Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

O JISTÉ POLOGRUPĚ ENDOMORFISMŮ NA JEDNODUŠE USPOŘÁDANÉ MNOŽINĚ, I

BEDŘICH PONDĚLÍČEK, Poděbrady

(Došlo dne 2. července 1958)

DT: 519.513

Článek se zabývá větou 3 z práce [1] F. Šika, platící pro grupu automorfismů na jednoduše uspořádané množině $\mathfrak{M}$. Tato věta je zobecněna pro jistou pologrupu endomorfismů na $\mathfrak{M}$.

Nechť $\mathfrak{M}$ v celé práci znamená jednoduše uspořádanou množinu. *Endomorfismem na* $\mathfrak{M}$ budeme rozumět takové zobrazení f množiny $\mathfrak{M}$ na sebe, které má vlastnost

$$x \leqq y \ (x, y \in \mathfrak{M}) \Rightarrow f(x) \leqq f(y) .$$

Prostý endomorfismus na $\mathfrak{M}$ nazýváme *automorfismem na* $\mathfrak{M}$. Rozklad množiny $\mathfrak{M}$ (s konvexními prvky), který je vytvořen endomorfismem f, nazýváme *rozkladem prostoty* endomorfismu f. Zřejmě endomorfismus f je automorfismem na $\mathfrak{M}$ tehdy a jen tehdy, jestliže jeho rozklad prostoty je na $\mathfrak{M}$ minimální.

Definice 1. *Cyklem endomorfismu f na $\mathfrak{M}$ rozumíme množinu A, která má jednu z těchto vlastností:*

a) *Nechť $f(a) = a$, potom* $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E[x \in \mathfrak{M};\ f^n(x) = a]$.

b) *Nechť $\{f^n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá posloupnost; zvolme posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ (kde $f^n(u_n) = y$), potom A je sjednocení všech intervalů množiny $\mathfrak{M}$ s koncovými body $f^n(y), u_n$.*

Obsahuje-li cyklus aspoň dva prvky, nazývá se *vlastní*. Vlastní cyklus typu b) nazývá se *cyklus bez význačného bodu*. Vlastní cyklus typu a) se nazývá *cyklus s význačným bodem a*. Jestliže význačný bod a je koncovým bodem cyklu A, nazýváme tento cyklus *jednostranný*. V opačném případě nazýváme cyklus *oboustranný*. Snadno zjistíme, že definice cyklu A typu b) nezávisí ani na volbě bodu $y \in A$ ani na volbě pomocné posloupnosti $\{u_n\}$. Všechny cykly jednoho endomorfismu f tvoří rozklad na $\mathfrak{M}$ (s konvexními prvky), který se endomorfismem f zachovává.

Jestliže $f(x) = x$ $(x \in \mathfrak{M})$, potom x nazveme *samodružným bodem* endomorfismu f. Množinu všech samodružných bodů endomorfismu f na $\mathfrak{M}$ označíme

$\mathfrak{M}[f]$. Dále označíme $\mathfrak{M}(f) = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}[f]$. Nechť Γ je množina endomorfismů na $\mathfrak{M}$, potom $\mathfrak{M}(\Gamma) = \bigcup_{f \in \Gamma} \mathfrak{M}(f)$ a $\mathfrak{M}[\Gamma] = \bigcap_{f \in \Gamma} \mathfrak{M}[f]$.

Pologrupou rozumíme asociativní grupoid. *Částečně uspořádanou pologrupou* rozumíme pologrupu, která je částečně uspořádána, a v níž platí

$$a \leqq b \Rightarrow ac \leqq bc,\ ca \leqq cb .$$

Řekneme, že v pologrupě platí *pravidlo o krácení zprava* (*zleva*), jestliže

$$ac = bc \Rightarrow a = b\,, \quad (ca = cb \Rightarrow a = b)\,.$$

Snadno zjistíme, že množina všech endomorfismů $\mathfrak{H}$ (všech automorfismů $\mathfrak{G}$) vzhledem k skládání zobrazení a částečnému uspořádání ($f \leqq g \Leftrightarrow f(x) \leqq g(x)$ pro všechna $x \in \mathfrak{M}$) tvoří l-pologrupu (l-grupu) ([2], XIII a XIV), tím také částečně uspořádanou pologrupu (grupu). Zřejmě $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$.

Lemma 1. *V pologrupě $\mathfrak{H}$ platí pravidlo o krácení zprava.*

Důkaz. Nechť $fh = gh$ ($f, g, h \in \mathfrak{H}$). Nechť $x \in \mathfrak{M}$, potom existuje aspoň jeden prvek $u \in \mathfrak{M}$ takový, že $h(u) = x$. Zřejmě $fh = gh \Rightarrow fh(u) = gh(u) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow f = g$.

Nechť A je neprázdná podmnožina pologrupy B. Nechť $a, b \in B$. Řekneme, že *a dělí b zprava podle množiny A* ($a/_A b$), jestliže existuje $r \in A$ takové, že $b = ra$.

Lemma 2. *Nechť $\Gamma \subset \mathfrak{H}$, potom $f/_\Gamma f$ ($f \in \mathfrak{H}$) tehdy a jen tehdy, jestliže $e \in \Gamma$ (kde e je identický endomorfismus na $\mathfrak{M}$).*

Důkaz. Nechť $e \in \Gamma$, potom $f = ef$ ($f \in \mathfrak{H}$) $\Rightarrow f/_\Gamma f$. Nechť $f/_\Gamma f$ ($f \in \mathfrak{H}$), potom $f = rf$ ($r \in \Gamma$). Zřejmě $ef = rf$, z čehož podle lemmatu 1 vyplývá, že $e = r$, a tedy $e \in \Gamma$.

Věta 1. *Nutná a postačující podmínka, aby $f/_\mathfrak{H} g$ ($f, g \in \mathfrak{H}$) je, aby rozklad prostoty endomorfismu g na $\mathfrak{M}$ byl zákrytem rozkladu prostoty endomorfismu f na $\mathfrak{M}$.*

Důkaz. Nechť $f/_\mathfrak{H} g$ ($f, g \in \mathfrak{H}$), potom $g = rf$ ($r \in \mathfrak{H}$). Nechť $f(u) = f(v)$ ($u, v \in \mathfrak{M}$), potom $g(u) = rf(u) = rf(v) = g(v)$. Implikace $f(u) = f(v)$ ($u, v \in \mathfrak{M}$) $\Rightarrow g(u) =$ $= g(v)$ znamená, že rozklad prostoty g je zákrytem rozkladu prostoty f.

Nechť $f(u) = f(v)$ ($u, v \in \mathfrak{M}$) $\Rightarrow g(u) = g(v)$. Budiž $x \in \mathfrak{M}$; existuje $u \in \mathfrak{M}$ tak, že $f(u) = x$; definujme $r(x) = g(u)$. Zřejmě definice endomorfismu r nezávisí na volbě $u \in \mathfrak{M}$ a platí $g = rf$, tedy $f/_\mathfrak{H} g$.

Definice 2. *Řekneme, že pologrupa Γ endomorfismů na $\mathfrak{M}$ má vlastnost* (γ), *jestliže platí:*

a) *Nechť $f \in \Gamma$, potom f nemá oboustranný cyklus.*

b) *Nechť $f, g \in \Gamma$, potom $f/_\Gamma g$ nebo $g/_\Gamma f$.*

Na základě lemmatu 2 obsahuje tedy pologrupa Γ, která má vlastnost (γ), identitu e.

Lemma 3. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ má vlastnost* (γ), *potom je jednoduše uspořádaná tehdy a jen tehdy, jestliže $e \gtreqless f$ pro všechna $f \in \Gamma$.*

Důkaz. Nutnost podmínky je samozřejmá. Nechť tedy $e \gtreqless h$ pro všechna $h \in \Gamma$. Nechť $f, g \in \Gamma$, potom $f = rg$ nebo $g = rf$ ($r \in \Gamma$). Ze vztahu $e \gtreqless r$ vyplývá $f \gtreqless g$.

Definice 3. *Endomorfismus f na $\mathfrak{M}$ se nazývá monocyklický, jestliže má nejvýše jeden vlastní cyklus.*

Pologrupa Γ se nazývá monocyklická, jestliže každý endomorfismus $f \in \Gamma$ je monocyklický.

Definice 4. *Fází endomorfismu f na $\mathfrak{M}$ ($f \neq e$) rozumíme takový endomorfismus g na $\mathfrak{M}$, pro který platí:*

a) *existuje vlastní cyklus F endomorfismu f takový, že $g(x) = f(x)$ pro $x \in F$;*

b) *$g(x) = x$ pro $x \in \mathfrak{M} - F$.*

Nechť N značí v celé práci množinu všech přirozených čísel.

Definice 5. *Řekneme, že pologrupa Γ endomorfismů na $\mathfrak{M}$ má vlastnost (α), jestliže ke každému endomorfismu $f \neq e$ ($f \in \Gamma$) existuje jeho fáze g a $n \in N$ takové, že $g^n \in \Gamma$ a $f^n/_\Gamma g^n$.*

Věta 2. *Na pologrupě Γ endomorfismů na $\mathfrak{M}$, která má vlastnost (γ), jsou ekvivalentní následující vlastnosti:*

a) *Γ je monocyklická;*

b) *Γ je jednoduše uspořádaná a má vlastnost (α).*

Důkaz. a $\Rightarrow$ b. Na základě lemmatu 3 stačí dokázat, že $e \gtreqless f$ pro každé $f \in \Gamma$. Nechť tedy existuje $r \in \Gamma$ takové, že $r \| e$, z čehož vyplývá, že existují $x, y \in \Gamma$, pro která $x < r(x)$ a $y > r(y)$. Tedy endomorfismus r má buď alespoň dva vlastní cykly nebo oboustranný cyklus, a to je spor. Z toho, že Γ je monocyklická pologrupa, snadno vyplývá, že Γ má vlastnost (α).

b $\Rightarrow$ a. Nechť $f \in \Gamma$ a má dva vlastní cykly F a G ($F \cap G = \emptyset$). Zřejmě existuje fáze g endomorfismu f a $n \in N$ takové, že $g^n \in \Gamma$ a $f^n/_\Gamma g^n$. Tedy $g^n(x) = f^n(x)$ pro $x \in F$, $g^n(x) = x$ pro $x \in G$ a $g^n(x) = rf^n(x)$ pro $x \in \mathfrak{M}$, kde $r \in \Gamma$.

Nechť $e < f^n$. Vezměme $u \in F (v \in G)$, kde $u(v)$ není význačným bodem cyklu $F(G)$. Zřejmě $u < f^n(u) = g^n(u) = rf^n(u) = rg^n(u)$ a $v < f^n(v) \Rightarrow g^n(v) < f^n(v) \Rightarrow rf^n(v) < f^n(v) \Rightarrow r(w) < w$ (kde $w = f^n(v) \in G$), a tedy $w = g^n(w) \Rightarrow rg^n(w) < w$, což znamená, že $rg^n \| e$ (kde $rg^n \in \Gamma$), a to je spor. Stejným způsobem dojdeme ke sporu v případě $f^n < e$.

Definice 6. *Monocyklická pologrupa Γ se nazývá silně monocyklická, jestliže $\mathfrak{M}[f] = \mathfrak{M}[g]$ pro $f, g \in \Gamma$ ($f, g \neq e$).*

Poznámka 1. Jestliže Γ je monocyklická grupa automorfismů na $\mathfrak{M}$, je též silně monocyklická (viz [1], str. 5, věta 3, a $\Rightarrow$ c). Pokud jde o pologrupy endomorfismů na $\mathfrak{M}$, nemusí toto platit, jak ukazuje následující příklad:

Nechť C je množina všech celých čísel. Buď $\mathfrak{M}$ množina uspořádaných dvojic (i, k), kde $i, k \in C$, $i < 1$ nebo $i = 1$ a $k \geqq 0$. Množinu $\mathfrak{M}$ uspořádáme lexikograficky. Definujeme dále dva endomorfismy f a g na $\mathfrak{M}$:

$$f(i, k) = (i, k)\,, \quad i \neq 0\,; \quad f(0, k) = (0, k + 1)$$

pro $(i, k) \in \mathfrak{M}$. Zřejmě f má jediný vlastní cyklus (bez význačného bodu) F, který je množinou všech dvojic $(0, k)$, kde $k \in C$.

$$g(i, k) = (i + 1, k)\,, \; i < 0\,; \quad g(0, k) = (1, 0)\,; \quad g(1, k) = (1, k + 1)$$

pro $(i, k) \in \mathfrak{M}$. Zřejmě $\mathfrak{M}$ je jediný vlastní cyklus (bez význačného bodu) endomorfismu g. Čtenář snadno dokáže, že $gf = g$. Vezměme tedy množinu Γ všech endomorfismů na $\mathfrak{M}$ tvaru $f^m g^n$, kde m, n jsou celá nezáporná čísla. Snadno zjistíme, že Γ tvoří monocyklickou pologrupu, která má vlastnost (γ), ale není silně monocyklická.

Řekneme, že jednoduše uspořádaná pologrupa (s jednotkovým prvkem e) je *zleva archimedovsky uspořádaná*, jestliže pro $a < b$, $c > e$ resp. $a < b$, $c < e$ existuje $n \in N$ resp. $m \in N$ takové, že $c^n a \geqq b$ resp. $a \geqq c^m b$.

Lemma 4. *Nechť jednoduše uspořádaná pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ má vlastnost (γ); potom je archimedovsky uspořádaná zleva tehdy a jen tehdy, jestliže pro $e < f < g$ ($f < e < g$ nebo $g < f < e$ nebo $g < e < f$) existuje $n \in N$ takové, že $f^n \geqq g$ ($e \geqq f^n g$ nebo $g \geqq f^n$ nebo $f^n g \geqq e$).*

Důkaz si čtenář snadno provede sám.

Definice 7. *Pologrupa Γ endomorfismů na $\mathfrak{M}$ se nazývá divergentní, jestliže pro libovolná $x, y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, $x < y$, existuje $f \in \Gamma$ takové, že $f(x) \geqq y$ nebo $x \geqq f(y)$.*

Lemma 5. *Nechť pologrupa $\Gamma \subset \mathfrak{H}$ má vlastnost (γ), potom v ní platí pravidlo o krácení zleva tehdy a jen tehdy, jestliže $gf = g$ $(g, f \in \Gamma) \Rightarrow f = e$.*

Důkaz. Nutnost podmínky je samozřejmá. Nechť tedy $gh = gf$. Zřejmě při vhodném označení $h = rf$, kde $r \in \Gamma$, tedy $grf = gf$, z čehož vyplývá podle lemmatu 1, že $gr = g$. Tedy podle předpokladu $r = e$, a tudíž $h = f$.

Věta 3. *Na pologrupě Γ endomorfismů na $\mathfrak{M}$, která má vlastnost (γ), jsou ekvivalentní následující vlastnosti:*

a) *Γ je silně monocyklická;*

b) *Γ je monocyklická a platí v ní pravidlo o krácení zleva;*

c) *Γ je zleva archimedovsky uspořádaná a divergentní.*

Důkaz. a $\Rightarrow$ b. Každá silně monocyklická pologrupa je monocyklická. Nechť existují $f, g \in \Gamma$ taková, že $gf = g$ a $f \neq e$. Zřejmě $g \neq e$. Označme $F(G)$ cyklus endomorfismu $f(g)$. Nechť $u, v \in \mathfrak{M}(\Gamma) \subset F$, potom u nebo v leží v uzavřeném intervalu I množiny $\mathfrak{M}$, jehož koncové body jsou $f^n(v)$, $f^{n+1}(v)$ nebo $f^n(u)$, $f^{n+1}(u)$, kde $n \geqq 0$. Ze vztahu $gf = g$ vyplývá, že $g(u) = g(v)$, a tedy $g(\mathfrak{M}(\Gamma))$ je jednobodová množina. Cyklus G má tedy nejvýše dva prvky, a to je spor, protože, jak snadno zjistíme, moh $G \geqq \aleph_0$. Z lemmatu 5 vyplývá, že v pologrupě Γ platí pravidlo o krácení zleva.

b $\Rightarrow$ c. 1. Z věty 2 vyplývá, že Γ je jednoduše uspořádaná pologrupa. Předpokládejme, že není zleva archimedovsky uspořádaná, což znamená, že existují $f, g \in \Gamma$ taková, že pro všechna $n \in N$ platí $e < f^n < g$ ($f < e < g$, $e < f^n g$ nebo $g < f^n < e$ nebo $g < e < f$, $f^n g < e$). Nechť $F(G)$ je vlastní cyklus endomorfismu $f(g)$; označme $F' = F - \mathfrak{M}[f]$ $(G' = G - \mathfrak{M}[g])$. Zřejmě $y \in F' \Rightarrow g(y) \bar{\in} F'$, a tedy $y = g(u) \Rightarrow u \bar{\in} F'$.

Jestliže $f = rg$ $(r \in \Gamma)$, potom položme $h = gr$. Zřejmě pro $y \in F'$ platí $y = g(u) = gf(u) = grg(u) = gr(y) = h(y)$. Jestliže $g = rf$ a $g = hr$ $(r, h \in \Gamma)$, potom pro $y \in F'$ platí $y = g(u) = hr(u) = hrf(u) = hg(u) = h(y)$. Jestliže $g = rf$ a $r = hg$ $(r, h \in \Gamma)$, potom pro $y \in F'$ platí $y = g(u) = hgf(u) = hg(u) = h(y)$. Ve všech třech případech $h \neq e$, protože v Γ platí pravidlo o krácení zleva. Nechť H je vlastní cyklus endomorfismu h; označme $H' = H - \mathfrak{M}[h]$. Zřejmě $H' \cap F' = \emptyset$. Pro $fh \in \Gamma$ platí

$$fh(x) = f(x) \text{ pro } x \in F' , \quad fh(x) = h(x) \text{ pro } x , \text{ pro něž platí } h(x) \in H' ,$$

a tedy fh má buď dva vlastní cykly nebo jeden cyklus oboustranný, což je v obou případech spor.

2. Předpokládejme, že Γ není divergentní. Tedy existují $x, y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, $x < y$ taková, že pro každé $f \in \Gamma$ platí $f(x) < y$, $x < f(y)$. Zřejmě existuje $f \in \Gamma$ $(g \in \Gamma)$ takové, že $f(x) \neq x$, $f(y) = y(g(x) = x, g(y) \neq y)$ a $x(y)$ není význačným bodem cyklu $F(G)$ endomorfismu $f(g)$. Nechť $f = rg$ $(r \in \Gamma)$. Zřejmě $fg(x) = f(x) \neq x$, a tedy $fg(y) = y$. Rovněž $r(x) = rg(x) = f(x) \neq x$, a tedy $r(y) = y$. Nechť $g(u) = y$; potom platí $u \neq y$. Dále platí $u \in F$, protože $f(u) = rg(u) = r(y) = y \neq u$ a $g^2(u) \in F$, protože $fg^2(u) = fg(y) = y \neq g(y) = g^2(u)$. Jelikož u, $g^2(u) \in F$, tedy i $g(u) = y \in F$, a to je spor. Stejným způsobem dojdeme ke sporu v případě $g = rf$, kde $r \in \Gamma$.

c $\Rightarrow$ a. 1. Předpokládejme, že existuje $f \in \Gamma$, které má alespoň dva vlastní cykly F a G. $F \cap G = \emptyset$. Nechť $x \in F - \mathfrak{M}[f]$ $(y \in G - \mathfrak{M}[f])$ a $x < y$. Zřejmě existuje $g \in \Gamma$ takové, že $g(x) \geqq y$ nebo $x \geqq g(y)$. Nechť tedy $g(x) \geqq y$. Zřejmě $f \neq e$, a tedy $e < f$ nebo $f < e$. Jestliže $e < f$, potom $x < f^n(x) < y \leqq g(x)$ pro všechna $n \in N$, a tedy $e < f^n < g$, a to je spor. Jestliže $f < e$, potom $x < f^n(y) \leqq f^n g(x)$ pro všechna $n \in N$, a tedy $e < f^n g$, a to je spor. Stejným způsobem dojdeme ke sporu v případě $x \geqq g(y)$. Γ je tedy monocyklická pologrupa.

2. Předpokládejme nyní, že Γ není silně monocyklická pologrupa. Nechť f, $g \in \Gamma$ $(f, g \neq e)$, $f < g$. Nechť $e < f < g$. Jestliže existuje $x \in \mathfrak{M}$ takové, že $f(x) = x$ a $x < g(x)$, potom $f^n(x) = x < g(x)$ pro všechna $n \in N$, a tedy $e < f^n < g$, a to je spor. Jestliže existuje $x \in \mathfrak{M}$ takové, že $g(x) = x$ a $x < f(x)$, potom $g(x) < f(x)$, a tedy $g < f$, a to je spor. Nechť $f < e < g$. Jestliže existuje $x \in \mathfrak{M}$ takové, že $f(x) = x$ a $x < g(x)$, potom existuje $u \in \mathfrak{M}$, $g(u) = x$ a $u < x$, a tedy $u < f^n g(u)$ pro všechna $n \in N$, z čehož plyne, že $e < f^n g$, a to je spor. Jestliže existuje $x \in \mathfrak{M}$ takové, že $g(x) = x$ a $x > f(x)$, potom dojdeme rovněž ke sporu. Stejně tak i v posledním případě $f < g < e$. Dokázali jsme tedy, že Γ je silně monocyklická pologrupa. Tím je důkaz věty 3 ukončen.

Poznámka 2. Z věty 3 bezprostředně vyplývá, že monocyklická pologrupa, která má vlastnost (γ) a která je komutativní nebo pologrupou automorfismů, je silně monocyklická.