Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

POZNÁMKA K TEORII (BB)-INTEGRÁLU

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha.

(Došlo dne 15. února 1958) DT : 517.6

Výsledků obsažených v práci [1] je využito k odvození podmínek (BB)-integrability náhodné funkce intervalu.

1. Úvod a shrnutí. V práci [4] jsme zavedli pojem náhodné funkce intervalu s nezávislými přírůstky a pojem (BB)-integrálu takové funkce. Při studiu podmínek (BB)-integrability byla tam v § 5 dokázána věta 15 udávající nutné a postačující podmínky (BB)-integrability dané náhodné funkce $\boldsymbol{X}$ definované v intervalu K, za předpokladu, že $\boldsymbol{X}$ je na K spojitá v $\emptyset$.[1])

H. BERGSTRÖM studoval v [1] podmínky existence limitních zákonů rozložení součtů nezávislých náhodných proměnných a dokázal některé věty, jichž lze využíti k odvození podmínek (BB)-integrability náhodné funkce intervalu podobně, jako jsme v [4] využili vět uvedených v § 25 monografie [2]. Místo poměrně složitých podmínek věty 15 z [4] dostaneme tak jednu podmínku jednodušší, ovšem s přihlédnutím k dalšímu předpokladu (b). Bez zajímavosti není ani důsledek pomocné věty z odstavce 2, resp. jejího zobecnění; je uveden v odstavci 4 a týká se souvislosti (BB)-integrability s existencí (BB)-integrálu.

2. Pomocná věta. Provedeme si nejprve některé pomocné úvahy z teorie Burkillova integrálu, které nám později poslouží při důkazu naší hlavní věty. Budiž K konečný interval v $R = (-\infty, \infty)$ a budiž $f(I, x)$ konečná reálná funkce intervalu definovaná pro $I \subset K$, $x \in R$. Řekneme, že Burkillův integrál $\int_K f(I, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in R$, jestliže pro libovolnou posloupnost $\{\mathscr{D}_n\}$ dělení intervalu K splňující $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$ platí

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{I \in \mathscr{D}_n} f(I, x) = \int_K f(I, x) < \infty \tag{1}$$

stejnoměrně vzhledem k $x \in R$.

Podmínku stejnoměrné konvergence integrálu $\int_K f(I, x)$ lze vyjádřiti též tímto ekvivalentním způsobem (srv. [3], 3.6):

[1]) Znalost práce [4] se v tomto článku předpokládá, a proto bez rozpaků používáme pojmů i označení, které jsme v [4] zavedli.

Ke každému kladnému ε existuje kladné δ takové, že pro libovolná dvě dělení $\mathscr{D}_1$ a $\mathscr{D}_2$ intervalu K splňující $\nu(\mathscr{D}_1) < \delta$ a $\nu(\mathscr{D}_2) < \delta$ platí

$$\sup_{x \in R} \left| \sum_{I \in \mathscr{D}_1} f(I, x) - \sum_{I \in \mathscr{D}_2} f(I, x) \right| < \varepsilon . \tag{2}$$

Lemma. *Jestliže Burkillův integrál $\int_K f(I, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in R$, pak pro každý interval $J \subset K$ integrál $\int_J f(I, x)$ rovněž konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in R$.*

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$, najdeme takové $\delta > 0$, aby pro každá dvě dělení intervalu K s normami menšími než δ platilo (2). Budiž J libovolný interval $J \subset K$ a buďtež $\mathscr{D}_1'$ a $\mathscr{D}_2'$ dvě dělení intervalu J s normami menšími než δ. Dělení $\mathscr{D}_1'$ a $\mathscr{D}_2'$ doplníme na dělení $\mathscr{D}_1$ resp. $\mathscr{D}_2$ celého intervalu K tak, aby se jejich normy nezvětšily; přitom v intervalech tvořících rozdíl $K - J$ (které mohou být i prázdné), doplňujeme obě dělení týmiž intervaly. Pro dělení $\mathscr{D}_1$ a $\mathscr{D}_2$ platí tedy (2), avšak

$$\sum_{I \in \mathscr{D}_1 - \mathscr{D}_1'} f(I, x) = \sum_{I \in \mathscr{D}_2 - \mathscr{D}_2'} f(I, x) , \tag{3}$$

takže skutečně

$$\sup_{x \in R} \left| \sum_{I \in \mathscr{D}_1'} f(I, x) - \sum_{I \in \mathscr{D}_2'} f(I, x) \right| < \varepsilon , \tag{4}$$

c. b. d.

3. Hlavní věta. Budiž K konečný interval v R, budiž $\mathbf{X}$ náhodná funkce intervalu s nezávislými přírůstky definovaná v K. Označíme $F(I, x)$ distribuční funkci náhodné proměnné $X(I)$ a pro $0 < \eta < \infty$ položíme pak

$$M_j(I, \eta) = \int_{|x| < \eta} x^j \, dF(I, x) , \quad j = 1, 2 . \tag{5}$$

Symbolem $E(x)$ označíme distribuční funkci náhodné proměnné $V\{0\}$, symbolem $\Phi(x)$ označíme distribuční funkci normální, tj.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt . \tag{6}$$

O náhodné funkci $\mathbf{X}$ budeme v tomto odstavci stále předpokládat, že splňuje následující dvě podmínky:

(a) funkce $\mathbf{X}$ je spojitá v $\emptyset$, tj. platí

$$\lim_{|I| \to 0} F(I, x) = E(x) \tag{7}$$

stejnoměrně vzhledem k $I \subset K$;[2])

(b) pro každé konečné kladné η existuje konečný horní Burkillův integrá

$$\overline{\int_K} |M_1(I, \eta)| < \infty . \tag{8}$$

[2]) Konvergencí distribučních funkcí rozumíme obvyklou konvergenci v podstatě.

Poznámka. Je zřejmé, že podmínka (b) je splněna např. vždy tehdy, jestliže náhodné proměnné $X(I)$ mají symetrické (okolo nuly) zákony rozložení; stačí dokonce, aby tato podmínka byla splněna jen pro dostatečně malé intervaly $I \subset K$. V tomto případě bude ovšem $M_1(I, \eta) = 0$ pro každé $\eta < \infty$, a tedy (8) platí, neboť integrál je roven nule.

Každé distribuční funkci $F(I, x)$ a kladnému číslu σ pak přiřadíme tzv. Weierstrassovu transformaci $F_\sigma(I, x)$ vzorcem

$$F_\sigma(I, x) = F(I, x) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right), \tag{9}$$

(používáme přitom obvyklé značky * pro označení konvoluce dvou distribučních funkcí). Položme nyní

$$\begin{aligned} H_\sigma(I,x) &= F_\sigma(I,x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right), \\ &= [F(I,x) - E(x)] * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Funkce $H_\sigma(I, x)$ je pro každé $\sigma > 0$, $I \subset K$, rozdílem dvou distribučních funkcí, tedy funkcí s omezenou variací, a platí $-1 \leqq H_\sigma(I, x) \leqq 1$ pro všechna $x \in R$, $\sigma > 0$, $I \subset K$.

Nyní již můžeme vysloviti svou hlavní větu vyjadřující podmínky (BB)-integrability funkce $\mathbf{X}$ v intervalu K za předpokladu, že $\mathbf{X}$ splňuje podmínky (a) a (b):

Věta. *Nutnou a postačující podmínkou (BB)-integrability funkce $\mathbf{X}$ v K jest, aby pro každé $\sigma > 0$ Burkillův integrál*

$$\int_K H_\sigma(I, x) \tag{11}$$

konvergoval stejnoměrně vzhledem k $x \in R$.

Důkaz. I. Ukážeme si nejprve nutnost této podmínky. Je-li tedy $\mathbf{X}$ (BB)-integrabilní v K, pak ovšem existuje i (BB)-$\int_K \mathbf{X}$. Budiž $\{\mathscr{D}_n\}$ libovolná posloupnost dělení intervalu K splňující podmínku $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$. Nechť dělení $\mathscr{D}_n$ se skládá z intervalů $I_1^{(n)}, I_2^{(n)}, \ldots, I_{k_n}^{(n)}$. Položíme-li nyní

$$F_k(n; x) = \begin{matrix} F(I_k^{(n)}, x) & \text{pro } 1 \leqq k \leqq k_n\,, \\ E(x) & \text{pro } k_n < k\,, \end{matrix} \tag{12}$$

pak tyto distribuční funkce $F_k(n; x)$ tvoří dvojnou posloupnost, která splňuje podmínku C_0 (a tedy také podmínku C) práce Bergströmovy (srv. [1], § 10), tj. platí

$$\lim_{n \to \infty} F_k(n; x) = E(x) \tag{13}$$

stejnoměrně vzhledem ke k; to plyne z předpokladu (a). Kromě toho je tato posloupnost také *centrovaná*, tj. platí vzorec (10.4) práce Bergströmovy, což je důsledkem předpokladu (b). Podle Bergströmovy věty 17.1 pak ovšem posloupnost funkcí

$$f_{0k_n}(n, x) = \sum_{j=1}^{k_n} [F_j(n; x) - E(x)] \tag{14}$$

je cauchyovská ve W-normě, tj. platí pro každé $\sigma > 0$

$$\sup_{x \in R} \left| f_{0k_n}(n, x) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - f_{0k_m}(m, x) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right| < \varepsilon \tag{15}$$

jakmile n a m jsou dostatečně velká. V našem označení je však (15) ekvivalentní se vztahem

$$\sup_{x \in R} \left| \sum_{I \in \mathscr{D}_n} H_\sigma(I, x) - \sum_{I \in \mathscr{D}_m} H_\sigma(I, x) \right| \to 0 \tag{16}$$

platným pro každé $\sigma > 0$, takže pro každé $\sigma > 0$ existuje limita

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{I \in \mathscr{D}_n} H_\sigma(I, x) , \tag{17}$$

a to stejnoměrná vzhledem k $x \in R$. Zbývá již nyní jen ukázati, že tato limita je nezávislá na konkretní volbě posloupnosti dělení $\mathscr{D}_n$. To se však již snadno provede obvyklým způsobem: vezměme dvě takové posloupnosti $\{\mathscr{D}'_n\}$ a $\{\mathscr{D}''_n\}$ splňující $\nu(\mathscr{D}'_n) \to 0$, $\nu(\mathscr{D}''_n) \to 0$. Pro obě existují (stejnoměrně vzhledem k $x \in R$) limity (17). Utvoříme kombinovanou posloupnost $\{\mathscr{D}_n\}$ tak, že položíme $\mathscr{D}_{2k-1} = \mathscr{D}'_k$, $\mathscr{D}_{2k} = \mathscr{D}''_k$ pro $k = 1, 2, \ldots$ Platí zřejmě opět $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$, a tedy i vztah obdobný (16), z toho však již vyplývá rovnost obou limit. Dokázali jsme tak skutečně stejnoměrnou konvergenci integrálu (11).

II. Předpokládejme nyní naopak, že podmínka věty je splněna, máme pak dokázati, že pro libovolný interval $J \subset K$ existuje integrál (BB)-$\int_J \mathbf{X}$. Budiž tedy J libovolný takový interval, v důsledku pomocné věty, kterou jsme si dokázali v odstavci 2, konverguje také integrál $\int_J H_\sigma(I, x)$ stejnoměrně vzhledem k $x \in R$, a to pro každé kladné σ. Budiž $\{\mathscr{D}_n\}$ libovolná posloupnost dělení intervalu J, klademe opět $\mathscr{D}_n = \{I_1^{(n)}, \ldots, I_{k_n}^{(n)}\}$, rovněž funkce $F_k(n; x)$ a $f_{0k_n}(n, x)$ definujeme analogicky jako v prvé části důkazu. Posloupnost $\{f_{0k_n}(n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ je v důsledku stejnoměrné konvergence integrálu $\int_J H_\sigma(I, x)$ opět cauchyovská ve W-normě, takže odtud plyne i existence limity konvolucí

$$\lim_{n \to \infty} F(I_1^{(n)}, x) * \ldots * F(I_{k_n}^{(n)} x) = G(J, x) \tag{18}$$

s limitní distribuční funkcí $G(J, x)$, zřejmě nezávislou na volbě dělení $\mathscr{D}_n$. Existuje tedy (BB)-integrál náhodné funkce $\mathbf{X}$ v intervalu J, c. b. d.; $G(J, x)$ je příslušná distribuční funkce.

4. Důsledky. Jak vyplývá z důkazu naší věty, stačí k zaručení stejnoměrné konvergence integrálu (11) již existence (BB)-integrálu náhodné funkce $\mathbf{X}$ v intervalu K. Odtud vyplývá bezprostředně tento zajímavý

Důsledek. *Za předpokladu splnění podmínek* (a) *a* (b) *je existence integrálu* $(BB)\text{-}\int_K \mathbf{X}$ *nutnou a postačující podmínkou* (BB)*-integrability náhodné funkce* $\mathbf{X}$ *v intervalu* K.

Jak jsme si ukázali v [4], § 6, není obecně (BB)-integrabilita důsledkem existence (BB)-integrálu; náhodná funkce uvedená v § 6 práce [4] jako protipříklad nevyhovuje ovšem podmínce (a). Předpoklad (b) však přitom splněn je, neboť všechny příslušné náhodné proměnné mají symetrické zákony rozložení, protože jejich charakteristické funkce jsou vesměs reálné.

Dá se však ukázati, že podmínka (b) není zde podstatná a že ji lze vypustit. Lemma dokázané v odstavci 2 lze totiž bezprostředně rozšířiti i na komplexní funkce intervalu a na případ, kdy x probíhá libovolnou množinu v R (viz též [6]). Platí tedy

Věta. *Budiž* $\mathbf{X}$ *náhodná funkce intervalu definovaná v intervalu* K, *spojitá v* $\emptyset$. *Nechť existuje* $(BB)\text{-}\int_K \mathbf{X}$. *Potom je* $\mathbf{X}$ *v* K (BB)*-integrabilní.*

Důkaz. Budiž $\psi(I, s)$ příslušná ψ-funkce náhodné funkce $\mathbf{X}$. Ježto

$$(BB)\text{-}\int_K \mathbf{X} \sim B \lim_{n \to \infty} \sum_{I_i^{(n)} \in \mathcal{D}_n} X(I_i^{(n)}) \tag{19}$$

pro libovolnou posloupnost $\{\mathcal{D}_n\}$ dělení intervalu K, pro kterou $\nu(\mathcal{D}_n) \to 0$, a náhodné proměnné $X(I_j^{(n)})$ jsou v důsledku spojitosti funkce $\mathbf{X}$ nekonečně malé (srv. [2], [4]), je nutně $(BB)\text{-}\int_K \mathbf{X} \in \mathfrak{X}$ (viz [2], § 24). Pro každé $s \in R$ tedy existuje *konečná* limita

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{I_j^{(n)} \in \mathcal{D}_n} \psi(I_j^{(n)}, s) = \int_K \psi(I, s)\,, \tag{20}$$

a dokonce (srv. [5], věta 3, str. 199) Burkillův integrál (20) konverguje stejnoměrně vzhledem k s v každém konečném intervalu $\subset R$. Podle našeho lemmatu konverguje tedy takto lokálně stejnoměrně také integrál $\int_J \psi(I, s)$ pro libovolný interval $J \subset K$. Odtud však již vyplývá (BB)-integrabilita funkce $\mathbf{X}$ v K, c. b. d.

Poznámka. Je celkem zřejmé, že také $(BB)\text{-}\int_J \mathbf{X} \in \mathfrak{X}$ pro libovolný interval $J \subset K$, takže neurčitý integrál je pak funkcí typu ID.

5. Závěrečné poznámky. Je zřejmé, že předpoklad (a) ve větě odstavce 3 je zbytečně silný, neboť, jak plyne z Bergströmových výsledků, stačí, aby místo podmínky C_0 — odpovídající předpokladu (a) — splňovaly distribuční funkce $F_k(n, x)$ definované vzorci (12) jenom slabší podmínku C. Tímto případem se však zde již nebudeme zabývati; vrátíme se k němu ostatně na jiném místě při studiu jiných, slabších druhů spojitosti náhodných funkcí intervalu než je spojitost v $\emptyset$, tak jak jsme si ji zavedli v [4].

Podmínka stejnoměrné konvergence integrálu (11) vyjadřuje, jak jsme se o tom již zmínili, cauchyovskost ve W-normě posloupností funkcí $\{f_{0k_n}(n, x)\}$.