Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

BURKILLOVY INTEGRÁLY ZÁVISLÉ NA PARAMETRU

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Došlo dne 19. května 1958) DT: 517.39

S využitím pojmu stejnoměrné konvergence se v článku dokazují pro jednorozměrný Burkillův integrál některé věty, obdobné větám z teorie Riemannova resp. Lebesgueova integrálu, o spojitosti, derivaci a integraci vzhledem k parametru.

1. Úvod

Zavedeme si nejprve stálá označení a terminologii. Budiž K neprázdný konečný polootevřený interval tvaru $\langle a, b)$ na reálné ose $R = (-\infty, \infty)$. Symbolem $\boldsymbol{K}$ označíme pak systém všech intervalů [1]) obsažených v K. Je-li I interval v R, pak $|I|$ značí jeho délku. Dělením $\mathscr{D}$ konečného intervalu $J \subset R$ rozumíme libovolný konečný systém disjunktních intervalů $I_1, I_2, \ldots, I_n$ takových, že $\bigcup_{j=1}^{n} I_j = J$. Normou $\nu(\mathscr{D})$ takového dělení nazveme pak číslo $\max_{1 \leq j \leq n} |I_j|$.

V článku budeme studovati reálné nebo obecněji též komplexní funkce intervalu závislé na reálném parametru, tedy funkce $f(I, x)$ definované v $\boldsymbol{K} \times X$, kde $X \subset R$. Leckteré výsledky, které si zde uvedeme, lze ovšem bez potíží rozšířiti i na případ, kdy parametr x je prvkem obecnějšího prostoru nežli R, např. obecně metrického prostoru; toto zobecnění však již není podstatné; v úvahu přicházejí zde jen výsledky paragrafu 2 a 3.

V celém článku předpokládáme znalost základních vět a vztahů a pojmů teorie Burkillova integrálu v jednorozměrném případě (viz [1], [6]). Je-li dána funkce $f, g, \ldots$ intervalu, značíme její Burkillův integrál odpovídajícím velkým písmenem F, G, atd. Je-li f funkce intervalu a $\mathscr{D}$ dělení nějakého intervalu J, v němž je f definována, pak klademe $f(\mathscr{D}) = \sum_{I_j \in \mathscr{D}} f(I_j)$.

[1]) Slovem interval rozumíme zde i všude v dalším vždy polootevřený interval typu $\langle ,)$.

2. Stejnoměrná konvergence

Budiž $x_0 \in X \subset R$ a budiž f komplexní funkce definovaná v $\boldsymbol{K} \times X$. Řekneme, že f je *spojitá* v x_0[2]), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $I \in \boldsymbol{K}$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\{x \in X, |x - x_0| < \delta\} \Rightarrow \{|f(I, x) - f(I, x_0)| < \varepsilon\}. \tag{2.1}$$

Budiž m nějaká nezáporná funkce intervalu definovaná v $\boldsymbol{K}$ a taková, že $0 < M(K) < \infty$. Řekneme potom, že f je *m-stejně spojitá* v x_0[2]), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $I \in \boldsymbol{K}$ platí

$$\{x \in X, |x - x_0| < \delta\} \Rightarrow \{|f(I, x) - f(I, x_0)| < \varepsilon m(I)\}. \tag{2.2}$$

Řekneme, že f je spojitá, resp. m-stejně spojitá v X, jestliže je spojitá, resp. m-stejně spojitá v každém $x \in X$.

Budiž f komplexní funkce v $\boldsymbol{K} \times X$ a nechť pro každé $x \in X$ existuje Burkillův integrál $F(K, x) = \int_{\boldsymbol{K}} f(I, x)$. Řekneme, že tento integrál *konverguje stejnoměrně* vzhledem k $x \in X$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení $\mathscr{D}$ intervalu K splňující podmínku $\nu(\mathscr{D}) < \delta$ platí

$$\sup_{x \in X} |f(\mathscr{D}, x) - F(K, x)| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Zřejmě potom $|F(K, x)| < \infty$ pro každé $x \in X$. Snadno se přesvědčíme, že místo (2.3) lze žádati, aby

$$\sup_{x \in X} |f(\mathscr{D}_1, x) - f(\mathscr{D}_2, x)| < \varepsilon \tag{2.4}$$

pro každá dvě dělení $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ intervalu K splňující $\nu(\mathscr{D}_1) < \delta$, $\nu(\mathscr{D}_2) < \delta$, (srv. též [6], (3.6) a [7]).

Jak jsme ukázali již v [7] § 2, je stejnoměrná konvergence podobně jako existence Burkillova integrálu dědičnou vlastností intervalu, tj. platí

Věta 1. *Jestliže integrál $F(K, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in X$, potom také pro libovolné $J \in \boldsymbol{K}$ integrál $F(J, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in X$.*

3. Limita a spojitost podle parametru

V celém třetím paragrafu značí f komplexní funkci definovanou v $\boldsymbol{K} \times X$ a takovou, že pro každé $x \in X$ jest $|F(K, x)| < \infty$, m je nezáporná funkce definovaná v $\boldsymbol{K}$.

Věta 2. *Je-li f m-stejně spojitá v x_0, potom její integrál F je spojitý v x_0.*

[2]) Přesněji řečeno: spojitá v x_0 vzhledem k X. Tento detail však zvláště nezdůrazňujeme, neboť není celkem podstatný a dále ho nepotřebujeme; obvykle bude X souvislá část R.

Důkaz. Podle předpokladu existuje pro každé $\varepsilon > 0$ takové $\delta > 0$, že pro libovolné $I \in \boldsymbol{K}$ platí[3])

$$\{x \in X, |x - x_0| < \delta\} \Rightarrow \left\{|f(I, x) - f(I, x_0)| < \frac{\varepsilon}{M(K)} m(I)\right\}.$$

Pro libovolné $J \in \boldsymbol{K}$ a pro $|x - x_0| < \delta$ pak ovšem bude

$$|F(J, x) - F(J, x_0)| =$$

$$\left|\int_J [f(I, x) - f(I, x_0)]\right| \leqq \int_J |f(I, x) - f(I, x_0)| < \varepsilon \frac{M(J)}{M(K)} \leqq \varepsilon,$$

c. b. d.

Poznámka. Z důkazu věty 2 vyplývá navíc i to, že integrál F je M-stejně spojitý v x_0. Speciálně tedy platí pro aditivní funkci M:

Věta 3. *Integrál funkce M-stejně spojité je rovněž M-stejně spojitý.*

Věta 4. *Nechť f je spojitá v x_0; nechť existuje $\eta > 0$ takové, že integrál $F(K, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in X$, $|x - x_0| < \eta$. Potom také F je spojitý v x_0.*

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$, $J \in \boldsymbol{K}$. V důsledku předpokladů věty 4 lze podle věty 1 najíti takové dělení $\mathscr{D}$ intervalu J, že pro všechna $x \in X$ splňující $|x - x_0| < \eta$ platí

$$|F(J, x) - f(\mathscr{D}, x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.1}$$

Vezmeme si toto pevné $\mathscr{D}$ a označíme n počet intervalů tvořících $\mathscr{D}$. Ježto f je spojitá v x_0, existuje pro každý interval $I_j \in \mathscr{D}$ takové $\delta_j > 0$, že

$$\{x \in X, |x - x_0| < \delta_j\} \Rightarrow \left\{|f(I_j, x) - f(I_j, x_0)| < \frac{\varepsilon}{3n}\right\}. \tag{3.2}$$

Položíme nyní $\delta = \min(\eta, \delta_1, \dots, \delta_n)$; pro $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$ bude pak platit současně (3.1) i (3.2), a tedy

$$|F(J, x) - F(J, x_0)| \leqq |F(J, x) - f(\mathscr{D}, x)| + |f(\mathscr{D}, x) - f(\mathscr{D}, x_0)| +$$
$$+ |f(\mathscr{D}, x_0) - F(J, x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + n \frac{\varepsilon}{3n} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

c. b. d.

Větu 4 lze ještě dále zobecniti tak, že omezíme předpoklad konvergence integrálu $F(K, x)$ na $x \neq x_0$.

Věta 5. *Nechť f je spojitá v x_0; nechť existuje $\eta > 0$ takové, že integrál $F(K, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in X$, $0 < |x - x_0| < \eta$. Potom konverguje stejnoměrně i vzhledem ke všem $x \in X$ takovým, že $0 \leqq |x - x_0| < \eta$, a tedy podle věty 4 je spojitý v x_0.*

[3]) M značí opět integrál z m.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$, k němu pak existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro každá dvě dělení $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ intervalu K splňující $\nu(\mathscr{D}_1) < \delta_1$, $\nu(\mathscr{D}_2) < \delta_1$ platí

$$|f(\mathscr{D}_1, x) - f(\mathscr{D}_2, x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pro všechna x hovící nerovnostem $0 < |x - x_0| < \eta$. Dokážeme, že pro taková dvě dělení platí rovněž

$$|f(\mathscr{D}_1, x_0) - f(\mathscr{D}_2, x_0)| < \varepsilon ;$$

tím bude věta 5 dokázána.

Ježto f je spojitá v x_0, existuje pro daná dvě dělení $\mathscr{D}_1$ a $\mathscr{D}_2$ takové $\delta_2 > 0$, že pro $|x - x_0| < \delta_2$ platí

$$|f(\mathscr{D}_j, x) - f(\mathscr{D}_j, x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad j = 1, 2,$$

to lze odvoditi zcela stejným postupem, jakého jsme použili při důkazu věty 4. Zvolíme si takové x_1 splňující zároveň $0 < |x_1 - x_0| < \eta$ a máme potom

$$f|(\mathscr{D}_1, x_0) - f(\mathscr{D}_2, x_0)| \leqq |f(\mathscr{D}_1, x_0) - f(\mathscr{D}_1, x_1)| +$$
$$+ |f(\mathscr{D}_1, x_1) - f(\mathscr{D}_2, x_1)| + |f(\mathscr{D}_2, x_1) - f(\mathscr{D}_2, x_0)| < \varepsilon ,$$

c. b. d.

Jestliže parametr necháme probíhati pouze množinu přirozených čísel, dostaneme jako analogii k větě 5 následující celkem zřejmou větu o posloupnostech funkcí intervalu; důkaz této věty je zcela obdobný důkazu věty 5, a proto jej nebudeme prováděti.

Věta 6. *Budiž $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost funkcí definovaných v $\boldsymbol{K}$, budiž N množina obsahující všechna přirozená čísla s výjimkou nejvýše konečného počtu. Nechť pro každé $I \in \boldsymbol{K}$ jest $\lim_{n\to\infty} f_n(I) = f_0(I)$, a nechť integrály $\int_K f_n(I)$ konvergují stejnoměrně vzhledem k $n \in N$. Potom platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_J f_n(I) = \int_J f_0(I)$$

pro každé $J \in \boldsymbol{K}$.

4. Derivace podle parametru

V tomto paragrafu bude f komplexní funkce definovaná v $\boldsymbol{K} \times X$, kde $X = \langle c, d)$, $0 < d - c = l < \infty$.

Věta 7. *Nechť*

1° *integrál $F(K, x_0)$, $|F(K, x_0)| < \infty$, existuje pro alespoň jedno $x_0 \in X$,*

2° *pro všechna $I \in \boldsymbol{K}$ a pro všechna $x \in X$ existuje vlastní derivace*[4])

$$f'(I, x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [f(I, x + h) - f(I, x)] , \tag{4.1}$$

[4]) V krajním bodě intervalu se tím rozumí jednostranná derivace.

3° *integrál* $\int_K f'(I, x)$ *konverguje stejnoměrně vzhledem k* $x \in X$.

Potom

(I) *integrál* $F(K, x)$ *konverguje stejnoměrně vzhledem k* $x \in X$,

(II) *platí*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(K, x) = \int_K f'(I, x) \,. \tag{4.2}$$

Důkaz. I. Budiž ε kladné číslo. Existuje pak $\delta > 0$ takové, že podle 1° pro každá dvě dělení $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ intervalu K s normami $\nu(\mathscr{D}_1) < \delta$, $\nu(\mathscr{D}_2) < \delta$ platí

$$|f(\mathscr{D}_1, x_0) - f(\mathscr{D}_2, x_0)] < \frac{\varepsilon}{2}$$

a současně podle 3° platí

$$\sup_{x \in X} |f'(\mathscr{D}_1, x) - f'(\mathscr{D}_2, x)| < \frac{\varepsilon}{2l} \,.$$

Při daných pevných $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ uvažujme funkci (argumentu x)

$$g(x) = f(\mathscr{D}_1, x) - f(\mathscr{D}_2, x) \,. \tag{4.3}$$

Pro všechna $x \in X$ existuje zřejmě derivace této funkce

$$g'(x) = f'(\mathscr{D}_1, x) - f'(\mathscr{D}_2, x) \,,$$

a tedy podle známé věty o střední hodnotě platí pro $x \in X$

$$g(x) - g(x_0) = (x - x_0) \,.\, g'(\tilde{x}) \,,$$

kde $\tilde{x} = x_0 + \vartheta(x - x_0)$, $0 < \vartheta < 1$.

Pro každá dvě dělení $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ intervalu K splňující $\nu(\mathscr{D}_j) < \delta$, $j = 1, 2$, platí potom pro každé $x \in X$ odhad

$$|f(\mathscr{D}_1, x) - f(\mathscr{D}_2, x)\,| = |g(x)| = |g(x) - g(x_0) + g(x_0)| \leqq |g(x) - g(x_0)| +$$
$$+ |g(x_0)| < l \,.\, \frac{\varepsilon}{2l} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

Tím je dokázána prvá část tvrzení. Pokud se týče (II), položme pro $x \in X$, $x + h \in X$, $h \neq 0$, $I \in \boldsymbol{K}$:

$$\varphi(I, x, h) = \frac{1}{h} [f(I, x + h) - f(I, x)] \,.$$

Znovu podle věty o střední hodnotě je pak při pevném $x \in X$

$$\varphi(\mathscr{D}_1, x, h) - \varphi(\mathscr{D}_2, x, h) = \frac{1}{h} [g(x + h) - g(x)] = g'(\tilde{x}) =$$
$$= f'(\mathscr{D}_1, \tilde{x}) - f'(\mathscr{D}_2, \tilde{x}) \,,$$

kde $\tilde{x} = x + \vartheta h$, $0 < \vartheta < 1$, a funkce g je pro daná dělení $\mathscr{D}_1$ a $\mathscr{D}_2$ opět definována vztahem (4.3). Integrál

$$\Phi(K, x, h) = \int_K \varphi(I, x, h) = \frac{1}{h} [F(K, x + h) - F(K, x)]$$

tedy konverguje stejnoměrně vzhledem k h: $|h| > 0$, $x + h \in X$. Podle věty 5 existuje tudíž také integrál z příslušné limity pro $h \to 0$ a platí (4.2), c. b. d.

Poznámka. Je celkem zřejmé, že (II) platí i tehdy, nahradíme-li interval K libovolným intervalem $J \in \boldsymbol{K}$.

5. Integrace podle parametru

V tomto paragrafu bude X opět konečný interval $\langle c, d \rangle$.

Věta 8. *Budiž f komplexní funkce definovaná v $\boldsymbol{K} \times X$, spojitá v X. Nechť integrál $F(K, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in X$. Potom pro libovolné $y \in X$ platí*

$$\int_K [\int_c^y f(I, x) \, dx] = \int_c^y F(K, x) \, dx \,.\text{[5]} \tag{5.1}$$

Důkaz. Podle věty 4 je F spojitou funkcí x, takže integrál stojící v (5.1) vpravo skutečně existuje. Rovněž f je spojitá, existuje tedy pro každé $I \in \boldsymbol{K}$, $y \in X$ také integrál

$$\varphi(I, y) = \int_c^y f(I, x) \, dx \, ;$$

kromě toho zřejmě platí $\varphi'(I, x) = f(I, x)$. Podle věty 7 tedy konverguje stejnoměrně vzhledem k $y \in X$ také integrál $\int_K \varphi(I, y)$, neboť zřejmě $\int_K \varphi(I, c) = 0 < \infty$; existuje tedy i levá strana v (5.1). Přitom zřejmě pro $y = c$ rovnost (5.1) platí. Dokážeme si dále, že obě strany této rovnosti mají touž derivaci podle y, tím bude dokázána platnost (5.1) pro všechna $y \in X$. Pravá strana má (viz [2], věta 36) za derivaci $F(K, y)$. Na levou stranu aplikujeme opět větu 7 a dostaneme podle (II) její derivaci

$$\frac{d}{dy} \int_K \varphi(I, y) = \int_K \varphi'(I, y) = \int_K f(I, y) = F(K, y) \,,$$

c. b. d.

Poznámka. Podobně jako u věty 7 lze i zde v (5.1) nahraditi K libovolným $J \in \boldsymbol{K}$.

[5]) Symbol $\int \ldots dx$ značí zde Riemannův integrál.

Věta 9. *Budiž f reálná funkce v $\boldsymbol{K} \times X$. Nechť pro každé $I \in \boldsymbol{K}$ existuje Lebesgueův integrál $\int_c^d f(I, x)\,dx$. Nechť pro každé $x \in X$ jest*

$$f(I_1 \cup I_2, x) \leqq f(I_1, x) + f(I_2, x) \tag{5.2}$$

pro každé dva disjunktní intervaly I_1, $I_2 \in \boldsymbol{K}$ takové, že $(I_1 \cup I_2) \in \boldsymbol{K}$. Nechť existuje pro každé $x \in X$ integrál $F(K, x)$.[6]) *Potom platí rovnost (5.1) (kde $\int \ldots dx$ značí tentokráte Lebesgueovy integrály) pro všechna $y \in X$, pro něž integrál vpravo konverguje.*

Důkaz. Budiž $\{\mathscr{D}_n\}$ posloupnost dělení intervalu K taková, že $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$, a nechť pro každé přirozené n platí

$$(I \in \mathscr{D}_{n+1}) \Rightarrow (\text{existuje } J \in \mathscr{D}_n \text{ tak, že } I \subset J)\,.$$

Jest ovšem

$$F(K, x) = \lim_{n \to \infty} f(\mathscr{D}_n, x)\,,$$

takže podle známé věty z teorie Lebesgueova integrálu (viz např. [3], věta 57, str. 110) existuje integrál stojící v (5.1) vpravo a platí

$$\int_c^y F(K, x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \varphi(\mathscr{D}_n, y)\,,$$

kde jako dříve

$$\varphi(I, y) = \int_c^y f(I, x)\,dx\,.$$

Pro libovolné dělení $\mathscr{D}$ intervalu K platí však zřejmě v důsledku (5.2)

$$f(\mathscr{D}, x) \leqq F(K, x)\,.$$

Budiž $\{\mathscr{D}_n\}$ libovolná posloupnost dělení intervalu K, $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$. Budiž nyní $y_0 \in X$ takové, že $\int_c^{y_0} F(K, x)\,dx < \infty$. Potom pro $y \in \langle c, y_0 \rangle$ mají funkce $f(\mathscr{D}_n, y)$ integrabilní majorantu $F(K, y)$, takže (srv. [3], věta 65) limita

$$\lim_{n \to \infty} \int_c^{y_0} f(\mathscr{D}_n, x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \varphi(\mathscr{D}_n, y_0)$$

existuje a je rovna integrálu limity, tedy

$$\int_c^{y_0} \lim_{n \to \infty} f(\mathscr{D}_n, x)\,dx = \int_c^{y_0} F(K, x)\,dx\,.$$

Existuje tudíž Burkillův integrál $\Phi(K, y)$ pro každé $y \in \langle c, y_0 \rangle$ a platí (5.1), c. b. d.

[6]) Podmínky pro existenci Burkillova integrálu funkce, o níž předpokládáme již (5.2), viz např. [1] a [4].

6. Příklady aplikací na Riemannův integrál

Budiž $f(y, x)$ komplexní funkce dvou reálných proměnných definovaná v oboru $\langle a, b) \times \langle c, d)$. Nechť pro každé $x \in \langle c, d)$ existuje vlastní Riemannův integrál $\int_a^b f(y, x)\,\mathrm{d}y = F(x)$. Řekneme, že tento integrál konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in \langle c, d)$, jestliže součty (srv. [2]) $\Sigma f(y_i, x)\,\Delta y_i$ při $\max \Delta y_i \to 0$ konvergují k $F(x)$ stejnoměrně vzhledem k $x \in \langle c, d)$. Položme nyní pro $I = \langle y_1, y_2) \subset \langle a, b)$

$$f_1(I, x) = (y_2 - y_1) \,.\, f(y_1, x)\,. \tag{6.1}$$

Platí potom zřejmě (značíme $Y = \langle a, b)$, $X = \langle c, d)$): $\int_a^b f(y, x)\,\mathrm{d}y = \int_Y f_1(I, x)$ a stejnoměrná konvergence Riemannova integrálu funkce f odpovídá stejnoměrné konvergenci Burkillova integrálu funkce f_1.

Věty, které jsme si dokázali pro Burkillovy integrály, lze pak přenésti i na integrály Riemannovy, resp. Lebesgueovy. Z věty 6 např. dostaneme toto tvrzení:

Věta 10. *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost Riemannovsky integrovatelných funkcí v $\langle a, b)$, nechť integrály $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ konvergují stejnoměrně vzhledem k n a nechť* $\lim f_n$ *existuje. Potom*

$$\int_a^b \lim f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{6.2}$$

Věta 7 je téměř jen přepisem věty 108 z [3]. Poněkud zajímavější důsledek dostaneme z věty 9:

Věta 11. *Budiž $f(y, x)$ reálná funkce definovaná v $Y \times X = \langle a, b) \times \langle c, d)$. Nechť pro každé $y \in Y$ existuje Lebesgueův integrál $\int_c^d f(y, x)\,\mathrm{d}x$. Nechť pro každé $x \in X$ je $f(y, x)$ monotonní resp. konvexní (konkávní) funkcí y. Potom platí rovnost (Lebesgueových integrálů)*

$$\int_a^b \Big[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y = \int_c^d \Big[\int_a^b f(y, x)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x\,. \tag{6.3}$$

Důkaz. Větu 11 dostaneme aplikací věty 9 na funkci $f_1(I, x)$ (viz (6.1)), je-li f monotonní v y, resp. na funkci

$$f_2(I, x) = (y_2 - y_1) \,.\, \tfrac{1}{2}[f(y_1, x) + f(y_2, x)]\,, \tag{6.4}$$

je-li f konvexní (konkávní).

Poznámka. Kromě funkcí f_1 a f_2 lze definovati ještě další funkce intervalu $f_j(I, x)$ takové, že pro funkci $f(y, x)$ pak platí

$$\int_a^b f(y, x)\,\mathrm{d}y = \int_Y f_j(I, x)\,,$$

např. funkci f_3 definovanou pro $I = \langle y_1, y_2\rangle$ vzorcem

$$f_3(I, x) = \frac{2}{3}(y_2 - y_1)\left[f(y_1, x) + f(y_2, x) + 4f\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, x\right)\right], \tag{6.5}$$

která odpovídá pravidlu Simpsonovu podobně jako funkce f_1, resp. f_2 odpovídaly pravidlu obdélníkovému, resp. lichoběžníkovému. Odhady pro rozdíly

$$\int_{y_1}^{y_2} f(y, x)\,\mathrm{d}y - f_j(I, x)$$

dostaneme snadno ze známých odhadů pro tato pravidla (viz [2], kap. VI., vzorce (4), (5) a (11)); poslouží nám při určování postačujících podmínek stejnoměrné konvergence Burkillových integrálů funkcí f_j. Složitější funkce f_j se získají z dalších vzorců pro numerickou integraci (viz např. [5], § 70, str. 381).

Vedle těchto funkcí lze ovšem vzíti i obecnější případ funkcí tvaru

$$f_j^*(I, x) = G(I)\,.\,H(f(y_1, x), f(y_2, x), \ldots)\,. \tag{6.6}$$

Bude potom možno přenášeti věty z teorie Burkillova integrálu i na integrály Riemann-Stieltjesovy. Přitom aditivní funkce intervalu G bude odpovídati integrující funkci (distribuční) $g(y)$ v integrálech tvaru $\int_a^b f(y, x)\,\mathrm{d}g(y)$. Princip přenosu na tento obecnější případ je ovšem v podstatě stejný jako v případě Riemannových integrálů, kde jsme měli speciální integrující funkci $g(y) = y$, resp. $G(I) = |I|$. Pro nejjednodušší případ

$$f_1^*(I, x) = G(I)\,.\,f(y_1, x) \tag{6.7}$$

(srv. [3], kap. X., § 7) dostaneme tak např. z věty 6 toto známé tvrzení:

Věta 12. *Budiž $\{f_n\}$ posloupnost komplexních funkcí definovaných v $Y = \langle a, b)$ a g reálná zleva spojitá funkce s variací konečnou v Y. Nechť existuje $\lim f_n(y) = f(y), |f(y)| < \infty$, pro každé $y \in Y$ a nechť Stieltjesovy integrály $\int_a^b f_n(y)\,\mathrm{d}g(y)$ konvergují stejnoměrně vzhledem k n[7]. Potom platí*

$$\int_{a'}^{b'} f(y)\,\mathrm{d}g(y) = \lim_{n\to\infty} \int_{a'}^{b'} f_n(y)\,\mathrm{d}g(y)$$

pro všechna $a \leqq a' \leqq b' \leqq b$.

Podobně lze přenésti i další věty, to však zde již nebudeme prováděti.

[7]) Je zřejmé, že tuto stejnoměrnou konvergenci rozumíme v obdobném smyslu jako pro Riemannovy integrály, tj. jako stejnoměrnou konvergenci příslušných součtů $f_1^*(\mathcal{D}_n, x)$.