathbf{x}$ tak, aby se bod pohybující se podle rovnic

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}_1\, u_1(\mathbf{x}) + \ldots + \mathbf{c}_r\, u_r(\mathbf{x})$$

dostal z libovolné polohy do optimální za minimální čas. Tomuto úkolu se říká syntéza optimální soustavy.

Vzhledem k tomu, že o optimální poloze předpokládáme, že se v ní při ideálních podmínkách, tj. při vyloučení všech rušivých vlivů a při nepůsobení regulátorů, soustava stále udržuje, budeme brát za tuto polohu počátek.

Z existenční věty a z věty o jednoznačnosti plyne, že existuje taková množina $G \subset E_n$, pro kterou platí:

Je-li $\mathbf{x} \in G$, pak existuje právě jedna optimální trajektorie vedoucí z $\mathbf{x}$ do počátku; jestliže $\mathbf{x}$ non $\in G$, neexistuje žádný regulátor mezi body $\mathbf{x}$ a $\mathbf{0}$. Lze dokázat, že tato množina je vždy otevřená a konvexní a že může (ale nemusí) splynout s celým E_n. Pontrjagin v [8] odvodil, že postačující podmínkou pro $G = E_n$ je, aby reálné části všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ byly záporné.

Chceme určit nejprve množinu G těch bodů, z kterých je možno dospět do počátku pomocí nějakého regulátoru (a podle existenční věty také pomocí optimálního regulátoru) a pak na G definovat funkce $u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_r(\mathbf{x})$, při kterých se libovolný bod $\xi \in G$ dostane do počátku v nejkratším čase.

Možnost určit funkci u pouze v závislosti na bodu $\mathbf{x}$ je dána tím, že je-li $u(t)$ optimální regulátor mezi body ξ_0 a ξ_1 a $\mathbf{x}(t, u)$ příslušné řešení systému (3) takové, že $\xi_0 = \mathbf{x}(t_0)$, $\xi_1 = \mathbf{x}(t_1)$, $t_0 < t_1$, a je-li $t_0 \leqq t_2 < t_3 \leqq t_1$, je také $u(t)$ optimální regulátor mezi body $\xi_2 = \mathbf{x}(t_2)$ a $\xi_3 = \mathbf{x}(t_3)$.

Dále se omezíme pouze na jeden regulátor a uvedeme postup konstrukce funkce u.

Z věty o tvaru optimálního regulátoru plyne, že všechny optimální trajektorie a optimální regulátory vycházející pro $t = 0$ z počátku dostaneme řešením soustavy podmínek:

$$(8) \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}\, u(t)\,, \qquad u(t) = \operatorname{sgn}\,(\omega(t) \,.\, \mathbf{c})\,, \qquad \dot{\omega} = -\mathbf{A}'\omega$$

v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ pro různé počáteční podmínky pro $\omega(t)$ a počáteční podmínku $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ pro vektorovou funkci $\mathbf{x}(t)$.

K určení u v závislosti na $\mathbf{x}$ vyšetříme množinu těch bodů, ve kterých příslušná funkce $u(t)$ mění znaménko. Řešíme tedy (8) při libovolné počáteční podmínce pro $\omega(t)$. Je-li pro určitou počáteční podmínku stále $\omega(t) \,.\, \mathbf{c} \neq 0$, nemění na příslušné trajektorii tato funkce znaménko a tedy je tam $u(\mathbf{x})$ rovno stále buď 1 nebo -1. Jinak určíme pro každou počáteční podmínku první bod, v kterém je skalární součin $\omega(t) \,.\, \mathbf{c} = 0$. Dostaneme tzv. křivku prvních zvratů. Nyní opět řešíme (8) pro různé počáteční podmínky na křivce prvních zvratů a dostaneme tím křivku druhých zvratů atd.

Pro ilustraci uvádíme, jak vypadá situace ve třech jednoduchých, ale charakteristických případech. Silně je zakreslena křivka zvratu, slabě hranice oblasti G a čerchovaně některé trajektorie (viz obr. 1 až 3).

Zajímavé myšlenky obsahují některé práce N. N. Krasovského, které vyšly v poslední době.

V [12] je řešena úloha o optimální regulaci pro dvě nelineární rovnice, jejichž pravé strany závisí explicitně na čase. V práci je uvedena bez důkazu existenční věta analogická k větě 2. Dále jsou uvedeny nutné a postačující podmínky pro optimálnost a je popsána metoda přibližného řešení. Je uvedena věta, zaručující korektnost úlohy v tomto smyslu: Jsou-li

$$\text{(9)} \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \eta\, \mathbf{q}(t), \qquad |\eta(t)| \leqq 1$$

$$\text{(10)} \qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{y}, t) + \eta\, \mathbf{q}^{(1)}(t),$$

dva regulační procesy, pak ke každému $\varepsilon > 0$ a bodu $\mathbf{x}_0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je-li

$$|\mathbf{q} - \mathbf{q}^{(1)}| < \delta, \quad |\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(1)}| < \delta, \quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial y_j}\right| < \delta$$

a je-li T_0 optimální čas příslušný k úloze (9), existuje také optimální regulátor úlohy (10) a pro příslušný optimální čas $T_0^{(1)}$ platí $|T_0 - T_0^{(1)}| < \varepsilon$.

V [13] je ukázáno, že některé nutné podmínky pro optimálnost již ani v jednoduchých případech nelze zeslabit.

V [11] je řešena stejná úloha jako v [12] pro libovolný počet rovnic. Situace je mnohem složitější než v případě dvou rovnic. Za omezujících předpokladů pro pravé strany je dokázána existenční věta a některé postačující podmínky pro optimálnost regulátoru.

Odlišná metoda je zpracována v [10] a [14]. V [10] se uvažuje systém explicitně závislý na čase

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t, u_1, \ldots, u_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Za přípustné regulátory se považují funkce $u_i(t)$ po částech spojité, pro které platí

$$\mathbf{G}_T(u_1(T), \ldots, u_r(T)) = N,$$

kde N je daná konstanta a $\mathbf{G}_T$ funkcionál závislý na u_j v $\langle t_0, t_0 + T\rangle$.

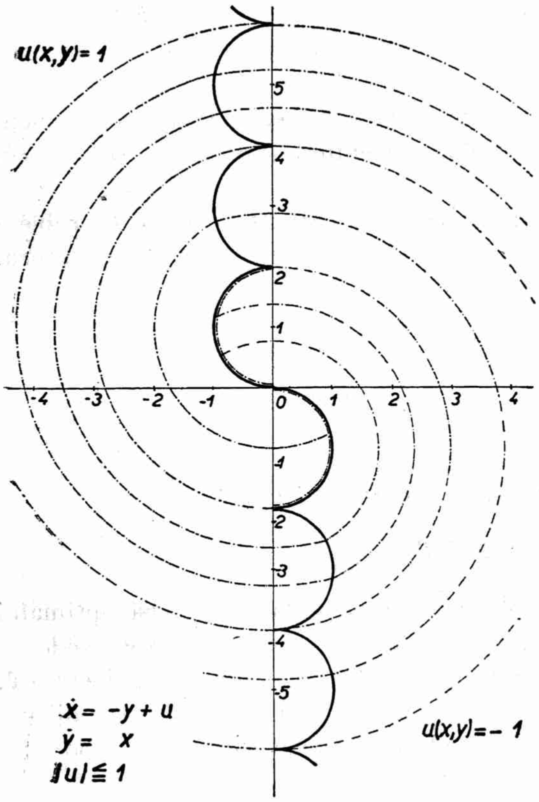
Na příklad:

1. $\mathbf{G}_T = \max |u_k(t)|, \quad k = 1, \ldots, n, \quad \tau \in \langle t_0, t_0 + T\rangle;$
2. $\mathbf{G}_T = \left(\int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=1}^{r} u_k^2(\tau)\, d\tau\right)^{\frac{1}{p}};$
3. $\mathbf{G}_T = \frac{1}{T}\left(\int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=1}^{r} u_k^2(\tau)\, d\tau\right)$ a jiné.[2])

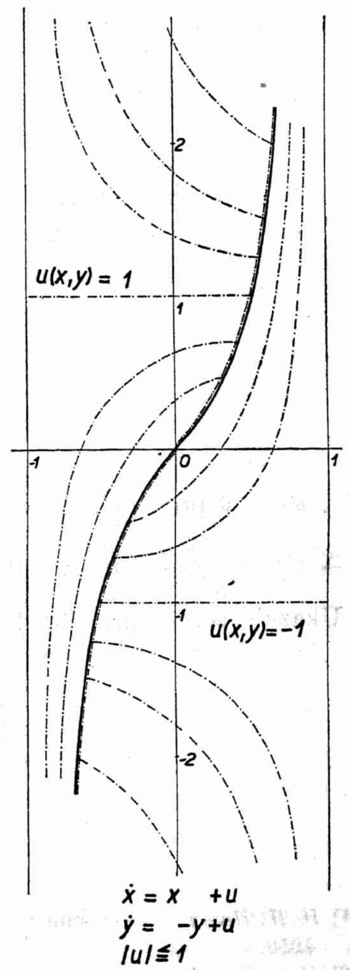
Buď nyní $t > t_0$ libovolný pevný čas; $\eta(\tau)$ funkce, pro kterou je $\mathbf{x}(t, \eta_1, \ldots, \eta_r) = \xi_1$. Najdeme při pevném t

$$\min \mathbf{G}_T(\eta_1(t), \ldots, \eta_r(t)) = F(t).$$

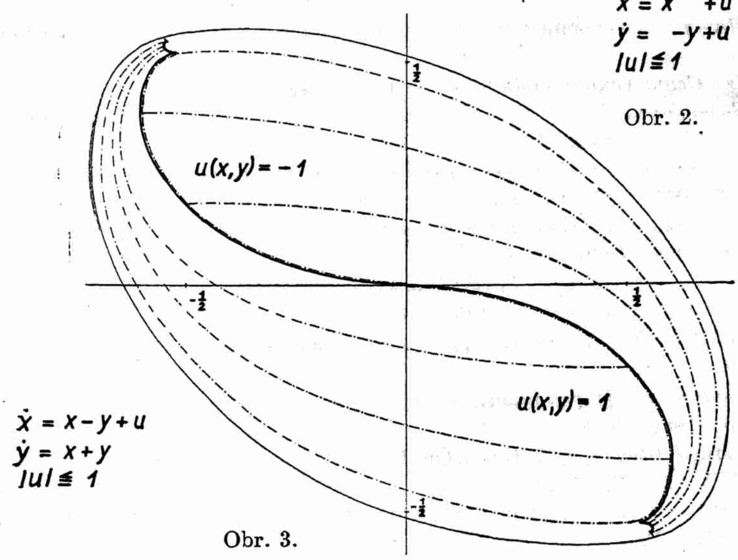
[2]) Omezení 1 vede zřejmě na problém, který jsme již vyšetřovali. Při 2 jde pro $p = 2$ v podstatě o omezení celkové energie.



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

Optimální čas bude pak nejmenší z čísel $\vartheta = t - t_0$, pro které $F(t) = F(t_0 + \vartheta) \leqq M$. Odpovídající řešení variačního problému bude optimální regulátor a optimální trajektorie.

Při omezeních typu 2 a 3 není možné provést syntézu úlohy, protože není splněna podmínka, že každá část optimální trajektorie je optimální trajektorií, jako tomu je v případě 1.

Obecněji lze úlohy tohoto typu řešit především jako tak zvaný L-problém ve funkcionálním prostoru s metrikou odpovídající typu ohraničení regulátoru.

V [14] je tento postup užit na soustavu

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\eta + \mathbf{e}^{(1)}\xi^{(1)} + \ldots + \mathbf{e}^{(n-1)}\xi^{(n-1)}$$

při různých omezeních na regulátory $\eta, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n-1)}$.

Nejdůležitější jsou:

1. $\mathbf{e}^{(i)} = \mathbf{0}$ pro $i = 1, \ldots, n - 1$, $|\eta(t)| \leqq 1$ pro $0 \leqq t \leqq T_0$;

2. $\eta^2(t) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} [\xi^{(i)}(t)]^2 \leqq 1$ pro $0 \leqq t \leqq T_0$.

Ukazuje se, že při dostatečně obecných předpokladech závisí optimální regulátor úlohy při omezení 2 spojitě na t. Hledání tohoto regulátoru vede na řešení obyčejné diferenciální rovnice. Dále je studován limitní přechod $\mathbf{e}^{(i)} \to \mathbf{0}$, který dovoluje aproximovat nespojitý optimální regulátor úlohy 1 spojitým optimálním regulátorem úlohy 2. Odtud také dostaneme přibližnou metodu pro řešení úlohy 1.

Literatura

[1] *И. П. Натансон:* Теория функций вещественного переменого. Moskva-Leningrad, 1950.

[2] *Цянь Сюе Сень:* Техническая кибернетика. Moskva, 1956.

[3] *В. Г. Больтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Л. С. Понтрягин:* К теории оптимальных процессов. ДАН *110*, № 1 (1956), 7—10.

[4] *Р. В. Гамкрелидзе:* К теории отпимальных процессов в линейных системах. ДАН *116*, № 1 (1957), 9—11.

[5] *В. Г. Больтянский:* Принцип максимума в теории оптимальных процессов. ДАН *119*, № 6 (1958), 1070—1073.

[6] *Р. В. Гамкрелидзе:* Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах. Изв. АН СССР, *22* (1958), 449—474.

[7] *Р. В. Гамкрелидзе:* К общей теории оптимальных процессов. ДАН *123*, № 2 (1958), 223—226.

[8] *Л. С. Понтрягин:* Оптимальные процессы регулирования. Успехи мат. наук Т *14*, № 1 (85), (1959), 3—20.

[9] *R. Bellman, J. Glicksberg, O. Gross:* On the bang-bang control problem. Anal. of Applied Math. *XIV* (1956), 11—18.

[10] *Н. Н. Красовский:* К теории оптимального регулирования. Авт. и телем. 18, II (1957), 960—970.

[11] *Н. Н. Красовский:* Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем. Прикл. матем. и мех. *23* (1959), 209—229.
[12] *Н. Н. Красовский:* К теории оптимального регулирования нелинейных систем второго порядка. ДАН *129* (1959), 267—270.
[13] *Н. Н. Красовский:* К достаточным условиям оптимальности. Прикл. матем. и мех. *23* (1959), 592—594.
[14] *Н. Н. Красовский:* К теории отпимального регулирования. Прикл. матем. и мех. *23* (1959), 627—639.
[15] *J. P. Lasalle*: Time optimal control systems. Proceedings of the National Academy of Siences *45*, No 4, 1959, 573—577.

Резюме

ОПТИМАЛЬНАЯ РЕГУЛЯЦИЯ

Г. СВОБОДОВА (H. Svobodová) и Ю. ВАНИЧЕК (J. Vaníček), Прага

Дается обзор вопроса оптимального регулирования и достижений советских математиков Л. С. Понтрягина, Р. В. Гамкрелидзе и Н. Н. Красовского и других в этой области.

Более подробно рассматривается случай линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{r} \mathbf{c}_k \, . \, u_k(t) \, ,$$

где регуляторы предполагаются измеримыми функциями от времени, выполняющими условие $|u_k(t)| \leqq 1$ почти всюду.

Регуляторы ищутся так, чтобы решение системы достигло начала координат с любово положения в кратчайшее время.

Доказана теорема существования для оптимальново регулятора, при достаточно общих условиях дана его форма и описан синтез системы. Для иллюстрации начерчено решение задачи в трех характерных случаях (рис. 1—3).

Далее приводятся результаты и ссылки на литературу, касаюшуюся нелинейных систем и других ограничений класса допустимых регуляторов.

Summary

OPTIMAL REGULATION

H. Svobodová and J. Vaníček, Praha

A survey is presented of optimal regulation of systems and the results obtained in this field by the Soviet mathematicians L. S. Pontrjagin, R. V. Gamkrelidze, N. N. Krasovskij and others.

A detailed treatment is given of the case of the linear system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{r} \mathbf{c}_k \, u_k(t)$$

with the regulators u_k measurable functions for which $|u_k| \leqq 1$ almost anywhere.

The problem is then to find regulators such that a solution of (1) is transferred from an arbitrary initial position to the origin in the shortest time.

A proof is given of the existence theorem for optimal regulation; under sufficiently general assumptions the form of the latter is found and the synthesis of the system described. The results are illustrated on three characteristic cases in fig. 1—3.

Finally, results and bibliography are listed concerning non-linear systems and also other requirements narrowing down the class of admissible regulators.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

ЗАМЕТКА ПО КОЛЕБЛЮЩИМСЯ РЕШЕНИЯМ УРАВНЕНИЯ $y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0$

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛ (Jaroslav Kurzweil), Прага

(Поступило в редакцию 7. 3. 1960 г.)

В заметке доказывается, что в теореме из статьи [1] М. Ясного второе условие может выть отброшено, так как оно по существу является следствием первого условия.

М. Ясны в [1] доказал следующую теорему:

Эсли функция $f(x)$ положительна и абсолютно непрерывна в каждом конечном промежутке $\langle x_1, x_2\rangle$, $x_1 \geqq a$ и если, кроме того, удовлетворяст условиям

(1) $$(n+1)\, f(x) + x f'(x) \geqq 0 \quad \textit{для} \quad x \geqq x_0\,,$$

(2) $$\sqrt{x}\, I(x) \leqq M \quad \textit{для} \quad x \geqq x_0\,, \quad M > 0\,,$$

где

$$I(x) = \int_x^\infty \frac{f(t)\mathrm{d}t}{\left[\int_t^\infty \mathrm{d}u \int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\right]^{\frac{2n-1}{2n-2}}}\,,$$

то существуют колеблющиеся решения уравнения

(3) $$y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0 \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)\,.$$

Покажем, что в этой теореме условие (2) можно отбросить. Если $\int_t^\infty \mathrm{d}u \int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma = \int_t^\infty (\sigma - t)\, f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma$ расходится, то по теореме Ф. В. Аткинсона [2] все решения уравнения (3)—колеблющиеся. Пусть теперь условие (1) выполнено и интеграл $\int_t^\infty \mathrm{d}u \int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma$ сходится. Из (1) следует, что

(4) $$f(t) \geqq f(r) \left(\frac{x}{t}\right)^{n+1}, \quad x_0 \leqq x \leqq t\,,$$

$$\int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \geqq f(u)\, u^{n+1} \int_u^\infty \sigma^{-n-1}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{n} f(u) u\,,$$

$$\int_t^\infty \mathrm{d}u \int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \geqq \frac{1}{n} \int_t^\infty u f(u)\, \mathrm{d}u \geqq \frac{1}{n} f(t)\, t^{n+1} \int_t^\infty u^{-n}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{n(n-1)} f(t) \,.\, t^2\,.$$

Оттуда и из (4) следует, что

$$I(x) \leqq c \int_x^\infty [f(x)]^{-\frac{1}{2n+2}} t^{-2-\frac{1}{n-1}} \, \mathrm{d}t = c \int_x^\infty [f(t) \, . \, t^{n+1}]^{-\frac{1}{2n-2}} t^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq c \, [f(x_0) \, x_0^{n+1}]^{-\frac{1}{2n-2}} \int_x^\infty t^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}t = \bar{c} x^{-\frac{1}{2}} , \qquad \bar{c} > 0 \, .$$

Итак, условие (2) выполнено.

Заметим, что (1) равносильно тому, что $x^{n+1}f(x)$—не убывающая функция. В теореме М. Ясного требование, что функция $f(x)$ абсолютно непрерывна в каждом конечном промежутке можно заменить требованием, что функция $f(x)$ обладает конечным изменением в каждом конечном промежутке. Итак *уравнение* (3) *обладает колеблющимся решением, если* $x^{n+1}f(x)$ *положительная неубывающая функция.*

Литература

[1] *М. Ясны:* О существовании колеблющегося решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + f(x)\,y^{2n-1} = 0$, Časopis pro pěstování matematiky *85* (1960), 1, 78—83.

[2] *F. V. Atkinson*: On second-order non-linear oscillations. Pacif. Journ. Math. *5*, (1955), 643—648.

Výtah

POZNÁMKA O OSCILATORICKÝCH ŘEŠENÍCH ROVNICE $y'' + f(x)\,y^{2n-1} = 0$

JAROSLAV KURZWEIL, Praha

Je dokázáno, že ve větě M. JASNÉHO [1] jednu z podmínek lze vynechat. Zmíněná věta dostává tak tento tvar:

Nechť $f(x)$ *je kladná funkce a nechť* $x^{n+1} f(x)$ *neklesá. Potom rovnice* (3) *má oscilatorické řešení.*

Summary

A NOTE ON OSCILLATORY SOLUTION OF EQUATION $y'' + f(x)\,y^{2n-1} = 0$

JAROSLAV KURZWEIL, Praha

It is proved, that one of the conditions in the Theorem of M. JASNÝ [1] may be omitted. The Theorem mentioned above may be formulated as follows:

Let $x^{n+1}f(x)$ *be positive and nondecreasing. Then there exists an oscillatory solution of equation* (3).

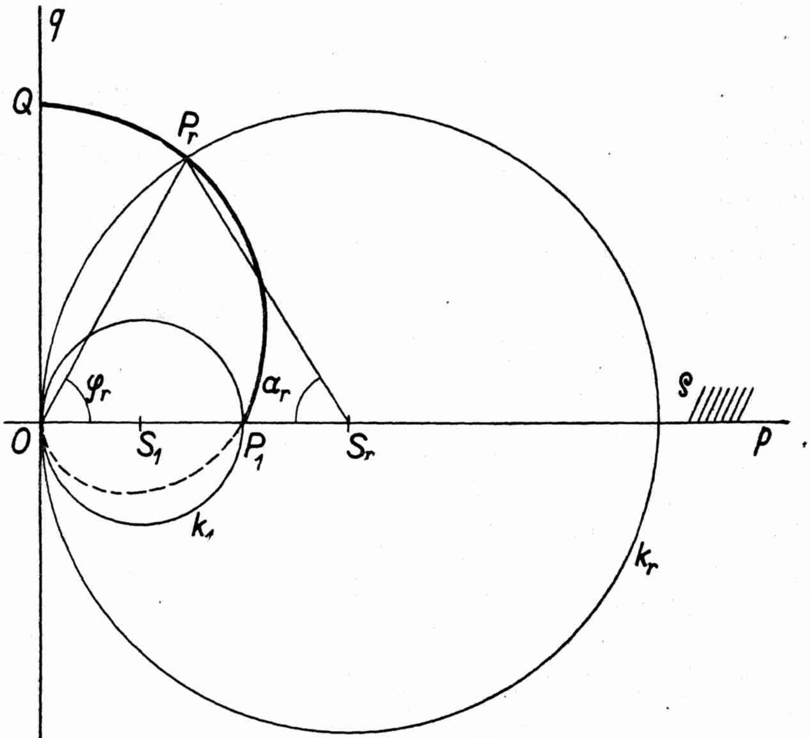
Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

RŮZNÉ

POZNÁMKA O PRAKTICKÉM POUŽITÍ KŘIVKY KOCHLEOIDY

Otakar Leminger, Ústí n. Labem

Zvolme v rovině dvě kolmé přímky p, q s průsečíkem O. Množinu kružnic k_r s poloměry $r \geqq 1$, které mají středy na přímce p a leží v jedné polorovině určené přímkou q, označíme Σ. Na každé kružnici k_r systému Σ v jedné polorovině ϱ určené přímkou p zvolíme bod P_r tak, aby její oblouk $\widehat{OP_r} = \pi$. V polorovině ϱ určíme ještě na přímce q bod Q požadavkem $OQ = \pi$. Množina bodů P_r ($r \geqq 1$) spolu s bodem Q je oblouk křivky zvané kochleoida (obr. 1), která byla studována více autory. (Viz G. Loria: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Leipzig 1902, str. 417—423.)



Obr. 1.

Budeme předpokládat, že uvedený oblouk kochleoidy je vyrýsován a ukážeme jeho použití k několika geometrickým konstrukcím. Označme ještě S_r střed kružnice k_r a $\alpha_r = \widehat{OS_rP_r}$, $\varphi_r = \widehat{S_rOP_r}$. Zřejmě $\varphi_r = \frac{1}{2}(\pi - \alpha_r)$ a $r\alpha_r = \pi$ pro každé $r \geqq 1$.

a) Je dán úhel α, $0 < \alpha \leqq \pi$, a číslo p, $0 < p < 1$. Má se sestrojit úhel $p \,.\, \alpha$. Určí se kružnice k_r a $k_{r'}$, kde $r = \dfrac{\pi}{\alpha_r}$ při $\alpha_r = \alpha$ a $r' = \dfrac{1}{p}\, r$. Průsečík P_r našeho oblouku kochleoidy s kružnicí k_r, pak její střed S_r a poloměr $r = \dfrac{\pi}{\alpha} = OS_r$ se sestrojí snadno pomocí úhlu $\varphi_r = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$. Úhel $\widehat{OS_{r'}P_{r'}}$ je hledaný, neboť $r\alpha_r = r'\alpha_{r'} \Rightarrow \alpha_{r'} = \dfrac{r}{r'}\, \alpha_r = p\alpha$.

b) Sestrojit pravidelný n-úhelník (n libovolné přirozené číslo > 2). Řeší se jako zvláštní případ úlohy a) pro $\alpha_r = \alpha = \pi$, $r = 1$ a $p = \dfrac{2}{n}$.

c) Rektifikace oblouku γ kružnice o poloměru ϱ (délka x oblouku γ není větší než $\pi\varrho$). Budiž α středový úhel příslušný oblouku γ. Podobně jako v a) se sestrojí poloměr $r = \dfrac{\pi}{\alpha}$ kružnice k_r. Velikost x oblouku γ je pak dána úměrou
$$x : \varrho = \pi : r \left(\pi = OQ,\ r = \frac{\pi}{\alpha}\right).$$

d) Na dané kružnici poloměru ϱ určit oblouk dané délky x. Sestrojíme kružnici k_r s poloměrem $r = \dfrac{\pi\varrho}{x}$ a úhel $\alpha_r = \widehat{OS_rP_r}$ je středovým úhlem hledaného oblouku na dané kružnici.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

RECENSE

Otakar Zich a kol.: MODERNÍ LOGIKA, Orbis Praha 1958, stran 241, cena 10,—Kčs.

Knížka je rozdělena do osmi kapitol zpracovaných různými autory. Předmluvu napsal vedoucí kolektivu prof. dr. O. ZICH, kapitoly I, III, V a VI napsal O. WEINBERGER, kapitolu II M. MLEZIVA, kapitolu IV K. BERKA, kapitolu VII M. JAURIS a kapitolu VIII P. MATERNA.

První kapitola (str. 11—28) o „Základních pojmech teorie vyjadřování" je úvodní kapitolou, ve které jsou uvedeny některé druhy jazyků a jejich funkce při sdělování našich poznatků. Na mnoha příkladech jsou zde objasňovány jednotlivé základní pojmy logické, podrobněji studované až v dalších kapitolách. Stručně je pojednáno o formální povaze logiky a o metajazyku. V druhé kapitole (str. 29—75) je systematicky probrán výrokový kalkul. Na řadě příkladů je popsána jeho tabulková výstavba a naznačena deduktivní výstavba a zavedena konjunktivní normální forma. V závěru je poznámka o aplikacích výrokového kalkulu v teorii elektrických obvodů a o vícehodnotových logikách. Ve třetí kapitole (str. 76—92) je podrobně objasněn pojem n-místného predikátu a n-místné výrokové funkce, je pojednáno o kvantorech a jejich významu a nakonec je jednomístných výrokových funkcí využito k popisu vztahů mezi soudy logického čtverce. Čtvrtá kapitola (str. 93—127) je věnována třídnímu kalkulu, tj. z větší části elementům teorie množin a množinové Booleovy algebry vyloženým z naivního hlediska. V samostatné poznámce je popsána souvislost mezi třídním a výrokovým kalkulem. V závěru je třídního kalkulu využito k popisu a zhodnocení kategorických sylogismů. Pátá kapitola (str. 128—141) o „Logice relací" pojednává v podstatě o elementech teorie binárních relací a některých jejich základních vlastnostech. V šesté kapitole (str. 142—148) s názvem „Logika funkcí" jsou uvedena jenom základní pravidla odvozování ve funkčním kalkulu. Sedmá kapitola (str. 149—204) je věnována axiomatické metodě, která je, s přihlédnutím k formalisaci, aplikována při výstavbě výrokového, třídního a funkčního kalkulu. Jako příklad axiomatisace mimo logiku je popsána Peanova axiomatika přirozených čísel. V závěru je pojednáno o bezespornosti, úplnosti a nezávislosti uvedených axiomatických systémů. Poslední, osmá kapitola (str. 205—220) pojednává o definicích. Vedle obvyklých typů definic jako jsou běžné (tj. nominální) definice, definice abstrakcí, definice rekurentní a implicitní (tj. axiomatické) definuje se neobvyklý pojem definice kontextuální a nekontextuální takto: „Takovou definici, jejíž definiendum obsahuje vedle definované konstanty ještě jiné výrazy (nejčastěji proměnné), můžeme nejvýhodněji nazvat kontextuální, protože příslušná konstanta není definována isolovaně, sama o sobě, nýbrž v určité souvislosti, v určitém kontextu" (209). Samostatně se uvádí ještě definice syntetická a analytická, o nichž se říká, že „prvá má metasystémový způsob zápisu (např. pomocí znaku $=_{df}$), kdežto druhá je formulí daného systému" (214). Každá kapitola je zakončena cvičeními.

Kniha je doplněna (str. 221—242) seznamem nejpoužívanějších odvoditelných formulí, encyklopedickým heslem „moderní logika", zajímavými údaji „O autorech", seznamem literatury, jmenným a věcným rejstříkem a obsahem.

Knížka tedy (s výjimkou kapitoly VIII) podává přehled o některých oborech v celém světě zařazovaných do elementů matematické logiky, ale přesto nese název „Moderní logika". Tento název je výrazem jistých rozpaků nad souvislostmi mezi matematikou a logikou. Čtenář se např. dovídá o moderní logice, „která byla až do třicátých let našeho století pěstována jako teoretická disciplina hlavně v souvislosti s matematikou" (5), ale nedoví se již, že tento stav prakticky na celém světě trvá dodnes. Nebo se píše, že moderní logika „došla zejména v posledních letech velmi významných aplikací ve vědách a v technice" (5) nebo dokonce „Dnes nalézá moderní logika tak bohaté pole aplikací, že by bylo velmi odvážné chtít je nějak omezit" (229), ale nepíše se konkretně, že mimomatematické (a mimologické) aplikace má z moderní logiky jenom výrokový kalkul a to v teorii elektrických obvodů (viz kap. II) a trochu v matematické linguistice v souvislosti se strojovými překlady a snad ještě někde jinde, takže ostatní obory moderní logiky mají zatím stále své významné aplikace právě jenom v matematice (a logice) nebo skrze matematiku (např. prostřednictvím teorie množin). Ostatně moderní logika sama je aplikací matematiky na zkoumání logických zákonitostí a to v tom smyslu, že matematici vybudovali teorii moderní logiky obdobně jako se v matematice budují rozmanité speciálnější teorie pro účely aplikací. Není tedy zatím důvodu nahrazovat termín „matematická logika" termínem jiným a to tím spíše, když „Hlubší výklad moderní logiky se neobejde bez znalostí teorie čísel, teorie množin, teorie grup a ještě jiných partií matematiky" (7). Konečně se zdá být zbytečným rozlišování tzv. logické a matematické techniky a při tom zdůrazňování „Tento cíl (tj. zvládnutí logické techniky, pozn. rec.), jehož praktický význam nemůže být dost zdůrazněn, sledoval kolektiv autorů záměrně" (9).

„Knížka si totiž klade za úkol vyplnit jistou mezeru v naší dosavadní literatuře, jež postrádá takový úvod, který by naučil čtenáře zejména logické technice" (9). Tato mezera v naší matematicko-logické literatuře skutečně existovala, neboť jedinou úvodní a populární publikací z tohoto oboru je „Úvod do filosofie matematiky" od O. Zicha z roku 1947. To však znamená, že po této knížce sáhnou nejen nematematici, ale i matematici a studující matematiky navzdory tomu, že „Knížka není napsána pro odborníky v matematice, tím méně pro odborníky v matematické logice" (7). V každém případě autoři napsali pokud možno nematematický úvod do oboru s velmi náročnými matematickými předpoklady a aplikacemi. To byl ale úkol, jako ostatně každá popularisace matematiky (patrně proto u nás tak vzácná), velice nesnadný a obtížný. Např. veliké nebezpečí je skryto v nematematických příkladech z denního života, které autoři musí vyhledávat zejména tehdy, když se jimi objasňují pojmy mající své významné aplikace (např. v kap. III—VI) právě jenom v matematice. Čtenáři-nematematikovi, kterému je knížka původně určena, se totiž při čtení příslušných míst nemohou vybavit bohaté matematické teorie, které by zabránily vzniku pochybností o ceně a významu jednotlivých pojmů nebo označení. A je-li čtenář kritický, snadno u něho vznikne dojem, že celý přínos moderní logiky je jenom v tom, že přepisuje věci dobře známé a jednoduché do složité symboliky, dojem o záměrných učenostech a bezcenném hračkářství. To je ovšem dojem nesprávný a škodlivý, který nevznikne nikde, kde se uvádějí konkrétní matematické aplikace nebo alespoň vhodné matematické příklady. A nelze říci, že to autoři nečiní. Při formulaci matematických příkladů je však někdy patrná jistá nezkušenost. Např. nejsou příliš vhodnými obraty, jako „Vztah ‚býti menší' není definován pro komplexní čísla, neboť ze dvou různých komplexních čísel není vždy jedno menší" (78), nebo se hovoří o „matematické algebře" (98) na rozdíl od algebry logiky, nebo „Obdobně jako v matematice platí dále zákony komutativní" (120) či „matematické sčítání" (120) apod. K nedorozumění může vést tato formulace: „Při vzájemně jednoznačném přiřazení tedy musí být dáno: 1. pravidlo, které určuje každému prvku třídy a přiřazený prvek z třídy b; 2. pravidlo, které určuje každému prvku třídy b přiřazený prvek z třídy a" (140) nebo obrat „pro srovnání nekonečných tříd lze použít jen ekvivalence ve shora definovaném smyslu, nikoli však rovnosti počtu prvků" (141). Je třeba při této příležitosti litovat, že knížka nebyla sepsána ve spolupráci s matematiky příp. s matematickými logiky, nebo že nebyla matematiky alespoň redigována. Je také např. škoda, že kapitoly III a IV nebyly zpracovány přímo matematicky s použitím běžné množinové terminologie. Proč v elementárním úvodu zavádět termín „třídy", když máme termín „množiny"? To bude patrně otázka, kterou položí matematik po přečtení těchto kapitol.

V popularisační, úvodní a učebnicové matematické literatuře je nejdůležitější otázkou metoda výkladu a zpracování látky. Metoda výkladu v této knížce je volena správně. Záleží v postupném objasňování probírané látky (např. s některými pojmy výrokového kalkulu seznámí se čtenář již v úvodní kapitole I, podrobně je výrokový kalkul probrán v kapitole II a konečně další doplňky jsou ještě v kapitole VII) a v předmluvě je označena jako „frakcionovaná destilace" (6). Při zpracování někrerých kapitol se však projevuje snaha zavádět zbytečně mnoho nových termínů i snaha zacházet do podrobností a tím utápět výsledky a pojmy významné v množství jiných ale podružných (což je takřka všeobecný nedostatek poválečné vysokoškolské učebnicové literatury z matematiky). Příkladem jsou některé vzorce a názvy jako „zákony agresivnosti a neutrálnosti" (108) nebo „zákony expanse a absorpce" (114) nebo termíny „poloreflexivní, polosymetrický a polotransitivní" (135, 136). Rozhodně je také zbytečné zavádět více termínů pro jediný pojem, jako je tomu v již vzpomenuté definici „jednoznačného přiřazení, ...zobrazení, ...funkce" (140). Ne vždy se volí pokud možno jednoduché a názorné způsoby zavádění nových pojmů. Např. velmi názorný pojem množinové inkluse se zavádí takto: „je to vlastnost společná všem uspořádaným dvojicím tříd f, g (v tomto pořadí), pro jejichž prvky x platí (x) $[x \in f \rightarrow x \in g]$". Čtenář je nadto povzbuzen poznámkou, že „Toto vymezení není zcela přesné, pro účely této knížky však musí postačovat" (100). Teprve dodatečně „jako důsledek našeho vymezení vztahu $\subset$" (101) se uvádí obvyklý způsob podmínky. Zde a ještě na jiných místech (zejména v kap. VII) jsou na čtenáře, jemuž je knížka určena, kladeny značné nároky. Když se však nějaký pojem zavede, např. uvedený pojem množinové inkluse a např. pojem „rozsahu dvoumístného vztahu" (131), má se ho také co nejvíce užívat, tedy např. definovat stručně inklusi vztahů jako inklusi jejich rozsahů (viz 132).

Nakonec je třeba si všimnout slohu a způsobů vyjadřování. V úvodní knížce, jejímiž autory jsou vesměs logikové, by se neměly vyskytovat formulace obrazné, nejasné nebo formulace skýtající možnost nesprávného výkladu. Např. „Chápeme-li daný jednomístný predikát jako shrnutí skupiny vlastností" (94), nebo „je to jaksi souhrn všech objektů, o kterých vztah jedná, o kterých něco vypovídá" (131). Proč říkat „je méně důležité zachovat pořadí kvantifikátorů (téhož typu, pozn. rec.)" (147), když na tom pořadí nezáleží vůbec, nebo proč říkat „Příklady takových výrazů označujících třídy jsou názvy: stromy, města, barvy, přirozená čísla, ..." (20), a uvést tím čtenáře do rozpaků nad pojmy či názvy strom, město, barva atd. Je ostatně trochu podivné, že o pojmu se v celé knížce vůbec nehovoří až jen v kapitole VIII. V kapitole IV při aplikaci teorie tříd na sylogistiku se rovněž s pojmy pracuje, ale nikde není např. jasně řečeno, že rozsah pojmu je právě jistou třídou předmětů. Říká se na jedné straně, že „vztahový znak je vlastně totéž co vícemístný predikát" (130), ale na druhé straně se rozlišují termíny „relace" a „relátor" (129) apod. Čtenáři se studium knížky jistě ztěžuje, když se na jiném místě v souvislosti s rekurentní definicí vlastnosti V uvádí příklad: „Vlastností V budiž konstanta $+$, která v matematice ze dvou čísel vytváří třetí (‚součet')" (211) a jinde zase „Budeme používat další predikátové konstanty $+$ takové, že $+xyz$ znamená ‚číslo x je rovno součtu čísel y a z' ..., $+$ je predikát použitý k vyjádření určitého vztahu mezi třemi individui" (191). Zcela nesrozumitelné jsou formulace „Z hlediska logiky musíme lišit dva významy, které spojujeme s tímto slovem (se slovem vztah, pozn. rec.): a) Vztahem můžeme rozumět určitou skutečnost... b) Vztahem můžeme rozumět určitou myšlenkovou strukturu..."

(128), nebo „Pojem relace můžeme nejlépe osvětlit tím, že uvedeme strukturní součásti vztahu a že budeme charakterisovat tyto jeho stavební elementy. Vztah se skládá: 1. z členů relace, 2. z relačního spojení (vztahového znaku, relátoru)" a na konci téže strany „Slovní vazba nebo symbol naznačující, o jaké vztahové spojení mezi členy relace jde, se nazývá vztahový znak (= relátor)" (129). Proč nakonec uvádět čtenáře do rozpaků příkladem výroku „Kdo úmyslně usmrtí člena vlády, bude potrestán smrtí... Toto tvrzení je pravdivé..." (89) nebo příkladem vadného výroku „Evangelíci jsou křesťanskou církví" (101)? Souhrnně je třeba konstatovat, že zpracování různých kapitol je značně různorodé; nejsoustavněji a při tom úsporně jsou zpracovány kapitoly II a VII, jakkoliv VII. kapitola je nejnáročnější.

Tiskové chyby: 74^{16} má být $[(p \to q) \to p] \to p$; 77^{20} má být $<(a, b)$; 88^{1} má být $(p \equiv \equiv q) \equiv (\overline{p} \equiv \overline{q})$; 133^{4} má být $K\ a < b$ zní inversní vztah $b < a$ (místo $b > a$); 166^{6} má být $\overline{p}$ znamená zařízení...; 166^{14} má být když vstupem zařízení...; 218_{15} má být $R(x, y)$ místo $x\,R(x, y)$.

Nakonec je třeba ocenit iniciativu kolektivu autorů, že se podjali obtížného úkolu a vydali přístupně napsanou knížku, v níž informují širokou čtenářskou obec o základních otázkách a metodách moderní logiky. Jejich iniciativu je nutno ocenit tím více, že logika, zdá se už tradičně, je u nás stále nedostatečně pěstována i podporována.

Karel Čulík, Brno

Dvě knihy o teorii prvočísel. *K. Prachar*: PRIMZAHLVERTEILUNG. Grundlehren der math. Wissenschaften sv. 91. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957. Stran X + 415. — *W. Specht*: ELEMENTARE BEWEISE DER PRIMZAHLSÄTZE. Hochschulbücher für Mathematik sv. 30. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956. Stran 78.

Pracharova kniha je bohatá monografie o dnešním stavu teorie. Knížka Spechtova je monothematická — jak říká už její titul — a velmi elementárně napsána. Čtenář, který se zajímá jen o Spechtovu knížku, může si z následující recense přečíst jen úvod až do vzorce (5), dále to, co říkám o kap. III a IV Pracharovy knihy a potom začít s četbou recense knížky Spechtovy.

První známý důkaz věty, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, podal EUKLEIDES. Označíme-li tedy znakem $\pi(x)$ počet prvočísel nejvýše rovných číslu x, praví Eukleidova věta, že $\pi(x) \to +\infty$ pro $x \to +\infty$. Vzniká nyní otázka, jak hustá jsou prvočísla, tj. jak rychle roste $\pi(x)$ s rostoucím x. „Řádově" určil velikost funkce $\pi(x)$ před více než 100 lety Čebyšev, který dokázal elementárním způsobem toto: existují kladná čísla c_1, c_2 tak, že je

$$c_2 \frac{x}{\lg x} < \pi(x) < c_1 \frac{x}{\lg x} \quad \text{pro} \quad x > 2\,. \tag{1}$$

Dále dokázal: má-li podíl $\pi(x) : \frac{x}{\lg x}$ limitu (pro $x \to +\infty$), je tato limita nutně rovna jedné. Ale důkaz existence této limity, tj. důkaz vzorce

$$\pi(x) = \frac{x}{\lg x} + o\left(\frac{x}{\lg x}\right) \tag{2}$$

nechal na sebe čekat ještě několik desítiletí a současně si vyžádal — aspoň z počátku — hlubokých (poměrně) prostředků z teorie analytických funkcí. Již EULER si povšiml, že funkce $\zeta(s)$ komplexní proměnné $s = \sigma + it$, definovaná v polorovině $\sigma > 1$ vzorcem

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}\,, \tag{3}$$

souvisí s prvočísly (jak ukazuje poslední součin, v němž se násobí přes všechna prvočísla p). RIEMANN ukázal, že studium této funkce metodami teorie analytických funkcí[1]) vede k hlubokým výsledkům o prvočíslech. Rovnici (2) však Riemann nedokázal;[2]) teprve teorie celistvých funkcí konečného řádu, vytvořená HADAMARDEM, umožnila Hadamardovi a DE LA VALLÉE-POUSSINOVI dokázat (současně, v r. 1896) rovnici (2). Současně se ukázalo, že lepší aproximaci funkce $\pi(x)$ než $\frac{x}{\lg x}$ dává funkce $\int_2^x \frac{dt}{\lg t}$; tak de la Vallée-Poussin dokázal toto: Položíme-li

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\lg t} + R(x)\,, \tag{4}$$

existují kladná čísla c_3, c_4, c_5 tak, že

$$|R(x)| < c_3 x e^{-c_4\sqrt{\lg x}} \quad \text{pro} \quad x > c_5\,, \tag{5}$$

takže $R(x)$ je nižšího řádu než $x(\lg x)^{-n}$ pro libovolně velké n; naproti tomu nebyl dosud dokázán odhad $R(x) = O(x^{1-\varepsilon})$ pro žádné $\varepsilon > 0$.

Důležitým mezníkem v rozvoji analytické teorie prvočísel je dvojdílná kniha E. LANDAUA „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen" (1909), která podává snad úplný stav teorie v oné době. Landau také podstatně zjednodušil důkaz vzorce (4), (5). Kdežto Hadamard užíval toho, že funkci $\zeta(s)$ lze analyticky pokračovat do celé roviny (s výjimkou jednoduchého pólu v bodě $s = 1$)[3]) a budoval svůj důkaz na teorii celistvých funkcí konečného řádu, ukazuje Landau, že se při důkazu lze omezit na prostředky daleko elementárnější a vyšetřovat funkci $\zeta(s)$ pouze v blízkosti přímky $\sigma = 1$.

Po vydání Landauovy knihy nastal velký rozvoj této nauky, který se jeví též v Landauově knize „Vorlesungen über Zahlentheorie" z r. 1927 i v četných monografiích, vyšlých do r. 1947. O těchto knihách jsem dosti obšírně psal v tomto časopise[4]) a proto budu psát o obsahu Pracharovy knihy stručněji, hlavně o těch partiích, které jsou obsaženy již v knihách mnou recensovaných. Ale thematika těchto knih je většinou omezena jen na některé části analytické teorie prvočísel, a mimoto bylo v posledním desítiletí dosaženo dalších podstatných výsledků. Bylo tedy na čase shrnout hlavní metody a výsledky do systematické monografie, která si ovšem při dnešním bohatství příslušné literatury nemůže činit nároky na takovou úplnost jako před padesáti lety Landauův Handbuch. Této obtížné úlohy se ujal Prachar a zhostil se jí s plným zdarem. Poznamenejme ihned, že teorie prvočísel, ač většinou značně složitá a v některých partiích dokonce velmi obtížná, nevyžaduje skoro žádných speciálních znalostí. Mimo to Prachar v čtyřicetistránkovém *Dodatku* uvádí a velkou většinou i dokazuje některé méně běžné věty, kterých se v textu užívá. Proto je kniha plně přístupná čtenáři, který ovládá běžný kurs diferenciálního a integrálního počtu a teorie analytických funkcí, jakož i nejjednodušší počátky teorie čísel. Vyžaduje se ovšem jistá zběhlost v matematickém, především kvantitativním uvažování (téměř nepřetržitě samé odhady).

Kapitola I začíná nejjednoduššími věcmi (počínajíc Eukleidem), obsahuje důkaz nerovností (1) a další výsledky podobně elementárního rázu.

---

[1]) Riemannovi předchůdci se omezovali především na reálné s.

[2]) Ostatně ani ty výsledky, jež Riemann uvádí, nejsou u něho opatřeny úplnými důkazy.

[3]) Zde šel ve stopách Riemannových.

[4]) Viz Časopis pro pěstování matem. a fysiky *57* (1927), 62—63; *67* (1937), D 54—56; *67* (1938), D 303—306; *76* (1951), 35—65.

Kapitola II obsahuje metodu síta a její některé aplikace (s dalšími aplikacemi se setkáme v kap. V). Je známo, jak můžeme k postupnému hledání prvočísel použíti Eratosthenova síta (v kap. I ho bylo pro ilustraci použito k důkazu vztahu $\pi(x) = o(x)$). Hledáme-li přitom všechna prvočísla menší než číslo n, stačí „vyškrtat" pravé násobky všech prvočísel menších než $\sqrt{n}$. Ale teprve r. 1920 ukázal norský matematik V. Brun, že vhodnou (nesmírně důvtipnou) modifikací této v podstatě početní metody lze dosáhnout závažných obecných výsledků, do té doby nepřístupných. Prachar uvádí modifikaci Brunovy metody, pocházející od Brunova krajana A. Selberga. Jde o toto: Je dána konečná posloupnost přirozených čísel $n_1, n_2, \ldots, n_N$ (tato čísla nemusí být navzájem různá) a číslo $z \geqq 2$; hledá se horní odhad pro počet oněch indexů k, pro něž n_k není dělitelno žádným prvočíslem $p \leqq z$ (věta 3.1 a 3.2). Následuje několik aplikací, odvozených většinou z obecné věty 4.2, která — zdá se mně — pochází od autora knihy. Uveďme jen slavný výsledek Brunův o tzv. prvočíselných dvojčatech: Počet dvojic prvočísel p, q s rozdílem $q - p = 2$, ležících v intervalu $\langle 2, x \rangle$, je $O(x(\lg x)^{-2})$ — srovnej s (1).

Kapitola III obsahuje obvyklý analytický důkaz vzorce (2); vlastně je zde již vše připraveno i pro důkaz ostřejšího výsledku (4), (5), ale ten je pro úsporu místa vynechán, ježto se objeví v obecnějším tvaru v kap. IV. Následují některé věty obdobné a konečně slavný *elementární* důkaz formule (2), o kterém se podrobněji zmiňuji v recensi Spechtovy knížky.

Kapitola IV. Označme znakem $\pi(x; k, l)$ počet prvočísel nejvýše rovných x v aritmetické posloupnosti

$$l,\ k + l,\ 2k + l,\ 3k + l, \ldots \quad (0 \leqq l < k,\ (k, l) = 1)\,. \tag{6}$$

(Je-li největší společný dělitel $(k, l) > 1$, obsahuje (6) nejvýše jedno prvočíslo a proto nás tento případ nezajímá.) Analytický aparát ke zkoumání funkce $\pi(x; k, l)$ vytvořil před 120 lety Dirichlet; místo funkce $\zeta(s)$ vystupují zde funkce Dirichletovy, definované pro $\sigma > 1$ $(s = \sigma + it)$ řadami

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}\,,$$

kde χ je tzv. charakter modulo k; počet těchto charakterů a tedy i počet Dirichletových funkcí při daném k je roven $\varphi(k)$ (tj. počtu zbytkových tříd podle modulu k nesoudělných s k). Již Dirichlet dokázal, že (6) obsahuje nekonečně mnoho prvočísel; v dalším vývoji se při *pevném* k dospělo pro $\pi(x; k, l)$ k obdobnému odhadu jako (4), (5), pouze integrál je nutno dělit číslem $\varphi(k)$. Pro různé účely je však třeba odvodit odhady platící pro $x \to + \infty$ stejnoměrně vzhledem ke k v nějakém oboru $k < f(x)$, kde $f(x)$ je nějaká funkce, rostoucí do nekonečna spolu s x. Tím vznikají nové problémy, které se nevyskytly v kapitole III, tj. pro $k = 1$; viz např. Siegelovu větu o největším reálném nulovém bodu Dirichletovy funkce s reálným charakterem.

Kapitola V obsahuje některé zajímavé věty, spočívající z velké části na metodách kap. II; uvedu jen dvě ukázky: Nechť p_i je i-té prvočíslo. Kdyby prvočísla byla velmi pravidelně rozložena, dalo by se podle (2) čekat, že $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{p_{i+1} - p_i}{\lg p_i} = 1$; není však tomu tak, nýbrž je

$$\liminf \frac{p_{i+1} - p_i}{\lg p_i} < 1\,, \quad \limsup \frac{p_{i+1} - p_i}{\lg p_i} = + \infty\,,$$

a u druhé formule je známo ještě více (Erdös).

Je-li $a > 1$ celé, mají čísla n tvaru $n = p + a^m$ (p probíhá všechna prvočísla, m všechna přirozená čísla) kladnou dolní asymptotickou hustotu[5]) (Romanov).

Kapitola VI obsahuje důkaz slavné věty Vinogradovovy: Všechna dosti velká lichá čísla jsou vyjádřitelná jako součet tří prvočísel; a dále důkaz (spočívající na Vinogradovových metodách) věty: Sudá čísla, nevyjádřitelná součtem dvou prvočísel, mají horní asymptotickou hustotu 0 (v. d. Corput, Čudakov, Estermann).

Kapitola VII se zabývá funkčně teoretickými vlastnostmi Dirichletových funkcí, speciálně tedy i funkce $\zeta(s)$. Dosud jsme se zabývali jen vlastnostmi těchto funkcí v blízkosti přímky $\sigma = 1$ a v polorovině $\sigma > 1$; zde se vyšetřují tyto funkce v celé rovině, odvozuje se funkcionální rovnice a dále řada formulí, ukazujících souvislost různých součtů, obsahujících prvočísla, s nulovými body Dirichletových funkcí, ležícími v pásu $0 < \sigma < 1$ ($s = \sigma + it$). Tyto nulové body hrály hlavní roli již v kap. III, IV. Kdyby ležely všechny na přímce $\sigma = \frac{1}{2}$ (tzv. Riemannova domněnka), zlepšily by se podstatně odhady zbytku ve vzorcích pro $\pi(x)$, $\pi(x; k, l)$.

Pokud sahají tabulky, je $R(x)$ v (4) pro $x > 2$ stále záporné (přitom se však bere trochu jiný hlavní člen, totiž tzv. „hlavní hodnota" integrálu od 0 do x). Avšak Littlewood ukázal, že existuje číslo $c_6 > 0$ a nekonečně mnoho přirozených čísel x resp. y, pro něž je

$$R(x) > c_6 \frac{\sqrt{x}}{\lg x} \lg \lg \lg x\,, \quad R(y) < -c_6 \frac{\sqrt{y}}{\lg y} \lg \lg \lg y\,.$$

Kapitola VIII obsahuje skvělou Vinogradovovu metodu pro odhad trigonometrických součtů ve zjednodušené (ale ještě velmi složité) formě, kterou jí dal Hua. Z ní lze odvodit podstatné snížení odhadu zbytku $R(x)$; k tomu se ještě autor vrací v kap. IX.

Kapitola IX. Budiž $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; budiž $N(\alpha, T, k)$ součet počtů nulových bodů všech $\varphi(k)$ Dirichletových funkcí, příslušných k modulu k, jež leží v oboru $\alpha < \sigma < 1$, $|t| \leqq T$ ($s = \sigma + it$). Kdyby pro Dirichletovy funkce platila Riemannova domněnka, bylo by $N(\alpha, T, k) = 0$; hlavním předmětem kap. IX je odhad funkce $N(\alpha, T, k)$ shora, který se zlepšuje, když α roste. Z aplikací této věty uveďme zajímavý výsledek o rozdílu dvou po sobě následujících prvočísel. Z (2) plyne: Je-li $\varepsilon > 0$, leží v intervalu $\langle x, x + \varepsilon x\rangle$ pro dosti velká x aspoň jedno prvočíslo. Zde se dokazuje, že tentýž výsledek platí pro interval $\langle x, x + x^{\alpha}\rangle$, je-li $\alpha > \frac{5}{8}$ (ostatně se α dá ještě zmenšit).

Kapitola X. Budiž $p_1(k, l)$ nejmenší prvočíslo v posloupnosti (6). Kdyby pro Dirichletovy funkce platila Riemannova domněnka, plynulo by z ní, že

$$p_1(k, l) < c_7 k^2 \lg^4 k \quad \text{pro} \quad k \geqq 2\,,$$

kde c_7 je číslo na k, l nezávislé (viz kap. VII). Ale dosud není nejmenší naděje, že by se podařilo v dohledné době rozhodnouti o správnosti této domněnky. Kdyby se podařilo aspoň dokázat (což však také neumíme), že nulové body všech Dirichletových funkcí leží v nějaké polorovině $\sigma < 1 - \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$, plynulo by z úvah kap. VII, že existuje číslo $c_8 > 0$ (nezávislé na k, l) tak, že

$$p_1(k, l) < k^{c_8} \quad \text{pro} \quad k \geqq 2\,. \tag{7}$$

Tím větší bylo překvapení, když se Linnikovi podařilo dokázat vzorec (7) bez užití jaké-

[5]) Dolní (horní) asymptotickou hustotou posloupnosti $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ rozumíme číslo

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{N(x)}{x} \quad \text{(resp. lim sup)}\,,$$

kde $N(x)$ je počet čísel $a_n \leqq x$.

koliv nedokázané domněnky. Svrchovaně obtížný důkaz Linnikův zjednodušil RODOSSKIJ; ale i tak zaujímá v Pracharově knize 40 stránek.

Jak je patrno z podaného velmi neúplného přehledu, obsahuje Pracharova kniha bohatý výběr látky, a to jak partie „klasické" nebo již monograficky zpracované, tak i věci dosud rozptýlené pouze v časopisecké literatuře — to se týká hlavně kap. II, V, IX, X. Náleží mu proto dík matematické veřejnosti za to, že tyto kapitoly učinil přístupnými širšímu kruhu zájemců. Kniha je napsána velmi pečlivě a systematicky, důkazy jsou úplně provedeny; autor se snaží drobnými poznámkami osvětlit smysl technicky obtížných míst, která se v této teorii velmi často vyskytují. Primát ve složitosti mají poslední dvě nebo tři kapitoly; to však leží v podstatě věci, a autor učinil vše, aby čtenář mohl zvládnout tyto partie, mimořádné svou obtížností i závažností. Tiskových nebo autorských nedopatření je v poměru k složitosti textu málo, a čtenář si je většinou snadno opraví. Chtěl bych závěrem upozornit na tři místa, která by čtenáři mohla působit obtíže; tyto připomínky mají ovšem smysl jen pro čtenáře, který studuje Pracharovu knihu.

A. S první obtíží se čtenář setká na str. 35—40 při důkazu Selbergovy věty 3.1. Je velmi dobře, že autor přibližuje čtenáři smysl této věty tím, že její důkaz podává geneticky. Ale chceme-li dostat bezvadný důkaz, je nutno věc ještě jednou projít a odstranit některé nesrovnalosti v důkazu i v samotném znění věty 3.1, při čemž se již, znajíce smysl věty i důkazu, můžeme omezit na pouhou verifikaci. Již v samotném znění věty není ve vzorcích (3.15) zaručeno, že se v $f_1(r)$ nevyskytnou výrazy tvaru $\infty - \infty$ ani, že se Z neobjeví ve tvaru $\frac{0}{0}$. Těmto obtížím se lze vyhnout takto: čísla r, d, d_1, d_2 omezíme a priori na dělitele čísla D (tedy na čísla, nedělitelná druhou mocninou žádného prvočísla); $f_1(r)$ definujeme součinem v (3.32) — s běžnými konvencemi pro počítání s $+\infty$; při konečném f vyjde ihned první ze vzorců (3.15).

Funkci $\omega(d)$ definujme jen pro dělitele čísla D — stačí, když ji definujeme napřed pro prvočinitele čísla D a potom klademe $\omega(1) = 1$, $\omega(p_1p_2 \dots p_k) = \omega(p_1)\,\omega(p_2) \dots \dots \omega(p_k)$ pro $p_1p_2 \dots p_k \mid D$ ($a \mid b$ značí: a je dělitelem čísla b). Rovnici (3.4) pojímáme jako definici čísla R_d a vynecháme požadavek $|R_d| \leqq \omega(d)$ — toho bude zapotřebí až ve větě 3.2 na str. 41. Jestliže nyní $\omega(d) \neq 0$ pro všechna $d \mid D$, je $f(d)$ konečné a verifikace věty 3.1 se snadno provede. Jestliže je $\omega(p') = 0$ pro některá $p'|D$, $\omega(p'') > 0$ pro ostatní $p''|D$, zvolme $\varepsilon > 0$ a definujme novou funkci $\omega_\varepsilon(p'') = \omega(p'')$, $\omega_\varepsilon(p') = \varepsilon$. Pro tuto funkci ω_ε už věta 3.1 platí, a stačí nyní provésti přechod $\varepsilon \to 0$.

B. Důkaz věty 6.2 na str. 126 je správný teprve tehdy, jestliže je dokázáno, že naše ekvivalence je vztah transitivní. Buďte χ, χ_1, χ_2 charaktery s moduly resp. k, k_1, k_2; χ ekvivalentní s χ_1 i s χ_2. Máme dokázat, že χ_1 je ekvivalentní s χ_2. Budiž tedy $(a, [k_1, k_2]) = 1$. Budiž k' součin všech prvočinitelů čísla k, jež nedělí k_1k_2. Potom existuje celé y tak, že $b = a + [k_1, k_2]\,y$ je nesoudělné s k', tedy nesoudělné s kk_1k_2, a tedy $\chi_1(a) = \chi_1(b) = \chi(b) = \chi_2(b) = \chi_2(a)$.

C. K větě 3.1 na str. 349. Při velmi malém δ_1 je obor (3.4), (3.5) velmi „dlouhý" ve směru osy t, a proto na str. 364^{1-5} nestačí, že $L(s, \chi_0) \neq 0$ v jistém okolí bodu 1. Věta 3.1 je tedy dokázána v knize jen v tom smyslu, že se nepočítají nulové body funkce $L(s, \chi_0)$. Proto je třeba dát pozor při aplikacích této věty v kap. X.

Předně se na str. 366^{1-5} nesmíme odvolávat na χ_0; ale Siegelova věta dá dokonce $\lambda_0 = o(\log k)$ pro $k \to \infty$, což ještě budeme potřebovat. Věty 3.1 se užívá ještě (což je hlavní bod) na str. 367_{3-1} v tom, že se vynechávají v součtu členové s indexem $n \leqq \lambda_0 - \log\log k - 1$, kteří přicházejí v úvahu ovšem jen pro $\lambda_0 > \log\log k$. Musíme tedy ještě přidat tyto členy, pokud pocházejí od nulových bodů funkce $L(s, \chi_0)$, tj. od nulových bodů funkce $\zeta(s)$ (neboť v příslušných oborech $G_n^{(4)}$ je $\sigma > 0$), při čemž $|t| \leqq 1$. Příslušný příspěvek k (4.14) je pro velká k menší než

$$\left(\frac{2}{\log k}\right)^N \cdot c_{100} \cdot e^{-c_{101}\eta_0 \log k} c_{102}^N < c_{100} e^{-c_{101}\eta_0 \log k} < c_{100} e^{-\eta_0 \lambda_0}$$

(neboť $\lambda_0 = o\ (\log k)$), takže neruší.

Uvedu ještě několik drobností: Str. 365, vzorec (4.9): Neexistuje-li výjimečný nulový bod, je třeba klásti $\delta_0 = \dfrac{A_3}{\log k}$. Str. 311^{11}: čti $k(k + z) \log z$ (chybí $\log z$). Str. 321, věta 3.1: Podmínku $\sigma \geqq 1 - \omega(T)$ v (3.2) nahraďme slabší podmínkou $\sigma \geqq 1 - c\,\omega(T)$ $(c > 0)$. Toho je třeba u věty 3.3 (str. 323), protože teprve při této modifikaci zaručuje věta 3.1 resp. 3.2 spolu s větou 6.2 z kap. VIII existenci příslušného a $(0 < a < 1)$. Str. 343_8: Exponent při M_1 je záporný. Tedy nestačí $M_1 > \log k$, $M_2 > \frac{1}{2} \log k$, nýbrž je třeba užít $M_2 > \frac{1}{2} M_1$ a potom teprve $M_1 > \log k$. Str. 357_{10}: obdobně. Str. 348, vzorec (2.72) a dále: čti $N\left(1 - \dfrac{\lambda}{\log k}, \ldots\right)$. Str. 359^{11-14}: Jde jen o prvočísla, jež nedělí k. Str. 362_6: Je vynechán pól v bodě $-1 + \beta_1$, ale příslušné residuum ve výsledku neruší. Další drobná nedopatření a tiskové chyby si pozorný čtenář opraví sám.

Obrátím se nyní ke knížce Spechtově. Na rozdíl od souhrnné monografie Pracharovy soustředí se Spechtova knížka na jediný problém, totiž na elementární důkaz vzorce

$$\pi(x) = \frac{x}{\lg x} + o\left(\frac{x}{\lg x}\right) \tag{8}$$

a obdobného vzorce pro aritmetickou posloupnost (6):[6])

$$\pi(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \frac{x}{\lg x} + o\left(\frac{x}{\lg x}\right). \tag{9}$$

Nalezení elementárního důkazu těchto vzorců A. Selbergem (1948; také Erdös má zde podstatné zásluhy) je jedním z největších úspěchů analytické teorie čísel v posledním desítiletí. Důkaz vzorce (8) používá pouze elementárních vlastností exponenciální funkce a logaritmu a některých triviálních integrálů; k důkazu vzorce (9) je třeba ještě komplexních odmocnin z jedničky, které se vyskytují v Dirichletových charakterech.

První část knížky je věnována důkazu vzorce (8). Je psána tak elementárně, že je přístupna absolventu úvodního kursu analysy na universitě nebo na technice. Některé číselně teoretické funkce a některé vztahy mezi nimi však při tomto elementárním výkladu poněkud „spadnou s nebe". Pokusím se ukázat, jak se k těmto funkcím a vztahům dojde, vyjdeme-li od funkce $\zeta(s)$ (viz (3)); v knížce Spechtově se ovšem nevychází od nekonečné řady (3), nýbrž vzorce se odvozují elementárně. Budiž $\mu(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ Möbiova funkce: $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$, je-li n součinem k různých prvočísel, $\mu(n) = 0$, je-li n dělitelné aspoň druhou mocninou některého prvočísla. Budiž $\Lambda_1(n) = \log p$, je-li $n > 1$ mocninou prvočísla p, jinak budiž $\Lambda_1(n) = 0$. Z nekonečného součinu v (3) logaritmickým derivováním plyne (stále pro $\sigma > 1$)

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)}{n^s}. \tag{10}$$

[6]) V knize Pracharově je v kap. III dána jiná varianta elementárního důkazu, ale jen pro (8), nikoliv pro (9).

Definujeme ještě funkci $\Lambda_2(n)$ rovnicí

$$\frac{\zeta''(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_2(n)}{n^s} . \tag{11}$$

Z (3) plyne snadno

$$(-1)^k \zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg^k n}{n^s} , \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} . \tag{12}$$

Provedeme-li v (10) a (11) vynásobení řad vlevo podle (12), obdržíme pro $k = 1, 2$:

$$\Lambda_k(n) = \sum_{d/n} \mu(d) \lg^k \frac{n}{d} , \tag{13}$$

kde se sčítá přes všechny dělitele d čísla n. Z identity

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) = -\frac{\zeta''(s)}{\zeta(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

pak plyne

$$\Lambda_2(n) = \Lambda_1(n) \lg n + \sum_{d/n} \Lambda_1(d) \Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right) . \tag{14}$$

V dalším průběhu jsou důležité funkce

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda_1(n) , \quad \psi_2(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda_2(n) . \tag{15}$$

Je dávno známo, a lehce se dokáže, že vzorec (8) je rovnocenný se vzorcem

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\psi_1(x)}{x} = 1 , \quad \text{tj.} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\varrho(x)}{x} = 0 , \tag{16}$$

kde $\varrho(x) = \psi_1(x) - x$. Snadno se dokáže[7])

$$\psi_1(x) = O(x) , \quad \psi_2(x) = 2x \lg x + O(x) , \tag{17}$$

dokonce např.

$$|\varrho(x)| < 2x \quad \text{pro velká } x . \tag{18}$$

Naším cílem je odhad sumatorické funkce ψ_1, daný vzorcem (16); některé jiné součty, související s $\Lambda_1(n)$, se snadno odhadnou, např.

$$\sum_{n \leqq x} \frac{\Lambda_1(n)}{n} = \lg x + O(1) . \tag{19}$$

Jak nyní dokázat (16)?

Předně plyne z (19) parciální sumací snadno: Existuje číslo $C_1 > 0$ tak, že pro všechna přirozená x, y je

$$\left| \sum_{n=x}^{y} \frac{\varrho(n)}{n^2} \right| < C_1 . \tag{20}$$

7) Důsledné využití pomocné funkce ψ_2 (která, jak ukazuje (17), se snadno odhadne) zavedl SPECHT.

Za druhé: Existují $x_0 \geqq 1$, $C_2 \geqq 1$ tak, že v každém intervalu $(x, \lambda x)$ $(x \geqq x_0, \lambda > 2)$ existuje aspoň jedno y tak, že

$$\left|\frac{\varrho(y)}{y}\right| < \frac{C_2}{\lg \lambda} \tag{21}$$

$\left(\text{tedy je } \frac{\varrho(y)}{y} \text{ malé, je-li } \lambda \text{ velké}\right)$.[8])

Důkaz probíhá asi takto: Funkce $\frac{\varrho(t)}{t}$ je po částech spojitá; v bodě $t = p^m$ má jen „malý" skok $\frac{\lg p}{t} \leqq \frac{\lg t}{t}$. Tedy: Jestliže v intervalu $(x, \lambda x)$ mění své znamení, nabývá i hodnot blízkých nule; jestliže však nemění znamení, musí také nabývat hodnot blízkých nule, ježto by jinak součet v (20) byl příliš velký $\left(\sum_{n=x}^{\lambda x} \frac{1}{n} \text{ je totiž přibližně rovno } \lg \lambda\right)$.

Za třetí: Snadno se dokáže, že funkce $\varrho(x)$ se nemění příliš rychle. Přesně: pro $\frac{1}{2}x < y < 2x$ je

$$|\varrho(y)| \leqq |\varrho(x)| + |y - x| + O\left(\frac{y}{\lg y}\right). \tag{22}$$

Tedy *za čtvrté*: Jsou-li x, λ dosti velká, existuje podle (21) v $(x, \lambda x)$ takové y, pro něž $\left|\frac{\varrho(y)}{y}\right|$ je velmi malé, a podle (22) zůstává $\left|\frac{\varrho(t)}{t}\right|$ malým i v jistém „dosti dlouhém" okolí bodu y. Přesně formulovat to nebudu.

Vidíme tedy toto: Je-li α jakékoliv kladné číslo, leží ony body x, pro něž je

$$|\varrho(x)| \leqq \alpha x, \tag{23}$$

nepříliš řídce. Ale my chceme dokázat (16), tj. chceme dokázat, že (23) platí pro *všechna* dosti velká x. A zde nastupuje *pátý*, a to rozhodující obrat. Selberg odvodil z (14) nerovnost

$$|\varrho(x)| \leqq \frac{2}{\lg^2 x} \sum_{n \leqq x} \left|\varrho\left(\frac{x}{n}\right)\right| \lg n + O\left(\frac{x}{\lg x}\right), \tag{24}$$

a tato základní nerovnost nám umožní dokončení důkazu vzorce (16). Vezměme nějakou hodnotu $\alpha > 0$ takovou, že (23) platí pro všechna dosti velká x; podle (18) víme, že smíme vzít např. $\alpha = 2$. Kdybychom v (24) užili nerovnosti $\left|\varrho\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqq \alpha \frac{x}{n}$,[9]) dostali bychom (jak je ihned vidět) $|\varrho(x)| < \alpha x + O\left(\frac{x}{\lg x}\right)$, což není nic nového. Ale my víme podle bodu čtvrtého, že pro „značný" počet hodnot n je $\left|\varrho\left(\frac{x}{n}\right)\right|$ „daleko menší" než $\alpha \frac{x}{n}$; propočteme-li to podrobně, dostaneme z (24), že pro všechna dosti velká x je

$$|\varrho(x)| \leqq \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{512 C_2}\right) x. \tag{25}$$

---

[8]) To je první krok k (16): z (21) plyne, že $\liminf \left|\frac{\varrho(x)}{x}\right| = 0$.

[9]) Pro hodnoty n, které jsou téhož řádu jako x, nemusí tato nerovnost platit; ale ve výsledku tyto členy neruší.

Platí-li tedy (23) pro všechna dostatečně velká x, platí pro všechna dostatečně velká x dokonce i ostřejší nerovnost (25). Položme nyní $\alpha_1 = 2$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k \left(1 - \frac{\alpha_k^2}{512C_2}\right)$. Vidíme (indukcí), že ke každému k existuje x_k tak, že pro $x > x_k$ je $|\varrho(x)| \leqq \alpha_k x$. Ale zřejmě $\alpha_k \to 0$ pro $k \to \infty$; tedy platí (16) a tedy (8).

Druhá polovina Spechtovy knížky je věnována důkazu vztahu (9). Je o něco složitější, protože je třeba napřed vypracovat teorii Dirichletových charakterů $\chi(n)$, ale v závěrečné fázi probíhá podobně jako první část, a nepředpokládá u čtenáře větších znalostí než část první. Celá knížka je psána velmi důkladně, přehledně a s pečlivým zřetelem i k málo zkušenému čtenáři. Právě pro tyto čtenáře bude snad užitečné, připojím-li seznam *některých* tiskových chyb nebo nedopatření, která by mohla rušit. Str. 22, vzorec (26): vlevo čti log (místo $\log^2$). Str. 25_2 (tj. 2. řádek zdola) u prvního součtu čti: $m \leqq x$. Str. 35^2 vlevo čti: $|\varrho(x)|$. Str. 39_1 čti: $\chi(e_1 + e_2)$. Str. 43^7 čti: wenn $g \equiv -1 \pmod 4$. Str. 45^7: závorku $\{$ dej ihned za sumační znak. Str. 48^3: totéž. Str. 46: Stále čti $n \leqq x$ místo $n \leqq k$. Str. 48^7: místo $d \leqq x$ čti $n \leqq x$. Str. 48_{9-6}: čtenář si sám opraví nevhodnou formulaci (jde o Bolzano-Cauchyovu podmínku). Str. 60^3 a 60^5: na konci čti $\log^2$. Str. 65_5: Vzorec označ (73). Str. 68^6, 69^4, 74^{10}: C_4, C_5, C_6 mohou záviset na k.

Důkaz věty 31 na str. 44 je zbytečně složitý. Nejlépe je dokázat napřed vzorec (2) (který *není* vázán podmínkou $(k, l) = 1$) přímo z věty 4, načež okamžitě plyne (1). Podobně lze upravit důkaz věty 33 (užitím věty 5).

Vojtěch Jarník, Praha

Sophie Piccard: SUR LES BASES DES GROUPES D'ORDRE FINI. Avec une préface de A. Denjoy (O bázích grup konečného řádu. S předmluvou A. Denjoy). Mémoires de l'Université de Neuchatel, 25. Neuchatel 1957; XXIV, 242 str.

Spis se zabývá obšírně úvahami o bázích (konečných) grup a je pokračováním dvou spisů s podobným tématem, které autorka uveřejnila již dříve: *Sur les bases du groupe symétrique*, I (1946); II (1948). (Citováno Bases I a Bases II.) Přitom je báze definována takto:

V grupě $\mathfrak{G}$ je možno volit množinu $\mathfrak{B}$ s konečným počtem prvků vytvořujících grupu $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = \langle\mathfrak{B}\rangle$. Dokonce je možno zvolit množinu $\mathfrak{B}$ tak, že její prvky jsou „nezávislé" (tj. že množina $\mathfrak{B}$ je ireducibilní). Je-li pak množina $\mathfrak{B}$ zvolena tak, že počet jejích prvků r je co nejmenší, nazývá autorka množinu $\mathfrak{B}$ „bází" grupy $\mathfrak{G}$ a číslo r „řádem báze" $\mathfrak{B}$.

V úvodu nejprve podává hlavní definice a věty z teorie grup abstraktních a grup permutačních („substitučních"),[1]) pokud jich bude ke studiu spisu zapotřebí a pak uvádí některé věty, hlavně ze spisů Bases I a II, kterých bude dále použito jako vět pomocných.

Kapitola I obsahuje obecné úvahy o bázích konečných grup.

Kapitola II se zabývá studiem bází grupy symetrické $\mathfrak{S}_n$ a grupy alternující $\mathfrak{A}_n$, u nichž jedna z permutací báze je cykl řádu > 1. Toto studium navazuje na studium grup, které vytvořuje systém souvislý a primitivní cyklů téhož řádu. Probírají se všechny grupy, které se mohou vytvořit souvislým a primitivním systémem cyklů řádu m pro $2 \leqq m \leqq 9$.

Kapitola III je věnována nejprve studiu primitivních grup, které mají bázi řádu 2 a pak je dokázána obecná věta o celkovém počtu bází takových grup. U primitivních grup stupně $n \leqq 10$, jimiž se autorka zabývala, existovala vždy báze řádu 2. Prozkoumána je celá řada takových grup a u nich stanoven úhrnný počet bází.

Kapitola IV se zabývá složením grup imprimitivních. Je ukázáno, že existují grupy imprimitivní, jejichž báze má řád $r > 2$.

[1]) Dobrou průpravu ke studiu recenzované knihy může poskytnout spis: H. Lugowski-H. J. Weinert, Grundzüge der Algebra I, 1957, vzhledem k tomu, že je v ní podáno dosti látky z teorie grup permutačních.

Kapitola V pojednává o systémech vytvořujících prvků „grupy regulární". Grupou regulární se zde nazývá transitivní grupa permutační, jejíž stupeň je roven řádu.

Kapitola VI obsahuje definující relace tzv. „charakteristické relace" grupy symetrické $\mathfrak{S}_n$ pro různé báze: Uvedeny tu všechny báze řádu 2 grupy $\mathfrak{S}_n$ vyjádřené permutacemi pro $n \leqq 6$ a zároveň definující relace pro $n \leqq 5$. Pro $n = 6$ je odkázáno na disertaci autorčina žáka M. CALAMA (Univ. Neuchatel, 1959).

Kapitola VII obsahuje *Větu Hölderovu*: Grupa symetrická $\mathfrak{S}_n$ pro $n \geqq 3$ a pro $n \neq 6$ nemá vnější automorfismy (což znamená, že grupa $\mathfrak{S}_n$ je v těchto případech úplná).[2]) Důkaz je proveden použitím bází. Nadto však pro $n = 6$ je dokázáno, že grupa $\mathfrak{S}_6$ má 720 vnějších automorfismů, právě tolik jako automorfismů vnitřních.

Kapitola VIII. Několik vět z obecné teorie permutací a poznámky k nim. Grupy Mathieuovy, Burnsideovy a zobecněné grupy Kleinovy.

O grupě Mathieuově stupně 12 (M_{12}), řádu 95 040 pětinásobně transitivní a jejích tří podgrupách dokázáno, že mají báze řádu 2.[3])

W. BURNSIDE[4]) uvádí zajímavý příklad primitivní grupy G_{7200} stupně 36, řádu 7200, která má normální imprimitivní podgrupu G_{3600} řádu 3600. O grupách G_{7200} a G_{3600} autorka dokazuje, že mají bázi řádu 2.

Konečně se autorka zabývá grupou Abelovou G_{2^n}, která je zobecněním grupy Kleinovy $\mathfrak{B}_4$ (Vierergruppe), a grupami z ní odvozenými.

Jak již ze stručného obsahu je vidět, poskytuje spis mnoho podnětů k další práci o grupách permutačních a jejich bázích a o příslušných definujících relacích. Ovšem zdá se mi, že asi nebude mnoho čtenářů, kteří by knihu systematicky prostudovali. A již z tohoto důvodu musím poukázat na to, že není ke knize připojen index, který by usnadnil orientaci v knize a hledání v ní.

Karel Rychlík, Praha

Pál Imre: TÉRLÁTTATÓS ÁBRÁZOLÓ MÉRTAN (Deskriptívna geometria v anaglyfoch). Műszaki könyvkiadó, Budapest 1959, str. 192, obr. 494. Cena 39,— Ft, viaz.

Kniha je veľmi zaujímavým a cenným prínosom do učebnicovej literatúry z deskriptívnej geometrie. Jej charakteristickou náplňou sú obrázky, ktoré konštruoval sám autor. Preložený názov knihy je „Deskriptívna geometria v anaglyfoch". (Nemecký prospekt, ktorým vydavateľstvo oznamovalo prípravu vydania diela, uvádza ho pod názvom „Darstellende Geometrie in Raumbildern".)

Učebnica je v svetovej literatúre svojho druhu originálna tým, že všetky dôležité základné aj zložitejšie konštrukcie deskriptívnej geometrie v rozsahu preberanom na vysokých školách technických sú v nej demonštrované zásadne na obrázkoch-anaglyfoch. (Zo 494 obrázkov knihy je 266 anaglyfických.) Anaglyfické obrázky sú umiestené vždy na celej ľavej strane knižky, zatiaľ čo na pravej strane je príslušný teoretický výklad.

Anaglyfy sú konštruované ako dvojstredové priemety; pravda, na obrázkoch sú narysované len dôležité výsledné „modelové" čiary, nie však konštrukcie, ktoré k nim viedli. Ku kvalite anaglyfov knihy prispelo okrem ich veľmi dobrej konštrukcie aj neobyčajne poda-

[2]) Jiný jednoduchý důkaz tohoto tvrzení je podán v § 13 2. vyd., KUROŠOVY Teorie grup, která je nyní přístupná v anglickém překladě. V 1. vyd. ani v německém překladě tento důkaz není obsažen.

[3]) O této Mathieuově grupě je zmínka v JORDANOVĚ „Traité des substitutions" 1870, str. 33. Ovšem bylo by jistě velmi záslužné, kdyby autorka podobným způsobem probrala další grupy Mathieuovy: M_{11}, M_{22}, M_{23}, M_{24} stupňů pořadě 11, 22, 23, 24; řádů 7920, 433520, 10 200960, 244 823040 a pořadě 4-, 3-, 4-, 5násobně transitivní, které jsou stejně ako M_{12} vesměs jednoduché. O nich viz W. WITT, Abh. Math. Sem. Hamburg, 1938, 256—264, kde je i další literatura.

[4]) W. BURNSIDE, Theory of groups of finite order, 1. vyd., str. 192—193, 2. vyd. 1911, str. 202—203.

rené riešenie farebnotechnického prevedenia a tlače, čo bolo docielené dlhým experimentovaním a úzkou spoluprácou autorovou s pracovníkmi tlačiarne v priebehu tlače. Tieto anaglyfy, pozorované anaglyfickými dvojfarebnými okuliarmi (priloženými ku knihe), poskytujú hneď — bez akéhokoľvek dlhšieho prispôsobovania zraku — dokonalý priestorový (plastický) dojem, zhodný s dojmom pri pozorovaní skutočného objektu v priestore dvoma očami. Objekty z obrázkov priamo „vyskakujú" do priestoru, takže anaglyfické obrázky knižky predstavujú vlastne bohatú zbierku modelov.

Pri výcviku priestorovej predstavivosti základný význam má realizovanie objektov, alebo geometrických útvarov, ktoré si treba predstaviť, najprv pomocou ich vzorových súčiastok, t. j. drótených, plechových a iných modelov základných geometrických útvarov.

Autor knihy má iste pravdu, keď tvrdí, že väčšiu cenu ako najdokonalejšia zbierka modelov najlepšie vybavenej školy má taký prostriedok, ktorým možno výcvik priestorovej predstavivosti pestovať kedykoľvek a kdekoľvek aj mimo rámca prednášok a vyučovania, viazaného na čas a miesto školy. Takým prostriedkom je práve anaglyf. Je jednoduchší ako model. I keď je zostrojenie anaglyfu (dvojstredového priemetu) dosť pracné a teda pomerne drahé, je vždy lacnejšie ako zhotovenie zložitého modelu. Okrem toho, ako hovorí autor, zdá sa, že je vhodnejší na vyjadrenie geometrických predstáv aj preto, lebo z rysu (obrázku) do priestoru „sa vynorujúca" čiara anaglyfu je o mnoho „geometrickejšia" ako najjemnejšia niť, struna, alebo iný modelový materiál. Čo najúplnejšie využitie tohoto znamenitého názorného prostriedku je práve hlavným cieľom citovanej učebnice.

Vecný obsah knihy je nasledovný: Po krátkom *úvode* o cieli a správnom používaní knihy sú vysvetlené *základné stereometrické pojmy* a zobrazené anaglyfickými obrázkami.

Ďalšia časť „*Mongeova projekcia (združené priemety)*" je venovaná kolmému premietaniu na dve a viac združených priemetní, v ktorom sú riešené všetky základné polohové a metrické úlohy o bodoch, priamkach, rovinách aj jednoduchých hranatých a oblých telesách. Menšia kapitola tejto časti vysvetľuje tiež osvetľovanie.

V rozsiahlej časti „*Krivky a plochy*" sú prebraté a pekne priestorovo znázornené základné pojmy a najmä dôležité technické krivky a plochy (skrutkovica, rotačné plochy, zbortené plochy, rôzne úlohy o nich; tu je tiež vysvetlený princíp stereografickej projekcie).

Osobitná časť knihy je venovaná „*kótovanému premietaniu*" a jeho aplikáciám v technickej praxi (topografickým plochám, technickým úpravám v teréne, riešeniu úloh banskomeračskej praxe: riešeniu tektonických zlomov, ochranného piliera a konštrukcii spojovacích banských diel).

Náplň knihy uzavierajú „*Vybrané časti z axonometrického a centrálneho premietania*", v ktorých sú stručne ukázané základy ortogonálnej a klinogonálnej axonometrie, centrálneho premietania a lineárnej perspektívy (priesečnou metódou).

Na konci knihy je pripojený zoznam pomocnej študijnej literatúry a osobitný cenný zoznam literatúry o anaglyfoch.

Spôsob výkladu knihy je jasný a stručný. Po vysvetlení teoretického základu určitej partie sú hneď uvedené ľahšie zrozumiteľné aplikácie. Odvodzovania a dôkazy sú zpravidla vynechané, okrem takých dôkazov, kde je dôležité práve pochopenie priestorových vzťahov (napr. Quetelet-Dandelinova poučka o rovinných rezoch na rotačnej kužeľovej ploche).

Maďarské ministerstvo školstva schválilo knihu ako pomocnú vysokoškolskú učebnicu. Bude môcť byť však dobre použitá na všetkých stupňoch technickej a prírodovedeckej výuky na školách (stredných, odborných a vysokých). Dobre poslúži aj samoukom a najmä pri diaľkovom štúdiu bude priam nepostrádateľnou študijnou pomôckou.

(Podľa autorovho zdelenia vydavateľstvo Műszaki pripravuje vydanie knihy tiež v ruskej, anglickej a nemeckej reči. Do konca roku 1960 má výjsť aj slovenský preklad v Slovenskom vydavateľstve technickej literatúry v Bratislave; preklad bude vytlačený v Budapešti, čím sa zaručí dobrá kvalita anaglyfických obrázkov knihy.)

Karol Rečičár, Košice

Jozef Filip: PREHĽAD DESKRIPTIVNEJ GEOMETRIE. Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 1959, 1. vyd., náklad 8200 výt., str. 332, obr. 201, cena Kčs 14,90 váz.

Knížka je vhodným přehledem těch částí deskriptivní geometrie, které jsou v osnovách tohoto předmětu na všeobecně vzdělávací škole, přičemž zřejmě hledisko použití vedlo někde autora k menším rozšířením (osová afinita a její použití při řezu roviny a kruhového válce).

Při čtení knížky poznáme, že obsah jejích 13 kapitol lze v podstatě rozdělit na tři větší části. V úvodní části (I. až V. kapitola) je především vysvětlena hlavní úloha deskriptivní geometrie tak, jak je pak v knížce dále pojata, potom užívaná symbolika k provádění geometrických zápisů, základní vztahy stereometrické mezi body, přímkami a rovinami (tj. zejména věty o incidenci, rovnoběžnosti, protínání a kolmosti), osová afinita v rovině s jejími vlastnostmi a ohniskové vlastnosti kuželoseček, pro parabolu také důležitá vlastnost subtangenty a subnormály.

Ve druhé části (VI. až VIII. kapitola) jsou vyloženy dva nejužívanější zobrazovací způsoby: pravoúhlé promítání na jednu průmětnu (a to tzv. kótované promítání) a podstata pravoúhlého promítání na dvě k sobě kolmé průmětny (tzv. Mongeovo promítání) včetně zavádění dalších pomocných průměten. V obou zmíněných promítacích způsobech jsou řešeny úlohy polohy a nejjednodušší metrické úlohy.

Protože ve třetí části jsou zobrazovány v příslušném pravoúhlém promítání hranoly a jehlany příp. kruhové válce a kužele a také plocha kulová (IX. a X., XII. a XIII. kapitola), je v XI. kapitole pojednáno o rovnoběžném průmětu kružnice a elipsy a výklad o tom je spojen s řadou dalších konstrukcí elipsy výhodných pro její vyrýsování. Vedle zobrazení uvedených těles je podrobně ukázáno, jak se sestrojují průměty jejich rovinných řezů (pro rovinný řez na rotačním válci příp. na rotačním kuželi je proveden důkaz věty Quetelet-Dandelinovy i s důsledky užitečnými při rýsování průmětu kuželosečky — řezu na rovinu kolmou k ose plochy), dále průměty jejich průsečíků s přímkou a jejich sítě (s výjimkou plochy kulové).

V knížce, svým účelem vhodné k opakování nebo jako úvod k dalšímu studiu deskriptivní geometrie, nejsou obvykle prováděny všechny důkazy. V textu je úplně vyřešeno 27 příkladů se všemi podrobnostmi včetně důkazu správnosti konstrukce a diskuse řešení. Vedle toho k přímému procvičení látky je připojeno celkem 237 úloh, které bezprostředně navazují na vyloženou látku a zpravidla ani nepotřebují nějakého návodu k řešení. Proto jistě knížka dobře splní daný úkol: bez přílišného zatěžování podrobnostmi umožní čtenáři rychlé zopakování nebo podá uceleně nejdůležitější pojmy a konstrukce z obou vyložených zobrazovacích metod. Pro všechny tyto vlastnosti může být také vhodnou pomůckou pro studující technických škol a v tomto případě zvlášť pro studující při zaměstnání, k čemuž neméně dobře poslouží i malý (kapesní) formát knížky.

Karel Drábek, Praha

André Angot: UŽITÁ MATEMATIKA PRO ELEKTROTECHNICKÉ INŽENÝRY. Z fran. originálu „Compléments de Mathématique destinés aux ingénieurs de l'Électrotechnique et des Télécommunications" přeložil Ing. dr. A. Ter-Manueliane, vydalo SNTL Praha 1960, stran 812, obr. 370, cena váz. 110 Kčs.

Citovaná kniha je věnována výkladu některých partií matematiky, které jsou potřebné v různých odvětvích teoretické elektrotechniky. Svým zaměřením je určena především elektroinženýrům a má být pomůckou při jejich dalším postgraduálním studiu.

Je zde probrána zhruba následující látka: Funkce komplexní proměnné, Fourierova řada, Fourierův integrál, vektorový počet, maticový počet, základy tensorového počtu, metody integrace diferenciálních rovnic, speciální transcendentní funkce, operátorový počet, počet pravděpodobnosti, počet numerický a grafický.

Všimněme si především toho, co může kniha přinést inženýrům elektrotechniky. Bezesporu kladnou stránkou díla je, že výběr látky je poměrně bohatý a že ve všech kapitolách jsou uvedeny příklady z elektrotechniky, ilustrující použití příslušné matematické partie. Naproti tomu výklad vlastních matematických skutečností trpí přílišnou formálností a má vyslovený charakter reportáže. Je proto otázkou, do jaké míry bude inženýr při studiu schopen proniknout matematické myšlenky jednotlivých kapitol, není-li již obeznámen s příslušnou věcí z jiného, důkladnějšího díla.

U díla tohoto typu je přirozené, že se všude neuvádějí důkazy; není však vhodné vydávat něco za důkaz, co důkazem není, jak se to zde často činí. Ještě horší je, že v knize jsou některé úvahy (např. Gibbsův zjev na str. 97—99), které podstatu věci úplně zatemňují a vzbuzují podezření, že autor problém správně nepochopil.

Z uvedeného vyplývá, že s moderním pojením matematiky nemá kniha nic společného; mimo to skrývá pro inženýry jisté nebezpečí: nezasvěcený čtenář snadno podlehne dojmu, že matematika se obejde bez jakýchkoli předpokladů a že všechny možné operace lze libovolně provádět a zaměňovat. Takový čtenář je potom překvapen, dojde-li k rozporu, z čehož obvykle vyvozuje, že matematika se nehodí k řešení technických problémů.

Zůstává tedy spornou otázka, zda volba tohoto díla k překladu byla šťastná.

Václav Doležal, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

ZPRÁVY

ŠEDESÁTINY PROFESORA JIŘÍHO KLAPKY

OTAKAR BORŮVKA a KAREL SVOBODA, Brno

Dne 10. března t. r. dožívá se šedesáti let význačný československý matematik RNDr JIŘÍ KLAPKA, doktor fysikálně-matematických věd, profesor matematiky a vedoucí katedry matematiky a deskriptivní geometrie na stavebních fakultách Vysokého učení technického v Brně.

Toto výročí je nám příležitostí k tomu, abychom seznámili širší matematickou veřejnost s životem a dílem tohoto vynikajícího vědeckého pracovníka, který přispěl velkou měrou k rozvoji české matematické vědy a svou pedagogickou a vědeckou činností a svými osobními vlastnostmi si získal obdiv a uznání u svých přátel, spolupracovníků a žáků.

Jiří Klapka se narodil dne 10. března 1900 ve Skutči v Čechách, kde jeho otec působil jako učitel. Středoškolská studia konal na reálce v Lounech a v Kostelci nad Orlicí. Po jejich ukončení studoval na České vysoké škole technické a na filosofické a přírodovědecké fakultě Karlovy university v Praze, kde získal v roce 1921 aprobaci z matematiky a deskriptivní geometrie pro učitelství na bývalých středních školách.

Od r. 1921 působil jako asistent matematiky na České vysoké škole technické v Brně u prof. J. VOJTĚCHA, později u prof. J. HRONCE. V době své asistentské služby dosáhl v r. 1925 doktorátu přírodních věd na přírodovědecké fakultě brněnské university a v r. 1928 se na základě své práce pojednávající o asymptotické transformaci zborcených ploch habilitoval na české technice z geometrie deskriptivní, analytické a diferenciální. V r. 1930 odešel z asistentského místa jako profesor na III. reálné gymnasium v Brně, při čemž konal i nadále docentské přednášky na technice. V r. 1937 získal na brněnské technice mimořádnou bezplatnou profesuru geometrie. Mimořádným profesorem byl jmenován o rok později na nově zřízené technice v Košicích, která však byla vzhledem k politickým událostem přemístěna ještě před zahájením přednášek do Martina. Zde působil profesor Klapka až do násilného odtržení Slovenska v r. 1939, kdy byl převeden zpět na českou techniku v Brně. Ke konci války byl dán protektorátním ministerstvem školství k disposici úřadu práce a pak působil jako matematik ve Škodových závodech v Hradci Králové. V r. 1945 byl jmenován řádným profesorem deskriptivní geometrie (s platností od 1. 5. 1942), převzal později po prof. K. Čuprovi také profesuru matematiky, zůstávaje nadále i profesorem deskriptivní geometrie, a od r. 1952 je vedoucím katedry matematiky a deskriptivní geometrie na stavebních fakultách brněnské techniky. V r. 1956 byla prof. Klapkovi udělena hodnost doktora fysikálně-matematických věd.

Do životních osudů prof. Klapky zasáhly neblaze jak obě světové války, tak i nepříznivé hospodářské poměry v době první republiky, které podstatně ovlivnily jeho vysokoškolskou dráhu. Zvláště události v době okupace, uzavření českých vysokých škol, znemožnění pedagogické a značné omezení vědecké práce a tragické osudy přátel a příbuzných působily velmi nepříznivě na citlivou Klapkovu povahu. Jeho vřelý poměr pro věc míru a aktivní činnost v krajském výboru obránců míru jsou tak výsledkem nikoliv teoretických úvah, ale krutých osobních zážitků a zkušeností.

V době vysokoškolských studií upoutaly Klapkův zájem zejména přednášky prof. J. Sobotky, význačného představitele české geometrické školy. Sobotkův vliv byl však záhy vystřídán zájmem o nové výsledky prof. E. Čecha, s nímž se Klapka seznámil již v době svých studií v Praze. Jeho vliv na další Klapkův vědecký růst se stal rozhodujícím po přechodu prof. Čecha na brněnskou universitu, kdy uvedl Klapku do vědecké práce v projektivní diferenciální geometrii a usměrnil tak jeho vývoj k této disciplině. Dodnes zůstal profesor Klapka věren tomuto oboru, neztratil ani v nejobtížnějších životních obdobích vyhraněný zájem o geometrickou vědu a udržuje stále se svým učitelem akad. E. Čechem a s jeho žáky úzkou spolupráci a živý styk.

Během své učitelské činnosti vychoval prof. Klapka mnoho vědecky pracujících matematiků a poskytl základní matematické vzdělání nejen velké řadě našich inženýrů, ale i studentům středních škol a jejich učitelům. Za své pečlivě připravené přednášky, které vynikají vysokou odbornou i pedagogickou úrovní, za svůj lidský poměr k posluchačům a za svou snahu o zlepšení výuky a výchovy na technikách sklízí uznání a přátelství studentů, které vychovává nejen v dobré odborníky, ale i v uvědomělé občany socialistického státu. Své bohaté pedagogické zkušenosti dává ochotně k disposici mladším učitelům a využívá jich ve skriptech a učebnicích, které napsal většinou pro potřeby studentů na technikách.

O výchovu vědeckých pracovníků se prof. Klapka stará zejména v semináři diferenciální geometrie, který vede od r. 1952 v rámci Matematické komise ČSAV a kterého se účastní řada učitelů brněnských a často i mimobrněnských vysokých škol. V tomto semináři jsou soustavně studovány moderní geometrické teorie a sledovány výsledky některých světových geometrických škol. Zvláštní pozornost je v něm věnována současné tvorbě akad. Čecha a jeho žáka A. ŠVECE. V semináři vzniklo několik hodnotných vědeckých prací a od r. 1959 byl k němu připojen přípravný seminář pod vedením doc. V. HAVLA.

Publikační činnost prof. Klapky obsahuje řadu odborných geometrických pojednání, učebnic, skript a recensních a jiných článků. Všimněme si v dalším rozboru hlavních výsledků Klapkovy vědecké činnosti, která byla věnována převážně otázkám a problémům z projektivní diferenciální geometrie.

První Klapkova práce [1][1]) prozrazuje stopy vlivu prof. Sobotky a je v ní využito jeho výsledků k řešení otázek týkajících se středů křivosti normálních řezů dvojice ploch majících v daném bodě styk právě prvního řádu. Odvozená konstrukce tečen průsečné křivky dvou ploch v jejich bodě dotyku nevyžaduje, na rozdíl od starší konstrukce Olivierovy, sestrojení Dupinovy indikatrice daných ploch.

Konstruktivní cíle jsou sledovány také v práci [4] jednající o soustavách kuželoseček se společnou normálou užitím jistého prostorového zobrazení kuželoseček soustavy do bodů kubické přímkové plochy. Autor přitom vychází ze zjištění, že ve svazku kuželoseček existují obecně tři kuželosečky, pro něž je daná přímka normálou, provádí konstrukci těchto kuželoseček, odvozuje podmínky pro jejich splynutí a určuje všechny svazky kuželoseček majících společnou normálu. Podobné otázky řeší také v případě řady kuželoseček a věnuje pozornost soustavám kuželoseček se společnou normálou, které jsou obsaženy v lineárních soustavách kuželoseček vyšší dimense. Jako dodatek jsou v této práci odvozeny věty o Steiner-Pelzových parabolách středové kuželosečky, které jsou obdobné větě Pascalově a Brianchonově.

Důležitou část vědecké tvorby prof. Klapky tvoří jeho práce věnované studiu diferenciální teorie přímkových ploch v trojrozměrném prostoru. První z řady těchto prací [2] vznikla z popudu E. Čecha a spolu s dalšími pracemi [7] a [9] obsahuje užití Čechovy teorie na řešení různých speciálních otázek z diferenciální geometrie přímkových ploch. Ve zmíněné práci [2] je odvozen jednoduchým způsobem dříve známý výsledek o přímkových plochách, jejichž jedna fleknodální křivka je kuželosečka a druhá rovinná, a doplněn nalezením dalšího typu ploch, odlišného od předešlého tím, že druhá fleknodální křivka má vlastnost duální. Vedle fleknodálních křivek jsou na zborcených plochách důležité také tzv. komplexové a harmonické křivky. V práci [7] je zobecněna Sullivanova věta o fleknodálních a komplexových křivkách, je studována Wilczynského hlavní plocha fleknodální kongruence zborcené plochy a jest určena třída ploch, pro něž hlavní plocha je rozvinutelnou plochou nebo kvadrikou. Nejvýznamnější z řady prací souvisících s Čechovou teorií je pojednání

[1]) Čísla v lomené závorce se vztahují k části A seznamu literatury.

[9], v němž je provedeno podrobné vyšetření plochy, která je vytvořena průsečnicí oskulačních rovin fleknodálních čar v dvojicích fleknodálních bodů tvořicí přímky dané přímkové plochy. Autor zde ukazuje, že k tomu, aby uvedená plocha byla rozvinutelná, je nutné a stačí, aby aspoň jedna fleknodální křivka zborcené plochy byla rovinná.

Konstrukci fleknodálních a komplexových křivek na zborcených plochách je věnována druhá část pojednání [5], v němž je tato konstrukce provedena pro všechny zborcené plochy čtvrtého stupně. Podrobný rozbor průběhu fleknodálních křivek je podán v případě obecné plochy normál kvadriky podél jejího rovinného řezu a v případě plochy šikmého průchodu. Zajímavou otázkou jest určení fleknodálních křivek na přímkových šroubových plochách. Této otázce věnuje prof. Klapka pozornost v pojednání [8], v němž vychází ze Sobotkovy konstrukce oskulačního hyperboloidu a ukazuje, že fleknodální body na každé tvořicí přímce leží v jejím bodě centrálním a v bodě nevlastním. Nejdůležitější částí této práce je zjištění, že mezi přímkovými plochami lze šroubové plochy charakterisovat pomocí vlastností jejich fleknodálních křivek.

Předcházející práce z teorie přímkových ploch se vesměs týkají jejich projektivních vlastností. Studiu metrických vlastností přímkových ploch se prof. Klapka věnoval v pracích [10] a [13], v nichž využil Čechovy i Blaschkeho teorie přímkových ploch. V první z nich jsou získány základní metrické vztahy pro projektivně definované oskulační útvary zborcené plochy eukleidovského prostoru a odvozeny některé vlastnosti ploch, jejichž všechny oskulační hyperboloidy jsou rotační. Druhá práce obsahuje základní úvahy a výsledky o přímkových plochách v eliptickém prostoru. O některých těchto výsledcích bylo referováno na sjezdu čs. matematiků v Praze v r. 1949 (viz [14]).

Pozoruhodná je práce [11], v níž je zobecněna Čechova teorie přímkových ploch trojrozměrného prostoru na obecné přímkové plochy prostoru libovolné liché dimense. Na rozdíl od způsobu, jehož použil již předtím E. Čech v jedné své práci ke studiu přímkových ploch v prostoru liché dimense, zobecnil prof. Klapka Mayerovy výsledky o Riccatiových systémech čar na přímkové ploše a užil toho ke geometrisaci procesu nalezení projektivních diferenciálních invariantů a k zobecnění jistých typů ploch.

Druhá význačná skupina prací prof. Klapky se týká teorie kongruencí W, jejichž fokální plochy jsou přímkové. Tyto kongruence, jejichž základní vlastnosti vyšetřil synteticky C. Segre, lze rozložit v jednoparametrickou soustavu regulů a jejich komplementární reguly vytvořují tzv. asociovanou kongruenci, která má rovněž fokální plochy přímkové. V práci [3], která vznikla z popudu E. Čecha, vybudoval prof. Klapka úplnou analytickou teorii Segreových kongruencí, která je zobecněním Čechovy teorie přímkových ploch na přímkové kongruence. Odvodil úplný systém projektivních diferenciálních invariantů těchto kongruencí a nalezl kromě jiných cenných výsledků ty kongruence W, které jsou projektivní s kongruencemi asociovanými tím způsobem, že komplementární reguly si odpovídají v pevné kolineaci. V první části práce [5] jsou pak odvozeny další vlastnosti uvažovaných kongruencí a určeny všechny Segreovy kongruence, jejichž fokální plochy jsou projektivní. Studiu Segreových kongruencí je věnována ještě práce [6], v níž jsou určeny Segreovy kongruence, jejichž tzv. hlavní křivky (zavedené prof. Klapkou) jsou rovinné.

V řadě kratších prací [15] až [19] řeší prof. Klapka různé otázky z teorie ploch a kongruencí. Práce [15] je německým překladem pojednání [17] a jejím obsahem je sdělení na Riemannově kongresu v Berlíně v r. 1954. Obsahem této práce je studium pojmů tzv. obecné a speciální křivky na ploše vzhledem ke komplexům kanonických přímek plochy. V práci [16] jest ukázáno, že k tomu, aby si na fokálních plochách kongruence *W* odpovídaly fleknodální křivky, je nutné a stačí, aby kongruence byla obsažena v lineárním komplexu. Systém diferenciálních rovnic pro vrcholy Godeauxova reperu v Kleinově pětirozměrném prostoru jest odvozen v pojednání [19], v němž je uvedené soustavy použito ke studiu lokálních vlastností plochy. Referát na téma [18] byl přednesen na sjezdu čs. matematiků v Praze v r. 1955.

Předmětem pojednání [20] je studium Terraciniho pojmu dvojice konjugovaných a bikonjugovaných řídicích křivek zborcené plochy. Prof. Klapka nalezl podstatně jednodušší definice těchto dvojic křivek a podal analytické vyjádření podmínek konjugovanosti a bikonjugovanosti v souvislosti s harmonickou transformací dvojice křivek podle O. Mayera a odvodil diferenciální rovnice pětivrstvy Segreho hlavních křivek na fokálních plochách kongruence z podmínky, že zborcená plocha kongruence se dotýká fokálních ploch podél dvojice křivek konjugovaných ve smyslu Terraciniho.

Zvláštní postavení mezi Klapkovými pracemi zaujímá práce [12], v níž je rozřešen problém thermodynamických výpočtů parních kotlů na základě složeného spojnicového nomogramu. Tento problém byl prof. Klapkovi předložen prof. J. Čermákem v době jejich působení ve Škodových závodech v Hradci Králové. Problém jest obtížný zejména proto, že stavojevná rovnice přehřáté páry je příliš složitá a jako podklad pro nomografické řešení zcela nevhodná. Proto autoři vyšli z nové stavojevné rovnice, která se dá řešit spojnicovým nomogramem se dvěma přímými a jednou hyperbolickou stupnicí. Význam výsledného nomogramu, který má 22 nositelek, je v tom, že na jeho základě lze snadno odhadnout potřebné hodnoty, jejichž přesný výpočet běžným způsobem vyžaduje nepoměrně delší doby. Tato pomůcka neztrácí svůj význam ani v dnešní době a byla proto převzata do Čermákova aktuálního díla o stavbě kotlů.

Kromě vlastních vědeckých prací sepsal prof. Klapka několik knižních publikací učebnicového rázu a několik skript, jimiž se snažil ulehčit práci studentům. V těchto publikacích zpracoval základy vektorového počtu, deskriptivní geometrii a analytickou geometrii. Zvláště nedávno vyšlá učebnice analytické geometrie, kterou prof. Klapka napsal na podkladě vektorového počtu jako první a zatím jediný svazek celostátní učebnice matematiky pro technické fakulty z iniciativy komise expertů při ministerstvu školství a kultury, bude jistě vydatnou pomůckou nejen pro techniky, ale i pro posluchače jiných typů vysokých škol. Mimo to recensoval řadu knih a jiných vědeckých publikací z oboru geometrie a uveřejnil několik životopisných článků, nekrologů a jiných příležitostních statí.

Klapkovy výzkumy v teorii přímkových ploch a kongruencí ho řadí na jedno z nejpřednějších míst v tomto oboru diferenciální geometrie. Jeho práce jsou často citovány v domácí i zahraniční literatuře a některé jeho výsledky byly pojaty do učebnic diferenciální geometrie. Vědecká činnost prof. Klapky byla oceněna v r. 1930 Českou akademií věd a umění udělením peněžitého daru na vyšetřování konstruktivních aplikací diferenciální geometrie, v r. 1938 volbou za řádného člena Moravskoslezské přírodovědecké společnosti a v r. 1956 udělením vědecké hodnosti doktora fysikálně matematických věd.

Řada prací mladších našich geometrů, kterým prof. Klapka ochotně poskytuje pomoc a radu ve vědecké práci a nezištně předává své bohaté znalosti, svědčí o jeho snaze vychovat naší matematické vědě nové vědecké pracovníky v oboru diferenciální geometrie. V kruhu své rodiny a svých spolupracovníků prožívá prof. Klapka své šedesátiny se zadostiučiněním člověka, který si může být vědom, že svůj životní úkol plní dobře a poctivě.

Blahopřejeme jubilantovi k jeho životnímu dílu a připojujeme přání pevného zdraví do dalších let a mnoha úspěchů v práci k prospěchu naší matematické vědy.

SEZNAM PRACÍ PROFESORA JIŘÍHO KLAPKY

A. Vědecké práce

1. Poznámka ke konstrukcím tečen k průsečné křivce dvou ploch v bodě dotyku. Čas. pěst. mat. fys. *52*, 1923, 336—342.
2. O dvou druzích přímkových ploch. Čas. pěst. mat. fys. *54*, 1925, 30—38.
3. O *W*-kongruencích s fokálními plochami přímkovými. Spisy přír. fak. MU, č. *69*, 1926.
4. O kubických systémech kuželoseček se společnou normálou. Čas. pěst. mat. fys. *56*, 1927, 175—192.
5. O asymptotické transformaci ploch zborcených a o fleknodálních a komplexových čarách na zborcených plochách čtvrtého stupně. Práce Moravské přírodovědecké společnosti, sv. *IV*, spis 6, 1927, 189—225.
6. O jedné třídě *W*-kongruencí. Sborník Čes. vys. školy techn. v Brně, sv. *III*, spis 10, 1928.
7. O Wilczynského hlavní ploše fleknodální kongruence a o zobecnění věty Sullivanovy. Čas. pěst. mat. fys. *58*, 1929, 10—15.
8. Některé důsledky plynoucí z konstrukce oskulačního hyperboloidu šroubové plochy. Sborník Čes. vys. školy techn. v Brně, sv. *IV*, spis 13, 1929.

9. Sur les surfaces réglées dont les courbes flecnodales sont distinctes et non planes. Čas. pěst. mat. fys. *64*, 1935, 273—288.
10. Příspěvek k metrické teorii zborcených ploch. Sborník vys. školy techn. v Brně, sv. *XI*, spis 40, 1937.
11. O přímkových plochách v lineárním prostoru o lichém počtu rozměrů. Práce Moravské přírodovědecké společnosti, sv. *XII*, spis 4, 1940.
12. Spojnicové nomogramy pro termodynamické výpočty parních kotlů (společně s prof. inž. dr. *J. Čermákem*). Sborník Vys. školy techn. v Brně, sv. *XV*, spis 55, 1946.
13. Několik vztahů mezi diferenciálními invarianty zborcené přímkové osnovy eliptického prostoru. Sborník Vys. školy techn. v Brně, jubilejní svazek, 1949.
14. O zborcených přímkových osnovách neeukleidovského prostoru. Čas. pěst. mat. fys. *74*, 1950, 258—260.
15. Über Beziehungen einer Kurve auf einer Fläche im projektiven Raum S_3 zu den Komplexen ihrer kanonischen Geraden. Schriftenreihe des Instituts für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Heft *1*, Berlin 1957, 158—161.
16. O kongruencích *W* obsažených v lineárním komplexu. Sborník Vys. školy stavitelství v Brně, sv. *IV*, spis 68, 1955, 107—110.
17. K diferenciální geometrii přímkového prostoru. Sborník Vys. školy stavitelství v Brně, sv. *IV*, spis 68, 1955, 213—219.
18. O jedné větě Al. Pantaziho. Čas. pěst. mat. *81*, 1956, 117—118.
19. Godeauxova teorie ploch a lokální souřadnice v přímkovém prostoru. Sborník Vys. školy stavitelství v Brně, sv. *V*, spis 86, 1956, 29—40.
20. Über Paare von konjugierten Kurven einer Regelfläche. Spisy přír. fak. MU, č. *393*, 1958, 161—188.

B. Knižní publikace

1. Úvod do vektorového počtu a jeho užití v elektrotechnice. Česká matice technická. Svět a práce, sv. 21, Praha 1932, stran 64.
2. Jak se studují geometrické útvary v prostoru? I. díl. JČMF, Cesta k vědění, sv. 18, 1. vyd., Praha 1941, 2. vyd., Praha 1946, stran 80.
3. Jak se studují geometrické útvary v prostoru? II. díl. JČMF, Cesta k vědění, sv. 23, 1. vyd., Praha 1942, 2. vyd., Praha 1947, stran 114.
4. Deskriptivní geometrie. Přednášky pro posluchače odboru strojního a elektrotechnického inženýrství (skripta). Brno 1949, stran 432.
5. Deskriptivní geometrie (se zřetelem na její užití v strojní technice). Vědecko-technické nakladatelství, Praha 1951, str. 397.
6. Deskriptivní geometrie pro směr stavební, zeměměřičský a architekturu (společně s *R. Piskou* a *J. Zezulou*, skripta). 2 díly. Brno 1951, stran 735.
7. Analytická geometrie. Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1960, stran 378.

C. Ostatní publikace

1. E. Čech, Projektivní diferenciální geometrie. Čas. pěst. mat. fys. *56*, 1927, 132—133.
2. N. Eckhart, Konstruktive Abbildungsverfahren. Čas. pěst. mat. fys. *56*, 1927, 142—143.
3. Za Bohumilem Machytkou. Lidové noviny 13. 10. 1928.
4. Kadeřávek-Klíma-Kounovský, Deskriptivní geometrie, díl I. Lidové noviny 31. 3. 1929.

5. Dílo E. Čecha v diferenciální geometrii. Naše věda *XII*, 1931.
6. Fubini-Čech, Introduction à la géométrie différentielle projective. Lidové noviny 15. 4. 1931.
7. J. Vavřinec, Rýsování. Lidové noviny 2. 1. 1932.
8. Kadeřávek-Klíma-Kounovský, Deskriptivní geometrie, díl II. Lidové noviny 16. 11. 1932.
9. Jan Sobotka. Naše věda *XIII*, 1932.
10. J. Vojtěch, Projektivní geometrie. Naše věda *XVI*, 1935.
11. Technickej verejnosti na Slovensku. Slovenský stavitel' *VIII*, 1938.
12. V. Hlavatý, Projektivní geometrie, díl I. Naše věda *XXIV*, 1946.
13. V. Hlavatý, Hypersurfaces in a projective curved space (Annals of Mathematics *39*, 1938). Naše věda *XXIV*, 1946.
14. V. Hlavatý, Zur Lie'schen Kugelgeometrie (Spol. Nauk 1941). Naše věda *XXIV*, 1946.
15. V. Hlavatý, K Lieově kulové geometrie (Rozpravy II. tř. Čes. akad. *51* a *52*). Naše věda *XXIV*, 1946.
16. V. Hlavatý, Projektivní geometrie, díl II. Naše věda *XXIV*, 1946.
17. Úspěch a pocta. Lidové noviny 22. 10. 1946.
18. J. Kounovský, Zborcené plochy. Čas. pěst. mat. fys. *72*, 1947, D 44.
19. J. L. Krames, Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer. Čas. pěst. mat. fys. *72*, 1947, D 123—124.
20. Miloslav Pelíšek. XXI. výr. zpráva Moravskoslezské akademie přírodních věd, 1949.
21. Josef Klíma. XXI. výr. zpráva Moravskoslezské akademie přírodních věd, 1949.
22. 125 let od narození Františka Tilšera. Lidové noviny 31. 5. 1950.
23. Prof. dr. Fr. Kadeřávek pětašedesátníkem. Lidové noviny 23. 6. 1950.
24. O významu a vyučování matematických předmětů na Vysoké škole stavitelství. Budovatel, časopis stavební fakulty Brno, č. *3*, 8. 4. 1952.
25. Prof. dr. Ladislav Seifert zemřel. Čas. pěst. mat. *81*, 1956, 370—376.
26. János Bolyai (k 100. výročí jeho smrti). Věda a život, č. *4*, 1960.

SEDMDESÁT PĚT LET PROFESORA FRANTIŠKA KADEŘÁVKA

Dne 26. června tohoto roku dožívá se sedmdesáti pěti let plodného života profesor deskriptivní geometrie na fakultě inženýrského stavitelství v Praze Ing. dr. FRANTIŠEK KADEŘÁVEK, nositel Řádu republiky. Profesor Kadeřávek, žák mnoha našich známých vědců v oboru geometrie a matematiky, je význačnou osobností našeho života vědeckého a veřejného. Byl příkladem vysokoškolského učitele a v myslích svých spolupracovníků a žáků je jím stále, třebaže v současné době je již na zaslouženém odpočinku. Prof. Kadeřávek věnoval bojovně celý svůj život výstavbě Českého vysokého učení technického, vychoval celé generace stavebních inženýrů, učitelů deskriptivní geometrie a výtvarníků. Jeho žáci na něho stále vzpomínají jako na člověka dobrého srdce a v práci se studenty příkladně obětavého.

Ve své rozsáhlé publikační činnosti zabýval se prof. Kadeřávek teoretickou problematikou v oboru deskriptivní a syntetické geometrie, dále aplikacemi geometrie v technice a ve výtvarném umění a konečně studiemi význačných představitelů českého života. Napsal sám nebo se spolupracovníky 67 publikací (z toho 11 knižních). Podrobný rozbor jeho vědecké a publikační činnosti s jejím výčtem byl uveřejněn v tomto časopise u příležitosti jeho sedmdesátin (Časopis pro pěst. matematiky, *80* (1955), 375—382).

Schopnost prof. Kadeřávka aplikovat geometrii na technickou praxi byla zcela jedinečná. Svým dílem se stal nestorem české deskriptivní geometrie. Velikou zásluhou prof.

Kadeřávka je, že se v přednáškách pro České vysoké učení technické stal průkopníkem technicky pojímané deskriptivní geometrie, což bylo vzhledem k dřívějším poměrům po této stránce zásahem téměř převratným.

Za své celoživotní dílo byl odměněn propůjčením vysokého vyznamenání; na podzim roku 1955 se stal nositelem Řádu republiky.

V nedávné době vykonal významnou práci při organisaci oslav 250 let technických škol v Praze v roce 1957; spolu s profesorem Ing. dr. J. PULKRÁBKEM napsal dokonce k této příležitosti slavnostní Sborník. Ani dnes prof. Kadeřávek zdaleka nezahálí. Obětavě sbírá materiál pro napsání dějin jeho milovaného Českého vysokého učení technického v Praze. Všichni ti, kteří prof. Kadeřávka znají, vzpomínají na něho srdečně u příležitosti jeho 75. narozenin a přejí mu upřímně do dalších let mnoho zdraví a dalších úspěchů v jeho neutuchající činnosti.

Bořivoj Kepr, Praha

DESÁTÉ VÝROČÍ SMRTI KARLA PETRA

Na paměť desátého výročí smrti vynikajícího vědce a učitele, profesora matematiky university Karlovy KARLA PETRA uspořádaly: matematicko-fysikální sekce ČSAV, matematicko-fysikální fakulta KU a Jednota československých matematiků a fysiků slavnostní schůzi. Tato pietní schůze se konala 22. února 1960 na matematicko-fysikální fakultě. Zahájil ji akademik VOJTĚCH JARNÍK a o životě a díle profesora Petra promluvil bývalý žák a asistent profesora Petra akademik ŠTEFAN SCHWARZ. Obsah jeho přednášky najde čtenář v časopise „Pokroky matematiky, fysiky a astronomie", *5* (1960), č. 4.

Redakce

100 LET OD NAROZENÍ MATYÁŠE LERCHA

U příležitosti stého výročí narození vynikajícího matematika MATYÁŠE LERCHA (* 20. 2. 1860, † 3. 8. 1922), profesora brněnské techniky a později brněnské university, konala se dne 20. února 1960 na katedře matematiky přírodovědecké fakulty MU v Brně slavnostní schůze uspořádaná přírodovědeckou fakultou MU, Vysokým učením technickým v Brně a brněnskou pobočkou JČMF.

O životě a díle Lerchově promluvil jeho žák člen korespondent ČSAV, profesor OTAKAR BORŮVKA.

Slavnost byla zakončena odhalením Lerchovy pamětní desky na budově matematických a fysikálních ústavů přírodovědecké fakulty.

Vylíčení Lerchova života a jeho přínosu světové matematice je otištěno v tomto časopise na str. 228—240 v článku dr. JOSEFA ŠKRÁŠKA.

Redakce

100 LET OD SMRTI JÁNOSE BOLYAIE

V rámci Světových kulturních výročí uspořádaly Československý výbor obránců míru, Matematicko-fysikální fakulta University Karlovy, Jednota československých matematiků a fysiků a Československá společnost pro šíření politických a vědeckých znalostí dne 18. ledna 1960 na Matematicko-fysikální fakultě KU slavnostní zasedání k příležitosti 100. výročí smrti maďarského matematika JÁNOSE BOLYAIE (* 15. XI. 1802, † 27. 1. 1860).

Zasedání zahájil úvodním slovem akademik VLADIMÍR KOŘÍNEK a o životě a díle J. Bolyaie promluvil docent matematicko-fysikální fakulty KU KAREL HAVLÍČEK.

Vylíčení Bolyaiova života a jeho významu pro světovou matematiku najde čtenář v tomto časopisu na str. 241–255 v článku dr. JANA B. PAVLÍČKA.

Redakce

PROFESOR ASTRONOMIE ZDENĚK KOPAL V PRAZE

Počátkem r. 1960 navštívil Prahu na pozvání ČSAV dr. ZDENĚK KOPAL, profesor astronomie na universitě v Manchesteru ve Velké Británii. Přednášel na Astronomickém ústavu ČSAV o možnostech práce a pomocných přístrojích pro dvoumetrový dalekohled, jehož stavba se chystá. Dne 5. ledna přednášel v klubovně ČSAV o vnitřní stavbě a vývoji hvězd; ukázal, že tento zdánlivě nedostupný problém lze velmi uspokojivě matematicky řešit. Dne 8. ledna měl veřejnou přednášku o Měsíci, v níž poutavě posluchače seznámil s překážkami, které budou musit příští cestovatelé překonávat na Měsíci, a uvedl některé své původní výsledky zejména o topografii Měsíce.

Prof. Kopal pracuje i v oboru numerické analysy a byl po několik let profesorem tohoto oboru na Massachussets Institute of Technology v Cambridgi (USA). O nových pracích v oboru numerické integrace diferenciálních rovnic přednášel dne 4. ledna na schůzi pražské pobočky JČMF.

Miroslav Plavec, Ondřejov

ZPRÁVA O POBYTU AKADEMIKA KOLMOGOROVA V ČSR

Dne 14. března přijel do Prahy na pozvání matematicko-fysikální sekce ČSAV akademik ANDREJ NIKOLAJEVIČ KOLMOGOROV. Větší část svého pobytu v ČSR, který trval do 26. března, ztrávil v Praze. Jeden den pobýval v Bratislavě a dva dny dlel ve Vysokých Tatrách na observatoři SAV na Skalnatém Plese.

V Praze měl na matematicko-fysikální fakultě KU cyklus pěti dvouhodinových přednášek „Současné problémy teorie aproximací". V těchto přednáškách byly shrnuty výsledky akademika Kolmogorova a jeho žáků v tomto oboru, výsledky o ε-entropii totálně ohraničených množin a o superposici spojitých funkcí. V pondělí 21. března byla uspořádána v JČMF přednáška „Limitní zákony pro součty nezávislých sčítanců". Pojednávala o nových pracích v tomto směru v SSSR. Akademik Kolmogorov navštívil Matematický ústav ČSAV, Ústav teorie informace ČSAV a Výzkumný ústav tepelné techniky. Řada matematiků čerpala z rozhovorů s ním podněty do další práce. Ak. Kolmogorov se zúčastnil pohřbu akademika EDUARDA ČECHA a ve svém projevu ukázal, jak je v SSSR ceněno dílo tohoto velkého našeho učence. V Bratislavě navštívil katedru matematiky Slovenského vysokého technického učení, prohlédl si studentské koleje a měl přednášku „Teorie aproximací a teorie informace".

Akademik Kolmogorov byl hostem ČSAV. V oblasti kultury se nejvíce zajímal o hudbu a o sochařství.

Redakce

ZPRÁVA O POBYTU ČS. MATEMATIKA IVO VRKOČE V SOVĚTSKÉM SVAZU

Ve dnech 6. října až 7. prosince 1959 jsem byl na studijní cestě v SSSR. V Moskvě jsem navštívil Institut mechaniky AN SSSR, s kterým má Matematický ústav ČSAV smlouvu o vzájemné vědecké spolupráci v otázkách nelineárních kmitů a stability pohybu. V oddělení obecné mechaniky tohoto ústavu věnují otázkám stability pohybu značnou pozornost. Musím však bohužel podat současně smutnou zprávu. V době mého pobytu v Moskvě dne 17. X. 1959 náhle zemřel vedoucí tohoto oddělení vynikající sovětský matematik N. G. ČETAEV, který se svým dílem zařadil mezi klasiky teorie stability a analytické mechaniky. V oddělení obecné mechaniky s úspěchem používají druhé Ljapunovovy metody (tj. metody ljapunovských funkcí) k řešení prakticky důležitých případů. V tomto směru zvláště pracuje V. V. RUMJANCEV, B. S. RAZUMICHIN a další. Otázkám stability je také věnována značná pozornost v Institutu automatiky a telemechaniky AN SSSR. Zde se zvláště zabývají problémy stability ustálených řešení diferenciálních rovnic, které vyjadřují automaticky regulovaný systém (A. M. LETOV, B. V. ŠIROKORAD, V. S. PUGAČOV, M. A. AJZERMAN).

Dalším střediskem teorie obyčejných diferenciálních rovnic je seminář na Lomonosově universitě vedený V. V. NĚMYCKIM; pěstuje se v něm převážně kvalitativní teorie diferenciálních rovnic. Na semináři jsem se seznámil s řadou mladých matematiků, zvláště s R. E. VINOGRADEM a I. M. SOBOLEM.

Velký význam v teorii diferenciálních rovnic má rovněž skupina pracovníků vedená L. S. PONTRJAGINEM (R. V. GAMKRELIDZE, V. G. BOLŤANSKIJ, E. F. MIŠČENKO) v Matematickém institutu Stěklova. Dříve se úspěšně zabývala diferenciálními rovnicemi s malým parametrem u vyšších derivací. Dnes se zde zcela věnují novým problémům, které vznikají v souvislosti s optimálním regulováním procesů. L. S. Pontrjagin formuloval „princip maxima", který je nutnou podmínkou optimálnosti procesu regulování.

V Leningradu se teorií obyčejných diferenciálních rovnic zabývají jednak na universitě, jednak v odbočce Matematického ústavu AN SSSR. V teorii stability pracuje V. I. ZUBOV. V. A. PLISSA a jiní spíše pěstují teorii diferenciálních rovnic speciálních typů, zvláště lineárních.

V Kijevě se zabývá teorií obyčejných diferenciálních rovnic Ju. A. MITROPOLSKIJ, vedoucí oddělení matematické fysiky v Matematickém institutu AN USSR, dále Ju. D. SOKOLOV, jehož přibližná metoda „osredněnija funkcionalnych popravok", vhodná pro řešení integrálních rovnic, okrajových úloh z teorie obyčejných diferenciálních rovnic a pro mnohé úlohy z teorie parciálních diferenciálních rovnic, není u nás tak známá, jak by zasluhovala. Diferenciálními rovnicemi, jejichž pravé strany jsou polynomy, se zabývají na universitě. Je třeba poznamenat, že teorii stability se úspěšně zabývá ještě skupina matematiků ve Sverdlovsku.

V SSSR jsem měl celkem šest přednášek o svých vlastních výsledcích, z toho čtyři v Moskvě a po jedné v Leningradu a Kijevě.

I. Vrkoč, Praha

SYMPOZIUM O NUMERICKÝCH METODÁCH V MECHANICE – LODŽ 1960

Ve dnech 18. až 21. ledna 1960 uspořádalo Towarzystwo mechaniki teoretycznej i stosowanej sympozium o numerických metodách mechaniky.

Sympozia účastnili se vědečtí pracovníci z Polska, ČSR (doc. dr. MIL. HAMPL a dr. I. BABUŠKA) a Velké Británie (prof. P. GROOTEŇHUIS). Na sympoziu bylo předneseno celkem 22 referátů, po nichž se rozproudila vždy čilá diskuse. Doc. dr. M. Hampl přednesl referát „Namáhání rotujícího kotouče s proměnnou tloušťkou s ohledem na jeho ohřátí", dr. Babuška referoval o své společné práci s J. Kautským „Aplikace teorie malých tvarových změn v numerických metodách matematické pružnosti". Sympozium a jeho průběh ukázalo širokou práci a cílevědomé úsilí polských mechaniků. O tom svědčí také to, že v srpnu 1959 konala se v Gdansku rozsáhlá mezinárodní konference o mechanice a letos se připravuje ještě další speciální mechanické sympozium ve Štětíně, kde se bude jednat o kmitech soustav s konečným stupněm volnosti.

I. Babuška, Praha

ZPRÁVA O POBYTU DR. JAROSLAVA KURZWEILA V SSSR

V SSSR jsem byl od 26. 1. do 20. 2. tr. Ve dnech 27. 1. až 3. 2. účastnil jsem se 1. všesvazového sjezdu teoretické a aplikované mechaniky. Sjezd byl velmi bohatý a obsáhlý. Účastnilo se ho asi 2000 sovětských vědeckých pracovníků, kteří representovali pracoviště AV SSSR, akademií svazových republik, vysokých škol, výzkumných ústavů resortních a výzkumná pracoviště průmyslu, a 40 zahraničních hostí. Sjezd zasedal ve třech sekcích: I. obecná a aplikovaná mechanika, II. mechanika kapalin a plynů, III.mechanika pevných těles. V každé sekci bylo několik plenárních přednášek, které trvaly asi 40 minut a měly přehledný charakter. Sdělení účastníků sjezdu byla přednesena v podsekcích. I. sekce měla 3, II. sekce 6, III. sekce 7 podsekcí. Účastnil jsem se práce první sekce a sledoval jsem zasedání podsekce „analytická mechanika a teorie stability pohybu" a podsekce „setrvačníky, kmity a regulace". Vcelku lze říci, že obsah sdělení byl velmi pestrý, že byl přednesen velký počet sdělení teoretického charakteru (např. sdělení M. Krasnoselského o nové topologické metodě k dokázání existence periodického řešení soustavy diferenciálních rovnic, řada referátů o stabilitě a o oscilacích a řada referátů o otázkách obecné mechaniky); ale nechyběla ani sdělení, která se týkala konkrétních problémů a „inženýrských metod" k jejich řešení. Vzhledem k tomu, že v červnu tr. bude v Moskvě uspořádán mezinárodní sjezd o automatické regulaci, bylo otázkám regulace věnováno poměrně málo pozornosti a na zasedáních I. sekce neshledal jsem se s přednáškou nebo sdělením o použití matematických strojů.

Po zakončení sjezdu navštívil jsem několik vědeckých pracovišť v Moskvě. Nejčastější styk jsem měl s pracovníky oddělení obecné mechaniky Ústavu mechaniky AN SSSR.

Na sjezdu měl jsem dne 30. 1. sdělení o stabilitě v souvislosti s teorií zobecněných funkcí. O témže tématě měl jsem dne 16. 2. přednášku na semináři v Ústavu mechaniky; na semináři teorie obyčejných diferenciálních rovnic na mechanicko-matematické fakultě Lomonosovy státní university měl jsem 18. 2. přehlednou přednášku o práci oddělení obyčejných diferenciálních rovnic MÚČSAV.

Jaroslav Kurzweil, Praha

JMENOVÁNÍ PROFESORŮ NA KARLOVĚ UNIVERSITĚ

President Československé republiky jmenoval doc. RNDr. Františka Nožičku profesorem matematiky a doc. PhDr. Ladislava Truksu profesorem matematické statistiky Karlovy university.

Redakce

OBHAJOBY DISERTAČNÍCH PRACÍ DOKTORŮ VĚD

Disertační práce doktora fysikálně-matematických věd obhájili: Na matematicko-fysikální fakultě KU v Praze dne 19. února 1959 doc. dr. Jan Mařík práci „The surface integral" a při Matematickém ústavě ČSAV v Praze dne 10. prosince 1959 doc. dr. Ladislav Rieger práci „A contribution to Gödel's axiomatic set theory".

Redakce