Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

REFERÁTY

TEORIE KŘIVKY KLEINOVA PĚTIROZMĚRNÉHO PROSTORU A JEJÍ APLIKACE NA SEGREHO KONGRUENCE W

(Vlastní referát z přednášky přednesené dne 24. února 1958 v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků".)

C. SEGRE ukázal v práci [2] synthetickým způsobem, že každé kongruenci W s fokálními plochami přímkovými (v dalším nazývejme tyto kongruence *Segreho kongruencemi*) trojrozměrného prostoru lze v Kleinově pětirozměrném prostoru přiřadit jistou rozvinutelnou plochu. Segreho kongruence W, která nenáleží lineárnímu komplexu a jejíž asociovaná kongruence rovněž nenáleží lineárnímu komplexu, je v Kleinově prostoru representována rozvinutelnou plochou tečen prostorové křivky, která neleží v podprostoru Kleinova prostoru. Snadno se vidí, že studium kongruencí W uvedeného typu je ekvivalentní se studiem rozvinutelných ploch, resp. jejich hran vratu, které neleží v podprostoru Kleinova pětirozměrného prostoru. Autor se v přednášce omezil na uvedené kongruence.

Buď dán v projektivním Kleinově prostoru $\bar{P}_5$ oblouk křivky $\bar{C} \equiv \{x(\tau)\}$, (který neleží v podprostoru prostoru $\bar{P}_5$), v jehož každém bodě existují jednoznačně lineární oskulační prostory $\bar{P}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$, $\bar{P}_1$ je tečnou), které mají s křivkou $\bar{C}$ styk právě i-tého řádu; nechť žádný bod uvažovaného oblouku křivky $\bar{C}$ neleží na Kleinově hyperkvadrice Γ (K-kvadrice Γ) a prostory $\bar{P}_i$ nechť nejsou tečnými prostory K-kvadriky Γ, která je dána rovnicí $x \,.\, x \equiv 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6) = 0$. K-kvadrika určená předcházející rovnicí buď kladně orientována (Γ^+); bod $x \in \bar{P}_5$ je kladný (záporný) vzhledem ke K-kvadrice Γ^+, jestliže $x \,.\, x > 0$ ($x \,.\, x < 0$). Faktor homogenity souřadnic bodů křivky $\bar{C}$ a nový parametr, který označme t, lze volit tak, že pro aritmetickou křivku $x_i = x_i(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$) platí $x \,.\, x = \varepsilon_1$, $x' \,.\, x' = \varepsilon_2$ ($\varepsilon_j^2 = 1, j = 1, 2$), kde čárky značí derivace podle parametru t. Říkejme, že křivka $x_i = x_i(t)$ kladně orientovaná s rostoucím parametrem t je dána v normálním tvaru. V každém bodě této křivky existuje oskulační simplex, který je současně polárním ke K-kvadrice Γ^+, jehož vrcholy jsou aritmetické body, ${}^1N$, ${}^2N$, ${}^3N$, ${}^4N$, ${}^5N$, ${}^6N$, které lze určit až na znaménka π_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) a které splňují relace ${}^iN \,.\, {}^iN = \varepsilon_i$ ($\varepsilon_i^2 = 1$); platí Frenetovy vzorce

$$
\begin{aligned}
{}^1N' &= \pi_2\,{}^2N\,, \\
{}^2N' &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\pi_2\,{}^1N + \varepsilon_1\pi_3K_1\,{}^3N\,, \\
{}^3N' &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\pi_3K_1\,{}^2N + \varepsilon_2\pi_4K_2\,{}^4N\,, \\
{}^4N' &= -\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\pi_4K_2\,{}^3N + \varepsilon_3\pi_5K_3\,{}^5N\,, \\
{}^5N' &= -\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\pi_5K_3\,{}^4N + \varepsilon_4\pi_6K_4\,{}^6N\,, \\
{}^6N' &= -\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\pi_6K_4\,{}^5N\,,
\end{aligned}
$$

kde $K_i = \sqrt{|{}^{i+1}N' \,.\, {}^{i+1}N' - \varepsilon_iK_{i-1}^2|}$ ($i = 1, 2, 3, 4$, $K_0 = 1$) a čárky značí derivace podle parametru t. Tři z bodů ${}^iN$ jsou kladné a tři záporné vzhledem ke K-kvadrice Γ^+. Funkce $K_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) a znaménka ε_j ($j = 1, 2, \ldots, 6$) tvoří úplný systém projektivních diferenciálních invariantů orientované křivky prostoru $\overline{P}_5$ vzhledem k podgrupě projektivních unimodulárních transformací (které reprodukují K-kvadriku Γ^+), která odpovídá grupě unimodulárních projektivních transformací trojrozměrného projektivního prostoru P_3. Uvažované orientované křivce odpovídá v prostoru P_3 Segreho kongruence W, určená jako orientovaná vrstva regulů až na unimodulární projektivní transformace.

Křivka, která representuje asociovanou kongruenci ke kongruenci dané, je opsána bodem ${}^6N$, jehož parametr u je vázán s parametrem t diferenciální rovnicí $du = K_4\, dt$. Invarianty $\tilde{K}_j$ a $\tilde{\varepsilon}_i$ ($j = 1, 2, 3, 4$, $i = 1, 2, \ldots, 6$) křivky, která representuje asociovanou kongruenci, jsou vyjádřeny pomocí invariantů původní křivky relacemi $\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_{7-i}$ a $\tilde{K}_j = \dfrac{K_{4-j}}{K_4}$.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby fokální plochy Segreho kongruence W, resp. kongruence asociované byly reálné, je $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, resp. $\varepsilon_5 = -\varepsilon_6$. Nutná a postačující podmínka pro to, aby paprsky kongruence a tím současně kongruence asociované byly reálné, je, aby se znaménka $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ navzájem nerovnala.

V další části přednášky navázal autor na práci [1]. Segreho kongruence W, která je určena řídícími křivkami C_y, C_z a $C_{\bar{y}}, C_{\bar{z}}$ fokálních ploch (křivky jsou opsány body $y, z, \bar{y}, \bar{z}$, jejichž parametr v je t. zv. normálním parametrem, viz [1]), přísluší v prostoru $\overline{P}_5$ křivka v normálním tvaru, opsaná bodem $x(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\lambda|\alpha|[(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})]$ ($\lambda^2 = 1$, $\pi^2 = 1$, α je funkce parametru v), jehož parametr t je vázán s parametrem v diferenciální rovnicí $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2|S|}$. Invarianty této křivky jsou s invarianty $\omega, \pi, \varepsilon = Q^2 - PR$, $H = Q'^2 - P'R'$, $\alpha \neq 0$, $S \neq 0$, $K = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{vmatrix}$ ($\omega^2 = 1$, $\pi^2 = 1$, $\varepsilon^2 = 1$, $H \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $S \neq 0$, $K \neq 0$ funkce v) kongruence W (viz [1]) vázány relacemi

$$K_1 = \left|\frac{\alpha}{S}\right|, \quad K_2 = \frac{1}{|S|}, \quad K_3 = \frac{\sqrt{|H|}}{2|S|}, \quad K_4 = \frac{|K|}{4|SH|},$$

$$\varepsilon_1 = -\pi\omega, \quad \varepsilon_2 = \pi\omega, \quad \varepsilon_3 = -\omega, \quad \varepsilon_4 = \omega\varepsilon, \quad \varepsilon_5 = \omega \operatorname{sgn} H, \quad \varepsilon_6 = -\omega\varepsilon \operatorname{sgn} H.$$

Ukazuje se, že změnou znamének invariantů α, S, K v práci [1] se kongruence jako geometrický útvar nemění. Kongruence W neexistuje, jestliže pro invarianty v práci [1] platí $\varepsilon = \operatorname{sgn} H = -1$, neboť tato relace má za následek $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6$, což je spor s tvrzením, že tři ze znamének ε_i jsou kladná a tři záporná.

LITERATURA

[1] *J. Klapka*: O W-kongruencích s fokálními plochami přímkovými, Spisy přír. fak. MU v Brně, č. *69*, 1926.

[2] *C. Segre*: Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate, Accad. Reale delle Sc. di Torino, *42*, 1906—1907, 539—550.

Vladimír Horák, Brno

PROJEKTIVNÍ DEFORMACE SEGREHO KONGRUENCÍ W

(Vlastní referát z přednášky přednesené dne 19. května 1958 v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků".)

V přednášce se autor zabýval projektivní deformací Segreho kongruencí W, tj. kongruencí W s fokálními plochami přímkovými a jejich zobrazením do Kleinova pětirozměrného prostoru. Při vyšetřování bylo použito početního aparátu a označení zavedeného v práci [2]. Systém diferenciálních rovnic

$$y' = \left(Q + S - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right) y - Pz + \alpha\bar{y}\,, \quad z' = Ry + \left(S - Q - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right) z + \alpha\bar{z}\,,$$
$$\bar{y}' = -\left(Q + S + \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\bar{y} + P\bar{z} + \pi\alpha y\,, \quad \bar{z}' = -R\bar{y} + \left(Q - S - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\bar{z} + \pi\alpha z\,, \tag{1}$$

kde $\pi^2 = 1$ a $P, Q, R, S, \alpha \neq 0$ jsou funkce parametru v, který byl zvolen tak, že platí $(y, z, y', z') = (\bar{y}, \bar{z}, \bar{y}', \bar{z}') = \omega$ $(\omega^2 = 1)$ a čárky značí derivace podle parametru v, určuje řídící křivky Cy, Cz a $C\bar{y}$, $C\bar{z}$ opsané body y, z a $\bar{y}, \bar{z}$ přímkových fokálních ploch Segreho kongruencí W. Paprsky kongruence určují mezi fokálními plochami asymptotickou transformaci, v níž bodu $A_1 = t_1\, y(v) + t_2\, z(v)$ koresponduje bod $A_2 = t_1\, \bar{y}(v) + t_2\, \bar{z}(v)$; tyto body opisují asymptotiky na fokálních plochách, jestliže buď $t_1, t_2 =$ konst, nebo $v =$ const. Předpokládejme, že v uvažovaném intervalu parametru v platí $Q^2 - PR \neq 0$ a $(Q^2 - PR)'^2 - 4(Q^2 - PR)(Q'^2 - P'R') \neq 0$, takže studované kongruence nejsou ani fleknodální, ani nenáleží speciálnímu lineárnímu komplexu.

Nechť systém (1) v napsaném pořadí určuje kongruenci W, která je orientována tak, že bod A_1 (A_2) je prvním (druhým) ohniskem, které opisuje první (druhou) fokální plochu; řídící křivky Cy, $C\bar{y}$ $(Cz, C\bar{z})$ jsou prvními (druhými) řídícími křivkami svých fokálních ploch a vrstva regulů, na něž se dá kongruence rozložit, je kladně orientována s rostoucím parametrem v. Změna pořadí ohnisek nebo řídících křivek fokálních ploch má za následek jistou změnu v pořadí rovnic v systému (1). Uvažujme o druhé orientované kongruenci W, kterou určuje systém diferenciálních rovnic, který obdržíme ze systému (1) transformací

$$\begin{pmatrix} y, & z, & \bar{y}, & \bar{z}, & P, & Q, & R, & S. & \alpha, & v, & t_1, t_2, & \pi, & \omega \\ {}^1y, & {}^1z, & {}^1\bar{y}, & {}^1\bar{z}, & {}^1P, & {}^1Q, & {}^1R, & {}^1S, & {}^1\alpha, & {}^1v, & \tau_1, \tau_2, & {}^1\pi, & {}^1\omega \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Označme tento systém diferenciálních rovnic (1'). Systémy (1) a (1') se od sebe liší pouze indexem 1.

Autor uvedl nutné a postačující podmínky pro to, aby Segreho kongruence W určené systémy (1) a (1') byly v rozvinutelné transformaci, která je nutně asymptotická. Vhodnou volbou řídících křivek fokálních ploch obou kongruencí lze docílit, že rozvinutelná transformace je dána rovnicemi

$$t_1 = \tau_1\,, \quad t_2 = \tau_2\,, \quad v = {}^1v\,; \tag{3}$$

jestliže (3) je rozvinutelnou transformací mezi kongruencemi určenými systémy (1) a (1'), potom platí $P = {}^1P$, $Q = {}^1Q$, $R = {}^1R$ a funkce $\alpha, S, {}^1\alpha, {}^1S$ a znaménka $\pi, \omega, {}^1\pi, {}^1\omega$ jsou libovolné.

Každá rozvinutelná transformace (3) je projektivní asymptotickou deformací prvního řádu; ke každému páru paprsků odpovídajících si v rozvinutelné transformaci (3) existuje ∞^5 tečných kolineací. K libovolné Segreho kongruenci existuje třída Segreho kongruencí závislá na dvou funkcích jedné proměnné $({}^1\alpha, {}^1S)$, které jsou v projektivní asymptotické deformaci prvního řádu s kongruencí danou. V této třídě existuje podtřída kongruencí náležejících lineárnímu komplexu (${}^1S \equiv 0$), závislá na jedné funkci jedné proměnné (${}^1\alpha$), které jsou v projektivní deformaci prvního řádu s kongruencí danou. Rozvinutelná transformace (3) je projektivní deformací prvního řádu současně podél všech paprsků regulů $v = {}^1v =$ konst, neboť existuje tečná kolineace společná všem párům odpovídajících si paprsků. Geometrické výsledky týkající se některých speciálních typů tečných kolineací neuvádíme.

Aby rozvinutelná transformace (3) byla projektivní deformací druhého řádu, je nutné a stačí, aby platilo kromě $P = {}^1P$, $Q = {}^1Q$, $R = {}^1R$ ještě $\pi = {}^1\pi$ a $\alpha = {}^1\alpha$, resp. $\alpha = - {}^1\alpha$. Oskulační kolineace je dána rovnicemi

$$Hy = \varrho\, {}^1y\,, \quad Hz = \varrho\, {}^1z\,, \quad H\bar{y} = \varrho^{-1}\, {}^1\bar{y}\,, \quad H\bar{z} = \varrho^{-1}\, {}^1\bar{z}\,, \tag{4}$$

kde $\varrho^2 = 1$, resp. $\varrho^2 = -1$, když $\alpha = {}^1\alpha$, resp. $\alpha = - {}^1\alpha$. Rozvinutelná transformace (3) je projektivní deformací druhého řádu současně podél všech paprsků regulů $v = {}^1v =$ konst, neboť oskulační kolineace nezávisí na parametrech t_1 a t_2. K libovolné Segreho kongruenci W existuje třída Segreho kongruencí W závislá na jedné funkci jedné proměnné (${}^1S$), které jsou v projektivní deformaci druhého řádu s danou kongruencí; v této třídě existuje právě jedna kongruence náležející lineárnímu komplexu. O Segreho kongruencích W lze snadno dokázat, že jsou totožné s kongruencemi W s asymptotickou dualisací, o nichž E. Čech rovněž dokázal tvrzení o existenci třídy kongruencí v projektivní deformaci s kongruencí danou (viz [1]).

V druhé části přednášky zabýval se autor zobrazením dvojice Segreho kongruencí W v rozvinutelné transformaci a v projektivní deformaci prvního a druhého řádu do Kleinova pětirozměrného projektivního prostoru $\bar{P}_5$, při čemž se omezil pouze na Segreho kongruence W, které nenáleží lineárnímu komplexu a jejichž asociované nenáleží rovněž lineárnímu komplexu. Každá Segreho kongruence W uvedeného typu je v prostoru $\bar{P}_5$ representována křivkou v normálním tvaru, která neleží v podprostoru prostoru $\bar{P}_5$. Úplný systém projektivních diferenciálních invariantů (vzhledem k jisté grupě transformací reprodukujících Kleinovu hyperkvadriku) tvoří čtyři funkce jedné proměnné K_1, K_2, K_3, K_4 vesměs kladné a šest znamének $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_6$, z nichž tři jsou kladná a tři záporná. (Viz referát z přednášky „Teorie křivky Kleinova pětirozměrného prostoru a její aplikace na Segreho kongruence W" v tomto časopise na str. 106.)

Buďte ${}^1t$ parametr a ${}^1K_1, {}^1K_2, {}^1K_3, {}^1K_4, {}^1\varepsilon_1, {}^1\varepsilon_2, \ldots, {}^1\varepsilon_6$ projektivní invarianty jiné křivky v normálním tvaru v prostoru $\bar{P}_5$. Ukázkou uveďme jen výsledky pro Segreho kongruence W v projektivní deformaci druhého řádu. Zavedeme-li mezi body křivek korespondenci určenou diferenciální rovnicí $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}^1t} = \dfrac{{}^1K_2}{K_2}$, potom nutné a postačující podmínky pro to, aby tyto křivky representovaly Segreho kongruence W, které lze na sebe projektivně deformovat, jsou, aby v korespondujících bodech platilo

$$\frac{K_i}{K_j} = \frac{{}^1K_i}{{}^1K_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \text{a} \quad \varepsilon_m = {}^1\varepsilon_m\,, \quad \text{resp.} \quad \varepsilon_m = - {}^1\varepsilon_m\,, \quad m = 1, 2, \ldots, 6\,.$$

Segreho kongruence W je v projektivní deformaci se svou asociovanou kongruencí, když a jen když platí $K_1 = K_3$, $K_4 = 1$, $\varepsilon_i = - \varepsilon_{7-i}$. Korespondence mezi body křivek v normálním tvaru, které representují pár asociovaných kongruencí v projektivní deformaci, je určena diferenciální rovnicí $\mathrm{d}t = \mathrm{d}^1t$. Projektivní deformace se redukuje na pouhou projektivitu; třída těchto kongruencí závisí na dvou funkcích jedné proměnné a jednom znaménku, jak již také stanovil J. Klapka v práci [2].

LITERATURA

[1] *E. Čech*: Déformation projective des congruences W, Чех. мат. ж. *6 (81)*, 1956, 401—414.

[2] *J. Klapka*: O W-kongruencích s fokálními plochami přímkovými, Spisy přír. fak. MU v Brně, č. *69*, 1926, 1—30.

Vladimír Horák, Brno

O PROSTORECH S AFINNÍ KONEXÍ, KTERÉ DOVOLUJÍ ZAVÉST POJEM ÚHLU

(Referát o přednášce prof. A. Haimovice (Iaşi), konané ve schůzi matematické obce pražské dne 26. září 1958)

Mějme dvojrozměrný afinní prostor. Souřadnice bodu označíme (x^i), složky vektoru X^i a T^k_{ij} koeficienty konexe. Úhel dvou vektorů X^i, Y^i je pak definován těmito podmínkami:

a) je vyjádřen funkcí $V(x^i, X^i, Y^i)$ souřadnic bodu a obou vektorů, kterážto funkce je homogenní nultého řádu vzhledem k X^i a k Y^i;

b) je aditivní, tj. $V(x^i; X^i, Z^i) = V(x^i, X^i, Y^i) + V(x^i, Y^i, Z^i)$;

c) je nezávislý na souřadnicovém systému;

d) je invariantní vzhledem k lineární translaci vektorů.

Z těchto předpokladů se pak odvodí tyto důsledky:

1. $V(x^i, X^i, Y^i) = U(x^i, X^i) - U(x^i, Y^i)$, kde U je nová funkce.

2. Funkce U je definována systémem rovnic:

$$\frac{\partial U}{\partial x^i} - T^k_{ji} X^j \frac{\partial U}{\partial X^k} = \omega_i(x^i) \, ; \quad X^i \frac{\partial U}{\partial X^i} = 0 \, ,$$

kde ω_i jsou složky libovolného kovariantního vektoru.

Po doplnění systému dostaneme tento výsledek:

A) Prostory, které dovolují zavésti pojem úhlu, jsou dány relacemi $R^j_{i12k} = \lambda_k R^j_{i12} + \mu_k \delta^j_i$, jež lze interpretovati geometricky.

B) Vezmeme-li formu $R^*_{ij}\xi^i\xi^j$, kde $R^*_{ij} = \frac{1}{2}(R_{ij} + R_{ji})$ a je-li tato forma positivně definitní, pak úhel je popsán vztahem

$$\cos V = \frac{R^*_{ij}X^iY^j}{\sqrt{R^*_{ij}X^iX^j}\sqrt{R^*_{ij}Y^iY^j}} \, .$$

Je možno též v ostatních případech udat obdobnou formuli pro úhel. Z předchozí definice úhlu plyne řada zajímavých důsledků, o kterých se autor v přednášce zmínil.

František Nožička, Praha