ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 84 * PRAHA, 15. V. 1959 * ČÍSLO 2

# LINEÁRNÍ SOUSTAVY PŘÍMÝCH PODOBNOSTÍ V ROVINĚ

PAVEL BARTOŠ, Zlaté Moravce a JAN VYŠÍN, Praha

(Došlo dne 3. dubna 1957) DT: 513.72

V tomto článku se studují jisté množiny přímých podobných zobrazení v rovině, které se nazývají lineární soustavy podobností.

Lineární soustavy podobností budeme definovat takto:

**Definice 1.** V eukleidovské rovině budiž dáno $n$ navzájem různých bodů $B_1, B_2, \ldots, B_n$ a $n$ přímek $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(n \geqq 1)$. *Lineární soustavou* (přímých podobností) nazveme množinu $\Sigma_n$ všech takových přímých podobností, z nichž každá převádí body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ v body, které leží po řadě na přímkách $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Bod $B_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ se nazývá *bodem baze* soustavy $\Sigma_n$, přímka $p_\nu$ je k němu *příslušná nositelka* soustavy $\Sigma_n$. Číslo $n$ je tzv. *řád soustavy*.

Je výhodné počítat mezi podobnosti i tzv. singulární podobnosti. *Singulární podobnost* je zobrazení, které přiřaďuje všem bodům eukleidovské roviny týž bod roviny, zvaný *pól zobrazení*. K singulární podobnosti ovšem neexistuje podobnost inversní. Podobnosti v běžném slova smyslu (které jsou vzájemně jednoznačná zobrazení) budeme nazývat *regulární podobnosti*.

Početní vyjádření přímé podobnosti v komplexní souřadnici $z$ je dáno funkcí

$$z' = az + b\,,$$

kde $a$, $b$ jsou komplexní konstanty, $z$ souřadnice vzoru, $z'$ souřadnice obrazu. Pro $a \neq 0$ dostaneme podobnost regulární, pro $a = 0$ podobnost singulární s pólem $[b]$.[1])

Východiskem našeho výkladu budou soustavy 2. řádu. Uvedeme pro ně nejprve dvě pomocné věty:

**Věta 1.** *Budiž $\Sigma_2$ soustava 2. řádu s bazí $B_1$, $B_2$ a nositelkami $p_1$, $p_2$, budiž dále $\mathbf{P}_0$ regulární přímá podobnost. Pak množina $\mathbf{P}_0\Sigma_2$*[2]) *je soustava 2. řádu $\Sigma_2'$ s bazí $B_1'$, $B_2'$ a nositelkami $p_1$, $p_2$; přitom je $B_1' = \mathbf{P}_0^{-1}(B_1)$, $B_2' = \mathbf{P}_0^{-1}(B_2)$.*[3])

[1]) Pro formální zjednodušení užíváme jedné komplexní souřadnice místo obvyklých dvou kartézských souřadnic. Symbol $[z]$ značí bod roviny o komplexní souřadnici $z$.

[2]) Symbol $\mathbf{P}_0\Sigma_2$ značí (jako běžně v teorii grup) množinu všech podobností, které vzniknou složením podobnosti $\mathbf{P}_0$ se všemi zobrazeními ze $\Sigma_2$.

[3]) Symbol $\mathbf{P}_0^{-1}(B_1)$ značí obraz bodu $B_1$ v podobnosti $\mathbf{P}_0^{-1}$.

Důkaz. Je-li $\mathsf{P} \in \Sigma_2$, je $\mathsf{P}_0\mathsf{P} \in \Sigma_2' = \mathsf{P}_0\Sigma_2$; je-li $\mathsf{P}' \in \Sigma_1'$, je $\mathsf{P}_0^{-1}\mathsf{P}' \in \mathsf{P}_0^{-1}\Sigma_2' = \Sigma_2$.

**Definice 2.** Náleží-li každý bod baze lineární soustavy $\Sigma_n$ příslušné nositelce, nazveme soustavu $\Sigma_n$ *zvláštní lineární soustavou.*

**Věta 2.** *Budiž $\Sigma_2$ soustava 2. řádu s bazí $B_1$, $B_2$ a nositelkami $p_1$, $p_2$. Buďte $B_1'$, $B_2'$ dva různé body, které leží po řadě na přímkách $p_1$, $p_2$. Pak existuje (aspoň jedna) regulární přímá podobnost $\mathsf{P}_0$ tak, že soustava $\mathsf{P}_0\Sigma_2$ je zvláštní.*

Důkaz. Přímou podobnost $\mathsf{P}_0$ určíme dvojicemi $B_1' \to B_1$, $B_2' \to B_2$.

Prvním naším úkolem bude získat analytické vyjádření zvláštních lineárních soustav 2. řádu a z něho odvodit některé jejich vlastnosti.

**Věta 3.** *Budiž $\Sigma_2$ zvláštní lineární soustava, jejíž baze jsou body $B_1 = [0]$, $B_2 = [1 + ki]$ a příslušné nositelky rovnoběžné přímky $p_1$, $p_2$ o rovnicích $z - \bar{z} = 0$, $z - \bar{z} = 2ki$ ($k$ reálné).*[4] *Analytické vyjádření soustavy $\Sigma_2$ je pak dáno rovnicí*

$$z' = \frac{u + ki}{1 + ki} z + v\,, \tag{1}$$

*kde parametry $u$, $v$ probíhají navzájem nezávisle všecka reálná čísla.*

Důkaz. Budiž $z' = az + b$ libovolná podobnost ze $\Sigma_2$. Podle předpokladu platí

$$b - \bar{b} = 0\,, \quad a(1 + ki) + b - \bar{a}(1 - ki) - \bar{b} = 2ki\,. \tag{2}$$

Z rovností (2) vyplývá, že $b = v$ je číslo reálné a že imaginární část čísla $a(1 + ki)$ je $k$, tj.

$$a = \frac{u + ki}{1 + ki}\,,$$

kde $u$ je vhodné číslo reálné.

Obráceně je zřejmé, že rovnice (1) vyjadřuje pro každou dvojici reálných čísel $u$, $v$ podobnost ze soustavy $\Sigma_2$.

Poznámka. Rovnice (1) vyjadřuje nejobecnější zvláštní soustavu s rovnoběžnými nositelkami. Pro $k = 0$ obě nositelky splynou, body baze jsou pak [0], [1], což jsou dva libovolné body osy reálných čísel při vhodné volbě jednotkové úsečky.

Nyní budeme zkoumat obrazy daného bodu $Z$ ve všech podobnostech soustavy $\Sigma_2$. Tak dostaneme jistou množinu, kterou označíme $\Sigma_2(Z)$. Snadno ukážeme, že množina $\Sigma_2(Z)$ je buď celá rovina nebo přímka. Zavedeme definicí tyto názvy:

**Definice 3.** Budiž $\Sigma_2$ lineární soustava 2. řádu. Bod $Z$, pro nějž je množina $\Sigma_2(Z)$ celá rovina, nazveme *regulárním bodem* (vzhledem k soustavě $\Sigma_2$); bod $Z$, pro nějž je množina $\Sigma_2(Z)$ přímka nebo její část, nazveme *singulárním bodem* (vzhledem k soustavě $\Sigma_2$).

---

[4]) Rovnici přímky v komplexní souřadnici píšeme zpravidla ve tvaru $\lambda(\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \beta) = 0$, kde $\alpha$, $\lambda$ jsou komplexní čísla různá od nuly, $\beta$ je číslo reálné.

Je zřejmé, že každý bod baze soustavy je bodem singulárním.

**Věta 4.** *Zvláštní lineární soustava 2. řádu s rovnoběžnými nositelkami má nekonečně mnoho singulárních bodů, které vyplní přímku s spojující body baze; každý bod ležící mimo přímku s je regulární. Množina $\Sigma_2(Z)$ příslušná singulárnímu bodu $Z$ je přímka rovnoběžná s nositelkami soustavy a procházející bodem $Z$.*

Důkaz. Rovnici (1) přepíšeme do tvaru

$$z' = \frac{z}{1 + ki}\, u + v + \frac{kiz}{1 + ki}\,. \tag{3}$$

Množina $\Sigma_2(Z)$ není celá rovina tehdy a jen tehdy, platí-li pro souřadnici $z$ bodu $Z$ vztah

$$\begin{vmatrix} \dfrac{z}{1 + ki} & \dfrac{\bar{z}}{1 - ki} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{4}$$

neboli

$$(k + i)\, z + (k - i)\, \bar{z} = 0\,. \tag{5}$$

Singulární body vyplní tedy přímku o rovnici (5). Množina $\Sigma_2(Z)$ je pro každý singulární bod $Z = [z]$ přímka o parametrickém vyjádření (3). Tato přímka je vzhledem ke vztahu (4) rovnoběžná s reálnou osou, tj. s nositelkou $p_1(p_2)$ a obsahuje bod $Z$; neboť pro $u = 1$, $v = 0$ vychází z rovnice (3) $z' = z$.

**Věta 5.** *Budiž $\Sigma_2$ zvláštní lineární soustava s rovnoběžnými nositelkami $p_1$, $p_2$. Buďte dále $B'_1$, $B'_2$ dva její různé singulární body, $\Sigma'_2$ zvláštní soustava, jejíž bazí jsou body $B'_1$, $B'_2$ a jejíž nositelky jsou přímky $p'_1$, $p'_2$ rovnoběžné s $p_1$ a procházející po řadě body $B'_1$, $B'_2$. Pak soustavy $\Sigma_2$, $\Sigma'_2$ jsou totožné.*

Důkaz. Podle věty 4 každá podobnost ze $\Sigma_2$ náleží do $\Sigma'_2$ a každá podobnost ze $\Sigma'_2$ do $\Sigma_2$.

**Věta 6.** *Zvláštní lineární soustava $\Sigma_2$ s rovnoběžnými splývajícími nositelkami obsahuje nekonečně mnoho singulárních podobností; jejich póly vyplní nositelku. Zvláštní lineární soustava $\Sigma_2$, jejíž nositelky jsou různé rovnoběžky, neobsahuje žádnou singulární podobnost.*

Důkaz. Z rovnice (1) dostaneme singulární podobnost tehdy a jen tehdy, je-li

$$\frac{u + ki}{1 + ki} = 0\,,$$

tj. $u = -ki$. Číslo $-ki$ je reálné jen pro $k = 0$; pak dostaneme pro $u = 0$ a libovolné reálné $v$ singulární podobnost, jejíž pól je bod $[v]$.

**Věta 7.** *Budiž $\Sigma_2$ zvláštní lineární soustava, jejíž baze jsou body* $[1]$, $[z_0]$

*a jejíž nositelky jsou různoběžné přímky $p_1$, $p_2$ o rovnicích $z - \bar{z} = 0$, $\alpha_1 z + \bar{\alpha}_1 \bar{z} = 0$. Analytické vyjádření soustavy $\Sigma_2$ je pak dáno rovnicí*

$$z' = \left[-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\right)\frac{u}{z_0 - 1} + \frac{vi}{\alpha_1(z_0 - 1)}\right](z - 1) + u\,, \tag{6}$$

*kde parametry $u$, $v$ probíhají navzájem nezávisle všecka reálná čísla.*

Důkaz. Z předpokladů věty 7 vyplývají tyto podmínky:

$$z_0 \neq 1\,,\ \alpha_1 + \bar{\alpha}_1 \neq 0\,,\ (\text{a tudíž } \alpha_1 \neq 0)\,, \tag{7a}$$

a dále vztah

$$\alpha_1 z_0 + \bar{\alpha}_1 \bar{z}_0 = 0\,. \tag{7b}$$

Budiž $z' = az + b$ rovnice libovolné podobnosti ze $\Sigma_2$. Pak platí vztahy

$$a + b - \bar{a} - \bar{b} = 0\,, \quad \alpha_1(az_0 + b) + \bar{\alpha}_1(\bar{a}\bar{z}_0 + \bar{b}) = 0\,. \tag{8}$$

Z první rovnosti (8) vyplývá, že číslo $a + b = u$ je reálné. Z druhé rovnosti (8) plyne, že komplexní číslo $\alpha_1 a(z_0 - 1)$ má reálnou část $-\frac{1}{2}(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)\,u$; je tedy

$$\alpha_1 a(z_0 - 1) = -\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)\,u + vi\,,$$

neboli vzhledem k (7a)

$$a = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\right)\frac{u}{z_0 - 1} + \frac{vi}{\alpha_1(z_0 - 1)}\,,$$

a dále $b = u - a$. Odtud dostaneme rovnici (6).

Obráceně je zřejmé z rovnice (6), že obrazy bodu [1] leží na přímce $z - \bar{z} = 0$, obrazy bodu $[z_0]$ na přímce $\alpha_1 z + \bar{\alpha}_1 \bar{z} = 0$.

Poznámka. Rovnice (6) vyjadřuje libovolnou zvláštní soustavu s různoběžnými nositelkami, neboť vhodnou volbou jednotkové úsečky lze vždy dosáhnout toho, že jeden bod baze má souřadnici [1], je-li průsečík obou nositelek zvolen za počátek souřadnic.

**Věta 7.** *Zvláštní lineární soustava 2. řádu s různoběžnými nositelkami má nekonečně mnoho singulárních bodů, které vyplní kružnici $s$, procházející body $B_1$, $B_2$ a průsečíkem obou nositelek; každý bod ležící mimo kružnici $s$ je regulární. Množina $\Sigma_2(Z)$ příslušná singulárnímu bodu $Z$ je přímka procházející průsečíkem nositelek a bodem $Z$. Množina $\Sigma_2(Z)$ příslušná průsečíku obou nositelek je tečna kružnice $s$ v tomto bodě.*

Důkaz. Rovnici (6) přepíšeme do tvaru

$$z' = \left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\right)\frac{z - 1}{z_0 - 1}\right]u + \frac{i}{\alpha_1}\frac{z - 1}{z_0 - 1}\,v\,. \tag{9}$$

Množina $\Sigma_2(Z)$ není celá rovina tehdy a jen tehdy, platí-li pro souřadnici $z$ bodu $Z$ vztah

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\right)\frac{z-1}{z_0-1} & 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}_1}\right)\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}_0-1} \\ \frac{i}{\alpha_1}\frac{z-1}{z_0-1} & -\frac{i}{\bar{\alpha}_1}\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}_0-1} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{10}$$

Použijeme-li podmínek (7a), (7b), můžeme upravit vztah (10) na ekvivalentní tvar

$$(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)\, z\bar{z} - (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1\bar{z}_0)\, z - (\bar{\alpha}_1 + \alpha_1 z_0)\, \bar{z} = 0\,. \tag{11}$$

Rovnice (11) vyjadřuje kružnici $s$, která prochází počátkem (průsečíkem obou nositelek).

Množina $\Sigma_2(Z)$ pro libovolný bod $Z$ kružnice $s$ je přímka o rovnici (9); tato přímka prochází zřejmě počátkem, tj. průsečíkem obou nositelek.

Budiž $Z = [z]$ libovolný bod kružnice $s$ různý od bodu [1]. Na přímce (9), totožné s přímkou $\Sigma_2(Z)$, leží bod $[z]$, který dostaneme pro $u = 0$, $v = -\dfrac{i\alpha_1 z(z_0 - 1)}{z-1}$; skutečně toto číslo $v$ je reálné, jak zjistíme, vypočteme-li rozdíl $\bar{v} - v$ a použijeme vztahů (7b), (11).

Přímka $\Sigma_2(Z)$ pro bod $Z = [0]$ má podle (9) parametrické vyjádření $z = -\dfrac{i}{\alpha_1}\dfrac{t}{z_0 - 1}$. Její společné body s kružnicí $s$ mají parametry, které jsou řešením rovnice

$$(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)\, t^2 + i[(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1\bar{z}_0)\, \bar{\alpha}_1(\bar{z}_0 - 1) - (\bar{\alpha}_1 + \alpha_1 z_0)\, \alpha_1(z_0 - 1)]\, t = 0\,. \tag{12}$$

S použitím vztahu (7b) snadno dokážeme, že koeficient při $t$ v rovnici (12) je roven nule. Proto má rovnice (12) jediný kořen $t = 0$ a přímka $\Sigma_2(Z)$ je tečnou kružnice $s$ v bodě [0].

**Věta 8.** *Budiž $\Sigma_2$ zvláštní lineární soustava s různoběžnými nositelkami $p_1$, $p_2$ s průsečíkem $Q$. Buďte dále $B_1'$, $B_2'$ dva její různé singulární body, $\Sigma_2'$ zvláštní soustava, jejíž bazí jsou body $B_1'$, $B_2'$ a jejíž nositelky jsou přímky $QB_1'$, $QB_2'$.*[5] *Pak jsou soustavy $\Sigma_2$, $\Sigma_2'$ totožné.*

Věta 8 plyne z věty 7 podobně jako věta 5 z věty 4.

**Věta 9.** *Zvláštní lineární soustava $\Sigma_2$ s různoběžnými přímkami obsahuje jedinou singulární podobnost; její pól je průsečík obou nositelek.*

[5]) Je-li např. $B_1' \equiv Q$, nahradíme přímku $QB_1'$ tečnou kružnice singulárních bodů v bodě $B_1'$.

**Důkaz.** Podobnost (6) ze soustavy $\Sigma_2$ je singulární tehdy a jen tehdy, je-li

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\right)\frac{u}{z_0-1}+\frac{vi}{\alpha_1(z_0-1)}=0\,,$$

neboli $(\alpha_1+\bar{\alpha}_1)\,u=2vi$, což nastane jedině pro $u=v=0$.

Poznámka. Je možné, že jeden z bodů baze splyne s průsečíkem obou nositelek. Pak je příslušná nositelka tečnou kružnice singulárních bodů, jak vyplývá z rovnice (11), dosadíme-li tam $z_0=0$.

Pomocí vět 1, 2 lze převést vlastnosti zvláštních soustav 2. řádu na libovolné soustavy. Libovolnou soustavu 2. řádu lze psát ve tvaru

$$\Sigma_2=\mathsf{P}_0\Sigma_2'\,,\tag{13}$$

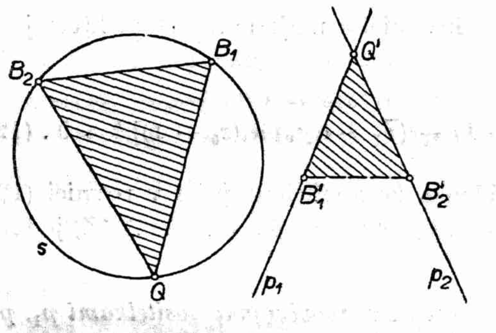
kde $\mathsf{P}_0$ je regulární podobnost, $\Sigma_2'$ je zvláštní soustava s týmiž nositelkami jako $\Sigma_2$. Je zřejmé, že pro množinu obrazů libovolného bodu $Z$ platí

$$\Sigma_2(Z)=\Sigma_2'(\mathsf{P}_0(Z))\,.\tag{14}$$

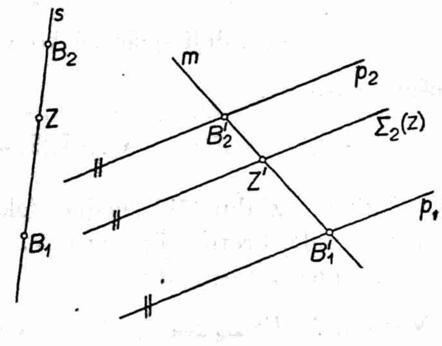
Ze vztahu (14) vyplývá věta 11:

**Věta 11.** *Budiž $\Sigma_2$ libovolná soustava 2. řádu, $\mathsf{P}_0$ regulární přímá podobnost, $\Sigma_2'$ zvláštní lineární soustava tak, že platí $\Sigma_2=\mathsf{P}_0\Sigma_2'$. Pak bod $Z$ je regulárním (singulárním) bodem soustavy $\Sigma_2$ tehdy a jen tehdy, je-li bod $\mathsf{P}_0(Z)$ regulárním (singulárním) bodem soustavy $\Sigma_2'$.*

Z věty 11 vyplývá, že množina $\mathsf{S}$ singulárních bodů soustavy $\Sigma_2$ je obrazem množiny $\mathsf{S}'$ singulárních bodů soustavy $\Sigma_2'$ v podobnosti $\mathsf{P}_0^{-1}$.




Obr. 1.



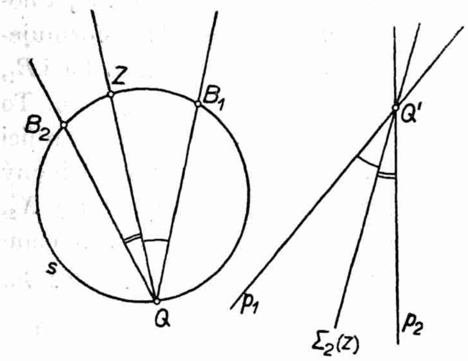

Obr. 2.

Dále je ze vztahu (13) patrno, že podobnost $\mathsf{P}=\mathsf{P}_0\mathsf{P}'$ ze soustavy $\Sigma_2$ je singulární tehdy a jen tehdy, je-li singulární podobnost $\mathsf{P}'$ ze soustavy $\Sigma_2'$; póly singulárních podobností obou soustav $\Sigma_2$, $\Sigma_2'$ jsou zřejmě tytéž. Můžeme tedy vyslovit následující větu:

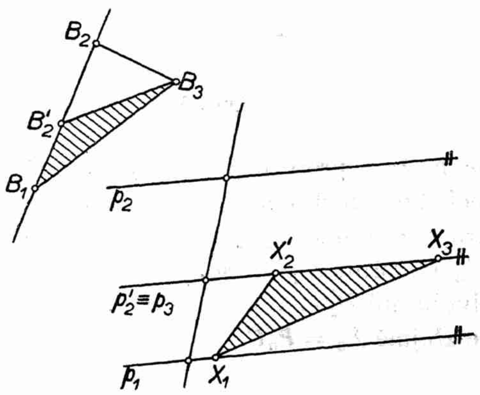
**Věta 12.** *Singulární body soustavy $\Sigma_2$ s bazí $B_1$, $B_2$ a rovnoběžnými nositelkami $p_1$, $p_2$ vyplní přímku $B_1B_2$. Singulární body soustavy $\Sigma_2$ s bazí $B_1$, $B_2$ a různoběžnými nositelkami $p_1$, $p_2$ vyplní kružnici, která prochází body $B_1$, $B_2$.*

Kružnici singulárních bodů v posledním případě sestrojíme takto (obr. 1): Označíme $Q'$ průsečík obou nositelek $p_1$, $p_2$, sestrojíme na přímkách $p_1$, $p_2$ po řadě body $B'_1 \not\equiv Q'$, $B'_2 \not\equiv Q'$ třeba tak, aby platilo $B'_1Q' = B'_2Q'$. Dále sestrojíme trojúhelník $B_1B_2Q$ přímo podobný trojúhelníku $B'_1B'_2Q'$. Kružnice $s$ opsaná trojúhelníku $B_1B_2Q$ je kružnice singulárních bodů dané soustavy $\Sigma_2$. Označíme-li $\Sigma'_2$ zvláštní soustavu s bazí $B'_1$, $B'_2$ a nositelkami $p_1$, $p_2$, je podobnost $\mathsf{P}_0$ ze vztahu (13) přímá podobnost, určená dvojicemi $B_1 \to B'_1$, $B_2 \to B'_2$.

Je třeba se ještě zmínit o konstrukci přímky $\Sigma_2(Z)$, je-li $Z$ singulární bod soustavy $\Sigma_2$. Obr. 2 ukazuje tuto konstrukci pro soustavu $\Sigma_2$ s dvěma různými rovnoběžnými nositelkami $p_1$, $p_2$.[6]) Vedeme přímku $m$ různoběžnou s přímkami $p_1$, $p_2$ a označíme průsečíky $B'_1 \equiv p_1 \,.\, m$, $B'_2 \equiv p_2 \,.\, m$. Na přímce $m$ sestrojíme bod $Z'$ tak, aby pro dělicí poměry platilo $(B_1B_2Z) = (B'_1B'_2Z')$; bodem $Z'$ pak vedeme přímku $\Sigma_2(Z) \parallel p_1$.




Obr. 3.




Obr. 4.

Obr. 3 ukazuje konstrukci přímky $\Sigma_2(Z)$ pro singulární bod soustavy $Z$ s dvěma různoběžnými nositelkami $p_1$, $p_2$. Na kružnici $s$ singulárních bodů zvolíme libovolný bod $Q$ (třeba na oblouku doplňkovém k oblouku $\widehat{B_1ZB_2}$) a ve svazku $Q'(Q' \equiv p_1 \,.\, p_2)$ sestrojíme přímku $\Sigma_2(Z)$ tak, aby trojice přímek $QB_1$, $QZ$, $QB_2$; $p_1$, $\Sigma_2(Z)$, $p_2$ byly přímo shodné.

Čtenář si snadno odůvodní obě konstrukce.

V dané soustavě $\Sigma_2$ lze změnit jistým způsobem bazi i nositelky, aniž se tím změní sama soustava. Platí totiž věta 13, která je rozšířením vět 5 a 9.

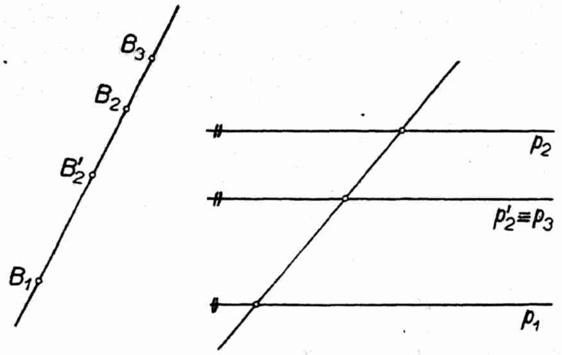
**Věta 13.** *Buďte $C_1$, $C_2$ dva různé singulární body soustavy $\Sigma_2$. Pak soustava $\Sigma'_2$ s bazí $C_1$, $C_2$ a nositelkami $\Sigma_2(C_1)$, $\Sigma_2(C_2)$ je totožná se soustavou $\Sigma_2$.*

Věta 13 vyplývá přímo z vět 5 a 9.

[6]) Je-li $p_1 \equiv p_2$, je $\Sigma_2(Z) \equiv p_1$ pro každý singulární bod $Z$.

Změnu baze a nositelek soustavy podle věty 13 budeme stručně nazývat *transformací baze soustavy*.

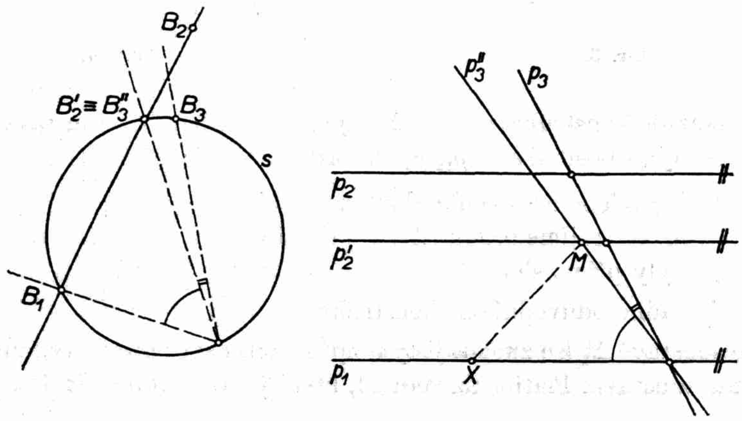
Nyní použijeme transformace baze soustavy $\Sigma_2$ ke studiu soustav vyšších řádů. Vyšetřování nebudeme provádět systematicky, ukážeme postup jen na několika příkladech, vztahujících se zejména k soustavám třetího řádu.



Obr. 5.

**Příklad 1.** Je dána soustava $\Sigma_3$, jejíž baze jsou tři nekolineární body $B_1$, $B_2$, $B_3$ a jejíž nositelky jsou tři různé rovnoběžky $p_1$, $p_2$, $p_3$. Máme určit všecky podobnosti soustavy $\Sigma_3$.

Řešení. Soustava $\Sigma_3$ je zřejmě průnik soustavy $\Sigma_2^1$ s bazí $B_1$, $B_2$ a nositelkami $p_1$, $p_2$ a soustavy $\Sigma_2^2$ s bazí $B_1$, $B_3$ a nositelkami $p_1$, $p_3$. Transformujeme bazi soustavy $\Sigma_2^1$ v bazi $B_1$, $B_2'$ a nositelky $p_1$, $p_2' \equiv p_3$. To je možné, protože $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3$; konstrukci ukazuje obr. 4. Dostaneme trojici nekolineárních bodů $B_1$, $B_2'$, $B_3$; sestrojíme trojúhelník $X_1X_2'X_3$ přímo podobný trojúhelníku $B_1B_2'B_3$ tak, aby jeho vrchol $X_1$ ležel na přímce $p_1$ a vrcholy $X_2'$, $X_3$ na přímce $p_2' \equiv p_3$. Označíme-li $\mathbf{P}_0$ regulární přímou podobnost, určenou dvojicemi $B_2' \to X_2$, $B_3 \to X_3$ a $\Gamma$ grupu všech translací ve směru přímky $p_1$, je zřejmě $\Sigma_3 = \mathbf{P}_0\Gamma$.

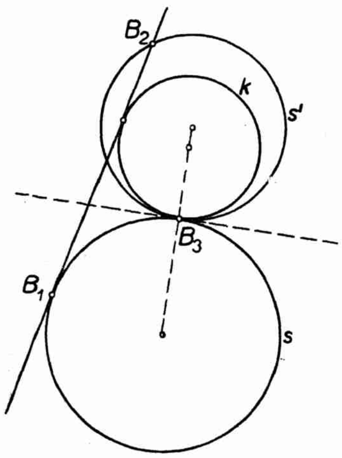


Obr. 6.

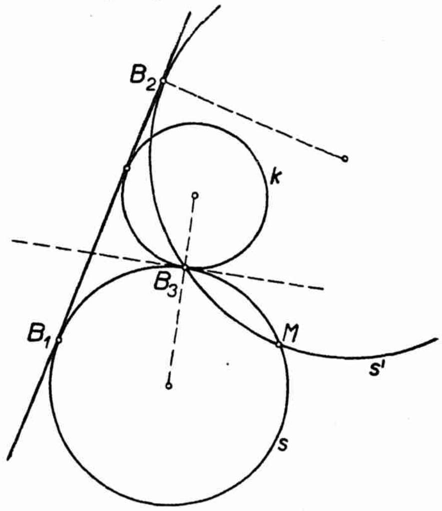
**Příklad 2.** Je dána soustava $\Sigma_3$, jejíž baze jsou tři různé kolineární body $B_1$, $B_2$, $B_3$ a jejíž nositelky jsou tři různé rovnoběžky $p_1$, $p_2$, $p_3$. Máme určit všecky podobnosti soustavy $\Sigma_3$.

Řešení. Postupujeme jako při řešení příkladu 1; dostaneme soustavu $\Sigma_2^1$ s bazí $B_1$, $B_2'$ a nositelkami $p_1$, $p_2' \equiv p_3$, dále soustavu $\Sigma_2^2$ s bazí $B_1$, $B_3$ a nositelkami $p_1$, $p_3$. Průnikem obou soustav $\Sigma_2^1$, $\Sigma_2^2$ je soustava $\Sigma_3$. Je-li $B_2' \equiv B_3$ je zřejmě $\Sigma_3 = \Sigma_2^1 = \Sigma_2^2$; je-li $B_2' \not\equiv B_3$ (jako na obr. 5), je množina $\Sigma_3$ prázdná.

**Příklad 3.** Je dána soustava $\Sigma_3$, jejíž baze jsou tři nekolineární body $B_1$, $B_2$, $B_3$ a jejíž nositelky jsou dvě různé rovnoběžky $p_1$, $p_2$ a přímka $p_3$, která je obě protíná. Máme určit všecky podobnosti soustavy $\Sigma_3$.



Obr. 7a.



Obr. 7b.

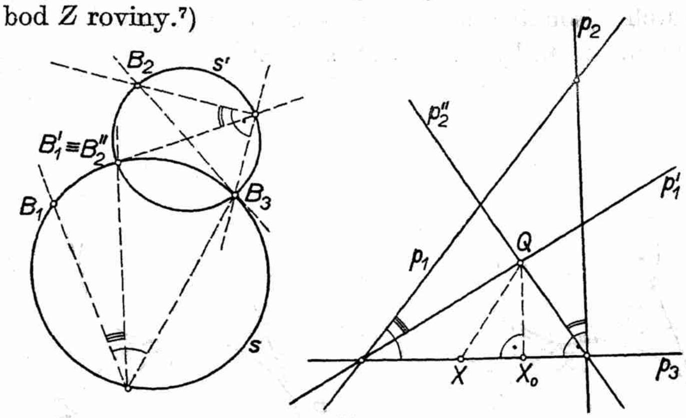
Řešení (obr. 6). Soustava $\Sigma_3$ je průnikem soustavy $\Sigma_2^1$ s bazí $B_1$, $B_2$ a nositelkami $p_1$, $p_2$ a soustavy $\Sigma_2^2$ s bazí $B_1$, $B_3$ a nositelkami $p_1$, $p_3$.

a) Nechť kružnice $s$ singulárních bodů soustavy $\Sigma_2^2$ protíná přímku $B_1B_2$ v bodě $B_2' \not\equiv B_1$, jak je naznačeno na obr. 6. Transformujeme baze soustav $\Sigma_2^1$, $\Sigma_2^2$ ve dvojice $B_1$, $B_2'$ a $B_1$, $B_3'' \equiv B_2'$; příslušné nositelky $p_2'$, $p_3''$ jsou zřejmě různoběžné a protínají se v bodě $M$ ležícím mimo přímku $p_1$. Soustava $\Sigma_3$ je pak množina všech přímých podobností, které převádějí bod $B_2' \equiv B_3''$ v bod přímky $p_2'$ i v bod přímky $p_3''$, tj. v průsečík $M$; bod $B_1$ převádějí tyto podobnosti v libovolný bod $X$ přímky $p_1$.

b) Jestliže se kružnice $s$ dotýká přímky $B_1B_2$ v bodě $B_1$, postupujeme takto: Existuje právě jedna kružnice $k$, která se dotýká přímky $B_1B_2$ a kružnice $s$ v bodě $B_3$. Nechť $B_2$ není bod dotyku kružnice $k$ s přímkou $B_1B_2$. Označme $\Sigma_2^3$ soustavu s bazí $B_2$, $B_3$ a nositelkami $p_2$, $p_3$, $s'$ kružnici jejích singulárních bodů. Jestliže kružnice $s'$ protíná přímku $B_1B_2$ (obr. 7a), nastane pro soustavy $\Sigma_2^1$, $\Sigma_2^3$ případ z odstavce a). Jestliže se kružnice $s'$ dotýká přímky $B_1B_2$ v bodě $B_2$, pak protíná $s'$ kružnici $s$ mimo $B_3$ v dalším bodě $M$ (obr. 7b). Baze soustav $\Sigma_2^2$, $\Sigma_2^3$ transformujeme v dvojice $B_1$, $M$; $B_2$, $M$ a dále postupujeme jako v odstavci a).

c) V odstavci b) se předpokládalo, že bod $B_2$ není bodem dotyku kružnice $k$ s přímkou $B_1B_2$. Je-li tomu tak, transformujeme bazi $B_1$, $B_2$ soustavy $\Sigma_2^1$ v bazi $B_1$, $B_2' \neq B_2$; tím je tento případ převeden na případ z odstavce b).

**Příklad 4.** Je dána soustava $\Sigma_3$, jejíž baze jsou tři nekolineární body $B_1$, $B_2$, $B_3$ a jejíž nositelky jsou tři nekolineární přímky. Máme určit množinu $\Sigma_3(Z)$ pro libovolný bod $Z$ roviny.[7])




Obr. 8.

Řešení. Označme $s$, $s'$ kružnice singulárních bodů soustav $\Sigma_2^1$ (s bazí $B_1$, $B_3$, nositelkami $p_1$, $p_3$) a soustavy $\Sigma_2^2$ (s bazí $B_2$, $B_3$, nositelkami $p_2$, $p_3$); předpokládejme, že se kružnice $s$, $s'$ protínají mimo bod $B_3$ ještě v bodě $B_1' \equiv B_2''$ (obr. 8; této situace lze vždy dosáhnout vhodnou transformací baze).

Nyní transformujeme baze soustav $\Sigma_2^1$, $\Sigma_2^2$ ve dvojice $B_3$, $B_1'$; $B_3$, $B_2'' \equiv B_1'$; příslušné nositelky $p_1'$, $p_2''$ se protnou v bodě $Q$ ležícím mimo přímku $p_3$.[8]) Soustava $\Sigma_3$ je obdobně jako v příkladě 3a) množina všech přímých podobností, které jsou určeny dvojicemi $B_1' \to Q$, $B_3 \to X$; přitom $X$ probíhá přímku $p_3$.

Zvolme bod $Q$ za počátek soustavy souřadnic; nechť má přímka $p_3$ rovnici $z - \bar{z} = 2ki$, kde $k$ je reálné kladné číslo. Libovolná podobnost soustavy $\Sigma_3$ je $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$; přitom $\mathbf{P}_0$ je přímá podobnost určená dvojicemi $B_1' \to Q$, $B_3 \to X_0$, kde $X_0$ je pata kolmice spuštěné z bodu $Q$ na přímku $p_3$, $\mathbf{P}$ je přímá podobnost určená dvojicemi $Q \to Q$, $X_0 \to X$. Snadno odvodíme, že podobnost $\mathbf{P}$ má početní vyjádření

$$z' = (1 + ui)\,z\,, \qquad (15)$$

kde $u$ probíhá všecka reálná čísla. Je-li $z \neq 0$, vyjadřuje rovnice (15) přímku kolmou k přímce $QZ$; je-li $z = 0$, vyjadřuje (15) jediný bod $Q$.[9])

Máme tedy výsledek: Množina $\Sigma_3(Z)$ je buď bod nebo přímka.

**Příklad 5.** Naznačíme postup řešení této známé úlohy: Máme sestrojit čtverec, jehož vrcholy leží na čtyřech daných přímkách.

[7]) Symbol $\Sigma_3(Z)$ má obdobný význam jako symbol $\Sigma_2(Z)$; viz str. 130.
[8]) Na obr. 8 je $p_2 \perp p_3$, neboť body $B_2$, $B_3$ jsou krajní body průměru kružnice $s'$.
[9]) Tento výsledek lze odvodit také snadno synteticky.