

Werk

Label: Article

Jahr: 1959

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0084|log93

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

O JISTÉM ZOBECNĚNÍ DOPRAVNÍHO PROBLÉMU

JAROMÍR ABRHAM, Praha

(Došlo dne 8. srpna 1958)

DT:330.609.1

V práci je podáno řešení zobeněného dopravního problému lineárního programování, v němž předpoklad rovnosti výroby a spotřeby je nahrazen předpokladem, že možnosti výroby převyšují spotřebu.

Nejprve podáme stručnou ekonomickou formulaci naší úlohy podle [1]:

Máme dán jistý druh kvalitativně homogenního zboží, které je vyráběno v m výrobních střediscích o kapacitách $a_1, \dots, a_m$ a odebíráno n spotřebními středisky v množstvích $b_1, \dots, b_n$. Předpokládáme přitom, že $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$. Náklad na výrobu jednotkového množství uvažovaného zboží v i -tém výrobním středisku a jeho dopravu do j -tého spotřebního střediska budiž c_{ij} . Úkolem je sestavit plán výroby a dopravy daného zboží, tj. rozhodnout, kolik zboží se má v každém výrobním středisku vyrobit a kam a v jakých množstvích je třeba je rozvézt, aby přitom byly splněny požadavky všech spotřebních středisek a aby celkové výrobní a dopravní náklady byly minimální.

Řešit uvedenou úlohu znamená tedy najít čísla $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, pro něž $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$, $i = 1, \dots, m$, $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$, $j = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \min$. x_{ij} přitom značí množství zboží, které má býti dodáno z i -tého výrobního do j -tého spotřebního střediska.

Zobecnění ve srovnání s „klasickým“ dopravním problémem spočívá v tom, že původní předpoklad rovnosti $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ je nahrazen předpokladem $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, který umožňuje počítat nejen se skutečným stavem výroby, ale i s kapacitami jednotlivých výrobních center.

Pojem M -systému, kterého budeme v dalším používat, má též smysl jako např. v [2] nebo [3].

Než přistoupíme k matematickému řešení uvedené úlohy, zavedeme si několik pojmů.

Zobecněný M -systém $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n)$ je uspořádaná množina $m + n$ kladných čísel $a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n$, pro něž $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$. Řešením zobecněného M -systému $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n)$ nazveme libovolnou matici $X = (x_{ij})$ typu m, n s nezápornými prvky, pro něž $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m$.

Označme $\mathfrak{M}$ množinu všech řešení daného zobecněného M -systému. Pak platí

1. $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Zvolme libovolně m kladných čísel $a'_1, \dots, a'_m$ tak, aby bylo $a'_i \leq a_i, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m a'_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Pak čísla $a'_1, \dots, a'_m; b_1, \dots, b_n$ tvoří M -systém, jehož každé řešení je i řešením daného zobecněného M -systému.

2. Množina $\mathfrak{M}$ je omezená ve smyslu metriky m, n -rozměrného euklidovského prostoru. Označíme-li totiž O nulovou matici typu m, n , je $\rho^2(X, O) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2$. Je však $0 \leq x_{ij} \leq b_j$, a tedy $\rho^2(X, O) \leq m \sum_{j=1}^n b_j^2$.

3. Množina $\mathfrak{M}$ je konvexní. Budťež $X, Y \in \mathfrak{M}, 0 < \alpha < 1$. Označme $Z = \alpha X + (1 - \alpha) Y$. Pak $\sum_{i=1}^m z_{ij} = \alpha \sum_{i=1}^m x_{ij} + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^m y_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n$, a podobně $\sum_{j=1}^n z_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m$. Odtud plyne $Z \in \mathfrak{M}$.

4. Množina $\mathfrak{M}$ je uzavřená.

Označme nyní $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j > 0$. Pak čísla $a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$ tvoří M -systém, který nazveme sdružený s daným zobecněným M -systémem $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n)$.

Budiž $M^* = \mathcal{M}(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n, b_{n+1})$ M -systém sdružený se zobecněným M -systémem $M = \mathcal{M}(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n)$. Pak existuje jednoznačné a oboustranně spojitě zobrazení množiny $\mathfrak{M}^*$ všech řešení M -systému M^* na množinu $\mathfrak{M}$ všech řešení zobecněného M -systému M .

Budiž dáno $X^* \in \mathfrak{M}^*$. Přiřadíme mu $X \in \mathfrak{M}$, kde X je matice, která vznikne z matice X^* vynecháním $n + 1$ -tého sloupce. Naopak každé matici $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{M}$ přiřadíme matici $X^* \in \mathfrak{M}^*$, která vznikne z X přidáním $n + 1$ -vého sloupce, jenž obsahuje prvky $a_1 - \sum_{j=1}^n x_{1j}, \dots, a_m - \sum_{j=1}^n x_{mj}$. Takto je zřejmě definováno jednoznačné zobrazení $X \longleftrightarrow X^*$. Dokážeme, že toto zobrazení

je oboustranně spojitě ve smyslu konvergence podle prvků matic (která je ovšem ekvivalentní s konvergencí podle metriky m - n -rozměrného euklidovského prostoru).

Budiž $\{X_r^*\}_{r=1}^\infty$ konvergentní posloupnost matic z množiny $\mathfrak{M}^*$. Je-li $X^* = \lim_{r \rightarrow \infty} X_r^*$, je zřejmě také $X = \lim_{r \rightarrow \infty} X_r$, kde $X \leftrightarrow X^*$, $X_r \leftrightarrow X_r^*$, $r = 1, 2, \dots$

Nechť naopak $\{X_r\}_{r=1}^\infty$ je konvergentní posloupnost matic z množiny $\mathfrak{M}$ a nechť $X = \lim_{r \rightarrow \infty} X_r$. Budiž dále $X^* \leftrightarrow X$, $X_r^* \leftrightarrow X_r$, $r = 1, 2, \dots$. Označme $X_r^* = (x_{ij}^{(r)*})$, $X_r = (x_{ij}^{(r)})$, $r = 1, 2, \dots$. Je pak $x_{ij}^{(r)*} = x_{ij}^{(r)}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $x_{i,n+1}^{(r)*} = a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(r)}$, $i = 1, \dots, m$ pro všechna r . Odtud a z předpokladu $X = \lim_{r \rightarrow \infty} X_r$ plyne ihned $X^* = \lim_{r \rightarrow \infty} X_r^*$.

Budiž $X \in \mathfrak{M}$. Pak řekneme, že matice X je *základním řešením* daného zobecněného M -systému, je-li $X \leftrightarrow X^*$, kde X^* je nějaké základní řešení M -systému sdruženého s daným zobecněným M -systémem. (Pojem „základní řešení M -systému“ je užíván ve smyslu pojmu „einfache Lösung“ z [2].)

Je známo (viz [3]), že množina všech řešení daného M -systému je konvexním obalem množiny všech základních řešení tohoto M -systému. Snadno zjistíme, že tato věta zůstává v platnosti i pro zobecněné M -systémy.

Obrátíme se nyní k řešení dříve uvedené úlohy. Budiž dán zobecněný M -systém $M = \mathcal{M}(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n)$ a matice $C = (c_{ij})$ typu m, n . Úkolem je najít aspoň jedno C -minimální řešení daného zobecněného M -systému, tj.

takové jeho řešení X_0 , pro něž $(C, X_0) = \min_{X \in \mathfrak{M}} (C, X)$, kde $(C, X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$.

Nechť $M^* = \mathcal{M}(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n, b_{n+1})$ je M -systém sdružený s M . Označme C^* matici, která vznikne z matice C připojením $n + 1$ -vého sloupce obsahujícího vesměs nulové prvky. Budiž X_0^* takové řešení M -systému M^* , že $(C^*, X_0^*) = \min_{X^* \in \mathfrak{M}^*} (C^*, X^*)$. Nechť $X_0 \in \mathfrak{M}$, $X_0 \leftrightarrow X_0^*$. Pak zřejmě platí

$(C, X_0) = (C^*, X_0^*) \leq (C^*, X^*) = (C, X)$, kde X^* je libovolný prvek množiny $\mathfrak{M}^*$ a $X \leftrightarrow X^*$. Odtud $(C, X_0) = \min_{X \in \mathfrak{M}} (C, X)$. Tento vztah umožňuje převést

řešení zobecněného dopravního problému na řešení původního problému.

Ze známých vlastností M -systémů plyne pak, že existuje vždy aspoň jedno C -minimální základní řešení daného zobecněného M -systému.

Budiž nyní X základní řešení zobecněného M -systému M . Pak řekneme, že matice X je *nerozložitelná*, je-li $X \leftrightarrow X^* \in \mathfrak{M}^*$, kde X^* je nerozložitelná matice ve smyslu zavedeném v [2].

Budiž X_0 základní, nerozložitelná a C -minimální řešení zobecněného M -syste-