Werk

Label: Article

Jahr: 1959

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0084|log75

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ГРУППАХ СОСТОЯНИЙ ОДНОРОДНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Петр МАНДЛ (Petr Mandl), Прага

(Поступило в редакцию 20/III 1958 г.)

DT: 519.217

В статье исследуется предельное поведение распределения вероятностей в классе состояний однородной цепи Маркова при условии, что пребывание системы в данном классе не нарушалось.

Пусть R — однородная цепь Маркова с конечным числом состояний, определенная матрицей вероятностей перехода и начальным распределением вероятностей. Под регулярностью вероятностей $p_j^{(n)}$, т. е. вероятностей того, что система будет во времени n находиться в состоянии j, мы будем понимать существование предела $\lim_{n\to\infty} p_j^{(n)}$ и независимость этих вероятностей от начального распределения. Вопрос регулярности вероятностей может быть дополнен вопросами об асимптотическом поведении величин $P(x_n = \omega/T^n)$, определенных следующим образом:

Если T — какая-то группа состояний цепи R и ω — состояние группы T, то выражение $P(x_n = \omega/T^n)$ представляет вероятность того, что система будет во времени n находиться в состоянии ω при условии, что она не выйдет за пределы класса T. Значит, T^n обозначает явление, что система осталась пребывать в классе T по крайней мере до времени n. Эта проблема является частным случаем вопроса, который поставил Я. Гаек (Математический институт ЧСАН), которому я обязан за ценные указания.

Можем, например, предполагать, что система может пребывать в состояниях двух видов: в таких, за которыми можно наблюдать, и в таких, которые не поддаются наблюдениям. Будем, следовательно, изучать распределение вероятностей при условии, что в течение продолжительного времени наблюдения за системой не велись.

Определение. Группу S состояний однородной цепи Маркова назовем *регулярной*, если матрица P вероятностей перехода в группе S неразложима и непериодична.

Теорема 1. *В случае, когда T — регулярный класс, для каждого ω существует $\lim\limits_{n\to\infty} P(x_n = \omega | T^n) = P_T(\omega) > 0$ и не зависит от начального распределения вероятностей.*

Доказательство. Умножим строки матрицы P на положительные числа так, чтобы получилась стохастическая матрица. Используя известные теоремы о стохастических матрицах (см., напр. [3]), легко обнаружим, что вследствие предположения о матрице P существует n_0 такое, что все элементы P^{n_0} положительны. По теореме Перрона (см., напр., [1]) существует характеристический корень Θ матрицы P^{n_0}, который имеет следующие свойства:

1. Он является положительным и простым, 2. превосходит по абсолютной величине остальные корни, 3. матрица Adj $(\Theta E - P^{n_0})$ имеет только положительные элементы, равно как и 4. в качестве элементов соответствующего характеристического вектора можно взять сплошь положительные числа.

Итак, матрица P имеет корень $\varrho = \Theta^{\frac{1}{n_0}}$, который, очевидно, обладает свойствами 1, 2, 4.

Займемся представлением матрицы P^n при помощи формулы Перрона ([3]):

$$P^n = \varrho^n B_{11} + \sum_{\mu=2}^{s} \sum_{\nu=0}^{s_\mu - 1} \binom{n}{\nu} \lambda_\mu^{n-\nu} B_{\nu\mu} = \varrho^n B_{11} + o(\varrho^n) ,$$

где λ_μ — характеристические корни матрицы P, s_μ — их кратности, $B_{\nu\mu}$ — матрицы и $o(\varrho^n)$ — матрица, элементы которой суть бесконечно малые величины порядка выше ϱ^n. В частности, матрица B_{11} имеет вид

$$B_{11} = \lim_{\lambda\to\varrho} (\lambda - \varrho)(\lambda E - P)^{-1} = \text{Adj}\,(\varrho E - P)\, \psi_P(\varrho)^{-1} ,$$

где $\psi_P(x) = (x - \varrho)^{-1} |xE - P|$. Очевидно, что должно быть $\psi_P(\varrho) > 0$, ибо в противном случае было бы ϱ или многократным корнем многочлена $|xE - P|$, или этот многочлен имел бы еще один действительный корень, который был бы больше ϱ.

Сравним выражение для матрицы P^n с аналогичным выражением для степеней матрицы P^{n_0}. Имеем

$$\varrho^{n_0 n} B_{11} + o(\varrho^{n_0 n}) = (P^{n_0})^n = \Theta^n \,\text{Adj}\,(\Theta E - P^{n_0})\, \psi_{P^{n_0}}(\Theta)^{-1} + o(\Theta^n) .$$

Итак, мы видим, что характеристический корень ϱ имеет свойство 3, т. е. матрица $B_{11}\psi_P(\varrho) = \text{Adj}\,(\varrho E - P)$ имеет только положительные элементы.

Пусть, далее, p — вектор начального распределения вероятностей (во времени $n = 0$), e — вектор-столбец, в котором все элементы равны единице,

e_ω — вектор-столбец, в котором единица стоит на том месте, где в матрице P состояние ω, на остальных местах нули. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n = \omega | T^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(\{x_n = \omega\} \cap T^n)}{P(T^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{pP^n e_\omega}{pP^n e} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\varrho^n p B_{11} e_\omega + o(\varrho^n)}{\varrho^n p B_{11} e + o(\varrho^n)} = \frac{pB_{11}e_\omega}{pB_{11}e} = P_T(\omega)\ ,$$

так как $pB_{11}e > 0$ ввиду того, что выполняется свойство 3.

Теперь можем писать

$$[P_T(\omega_1), \ldots, P_T(\omega_s)]\, P = \lim_{n\to\infty} \frac{pP^{n+1}}{pP^n e} = \varrho \frac{pB_{11}}{pB_{11}e} = \varrho[P_T(\omega_1), \ldots, P_T(\omega_s)]\ . \tag{1}$$

Значит, $[P_T(\omega_1), \ldots, P_T(\omega_s)]$ есть собственный вектор матрицы P с суммой, равной единице. Следовательно, он обладает свойством 4 и ввиду того, что ϱ — простой корень, дефект матрицы $\varrho E - P$ равен единице; следовательно, $P_T(\omega)$ определено однозначно.

Замечание. Если $\{P_T(\omega)\}$ представляет первоначальное распределение вероятностей, то распределение вероятностей в группе T при условии, что система не выйдет за пределы группы T, не зависит от n. Время N выхода из группы T в таком случае подчинено, если считать $\varrho < 1$, распределению Паскаля, т. е. $P(N = n) = \varrho^{n-1}(1 - \varrho)$. Это распределение является предельным распределением в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} P(N > n + m \mid N > n) = \lim_{n\to\infty} P(T^{n+m} \mid T^n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{pP^{n+m}e}{pP^n e} = [P_T(\omega_1), \ldots, P_T(\omega_s)]\, P^m e = \varrho^m \sum_{\omega \in T} P_T(\omega) = \varrho^m\ .$$

Доказательство теоремы 1 оправдывает введение следующего определения:

Определение. *Характеристическим числом* регулярной группы S назовем максимальное по абсолютной величине характеристическое число матрицы, образованной из вероятностей перехода внутри класса S.

Теперь предположим, что группа состояний T разбита на подклассы $T_1, \ldots, T_l$ такие, что система, не выходя за пределы T, может с положительной вероятностью перейти из класса T_j в класс T_{j+1} и только в этот класс. Пусть P_{jj} означает матрицу вероятностей перехода внутри класса T_j, а P_{jj+1} — матрицу вероятностей перехода из состояний класса T_j в состояния класса T_{j+1}.

Теорема 2. *В случае, когда классы T_j регулярны и $P(x_0 \in T_1) = 1$, для каждого $\omega \in T_l$ будет*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(\{x_n=\omega\}\cap T^n)}{\varrho^n n^{k-1}}=\frac{\varrho^{-(k-1)}}{(k-1)!}\,pA_{11}P_{12}A_{22}\dots P_{l-1,l}A_{ll}e_\omega\,,$$

где $\varrho=\max\limits_{j=1,\dots,l}\varrho_j$, ϱ_j *равно характеристическому числу класса* T_j *и число* k *указывает, сколько раз встретится характеристическое число* ϱ *среди чисел* ϱ_j. *Далее,*

$$A_{jj}=(\varrho E-P_{jj})^{-1}\,,\quad \text{если}\quad \varrho_j<\varrho\,,$$

$$A_{jj}=\lim_{\lambda\to\varrho}(\lambda-\varrho)(\lambda E-P_{jj})^{-1}\,,\quad \text{если}\quad \varrho_j=\varrho$$

(A_{jj} *есть коэффициент у* ϱ^n *в формуле Перрона*).

Доказательство. Имеем $P(\{x_n=\omega\}\cap T^n)=\sum\limits_{\Sigma n_i=n+1}pP_{11}^{n_1-1}P_{12}\dots P_{ll}^{n_l-1}e_\omega$. Обозначим $\sum\limits_{\varrho_i<\varrho}n_i=\Sigma_1$, $\sum\limits_{\varrho_i=\varrho}n_i=\Sigma_2$; ввиду того, что $(\varrho E-P_{jj})^{-1}=$ $=\frac{1}{\varrho}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{P_{jj}}{\varrho}\right)^n$ можем писать, положив сначала $\frac{P_{jj}}{\varrho}=Q_{jj}$, $\frac{\varrho^{-(k-1)}}{(k-1)!}\,pA_{11}P_{12}\,.$ $.\,A_{22}\dots P_{l-1,l}A_{ll}=\frac{\varrho^{-(l-1)}}{(k-1)!}\sum\limits_{\Sigma_1=l-k}^{\infty}p\dots Q_{jj}^{n_j-1}P_{jj+1}\dots B_{mm}P_{mm+1}\dots$, запись слагаемого в этом соотношении означает, что при $\varrho_j<\varrho$ умножаем на матрицу $Q_{jj}^{n_j-1}$; при $\varrho_m=\varrho$ умножаем на коэффициент в соответствующей формуле Перрона B_{mm}. Итак, нам надо доказать, что при достаточно больших n выражение

$$\left|\frac{\varrho^{-(l-1)}}{(k-1)!}\sum_{\Sigma_1=l-k}^{\infty}p\dots Q_{jj}^{n_j-1}P_{jj+1}\dots B_{mm}P_{mm+1}\dots e_\omega-\right.$$
$$\left.-\frac{\varrho^{-(l-1)}}{n^{k-1}}\sum_{\Sigma_1=l-k}^{n+1-k}\ \sum_{\Sigma_2=n+1-\Sigma_1}pQ_{11}^{n_1-1}P_{12}Q_{22}^{n_2-1}\dots Q_{ll}^{n_l-1}e_\omega\right|,$$

как угодно мало. Первая сумма во втором члене предписывает суммирование по показателям n_i классов с характеристическими числами, меньшими ϱ, а вторая сумма — с характеристическими числами, равными ϱ.

Возьмем натуральные числа N, M. Символ Σ^M будет обозначать суммирование только таких слагаемых, для которых $n_m>M$, а символ $\Sigma^{\bar M}$ — суммирование тех слагаемых, для которых по крайней мере одно $n_m\leqq M$.

Записывая все еще короче, имеем

$$\left|\frac{1}{(k-1)!}\sum_{\Sigma_1=l-k}^{\infty}\dots Q_{jj}^{n_j-1}\dots B_{mm}\dots-\frac{1}{n^{k-1}}\sum_{\Sigma_1=l-k}^{n+1-k}\ \sum_{\Sigma_2=n+1-\Sigma_1}pQ_{11}^{n_1-1}\dots\right|\leqq$$

$$
\leqq \left| \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\Sigma_1 = l-k}^{N} \ldots Q_{jj}^{n_j-1} \ldots B_{mm} \ldots - \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{\Sigma_1 = l-k}^{N} \sum_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1}^{M} p Q_{11}^{n_1-1} \right| +
$$

$$
+ \left| \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\Sigma_1 = N+1}^{\infty} \ldots Q_{jj}^{n_j-1} \ldots B_{mm} \right| + \left| \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{\Sigma_1 = N+1}^{n+1-k} \sum_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1} p Q_{11}^{n_1-1} \right| +
$$

$$
+ \left| \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{\Sigma_1 = l-k}^{N} \sum_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1}^{\overline{M}} p Q_{11}^{n_1-1} \right| = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 .
$$

Прежде всего покажем, что выбрав надлежащим образом N, можем добиться того, чтобы выражение I_3 было меньше $\varepsilon > 0$ для всех n. Обозначим $\Theta = \max\limits_{\varrho_k < \varrho} \varrho_k$. Ввиду того, что $Q_{jj}^{n} = \left(\frac{\varrho_j}{\varrho}\right)^n B_{11} + o\left[\left(\frac{\varrho_j}{\varrho}\right)^n\right]$, легко обнаружим, что существует постоянная C_1 такая, что $pQ_{11}^{n_1-1} \ldots Q_{ll}^{n_l-1} e_\omega \leqq C_1 \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^{\Sigma_1}$. Теперь установим число слагаемых при суммировании $\sum\limits_{\Sigma_1 = \text{konst.}} \sum\limits_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1}$. Легко видно, что оно равно $\binom{\Sigma_1 - 1}{l-k-1}\binom{n-\Sigma_1}{k-1} \leqq C_2 (\Sigma_1)^{l-k-1} n^{k-1}$. Следовательно, $I_3 \leqq C_1 C_2 \sum\limits_{\Sigma_1 = N+1}^{\infty} (\Sigma_1)^{l-k-1} \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^{\Sigma_1}$ и выражение в правой части можно, выбрав надлежащим образом N, сделать как угодно малым (меньше ε). То же можно сказать и о выражении I_2, потому что рассматриваемый ряд сходится.

Теперь аналогичным приемом оценим выражение I_4. Имеем $pQ_{11}^{n_1-1} \ldots \ldots Q_{ll}^{n_l-1} e_\omega \leqq C_1$ и число слагаемых в сумме $\sum\limits_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1}^{\overline{M}}$ меньше $k \sum\limits_{i=1}^{M} \binom{n-\Sigma_1-i}{k-2} \leqq \leqq C_3 n^{k-2}$. Итак, мы видим, что для достаточно больших n также $I_4 < \varepsilon$.

О выражении I_1 будем рассуждать следующим образом: если T_j имеет характеристическое число ϱ, то $\lim\limits_{n \to \infty} Q_{jj}^{n} = B_{jj}$. Значит, выбрав подходящим способом число M, можно добиться того, чтобы при фиксированных показателях, соответствующих классам с немаксимальными характеристическими числами, каждое из слагаемых суммы $\sum\limits_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1}^{M}$ отличалось от соответствующего ему $\ldots Q_{jj}^{n_j-1} \ldots B_{mm} \ldots e_\omega$ на как угодно малое число. Следовательно, достаточно, обозначив через $S_n(M, \Sigma_1)$ число слагаемых суммы $\sum\limits_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1}^{M}$, убедиться в том, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{S_n(M, \Sigma_1)}{n^{k-1}} = \frac{1}{(k-1)!}$. Однако $S_n(M, \Sigma_1) = \binom{n-\Sigma_1-kM}{k-1}$. Этим теорема полностью доказана.

Перейдём теперь к произвольному классу T состояний цепи. Разобьем T на подклассы T_j состояний, сообщающихся внутри T; это значит следующее: Если $\omega_1 \in T_j$, то система может перейти с положительной вероятностью из состояния ω_1 в состояние ω_2 и обратно, не выходя при этом за пределы класса T, в том и только в том случае, когда также $\omega_2 \in T_j$. Эти подклассы можно как известно, частично упорядочить следующим образом: $T_k < T_j$ означает, что внутри класса T возможен переход из класса T_k в класс T_j. Разбиение на подклассы T_j не должно обязательно исчерпать весь класс T. Ради простоты обозначений будем однако предполагать, что каждое состояние является сообщающимся с самим собой. Из хода доказательств станет ясным, что следовало бы изменить в противном случае. Также будем предполагать, что положительна вероятность того, что система будет во времени 0 пребывать в таких классах T_k, для которых не существует $T_j < T_k$, $T_j \neq T_k$. (Условие A.)

Теорема 3. *Пусть классы T_j регулярны. Пусть $\varrho = \max\limits_{T_j} \varrho_j$, пусть k — наибольшее число, обладающее тем свойством, что существуют классы $T_{\alpha_1} < T_{\alpha_2} < \ldots < T_{\alpha_k}$, для которых $\varrho_{\alpha_1} = \varrho_{\alpha_2} = \ldots \varrho_{\alpha_k} = \varrho$. Тогда, если еще выполняется условие* A, *существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(T^n)}{n^{k-1}\varrho^n} > 0 .$$

Доказательство. Пусть P_{jj} — матрицы, образованные из вероятностей перехода внутри T_j, пусть P_{jk} — матрицы, образованные из вероятностей перехода из состояний класса T_j в состояния класса T_k. Через p_j обозначим ту часть вектора начального распределения, которая соответствует классу T_j. Если случайные явления $\{x_n = \omega\} \cap T^n$ разложить на непересекающиеся явления, руководствуясь тем, через какие классы прошла система, пока она не находилась в состоянии ω, получим

$$P(T^n) = \sum_{T_\alpha < T_\beta \ldots < T_\omega} \Big(\sum_{\Sigma n_\nu = n+1} p_\alpha P_{\alpha\alpha}^{n_\alpha - 1} P_{\alpha\beta} P_{\beta\beta}^{n_\beta - 1} \ldots P_{\omega\omega}^{n_\omega - 1} e \Big) .$$

Применяя результат теоремы 2, мы видим, что порядок выражений в скобках не меньше $n^{k-1}\varrho^n$ и что там существует по крайней мере один член такой, что частное от деления его на $n^{k-1}\varrho^n$ имеет положительный предел.

В следующей теореме символ A_{jj} означает те же матрицы, как в теореме 2.

Теорема 4. *При условиях теоремы* 3 *справедливо утверждение: Для каждого $\omega \in T$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} P(x_n = \omega | T^n) = P_T(\omega)$; он будет положительным тогда и только тогда, когда ω будет принадлежать такому классу T_j, для которого существуют $T_{S_1} < T_{S_2} < \ldots < T_{S_k} \leqq T_j$, характеристические числа которых равны ϱ. В таком случае*

$$P_T(\omega) = C \sum{}^{*} p_{r_1} A_{r_1 r_1} P_{r_1 r_2} A_{r_2 r_2} \ldots A_{jj} e_\omega ,$$

где C — постоянная, не зависящая от j, и $\sum^*$ означает суммирование по всем последовательностям классов $T_{r_1} < T_{r_2} < \ldots < T_j$, среди характеристических чисел которых число ϱ встретится k раз.

Доказательство. Имеем

$$P(x_n = \omega | T^n) = \frac{P(\{x_n = \omega\} \cap T^n)}{P(T^n)} =$$

$$= P(T^n)^{-1} \sum_{T_\alpha < T_\beta \ldots < T_j} \left(\sum_{\Sigma n_\nu = n+1} p_\alpha P_{\alpha\alpha}^{n_\alpha - 1} P_{\alpha\beta} \ldots P_{jj}^{n_j - 1} e_\omega \right).$$

Разделим читателя и знаменателя на $n^{k-1}\varrho^n$. Из теоремы 2 вытекает, что в случае, когда T_j не обладает перечисленными в теореме 4 свойствами, все выражения в скобке являются бесконечно малыми величинами порядка, большего $n^{k-1}\varrho^n$. Аналогично, если класс T_j удовлетворяет условиям теоремы, то по теореме 2 видно, что порядок $n^{k-1}\varrho^n$ имеют именно те выражения, которые суммируются по символу $\sum^*$. В этой же теореме приведено и предельное выражение. Если теперь воспользоваться теоремой 3, то получим, что

$$C = \frac{\varrho^{-(k-1)}}{(k-1)!} \left(\lim_{n \to \infty} \frac{P(T^n)}{n^{k-1}\varrho^n} \right)^{-1}.$$

Иначе эта постоянная определена условием $\sum_{\omega \in T} P_T(\omega) = 1$.

Предел вероятности можем привести еще в несколько ином виде. Пусть T_{n_k} — класс с характеристическим числом ϱ, для которого существуют $T_{n_1} < T_{n_2} < \ldots < T_{n_{k-1}} < T_{n_k}$, характеристические числа которых также равны ϱ. По предположению класс T_{n_k} регулярен. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что для матрицы $A_{n_k n_k}$, которая является коэффициентом при ϱ^n в формуле Перрона, справедливо соотношение (1), т. е.: $pA_{n_k n_k} = C_p \pi_{n_k}$, где π_{n_k} — характеристический вектор, соответствующий корню ϱ матрицы $P_{n_k n_k}$. Если в качестве вектора p брать последовательно векторы, одна компонента которых равна единице а остальные нулю, то окажется, что строки матрицы $A_{n_k n_k}$ суть кратные π_{n_k}, т. е. $A_{n_k n_k} = u_{n_k} \pi_{n_k}$, где u_{n_k} — вектор-столбец с одними положительными компонентами. Итак, каждому классу можно поставить в соответствие число

$$C_{n_k} = C \sum p_{s_1} A_{s_1 s_1} P_{s_1 s_2} A_{s_2 s_2} \ldots A_{s_j s_j} P_{s_j n_k} u_{n_k},$$

причем на этот раз требуется, чтобы слагаемые содержали матрицы $k - 1$ классов с характеристическим числом ϱ.

Предельные вероятности в классе T_j можно тогда писать в виде

$$P_T(\omega) = \sum C_{s_1} \pi_{s_1} P_{s_1 s_2} A_{s_2 s_2} \ldots A_{jj} e_\omega, \tag{2}$$

где суммируются произведения для всех классов T_{s_1}, удовлетворяющих только что высказанным условиям, и для классов следующих за ними.

O регулярности условных вероятностей справедлива при условиях теоремы 3.

Теорема 5. *Если существует одна единственная k-членная последовательность классов $T_{S_1} < T_{S_2} < \ldots < T_{S_k}$ с характеристическими числами ϱ, то $P_T(\omega)$ одна и та же для всех начальных распределений, удовлетворяющих условию* A.

Доказательство легко вытекает из соотношения (2). Постоянная опять-таки определена условием $\sum_{\omega \in T} P_T(\omega) = 1$.

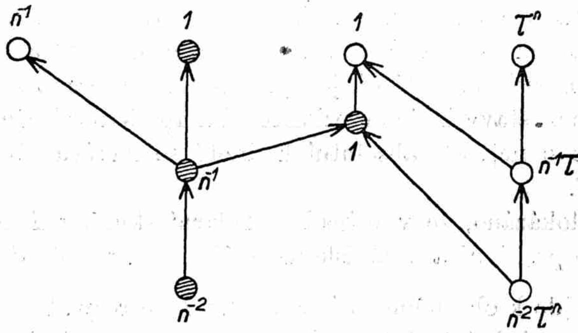

Рис. 1.

Замечание. Если $\varrho = 1$, то и $k = 1$, ибо, как легко обнаружить, к регулярному классу T_j, характеристическое число которого равно единице, не существует T_k такое, чтобы было $T_j < T_k$. Предельное распределение в таких классах T_j можно представить в виде $C_j\pi_j$. В остальных классах предел равен 0.

Добавление. Предположим, что характеристическое число подклассов равно ϱ или Θ, $\varrho > \Theta$, и что эти подклассы частично упорядочены таким образом, как показано на рисунке 1; классы с характеристическим числом ϱ обозначены полными кружками. Если положить $\frac{\Theta}{\varrho} = \tau$ то из теорем 2 и 3 вытекает, что величины $P(x_n = \omega | T^n)$ имеют в отдельных классах такой порядок, какой написан у каждого кружка на рисунке.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ф. Г. Гантмахер, М. Г. Крейн:* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Москва-Ленинград 1950.

[2] *Т. А. Сарымсаков:* Основы теории процессов Маркова. Москва 1954.

[3] *L. Truksa:* Statistická dynamika, Praha 1956.