ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

1

84

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 84 • Č. 1 • STR. 1—128 • PRAHA 19. II. 1959

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky“*)

SVAZEK 84 (1959)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd

Praha II, Žitná 25

OBSAH

Články:

Miloslav Mikulík, Brno: Poznámky ke svazům s metrikou 1
Jiří Sedláček, Praha: O jednom typu dobře orientovaných grafů 7
Karel Čulík, Brno: O lexikografickém součtu částečně uspořádaných množin 16
Anton Kotzig, Bratislava: O rovnovážne orientovaných konečných grafoch 31
Alois Švec, Liberec: Poznámka o tensoru torse trojdimensionálního prostoru s eukleidovskou konexí 46
Alois Švec, Liberec: Poznámka k projektivní deformaci rozvinutelných nadploch 50
Ján Jakubík, Košice: Konvexe Ketten in l-Gruppen 53
Jaroslav Fuka, Praha: Poznámka k Phragmén-Lindelöfovu principu 64
Milan Sekanina, Brno: O jistých rozkladových množinách roviny 74
František Zítek, Praha: Poznámka k teorii (BB)-integrálu 83
Jindřich Nečas, Praha: Řešení biharmonického problému pro nekonečný nekonvexní klín 90
Bohuslav Mišek, Honice: O $(n + 1)$-úhelníku v E_n s maximálním objemem konvexního obalu 99

Úlohy a problémy:

Úloha č. 1 (*J. Mařík*) 105
K problému č. 3 z roč. *83* (1958), str. 355 (*M. Novotný*) 105

Referáty:

Vladimír Horák, Brno: Teorie křivky Kleinova pětirozměrného prostoru a její aplikace na Segreho kongruence W 106
Vladimír Horák, Brno: Projektivní deformace Segreho kongruencí W 108
František Nožička, Praha: O prostorech s afinní konexí, které dovolují zavést pojem úhlu (*A. Haimovici*, Ia i) 110

Recense:

J. Garaj: Základy vektorového počtu (*K. Drábek*) 111
И. В. Проскуряков: Сборник задач по линейной алгебре (*K. Rychlík*) 113
Cl. Chevalley: The construction and study of certain important algebras a další dva svazky téže sbírky (*K. Rychlík*) 114
R. Kochendörffer: Determinanten und Matrizen (*J. Sedláček*) 115

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 84 * PRAHA, 19. II. 1959 * ČÍSLO 1

POZNÁMKY KE SVAZŮM S METRIKOU

MILOSLAV MIKULÍK, Brno

(Došlo dne 20. února 1957) DT: 519.5:519.53

V této práci se zabývám vztahy mezi metrickou konvergencí a o-konvergencí ve svazech s metrikou. Navazuji v ní na svou práci [2]. Vznikla z podnětu akademika J. Nováka, který vyslovil názor, že některé výsledky obsažené v [2] lze dokázat za obecnějších předpokladů. To se mi podařilo ve větě 2.

1

V dalším bude S značit neprázdnou množinu s následujícími vlastnostmi:

(V1) *S je svaz.*

(V2) *Na množině S je zavedena taková metrika ϱ, že z každé neklesající [nerostoucí] posloupnosti prvků z S,*[1]) *ohraničené vzhledem k metrice ϱ, lze vybrat posloupnost, která je v S metricky konvergentní.*

(V3) *Jestliže $A \subset S$ je spočetná nebo konečná, potom, má-li infimum a supremum, je jejich vzdálenost rovna průměru množiny A (značím jej $d(A)$).*

Tím je na množině S definován svaz s metrikou, který budu značit $\mathfrak{S}$.[2]) Z (V3) vyplývá, že ve svazu s metrikou $\mathfrak{S}$ platí: Jestliže $x, y, z \in S$, $x < y < z$, potom je $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z)$, $\varrho(y, z) \leqq \varrho(x, z)$. Je tedy svaz s metrikou $\mathfrak{S}$ zvláštním případem svazu s metrikou, o němž jsem pojednával ve své práci [3]. Podle výsledků tam uvedených platí tato lemmata:

---

[1]) Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající [nerostoucí], jestliže je $u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_n \leqq \ldots$ $[u_1 \geqq u_2 \geqq \ldots \geqq u_n \geqq \ldots]$.

[2]) Příkladem svazu s metrikou s vlastnostmi (V1), (V2), (V3) je svaz definovaný na množině M všech řešení diferenciální rovnice $x' = f(t, x)$, kde $f(t, x)$ je spojitá a ohraničená funkce v dvojrozměrném intervalu Δ: $|t - \xi| \leqq a$, $|x - \eta| < \infty$. Částečné uspořádání množiny M a metrika ϱ v M je zavedena stejně jako v příkladě mé práce [2] na str. 364.

Lemma 1. *Budiž* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *neklesající [nerostoucí] posloupnost prvků z* S, *ohraničená vzhledem k metrice* ϱ. *Potom existuje* $u = \bigvee_{n=1}^{\infty} u_n$ $[u = \bigwedge_{n=1}^{\infty} u_n]$ *a platí* $u_n \xrightarrow[\varrho]{} u$.

Lemma 2. *Nechť* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je taková posloupnost prvků z* S, *že* $x_n \xrightarrow[0]{} x$. *Potom též* $x_n \xrightarrow[\varrho]{} x$.

Dokažme nyní tuto větu:

Věta 1. *Ve svazu s metrikou* $\mathfrak{S}$ *jsou metrická konvergence a o-konvergence identické.*

Důkaz. Vzhledem k lemmatu 2 stačí dokázat, že metrická konvergence implikuje o-konvergenci. Nechť tedy $x_n \xrightarrow[\varrho]{} x$, x_n, $x \in S$. Označme $z_{nm} = \bigwedge_{k=n}^{n+m} x_k$, $Z_{nm} = \bigvee_{k=n}^{n+m} x_k$ pro $n = 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots$. Při každém pevném n existují podle lemmatu 1 prvky $l_n = \bigwedge_{m=1}^{\infty} z_{nm} = \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k$, $L_n = \bigvee_{m=1}^{\infty} Z_{nm} = \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k$. Podle (V3) je $\sup_{r,s \geqq n} \varrho(x_r, x_s) = \varrho(l_n, L_n)$. Je tedy $\lim_{n\to\infty} \varrho(l_n, L_n) = 0$. Vzhledem k lemmatu 1 $l_n \xrightarrow[\varrho]{} \bigvee_{n=1}^{\infty} l_n$, $L_n \xrightarrow[\varrho]{} \bigwedge_{n=1}^{\infty} L_n$. Je tedy $\lim_{n\to\infty} \varrho(l_n, L_n) = \varrho(\bigvee_{n=1}^{\infty} l_n, \bigwedge_{n=1}^{\infty} L_n) = 0$, takže $\bigwedge_{n=1}^{\infty} L_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} l_n$. Označme $y = \bigwedge_{n=1}^{\infty} L_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} l_n$. Platí tedy $x_n \xrightarrow[0]{} y$. Podle lemmatu 2 platí: $x_n \xrightarrow[\varrho]{} y$. Poněvadž podle předpokladu $x_n \xrightarrow[\varrho]{} x$, je $y = x$. Platí tedy $x_n \xrightarrow[0]{} x$.

2

Budiž nyní G svaz, na němž je definována reálná funkce $v(x)$, která má tyto vlastnosti:

1° Jestliže $x, y \in G$, potom je $v(x) + v(y) = v(x \wedge y) + v(x \vee y)$.

2° Jestliže $x, y \in G$, $x < y$, potom je $v(x) < v(y)$.

Položíme-li nyní

$$\varrho(x, y) = v(x \vee y) - v(x \wedge y) \quad \text{pro} \quad x, y \in G\,, \tag{1}$$

je ϱ metrikou na G. Tento svaz s metrikou budu dále značit $\mathfrak{G}$. Je-li svaz s metrikou $\mathfrak{G}$ metricky úplný, jsou v něm metrická konvergence a *-konvergence identické.[3]) Dokažme nyní toto lemma.

Lemma 3. *Svaz s metrikou* $\mathfrak{G}$ *má vlastnost* (V2) *když a jen když je metricky úplný.*

Důkaz. I. Jestliže svaz s metrikou $\mathfrak{G}$ má vlastnost (V2), je metricky úplný podle lemmatu 7 mé práce [2].

---

[3]) Viz [1], hlava V, věta 15.

II. Nechť $\mathfrak{G}$ je metricky úplný a nechť $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je libovolná neklesající posloupnost prvků z $\mathfrak{G}$, ohraničená vzhledem k metrice ϱ. Položme $\sup\limits_n \varrho(u_1, u_n) = a$. Je-li $a = 0$, je $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = \ldots$, takže posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Nechť tedy $a > 0$. Vzhledem k (1) platí pro $s > r$ vztah $\varrho(u_r, u_s) = \varrho(u_1, u_s) - \varrho(u_1, u_r)$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ lze tedy určit takový index n_0, že pro všechna $r, s > n_0$ je $\varrho(u_r, u_s) < \varepsilon$. Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy i v tomto případě cauchyovská. Poněvadž $\mathfrak{G}$ je metricky úplný, je v něm posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ metricky konvergentní. Podobně se dokáže vlastnost (V2) pro nerostoucí posloupnosti.

Označme nyní 3° tuto vlastnost funkce $v(x)$:

3°. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z G. Existuje-li $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ a $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, potom nechť platí

$$v(\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n) - v(\bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n) = \sup_{n,m} [v(x_n \vee x_m) - v(x_n \wedge x_m)] .$$

Je-li na svazu G definována reálná funkce $v(x)$ s vlastnostmi 1°, 2°, 3°, potom metrika ϱ definovaná na G vztahem (1) má vlastnost (V3). Z věty 2 a z lemmatu 3 vyplývá:

D ů s l e d e k 1. Nechť na svazu G je definována reálná funkce $v(x)$ s vlastnostmi 1°, 2°, 3° a nechť je na něm zavedena metrika ϱ vztahem (1). Je-li takto definovaný svaz s metrikou metricky úplný, jsou v něm identické metrická konvergence a o-konvergence.

P o z n á m k a 1. Nechť na svazu G je definována reálná funkce $v(x)$ s vlastnostmi 1°, 2°, 3° a nechť je na něm definována metrika ϱ vztahem (1). Takto definovaný svaz s metrikou nemusí být metricky úplný ani v případě, že jsou v něm metrická konvergence a o-konvergence identické.

Uvedu příklad: Nechť G je množina čísel tvaru $\dfrac{n-1}{n}$ nebo $\dfrac{2n-1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Vzhledem k přirozenému uspořádání je G svazem. Definujme nyní na G funkci $v(x)$ takto: $v(x) = x$ pro $x \in G$. Takto definovaná funkce $v(x)$ má vlastnosti 1°, 2°, 3°. Metriku ϱ definujme na G vztahem (1). Takto definovaný svaz s metrikou na G není metricky úplný, i když jsou v něm metrická konvergence a o-konvergence identické.

3

Nechť na množině $M \neq \emptyset$ je definován σ-úplný svaz a zároveň metrika ϱ, vzhledem k níž je M kompaktní. Tím je na množině M definován svaz s metrikou, který budu značit $\mathfrak{M}$.

Lemma 4. *Nechť svaz s metrikou $\mathfrak{M}$ má vlastnost:*

(β) *Jestliže $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je metricky konvergentní posloupnost prvků z $\mathfrak{M}$, potom je* $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(\bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k, \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k) = 0.$

Potom svaz s metrikou $\mathfrak{M}$ má vlastnost:

(δ) *Jestliže $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající [nerostoucí] posloupnost prvků z $\mathfrak{M}$, potom je metricky konvergentní a platí $u_n \underset{\varrho}{\to} u$, kde $u = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $[u = \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} u_n]$.*

Důkaz. Nechť $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost prvků z $\mathfrak{M}$. Poněvadž $\mathfrak{M}$ je kompaktní, lze z každé posloupnosti $\{u_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, vybrané z posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, vybrat posloupnost $\{u_{n_{i_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ metricky konvergentní v $\mathfrak{M}$. Položme nyní $u = \bigvee\limits_{j=1}^{\infty} u_{n_{i_j}} = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Vzhledem k ($\beta$) je $\lim\limits_{j\to 0} \varrho(\bigwedge\limits_{k=j}^{\infty} u_{n_{i_k}}, \bigvee\limits_{k=j}^{\infty} u_{n_{i_k}}) = \lim\limits_{j\to\infty} \varrho(u_{n_{i_j}}, u) = 0$, takže $u_{n_{i_j}} \underset{\varrho}{\to} u$. Poněvadž z každé posloupnosti $\{u_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, vybrané z posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, lze vybrat posloupnost $\{u_{n_{i_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ tak, že $u_{n_{i_j}} \underset{\varrho}{\to} u = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, platí $u_n \underset{\varrho}{\to} u$. Podobně se věta dokáže pro nerostoucí posloupnosti.

Věta 2. *Ve svazu s metrikou $\mathfrak{M}$ jsou ekvivalentní tato tvrzení:*

(α) *Metrická konvergence a o-konvergence jsou identické.*

(β) *Jestliže $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je metricky konvergentní posloupnost prvků z $\mathfrak{M}$, potom platí* $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(\bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k, \bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k) = 0.$

(γ) *Jestliže $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je metricky konvergentní posloupnost prvků z $\mathfrak{M}$, potom platí* $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k = \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k.$

Důkaz. I. Nechť platí (α). Nechť $x_n \underset{\varrho}{\to} x$, kde $x_n, x \in \mathfrak{M}$. Podle (α) $x_n \underset{0}{\to} x$. Tedy $\bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k \underset{0}{\to} x$, $\bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k \underset{0}{\to} x$. Vzhledem k ($\alpha$) je $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(\bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k, \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k) = 0$. Platí tedy ($\beta$).

II. Nechť platí (β) a nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je metricky konvergentní posloupnost prvků z $\mathfrak{M}$. Podle lemmatu 4 platí $\bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k \underset{\varrho}{\to} \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k$, $\bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k \underset{\varrho}{\to} \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k$. Poněvadž podle ($\beta$) je $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(\bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k, \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k) = 0$, je $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k = \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k$. Platí tedy ($\gamma$).

III. Nechť platí (γ). a) Nechť $x_n \underset{\varrho}{\to} x$, kde $x_n, x \in \mathfrak{M}$. Položme $y_{2n} = x_n$, $y_{2n-1} = x$. Zřejmě $y_n \underset{\varrho}{\to} x$. Podle ($\gamma$) platí $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} y_k = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} y_k$. Poněvadž dále $\bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} y_k \leqq x \leqq \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} y_k$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, je $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} y_k = x = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} y_k$. Tedy $y_n \underset{0}{\to} x$, takže též $y_{2n} \underset{0}{\to} x$. To znamená, že $x_n \underset{0}{\to} x$.

b) Nechť $x_n \xrightarrow[0]{} x$, kde $x_n, x \in \mathfrak{M}$. Poněvadž $\mathfrak{M}$ je kompaktní, lze z libovolné posloupnosti $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, vybrané z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, vybrat posloupnost $\{x_{n_{i_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ tak, že $x_{n_{i_j}} \xrightarrow[\varrho]{} y$, kde $y \in \mathfrak{M}$. Podle části a) $x_{n_{i_j}} \xrightarrow[0]{} y$. Podle předpokladu $x_n \xrightarrow[0]{} x$, takže též $x_{n_{i_j}} \xrightarrow[0]{} x$. Je tedy $y = x$. Poněvadž tedy z každé posloupnosti $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, vybrané z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, lze vybrat částečnou posloupnost $\{x_{n_{i_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ tak, že $x_{n_{i_j}} \xrightarrow[\varrho]{} x$, platí $x_n \xrightarrow[\varrho]{} x$. Platí tedy ($\alpha$).

Poznámka 2. Věta 2 nemusí platit v σ-úplných svazech s metrikou. Uvedu příklad: Nechť M je množina $\left\{1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, \ldots, 1 + \frac{1}{n}, \ldots, 0\right\}$. Vzhledem k přirozenému uspořádání je množina M σ-úplným svazem. Metriku ϱ definujme na M takto: $\varrho(x, y) = |y - x|$ pro $x, y \in M$. Tím je na množině M definován σ-úplný svaz s metrikou. Zřejmě $\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[0]{} 0$, avšak posloupnost $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ není v M konvergentní vzhledem k metrice ϱ.

Důsledek 2. Nechť na množině $N \neq \emptyset$ je definován σ-úplný svaz a nechť je na N zavedena zároveň metrika ϱ, vzhledem k níž je N kompaktní. Nechť dále pro každou konečnou nebo spočetnou $A \subset N$ platí $d(A) = \varrho(\bigwedge_{t \in A} t, \bigvee_{t \in A} t)$. Potom v tomto svazu s metrikou jsou metrická konvergence a o-konvergence identické. Skutečně, uvažovaný svaz s metrikou má vlastnost (β), takže tvrzení vyplývá okamžitě z věty 2.

LITERATURA

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory, 1948, New York.

[2] *M. Mikulík:* Метрические структуры, Чех. мат. журнал, *4 (79)*, 1954, 364—371.

[3] *M. Mikulík:* Примечание к *-сходимости, Spisy vydávané přírod. fak. MU v Brně, č. *68*, 1955, 1—10.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЯ К СТРУКТУРАМ С МЕТРИКОЙ

МИЛОСЛАВ МИКУЛИК (Miloslav Mikulík), Брно

(Поступило в редакцию 20/II 1957 г.)

Настоящая работа примыкает к работе автора [2]; в ней показано, что в структурах с метрикой, обладающих свойствами (V1), (V2), (V3), метрическая сходимость совпадает с o-сходимостью. Эти результаты применяются к метрической структуре, которую рассматривает Г. Биркгофф в [1].

Далее, в теореме 2 даются некоторые необходимые и достаточные условия того, чтобы метрическая сходимость и o-сходимость были тождественны в σ-полных структурах, в которых введена метрика, по отношению к которой они компактны.

Summary

A NOTE ON LATTICES WITH DISTANCE FUNCTIONS

MILOSLAV MIKULÍK, Brno

(Received February 2, 1957)

This paper is a free continuation of the author's paper [2]. It is proved that in lattices in which there is defined a distance function satisfying conditions (V1), (V2), (V3), metric convergence and o-convergence are identical; this result is applied to the metric lattice of G. Birkhoff [1].

In theorem 2 necessary and sufficient conditions are stated for the equivalence of metric and o-convergence in σ-complete lattices which are simultaneously compact metric spaces.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

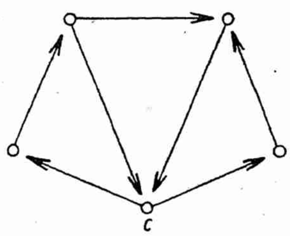
O JEDNOM TYPU DOBŘE ORIENTOVANÝCH GRAFŮ

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Došlo dne 4. října 1957) DT : 519.51

Tento článek si všímá dobře orientovaných grafů, jejichž všechny cykly procházejí týmž uzlem.

O. Ore [4] a po něm F. Bäbler [1] studovali před časem neorientované eulerovské grafy, jejichž všechny kružnice procházejí týmž uzlem c. K těmto grafům dospěli modifikací klasické Eulerovy úlohy o konstrukci souvislého neorientovaného grafu jedním (uzavřeným) tahem. Ukazuje se totiž, že Oreho a Bäblerovy grafy lze charakterisovat též existencí uzlu c s touto vlastností: Vyjdeme-li z c a procházíme-li grafem, při čemž dbáme jen toho, abychom po žádné hraně nešli dvakrát, potom vždy, kdykoliv se octneme v c tak, že nemůžeme už dále, jsme prošli všechny hrany grafu. V tomto příspěvku se zabýváme analogickou problematikou pro dobře orientované grafy.¹) Existuje-li v dobře orientovaném grafu $\vec{G}$ uzel c, který je uzlem každého cyklu grafu $\vec{G}$, pak c nazveme *centrem* grafu $\vec{G}$ (viz obr. 1). Chceme zde zejména pojednat o těch konečných neorientovaných grafech G, jejichž každý uzel lze pokládat za centrum dobře orientovaného grafu $\vec{G}$, který vznikne vhodnou volbou orientace hran grafu G. Je vidět, že k tomu účelu stačí prostudovat jen neorientované grafy bez dvojúhelníků, bez smyček a bez isolovaných uzlů.



Obr. 1

1. Než přistoupíme k jádru této práce, je užitečné připomenout několik pojmů a provést několik pomocných úvah.

Nechť x, y jsou dva různé uzly neorientovaného grafu G. Protože každý uzel grafu G náleží více než jednomu resp. právě jednomu jeho článku právě tehdy, je-li to jeho artikulace resp. není-li ([3], str. 226, věta 2), je možno zavést tako-

¹) Graf je *dobře orientovaný*, lze-li z každého jeho uzlu dospět po dráze do každého dalšího (viz [2], [5]).

výto pojem: *Průchodem*[2]) cesty C nazveme ten její uzel u (existuje-li), který inciduje se dvěma hranami cesty C, z nichž každá patří jinému článku grafu G. Podle věty citované z D. KÖNIGA je každý průchod cesty C artikulací grafu G.

V práci [5] jsme bez důkazu uvedli (str. 197), že vlastnosti artikulací a článků je možno studovat pomocí theorie stromů.[3]) Zde nyní dokážeme tuto větu:

Lemma 1. *Budiž G souvislý neorientovaný graf s aspoň jednou artikulací. Sestrojme graf H, jehož množinu uzlů tvoří jednak všechny artikulace grafu G (uzly 1. typu), jednak uzly 2. typu, z nichž každý nahrazuje jeden článek grafu G. Hrany grafu H definujme takto: Je-li a artikulace grafu G ležící v jeho článcích $G_1, G_2, \ldots, G_r$ a jsou-li $g_1, g_2, \ldots, g_r$ příslušné uzly z H, zaveďme hrany ag_i $(1 \leqq i \leqq r)$. Pak H je strom.*

Důkaz. Je třeba dokázat, že H a) je souvislý, b) neobsahuje žádnou kružnici.

a) Graf H má aspoň tři uzly. Buďtež x, y dva jeho různé uzly; chceme dokázat, že v H existuje cesta Γ spojující x, y.

Nechť x, y jsou oba 1. typu. Přejděme ke grafu G, v němž x, y jsou artikulacemi, tedy představují dvojici různých uzlů. Z předpokladu souvislosti grafu G plyne existence cesty C v G spojující uzly x, y. Podle jedné věty dokázané Königem ([3], str. 229, věta 10) mají všechny takto definované cesty C tuto vlastnost: buď nemají žádný průchod nebo všechny mají tytéž průchody (po řadě) $a_1, a_2, \ldots, a_s$ $(s \geqq 1)$. V prvním případě patří oba uzly x, y témuž článku grafu G (plyne z [3], str. 228, věta 8) a žádaná cesta Γ v grafu H má dvě hrany. V druhém případě položme ještě $x = a_0$, $y = a_{s+1}$. Artikulace a_i, a_{i+1} omezují na C cestu C_i $(0 \leqq i \leqq s)$, při čemž z definice průchodu plyne, že C_i leží celá v jednom článku G_i' grafu G. Stačí nyní nahradit každé G_i' uzlem g_i' a snadno už odtud plyne existence cesty Γ v H.

Jsou-li x, y oba 2. typu, označme X, Y dva různé články grafu G, jímž x, y odpovídají. Mají-li X, Y společný uzel, je to jejich jediný společný uzel ([3], str. 228, věta 7), tedy je to artikulace ([3], str. 226, věta 2) a věc je zřejmá. Jsou-li X, Y disjunktní, zvolme v X uzel ξ a v Y uzel η. Volbu lze zařídit tak, že ξ, η jsou (dvě různé) artikulace grafu G. Protože v H lze ξ, η už (podle předcházejícího) spojit cestou Γ', existuje i žádaná cesta Γ pro dvojici x, y.

Analogicky lze uvažovat i v případě, je-li z uzlů x, y každý jiného typu. Tím je souvislost grafu H dokázána.

b) Nechť nyní v grafu H existují kružnice; zvolme jednu z těch, které mají minimální počet hran, a označme ji O. Má sudý počet uzlů, a to více než 4.[4])

---

[2]) D. KÖNIG ([3], str. 228) užívá pro průchod cesty názvu „Durchgangsartikulation".
[3]) Tam jsme též upozornili (v pozn. [4])), že Königem popsaná interpretace grafu G je nesprávná.
[4]) Případ dvou uzlů je vyloučen podle definice grafu H, případ 4 uzlů odporuje větě 7, [3], str. 228.

Označme tyto uzly po řadě

$$\bar{a}_1, \bar{g}_1, \bar{a}_2, \bar{g}_2, \ldots, \bar{a}_r, \bar{g}_r, \bar{a}_1 \,. \tag{1}$$

Přejděme ke grafu G; v něm ať uzlům $\bar{g}_i$ odpovídají články G_i, při čemž uzly $\bar{a}_i$, $\bar{a}_{i+1}$ jsou artikulace ležící v článku G_i $(i = 1, 2, \ldots, r, \bar{a}_{r+1} = \bar{a}_1)$. Uzly $\bar{a}_i$, $\bar{a}_{i+1}$ lze spojit v G cestou $\bar{C}_i$, jejíž všechny hrany leží v G_i. V posloupnosti cest $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \ldots, \bar{C}_{r-1}$ vždy jedna má svůj počáteční uzel společný s koncovým uzlem předcházející, jinak však žádné dvě zde nemají žádný uzel společný.[5]) Uzly $\bar{a}_r$, $\bar{a}_1$ grafu G lze tedy spojit jednak cestou $\bar{C}_r$ bez průchodů, jednak cestou (složenou z $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_{r-1}$) s průchody $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_{r-1}$; to však je spor s citovanou už větou ([3], str. 229, věta 10). Důkaz je podán.

Nechť x, y jsou dva různé uzly aspoň 3. stupně v neorientovaném grafu G a nechť existuje cesta Z spojující x, y. Skládá-li se Z buď z jediné hrany nebo jsou-li všechny vnitřní uzly cesty Z druhého stupně v G, pak Z nazveme *žebrem* grafu G.[6]) Uzly x, y jsou *koncové* uzly žebra Z. Slovním obratem „odstranit žebro Z z grafu G" popisujeme v dalších úvahách konstrukci podgrafu grafu G, který vznikne z G tak, že vynecháme všechny hrany žebra Z a všechny jeho uzly až na uzly koncové. Je-li graf G kružnice, pak v něm nelze najít žádné žebro; v každém jiném grafu bez artikulací však zřejmě lze najít aspoň tři různá žebra.[7])

Jestliže nazveme koncovým článkem souvislého grafu G ten jeho článek, v němž leží jediná artikulace grafu G, pak z lemmatu 1 (a z věty 4, [3], str. 49) plyne, že každý souvislý graf s aspoň jednou artikulací má aspoň dva koncové články. Souvislý neorientovaný graf, který má právě dva koncové články, nazveme *řetězcem*. Řetězci odpovídá (podle lemmatu 1) strom, který má dva uzly koncové, zatím co ostatní jeho uzly jsou 2. stupně. Leží tedy každá artikulace řetězce právě ve dvou jeho článcích a každý článek řetězce, který proň není koncový, obsahuje právě dvě artikulace řetězce. Dokážeme nyní větu:

Lemma 2. *Budiž G souvislý neorientovaný graf bez artikulací a Z budiž jeho žebro. Označme G^* podgraf grafu G, který vznikne odstraněním žebra Z. Pak G^* je buď souvislý graf bez artikulací nebo řetězec (při čemž koncové uzly žebra Z leží každý v jednom koncovém článku, nesplývají však s artikulací).*

Důkaz. Nejprve dokážeme souvislost grafu G^*. Předpokládejme naopak, že v G^* existují dva uzly v, w, které v G^* nelze spojit žádnou cestou. V grafu G

[5]) Vzhledem k minimalitě kružnice O neexistuje totiž v posloupnosti (1) žádný uzel $\bar{a}_i$ spojený s jiným nesousedním uzlem této posloupnosti. Neexistuje však ani uzel $u \in H$ ležící mimo (1), z něhož by šly dvě hrany ke dvěma různým uzlům z (1). To tedy vylučuje, aby na některé cestě $\bar{C}_i$ ležela jiná artikulace než $\bar{a}_i$, $\bar{a}_{i+1}$ a také aby cesta $\bar{C}_i$ měla jistý uzel společný s některým „nesousedním" článkem.

[6]) Srovnej pojem *suspended chain* v práci [6], str. 340.

[7]) Mezi souvislými grafy bez artikulací je kružnice charakterisována vztahem $\mu = 1$, kde μ je index souvislost grafu (viz [6], str. 344, věta 10). Při tom rozumíme *indexem souvislosti* souvislého grafu G číslo $\mu = h - u + 1$, kde h (resp. u) je počet hran (resp. uzlů) grafu G.

spojuje v, w cesta, jejíž částí je tedy žebro Z. Každá hrana žebra Z je proto mostem v G, každý uzel žebra je tedy artikulací ([3], str. 224_{15}), což je spor.

Nechť nyní graf G^* má artikulace. Budiž G_1^* jeden jeho koncový článek s artikulací a_1^*. Uzel a_1^* nechť inciduje s dvěma různými hranami h, h' grafu G^*, které neleží v žádné kružnici grafu G^*; při tom nechť h je hranou článku G_1^*. V grafu G lze však najít kružnici, v níž h, h' leží; její částí je proto žebro Z. Jeden koncový uzel žebra Z splývá tedy s jedním uzlem článku G_1^* různým od a_1^*. Protože Z má dva koncové uzly, plyne odtud, že G^* má dva koncové články. Důkaz je podán.

Lemma 3. *Budiž G neorientovaný souvislý graf bez artikulací, jehož index souvislosti*[8]) *je $\mu > 1$. Pak existuje žebro Z takové, že platí: Odstraníme-li z G žebro Z, vznikne souvislý graf, který je rovněž bez artikulací a má index souvislosti $\mu - 1$.*

Důkaz lze najít v [6], str. 349, věta 18.

Žebro, o jehož existenci mluví lemma 3, nazveme *regulárním*. Existují grafy (bez artikulací) s uzlem x takovým, že žádné z žeber incidujících s uzlem x není regulární.[9])

2. Připomeňme několik potřebných pojmů z theorie orientovaných grafů. *Pramenem* (resp. *protipramenem*) orientovaného grafu $\vec{G}$ rozumíme ten jeho uzel, který není počáteční (resp. koncový) pro žádnou hranu z $\vec{G}$. Orientovaný graf je *acyklický*, neobsahuje-li žádný cyklus (viz [2], [5]). Dokážeme tuto větu:

Věta 1. *Nechť G je souvislý neorientovaný graf bez artikulací; nechť p, q jsou libovolné dva různé uzly z G. Pak lze volit orientaci hran z G tak, že vznikne acyklický graf $\vec{G}$ s jediným pramenem (uzlem p) a jediným protipramenem (uzlem q).*

Důkaz. Má-li G jen uzly p, q (a hranu $\overline{pq}$), je věc zřejmá. Nechť nyní G má kromě p, q ještě další uzly. Protože to není strom, je podle věty 14, [3], str. 54 jeho index souvislosti $\mu \geqq 1$. Důkaz nyní podáme indukcí podle μ.

Případ $\mu = 1$ znamená, že G je kružnice ([6], str. 344, věta 10). Tu rozdělují uzly p, q na dvě cesty, při čemž každou z nich lze orientovat jako dráhu vedoucí z p do q; žádaná konstrukce je provedena.

Budiž dále $\mu > 1$ a nechť tvrzení platí pro grafy, které mají index souvislosti nejvýše $\mu - 1$. Nechť G má index souvislosti μ. Podle lemmatu 3 lze v G najít regulární žebro Z s koncovými uzly x, y takové, že po jeho odstranění vznikne souvislý graf G' bez artikulací s indexem souvislosti $\mu - 1$.

a) Nechť uzly p, q leží na žebru Z (např. v pořadí x, p, q, y, při čemž ovšem připouštíme buď $x = p$ nebo $q = y$). Pak G' lze podle indukčního předpokladu

---

[8]) Definici indexu souvislosti jsme uvedli v pozn. [7]).

[9]) Příkladem může být graf, který (v jiné souvislosti) uvádí KÖNIG [3], str. 28, obr. 14.

orientovat tak, že vznikne acyklický graf ${}_1\vec{G}'$ s jediným pramenem x a jediným protipramenem y. Doplňme nyní ${}_1\vec{G}'$ žebrem Z orientovaným tak, že cestu mezi p, q orientujeme jako dráhu počínající v p a končící v q (dráha D_1), cestu mezi p, x[10]) jako dráhu D_2 a cestu mezi y, q[10]) jako dráhu D_3 (vždy v naznačeném pořadí uzlů). Vznikne tak orientovaný graf $\vec{G}$, který má jediný pramen p a jediný protipramen q. Graf $\vec{G}$ je acyklický: Kdyby v něm totiž existoval cyklus Ω_1, pak (zorientované) žebro Z by bylo částí Ω_1. Protože x je pramenem v ${}_1\vec{G}'$, muselo by Z být orientováno jako dráha vedoucí z y do x (spor s existencí dráhy D_1).

b) Nechť žádný z uzlů p, q neleží na žebru Z. Pak p, q jsou uzly grafu G', který lze podle indukčního předpokladu orientovat tak, že vznikne acyklický graf ${}_2\vec{G}'$ s jediným pramenem p a jediným protipramenem q. V práci [5] bylo dokázáno (str. 209, věta 12), že orientovaný graf $\vec{A}$ o n uzlech je acyklický právě tehdy, lze-li jeho uzly očíslovat čísly $1, 2, \ldots, n$ tak, že z existence hrany $\vec{ij}$ v $\vec{A}$ plyne $i < j$. Očíslujme tak tedy uzly acyklického grafu ${}_2\vec{G}'$, při čemž nechť uzel x (resp. y) grafu ${}_2\vec{G}'$ dostane číslo i_0 (resp. j_0) a nechť $i_0 < j_0$. Doplňme nyní ${}_2\vec{G}'$ žebrem Z orientovaným jako dráha D_4 s počátečním uzlem x a koncovým y. Vznikne tak orientovaný graf $\vec{G}$, který má jediný pramen p a jediný protipramen q. Abychom nahlédli, že $\vec{G}$ je acyklický, předpokládejme existenci cyklu Ω_2 v $\vec{G}$. Pak částí Ω_2 je dráha D_4. Musí tedy v ${}_2\vec{G}'$ existovat dráha vedoucí z y do x; uzly této dráhy nechť mají při sestrojeném už očíslování uzlů grafu ${}_2\vec{G}'$ po řadě čísla $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, kde $j_0 = k_1$, $i_0 = k_r$. Odtud plyne spor $j_0 < i_0$.

c) Nechť uzel p leží na žebru Z a q nikoliv. Označení budiž tak voleno, že $p \neq y$. Orientujme G' tak, že vznikne acyklický graf ${}_3\vec{G}'$ s jediným pramenem x a jediným protipramenem q. Doplňme nyní ${}_3\vec{G}'$ žebrem Z orientovaným takto: Cestu mezi p a y orientujme jako dráhu D_5 vedoucí z p do y, zatím co cestu mezi p, x jako dráhu D_6 vedoucí z p do x. O vzniklém grafu $\vec{G}$ se opět snadno přesvědčíme, že je acyklický s jediným pramenem p a jediným protipramenem q.

d) Nechť p neleží na žebru Z, zatím co q ano. Orientujme G tak, že vznikne acyklický graf $\overleftarrow{G}$ s jediným pramenem q a jediným protipramenem p (odst. c)) a změňme orientaci u všech hran grafu $\overleftarrow{G}$. Vznikne graf $\vec{G}$ žádaných vlastností. Důkaz je podán.

Souvislý orientovaný graf s jediným pramenem byl v práci [2] nazván *W-grafem*. Věta 1 tedy mluví o jistém druhu acyklických W-grafů, totiž o takových acyklických W-grafech, z nichž změnou orientace všech hran dostaneme opět acyklický W-graf. Předpoklad o artikulaci je v ní podstatný. Obsahuje-li totiž souvislý neorientovaný graf G artikulaci, pak v něm nelze libovolně volit dva různé uzly p, q tak, aby vhodnou volbou orientace se G dal převést na

[10]) Má-li ovšem nějaké hrany.

acyklický graf s jediným pramenem p a jediným protipramenem q. Graf G má totiž aspoň dva koncové články, při čemž lze dokázat větu:

Lemma 4. *Budiž $\vec{A}$ acyklický W-graf s pramenem p; budiž $\vec{A}_k$ jeden jeho koncový článek. Jestliže p neleží v $\vec{A}_k$, pak $\vec{A}_k$ obsahuje aspoň jeden protipramen grafu $\vec{A}$.*

Důkaz. Budiž a_k (jediná) artikulace grafu $\vec{A}$ ležící v $\vec{A}_k$. Článek $\vec{A}_k$ představuje acyklický graf, existuje v něm tedy pramen p_k i protipramen q_k. Neleží-li p v $\vec{A}_k$, pak je $a_k = p_k$. Existuje tedy protipramen $q_k \neq a_k$ článku $\vec{A}_k$ a ten je též protipramenem grafu $\vec{A}_k$.

3. Acyklickým grafům jsme zde věnovali pozornost proto, že zřejmě platí toto tvrzení: Odstraníme-li z dobře orientovaného grafu s centrem c všechny hrany, které počínají v uzlu c, dostaneme acyklický graf.[11]) Než přistoupíme ke studiu dobře orientovaných grafů s centrem, dokážeme ještě jednu pomocnou větu.

Lemma 5. *Budiž $\vec{A}$ acyklický graf s jediným pramenem p a jediným protipramenem q. Spojme uzly p, q novou drahou B počínající v q a končící v p, která má s grafem $\vec{A}$ společné právě jen uzly p, q. Vznikne graf $\vec{D}$, který je dobře orientovaný.*

Důkaz. Předně lze konstatovat, že pro každý uzel x grafu $\vec{A}$ $(x \neq q)$ existuje dráha vedoucí z x do q. Kdyby totiž taková dráha pro některý uzel $x \neq q$ neexistovala, očíslujme uzly grafu $\vec{A}$ (podobně, jak jsme to provedli v důkazu věty 1, bod b)) a vyhledejme uzel $x_{\max}$ s maximálním číslem, pro nějž tato dráha neexistuje. Protože $x_{\max}$ není protipramenem grafu $\vec{A}$, vychází z něho hrana do uzlu x', který je tedy očíslován číslem větším než uzel $x_{\max}$. Z uzlu x' už existuje dráha do q, tedy z uzlu $x_{\max}$ také vede dráha do q (spor). Podobně nahlédneme, že pro každý uzel y grafu $\vec{A}$ $(y \neq p)$ existuje dráha vedoucí z p do y.[12])

Zvolme nyní v $\vec{D}$ dva různé uzly x, y.

a) Leží-li x, y oba v $\vec{A}$, sestrojme dráhu B_x (resp. B_y) vedoucí z x do q (resp. z p do y).[13]) Podle věty 1 ve [3], str. 88 plyne z existence drah B_x, B, B_y existence dráhy vedoucí z x do y v grafu $\vec{D}$.

b) Leží-li x, y oba v B v pořadí q x, y, p, je věc zřejmá. Jde-li o pořadí q, y, x, p, postupujeme nejprve z x do p, pak sestrojíme v $\vec{A}$ dráhu vedoucí z p do q a konečně jdeme z q do y.

c) Leží-li x v B a y nikoliv, jdeme z x do p a pak z p do y v grafu $\vec{A}$ Leží-li y v B a x nikoliv, jdeme z x do q v grafu $\vec{A}$ a pak z q do y po části dráhy B.

---

[11]) Srovnej také 5. a 6. poznámku v práci [1], str. 84.

[12]) Z toho tedy jako vedlejší výsledek máme: Acyklický graf s jediným pramenem i protipramenem je souvislý.

[13]) B_x a B_y se ovšem mohou redukovat každá jen v jediný uzel.

Z každého uzlu grafu $\vec{D}$ lze tedy dojít po dráze do každého dalšího — proto $\vec{D}$ je dobře orientovaný graf.

Věta 2. *Budiž D souvislý neorientovaný graf bez artikulací s aspoň třemi uzly a nechť c je libovolný jeho uzel. Pak lze volit orientaci hran grafu D tak, že vznikne dobře orientovaný graf $\vec{D}$ s centrem c.*

Důkaz. Graf D nemůže být strom, neboť každý strom s aspoň třemi uzly má artikulaci. Proto index souvislosti grafu D je $\mu \geqq 1$.

Je-li D kružnice (čili $\mu = 1$), je tvrzení triviální. Nechť tedy $\mu > 1$. Lze najít (aspoň jedno) žebro Z s koncovými uzly x, y, na němž leží c. Odstraněním žebra Z ať vznikne z D graf D^* popsaný v lemmatu 2.

a) Nemá-li D^* artikulaci, orientujme jej jako acyklický graf s pramenem x a protipramenem y (věta 1), zatím co žebro Z nechť je orientováno jako dráha vedoucí z y do x. Podle lemmatu 5 vznikne tak dobře orientovaný graf, při čemž každý jeho cyklus zřejmě obsahuje (zorientované) žebro Z. Tedy c je centrum takto vzniklého grafu.

b) Je-li D^* řetězec, pak lze uzly x, y a všechny artikulace a_i grafu D^* srovnat do posloupnosti $x, a_1, a_2, \ldots, a_r, y$ $(r \geqq 1)$, při čemž a_1 (resp. a_r) leží ve stejném koncovém článku jako x (resp. y), zatím co artikulace a_j, a_{j+1} leží obě v témž článku grafu D^* (pro $1 \leqq j \leqq r - 1$). Položme $x = a_0$, $y = a_{r+1}$. Podle věty 1 lze každý článek grafu D^* orientovat jako acyklický graf s (jediným) pramenem a_i a (jediným) protipramenem a_{i+1} $(0 \leqq i \leqq r)$. Provedeme-li to, vznikne acyklický[14]) graf $\vec{D}^*$ s (jediným) pramenem x a (jediným) protipramenem y. Ten opět doplníme žebrem Z orientovaným jako dráha vedoucí z y do x, aby vznikl graf žádaných vlastností. Důkaz je podán.[15])

Chceme si ještě všimnout, že v orientaci grafu $\vec{D}$ popsané v důkaze věty 2 existuje vždy více než jedno centrum; snadno ovšem sestrojíme dobře orientovaný graf i s jediným centrem (v obr. 1 existuje jediné centrum c). Má-li však graf D z předpokladů věty 2 každý uzel nejvýše 3. stupně, pak příslušný graf $\vec{D}$ má vždy aspoň dvě centra. Konečně ke každému přirozenému číslu $s > 3$ lze najít graf D s uzlem c stupně s-tého takový, že každý graf $\vec{D}$ z věty 2 má kromě c ještě další centrum. Přenecháváme čtenáři, aby se o těchto tvrzeních přesvědčil.

4. Mezi dobře orientovanými grafy zaujímají důležité postavení souvislé rovnovážně orientované grafy.[16]) Orientovaný graf nazýváme *rovnovážně*

[14]) Plyne např. z připomínané už věty o očíslování uzlů acyklického grafu.

[15]) K větě 2 je nutno poznamenat, že předpoklad o artikulaci je v ní podstatný.

[16]) Název *rovnovážně orientovaný* graf pochází od A. Kotziga. V literatuře není pro tento pojem jednotné pojmenování: König [3] neužívá žádného názvu, kdežto u jiných autorů lze najít např. pojmenování *T-graph* (N. G. de Bruijn), *simple graph* (W. T. Tutte) atd.

orientovaným, jestliže v každém jeho uzlu právě tolik hran končí, kolik v něm počíná. Ukázalo se, že souvislé rovnovážně orientované grafy hrají analogickou úlohu mezi orientovanými grafy, jakou v případě neorientovaných grafů mají souvislé eulerovské grafy (viz [3], str. 29, věta 7; odtud také snadno plyne, že souvislý rovnovážně orientovaný graf je zvláštním případem dobře orientovaného grafu).

Budiž dán orientovaný graf $\vec{G}$. Lze-li sestrojit posloupnost

$$u_1, \overrightarrow{u_1u_2}, u_2, \overrightarrow{u_2u_3}, u_3, \ldots, u_m, \overrightarrow{u_mu_1}, u_1\,, \tag{2}$$

kde u_i jsou uzly a $\overrightarrow{u_iu_{i+1}}$ hrany grafu $\vec{G}$, pak (2) nazveme *tahem kompletním* vzhledem k u_1, jestliže (2) obsahuje všechny hrany grafu $\vec{G}$ počínající v u_1.

Věta 3. *Rovnovážně orientovaný graf $\vec{G}$ má uzel c za své centrum právě tehdy, jestliže každý tah kompletní vzhledem k c obsahuje všechny hrany grafu $\vec{G}$.*

Důkaz. Budiž $\vec{G}$ rovnovážně orientovaný graf s centrem c a nechť existuje tah kompletní vzhledem k c, který neobsahuje hranu $\overrightarrow{vw} \in \vec{G}$. Sestrojme všechny hrany $\overrightarrow{vw}$ s uvedenou vlastností; vidíme že (spolu s počátečními a koncovými uzly) tvoří podgraf $\vec{G}^*$, který je též rovnovážně orientovaný. Uzel c ovšem neleží v $\vec{G}^*$, zatím co v $\vec{G}^*$ lze sestrojit cyklus (viz [3], str. 29, věta 8). To však je spor s tím, že c je centrum grafu $\vec{G}$.

Nechť obráceně v rovnovážně orientovaném grafu $\vec{G}$ každý kompletní tah vzhledem k c obsahuje všechny hrany z $\vec{G}$. Nechť existuje v $\vec{G}$ cyklus Ω, který neprochází uzlem c. Odstraňme z $\vec{G}$ všechny hrany cyklu Ω a případně všechny uzly, jež by pak byly isolované. Vznikne tak (event. nesouvislý) graf $\vec{H}$, který je rovnovážně orientovaný. Zvolme v $\vec{H}$ tu komponentu $\vec{K}$, v níž leží uzel c; tato komponenta zřejmě obsahuje všechny ty hrany z $\vec{G}$, které vycházejí z uzlu c. Podle Königovy věty zmíněné na počátku odst. 4 existuje v $\vec{K}$ tah kompletní vzhledem k c (obsahující dokonce všechny hrany z $\vec{K}$). To je tedy také kompletní tah vzhledem k c i v původním grafu $\vec{G}$, který však neobsahuje žádnou hranu z Ω (spor).

LITERATURA

[1] *F. Bäbler*: Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen, Comm. Math. Helv., 1953, 81—100.

[2] *M. Fiedler, J. Sedláček*: O *W*-basích orientovaných grafů, Časopis pro pěstování matematiky *83* (1958), 214—225.

[3] *D. König*: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[4] *O. Ore:* A problem regarding the tracing of graphs, Elemente der Mathematik, VI. Jahrgang (1951), 49—53.

[5] *J. Sedláček*: O konečných orientovaných grafech, Časopis pro pěstování matematiky *82* (1957), 195—215.

[6] *H. Whitney*: Non-separable and planar graphs, Transactions of the American Math. Society *34* (1932), 339—362.

Резюме

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ХОРОШО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

ИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага

(Поступило в редакцию 4/X 1957 г.)

Конечный ориентированный граф $\vec{D}$ мы называем хорошо ориентированным (см. [2], [5]), если из каждой его вершины ведет путь к каждой из остальных вершин. Если в хорошо ориентированном графе $\vec{D}$ существует вершина c, являющаяся вершиной каждого цикла графа $\vec{D}$, то мы назовем c центром графа $\vec{D}$. Главная теорема нашей статьи гласит (теорема 2):

Пусть D — связный неориентированный граф без двуугольников, без петель и без артикуляции, имеющий по крайней мере три вершины. Пусть c — произвольная вершина графа D. Тогда можно подобрать ориентацию ребер графа D так, что получится хорошо ориентированный граф $\vec{D}$ с центром c.

Zusammenfassung

ÜBER EINE SPEZIELLE KLASSE WOHLGERICHTETER GRAPHEN

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Eingelangt am 4. Oktober 1957)

Ein endlicher gerichteter Graph D heisst wohlgerichtet (siehe [2], [5]), wenn von jeden Knotenpunkt aus zu jedem anderen eine Bahn fährt. Existiert in einem wohlgeıichteten Graphen $\vec{D}$ ein solcher Knotenpunkt c, der in jedem Zyklus des Graphen $\vec{D}$ liegt, dann bezeichnen wir c als Zentrum des Gıaphen $\vec{D}$. Der Hauptsatz der vorliegenden Arbeit ist der Satz 2:

Es sei D ein zusammenhängender nichtgerichteter artikulationsloser Graph ohne Zweiecke und ohne Schlingen, der mindestens drei Knotenpunkte besitzt; es sei c sein beliebiger Knotenpunkt. Dann gibt es eine solche Orientierung der Kanten von D, dass ein wohlgerichteter Graph $\vec{D}$ mit dem Zentrum c entsteht.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

O LEXIKOGRAFICKÉM SOUČTU ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN

KAREL ČULÍK, Brno

(Došlo dne 11. listopadu 1957)

DT: 519.513

V článku je ukázáno, že nikoli každá částečně uspořádaná množina je lexikografickým součtem systému částečně uspořádaných a lexikograficky nerozložitelných (3) množin přes částečně uspořádanou a lexikograficky nerozložitelnou množinu. Dále se tu studují základní vlastnosti vložených (1) částečně uspořádaných podmnožin, rozklady ve vložené a lexikograficky nerozložitelné částečně uspořádané podmnožiny a faktorové (2) částečně uspořádané množiny, které jsou lexikograficky nerozložitelné, na dané částečně uspořádané množině.

O částečně uspořádané (zkráceně část. usp.) podmnožině $P \neq \emptyset$ část. usp. množiny M řekneme, že je *vložená v M*, jestliže platí

$$\{x, y \in P,\ z \in M - P\} \Rightarrow \{x < z \Leftrightarrow y < z\} \text{ i } \{z < x \Leftrightarrow z < y\}\,. \tag{1}$$

Podmínka (1) říká, že prvek $z \in M - P$ se chová vzhledem k relaci částečného uspořádání ke všem prvkům z P stejně.

Část. usp. množinu M a každou její jednoprvkovou podmnožinu nazýváme *triviálními vloženými* část. usp. množinami v M.

Rozklad $\overline{M}$ na část. usp. množině M nazýváme *rozkladem ve vložené část. usp. podmnožiny*, jestliže každý jeho prvek je část. usp. podmnožinou vloženou v M. Zejména nejmenší a největší rozklad (viz [2] str. 14) na část. usp. množině je vždy jejím rozkladem ve vložené (totiž triviální) část. usp. podmnožiny.

Vzhledem k podmínce (1) lze na každém rozkladu $\overline{M}$ ve vložené část. usp. podmnožiny v část. usp. množině M definovat částečné uspořádání takto

$$P, Q \in \overline{M}, P \not\equiv Q \Rightarrow \{P < Q \Leftrightarrow x < y, \text{ když } x \in P,\ y \in Q\}\,. \tag{2}$$

Pak část. usp. množinu definovanou na $\overline{M}$ s částečným uspořádáním (2) označujeme stručně zase $\overline{M}$ a nazýváme *faktorovou část. usp. množinou na část. usp. množině M*. Existuje tedy na každé část. usp. množině alespoň jedna její faktorová část. usp. množina a má-li daná část. usp. množina alespoň dva prvky, existují vždy alespoň dvě její faktorové část. usp. množiny (definované na nejmenším a největším rozkladu, které jsou v tomto případě různé). Faktorová část. usp. množina definovaná na největším příp. nejmenším rozkladu je isomorfní s jednoprvkovou příp. s danou část. usp. množinou.

Jsou-li prvky x, y v část. usp. množině nesrovnatelné, píšeme $x \parallel y$. Totožnost příp. isomorfismus dvou část. usp. množin označujeme symbolem $\equiv$, příp. $=$.

Věta 1. *Část. usp. množina M je lexikografickým součtem systému část. usp. množin $M_u \neq \emptyset$ přes část. usp. množinu $N \neq \emptyset$ tj. platí $M \equiv \sum\limits_N M_u$, $u \in N$ právě tehdy, když M_u je část. usp. množina vložená v M pro každé $u \in N$ a N je isomorfní faktorové část. usp. množině definované na rozkladu ve vložené podmnožiny M_u.*

Důkaz. Nechť nejdříve platí $M \equiv \sum\limits_N M_u$. Pak podle definice lexikografického součtu (srv. [1], str. 27) platí $M_u \cap M_v = \emptyset$ pro $u \neq v$ a také $\bigcup\limits_{u \in N} M_u \equiv M$, takže podmnožiny M_u jsou prvky jistého rozkladu $\overline{M}$ na M. Nechť $z \in M - M_a$, tj. $z \in M_b$ pro vhodné $b \neq a$, kde $a, b \in N$ a nechť $x, y \in M$. Platí-li nyní $x < z$ příp. $z < x$ v $M \equiv \sum\limits_N M_u$, pak podle definice lexikografického součtu musí platit $a < b$ příp. $b < a$ v N a tedy také $y < z$ příp. $z < y$ v M. Tedy M_a splňuje podmínku (1) a proto je část. usp. množinou vloženou v M pro každý $a \in N$, takže rozklad $\overline{M}$ je rozkladem ve vložené část. usp. množiny v M. Zobrazení část. usp. množiny N na faktorovou část. usp. množinu M, které zobrazuje prvek $a \in N$ na prvek $M_a \in \overline{M}$ je zřejmě prosté. Platí-li $a < b$ v N, pak podle definice lexikografického součtu platí také $x < y$ pro $x \in M_a$, $y \in M_b$ a tedy podle (2) je $M_a < M_b$ v $\overline{M}$. Platí-li naopak $M_a < M_b$ v $\overline{M}$, pak podle (2) platí $x < y$ pro $x \in M_a$, $y \in M_b$ a tedy podle definice lexikografického součtu je $a < b$ (neboť platí $a \neq b$). Tím je ukázáno, že uvažované zobrazení je isomorfismem (srv. definice isomorfismu [1], str. 18—19) mezi N a $\overline{M}$.

Nechť nyní část. usp. množina N je isomorfní s faktorovou část. usp. množinou $\overline{M}$ na část. usp. množině M a nechť v předpokládaném isomorfismu si odpovídají prvky $a \in N$, $N_a \in \overline{M}$. Pak část. usp. množiny M_a jsou vložené v M. Z definice lexikografického součtu především plyne, že množiny M a $\bigcup\limits_{a \in N} M_a$ jsou stejné. Nechť konečně $x, y \in M$, tj. platí $x \in M_a$, $y \in M_b$ pro vhodné $a, b \in N$. Pak každé z následujících tvrzení je zřejmě ekvivalentní s předcházejícím

(a) $x < y$ v $\sum\limits_N M_u$,

(b) $a < b$ v N nebo $a = b$,

(c) $M_a < M_b$ v $\overline{M}$ nebo $x < y$ v M_a,

(d) $x < y$ v M.

Tím je dokázáno, že $\sum\limits_N M_u \equiv M$.

Řekneme, že část. usp. množina M je *lexikograficky nerozložitelná* příp. *lexikograficky skoronerozložitelná,* jestliže splňuje podmínku

$$M \equiv \sum_N M_x \Rightarrow \text{buď kard } M_x = 1 \text{ pro každý } x \in N \text{ nebo kard } N = 1\,, \tag{3}$$

příp.

$$M \equiv \sum_N M_x \Rightarrow \text{buď existuje } M_x \text{ taková, že } M_x = M \text{ nebo } N = M\,. \tag{4}$$

Věta 2. *Pro část. usp. množinu M jsou ekvivalentní tvrzení*

a) *M je lexikograficky nerozložitelná.*

b) *Každá část. usp. podmnožina vložená v M je triviální.*

c) *Na M existují nejvýše dvě faktorové část. usp. množiny.*

Důkaz plyne jednoduchou úvahou z použitých definic a z věty 1.

Věta 3. *Část. usp. množina, která je lexikograficky nerozložitelná je také lexikograficky skoronerozložitelná. Konečná část. usp. množina, která je lexikograficky skoronerozložitelná je také lexikograficky nerozložitelná. Existují nekonečné část. usp. množiny, které jsou lexikograficky skoronerozložitelné ale nejsou lexikograficky nerozložitelné.*

Důkaz. I. Ihned se vidí, že (3) $\Rightarrow$ (4).

II. Nechť část. usp. množina M je konečná a lexikograficky skoronerozložitelná. Předpokládejme dále, že existuje část. usp. podmnožina P, která je netriviální vložená v M. Pak zřejmě existuje rozklad $\overline{M}$ ve vložené část. usp. podmnožiny v M takový, že $P \in \overline{M}$. Nechť část. usp. množina N je isomorfní s faktovou část. usp. množinou $\overline{M}$ a v příslušném isomorfismu nechť si odpovídají prvky $a \in N$, $M_a \in \overline{M}$. Podle věty 1 je $M \equiv \sum_N M_x$, avšak kard $\overline{M} <$ $<$ kard M, takže $N \neq \overline{M}$ a také kard $M_x <$ kard M čili $M_x \neq M$ pro každý $x \in N$. Tedy neplatí (4) a to je spor. Tím je ukázáno, že každá část. usp. podmnožina vložená v M musí být triviální a tedy podle věty 2 je část. usp. množina M lexikograficky nerozložitelná.

III. Snadno se nahlédne, že řetězec typu ω nebo typu ω^* a také nekonečná množina prvků, z nichž každé dva jsou nesrovnatelné, jsou část. usp. množiny lexikograficky skoronerozložitelné, ale nejsou zřejmě lexikograficky nerozložitelné.

Nyní se přirozeně nabízí otázka, zda lze každou část. usp. množinu plně charakterisovat s pomocí operace lexikografického součtu a s pomocí část. usp. množin, které jsou lexikograficky nerozložitelné případně jenom lexikograficky skoronerozložitelné, tj. zda lze ke každé část. usp. množině M najít takové vyjádření ve tvaru lexikografického součtu $M \equiv \sum_N M_x$, aby část. usp. množiny M_x pro každý $x \in N$ i část. usp. množina N byly lexikograficky nerozložitelné případně jenom lexikograficky skoronerozložitelné. Odpověď je však v obou případech záporná. Je-li totiž M pětiprvkovou množinou navzájem nesrovnatelných prvků a má-li N být lexikograficky nerozložitelná, musí být kard $N \leqq 2$, neboť jedině jednoprvková a dvouprvkové faktorové část. usp. množiny na M jsou lexikograficky nerozložitelné. Je-li však (podle věty 1) $N = \overline{M}$, kde $\overline{M}$ je příslušná faktorová část. usp. množina, existuje alespoň jeden $M_x \in \overline{M}$ takový, že kard $M_x > 2$ a tedy M_x není lexikograficky nerozložitelná. A podle věty 3 pro konečné část. usp. množiny jsou pojmy lexikografické nerozložitelnosti a skoro nerozložitelnosti ekvivalentní.

Tážeme-li se však, zda ke každé část. usp. množině M existuje její vyjádření ve tvaru lexikografického součtu $M \equiv \sum_N M_x$ takové, že N je lexikograficky nerozložitelná příp. že M_x je lexikograficky nerozložitelná pro každý $x \in N$, pak odpověď je v obou případech kladná, neboť v prvním případě stačí podle věty 1 uvažovat největší a v druhém případě nejmenší rozklad na M. Je-li M lexikograficky nerozložitelná, pak podle věty 2 žádné další rozklady ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny neexistují, zatím co v opačném případě uvedených rozkladů může existovati více. V dalším tedy budeme vyšetřovat jednak rozklady ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny, jednak faktorové část. usp. množiny, které jsou samy lexikograficky nerozložitelné. Nejdříve uvedeme několik lemmat o vložených část. usp. podmnožinách.

Lemma 1. *Je-li P část. usp. množina vložená v část. usp. množině Q a je-li Q vložená v část. usp. množině R, pak také P je vložená v R. Je-li P vložená v R, pak je vložená také v každé Q, pro niž platí $P \subset Q \subset R$.*

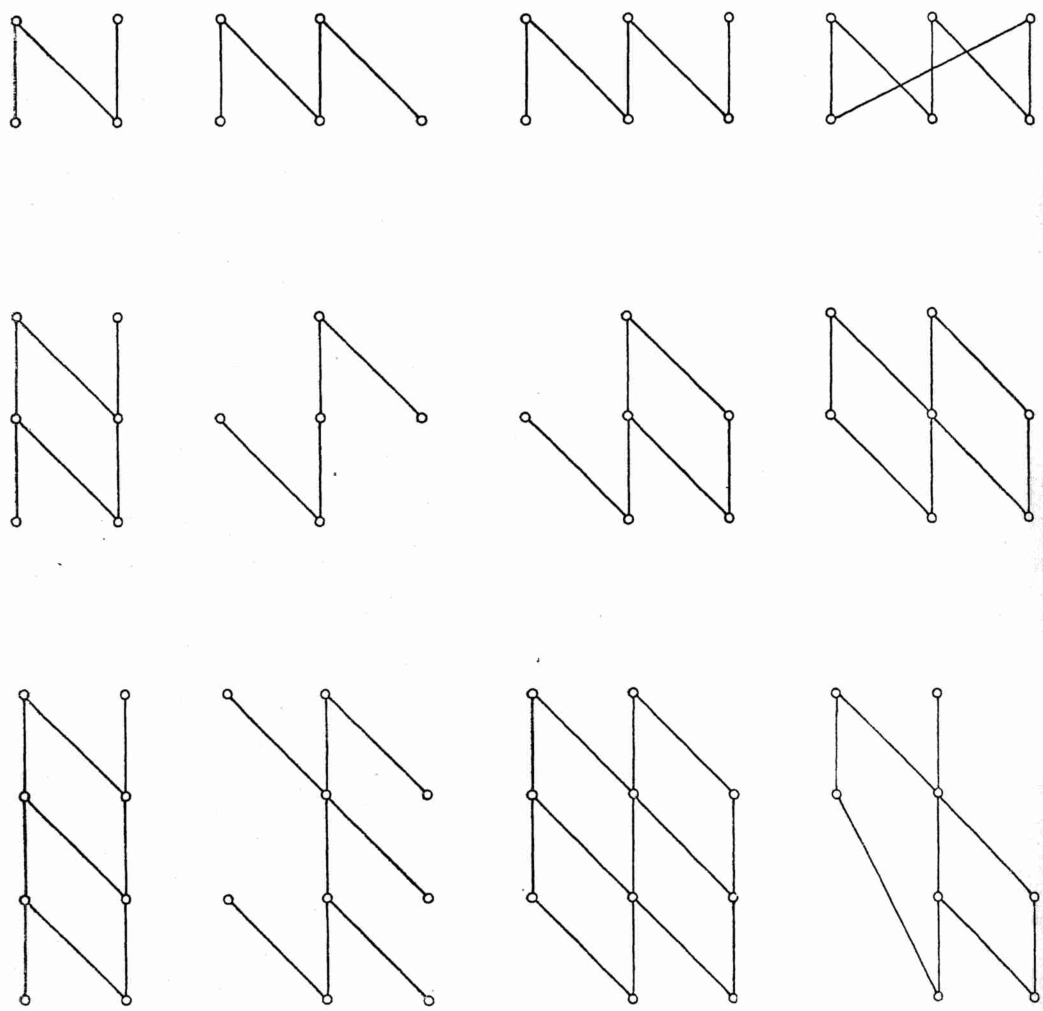
Důkaz obou tvrzení plyne přímo z (1).

Lemma 2. *Část. usp. množina P vložená v část. usp. množině M je konvexní v M, ale opak neplatí.*

Důkaz sporem plyne přímo z (1), když konvexita pro část. usp. množiny se definuje stejně jako pro svazy (viz [1], str. 44). Protipříklad je dán libovolným dvouprvkovým řetězcem v kterékoliv část. usp. množině délky 2, jejichž diagramy jsou na obr. 1.

Lemma 3. *Jsou-li P_ι, $\iota \in I$ část. usp. podmnožiny vložené v část. usp. množině M a platí-li $\bigcap_{\iota \in I} P_\iota \neq \emptyset$, pak také $\bigcap_{\iota \in I} P_\iota$ je část. usp. podmnožina vložená v M.*

Důkaz. Nechť $P = \bigcap_{\iota \in I} P_\iota$ a nechť $x, y \in P$, $z \in M - P$. Pak platí $x \varrho z$, kde ϱ značí některý ze symbolů $<, >, \|$, a existuje index $\varkappa \in I$ takový, že z non $\in P_\varkappa$, takže podle (1) (neboť $x, y \in P_\varkappa$ a $P_\varkappa$ je vložená v M) platí $y \varrho z$. Podle předpokladu je $P \neq \emptyset$ a tedy podle (1) je P vložená v M.



Obr. 1

Sjednocení vložených část. usp. podmnožin nemusí být vloženou část. usp. podmnožinou. Na příklad sjednocení dvou různých jednoprvkových podmnožin v kterékoliv část. usp. množině na obr. 1 není vloženou část. usp. podmnožina, neboť uvedené část. usp. množiny jsou lexikograficky nerozložitelné a podle věty 2 každá jejich vložená podmnožina je triviální. Platí však

Lemma 4. *Jsou-li P_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ část. usp. podmnožiny vložené v část. usp. množině M a platí-li $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ pro $1 \leqq i < k$, pak také $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ je část. usp. podmnožina vložená v M.*

Důkaz. Pro $k = 1$ je lemma zřejmě správné a pro $k = 2$ nechť $z \in M - (P_1 \cup P_2)$, $x, y \in P_1 \cup P_2$. Pak platí $x \varrho z$, kde ϱ značí některý ze symbolů $\langle, \rangle, \|$ a podle předpokladu existuje $u \in P_1 \cap P_2$ a ovšem $P_1 \cap P_2 \subset P_1$, $P_1 \cap P_2 \subset P_2$. Pak podle (1) platí $u \varrho z$ a proto také $y \varrho z$ čili $P_1 \cup P_2$ je vložená v M (zřejmě totiž $P_1 \cup P_2 \neq \emptyset$). Předpokládejme nyní, že lemma je správné pro každé h, $2 \leqq h < k$. Vybereme-li na příklad z daných $P_1, P_2, \ldots, P_k$ prvních $k - 1$ podmnožin, pak tyto podmnožiny splňují podmínky lemmatu pro $h = k - 1$ a tedy podle indukčního předpokladu je $\bigcup_{i=1}^{k-1} P_i$ část. usp. podmnožina vložená v M. Avšak platí také $\bigcup_{i=1}^{k-1} P_i \cap P_k \neq \emptyset$, takže znovu podle indukčního předpokladu pro $h = 2$ musí být také $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ část. usp. podmnožina vložená v M.

Lemma 5. *Jsou-li P, Q část. usp. podmnožiny vložené v část. usp. množině M a platí-li $P \cap Q \neq \emptyset$, $P - Q \neq \emptyset \neq Q - P$, pak také $P - Q$ i $Q - P$ jsou část. usp. podmnožiny vložené v M a pro každé $x \in P - Q$, $y \in P \cap Q$, $z \in Q - P$ platí*

$$x \varrho y, \quad y \varrho z, \quad x \varrho z, \quad \textit{kde } \varrho \textit{ značí některý ze symbolů } \langle, \rangle, \| . \tag{5}$$

Je-li $P \cap Q \neq \emptyset$, ale $P - Q = \emptyset$, pak $Q - P$ nemusí být část. usp. podmnožinou vloženou v M.

Důkaz. Nejdříve dokážeme tvrzení (5). Podle předpokladu existují $t \in P - Q$, $u \in P \cap Q$ a nechť platí $t \varrho u$, kde ϱ značí některý ze symbolů $\langle, \rangle, \|$. Jelikož Q je vložená v M, musí podle (1) být $t \varrho y$, $t \varrho z$ pro každý $y \in P \cap Q$ a každý $z \in Q - P$. Podle předpokladu však existuje také $v \in Q - P$, takže platí $t \varrho v$ a jelikož P je vložená v M, musí podle (1) být $x \varrho v$, $y \varrho v$ pro každé $x \in P - Q$ a $y \in P \cap Q$. Využijeme-li nyní znovu toho, že P i Q jsou vložené v M, pak podle (1) musí být $x \varrho y$, $y \varrho z$, $x \varrho z$ pro každé $x \in P - Q$, $y \in P \cap Q$, $z \in Q - P$.

Z (5) a z daných předpokladů však ihned plyne, že $P - Q$ i $Q - P$ jsou část. usp. podmnožiny vložené v M.

Nechť konečně $M = \{a, b, c, d, e\}$ a nechť M je částečně uspořádána relací pokrytí takto: a pokrývá b; b pokrývá c i d; e pokrývá d. Pak $\{a, b\}$ i M jsou část. usp. podmnožiny vložené v M, ale $M - \{a, b\}$ není vložená, neboť $b > d$, zatím co $b \| e$.

Lemma 6. *Nejmenší zákryt i největší zjemnění libovolného, neprázdného systému rozkladů ve vložené část. usp. podmnožiny v část. usp. množině M je zase rozkladem ve vložené část. usp. podmnožiny v M.*

Důkaz. Podle [2] především platí, že jak nejmenší zákryt tak největší zjemnění rozkladů na množině M je zase rozkladem na množině M.

Nechť nyní P je prvkem nejmenšího zákrytu uvažovaného systému rozkladů. Pak $P = \bigcup P_\iota$, kde P_ι jsou část. usp. podmnožiny vložené v M a platí, že ke každým dvěma $P_1 \neq P_k$ existuje konečná posloupnost $P_1, P_2, \ldots, P_k$ taková, že $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ pro $1 \leqq i < k$. Jestliže tedy $x, y \in P$ a $z \in M - P$, pak lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x \in P_1$ a $y \in P_k$ (neboť případ $x, y \in P_1$ je jasný). Nechť tedy platí $x \varrho z$, kde ϱ značí některý ze symbolů $\langle, \rangle, \|$. Podle lemmatu 4 je $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ také vložená v M a tedy podle (1) platí $y \varrho z$, čímž je ukázáno, že P je vložená v M.

Nechť nyní P je prvkem největšího zjemnění uvažovaného systému rozkladů. Pak $P = \bigcap P_\iota$, kde P_ι jsou část. usp. podmnožiny vložené v M a $P \neq \emptyset$. Pak podle lemmatu 3 je P vložená v M.

Lemma 7. *Nechť $P \neq Q$ jsou lexikograficky nerozložitelné, netriviální vložené část. usp. podmnožiny v část. usp. množině M, pro něž platí $P \cap Q \neq \emptyset$. Pak platí* $\operatorname{kard} P \cap Q = 1$, $\operatorname{kard} P = \operatorname{kard} Q = 2$ *a část. usp. podmnožiny $P, Q, P \cup Q$ jsou současně buď řetězce nebo množiny nesrovnatelných prvků.*

Důkaz. Podle lemmatu 3 je $P \cap Q$ vložená v M a podle lemmatu 1 je vložená také v P. Podle předpokladu však P je lexikograficky nerozložitelná, takže podle věty 2 musí $P \cap Q$ být triviální vložená v P. To znamená buď $P \cap Q = P$, ale pak $P \subset Q$ a podle lemmatu 1 je P netriviální vložená v Q, což je vzhledem k větě 2 a k daným předpokladům spor, nebo zbývá $\operatorname{kard} P \cap Q = 1$. Lze tedy označit $P = P' \cup \{u\}$, $Q = Q' \cup \{u\}$ a z předešlé úvahy plyne $P' \neq \emptyset \neq Q'$ a také $P' \cap Q' = \emptyset$. Podle lemmatu 5 je $P' = P - Q$ vložená v M a podle lemmatu 1 je vložena také v P, při čemž $P' \neq P$, takže podle věty 2 musí být $\operatorname{kard} P' = 1$ a proto $\operatorname{kard} P = 2$. Stejně se ukáže, že $\operatorname{kard} Q = 2$.

Konečně poslední tvrzení plyne ihned z předchozího a z (5) v lemmatu 5.

Lemma 8. *Řetězec i množina nesrovnatelných prvků jsou lexikograficky nerozložitelné část. usp. množiny právě tehdy, když obsahují nejvýše dva prvky.*

Důkaz. Dostatečnost uvedené podmínky plyne přímo z (3). Dokážeme její nutnost. Nechť tedy P je řetězcem nebo množinou nesrovnatelných prvků a nechť $\operatorname{kard} P > 2$. Pak zřejmě existuje takový rozklad $\overline{P}$ ve vložené část. usp. podmnožiny v P, pro nějž platí $\operatorname{kard} \overline{P} = 2$ a tedy existuje $Q \in \overline{P}$ taková, že $\operatorname{kard} Q > 1$ a ovšem $Q \neq P$. Tedy Q je netriviální vložená část. usp. podmnožina v P a proto podle věty 2 není P lexikograficky nerozložitelná.

Uvažujme nyní všechny možné rozklady ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny dané část. usp. množiny. Především platí, že jimi určené faktorové část. usp. množiny nemusí být isomorfní. Jako příklad stačí zvolit dvouprvkovou část. usp. množinu a uvažovat faktorové část. usp. množiny definované na největším a nejmenším rozkladu. Jednotlivé z uvažovaných rozkladů nemají tedy žádné význačné postavení a je proto přirozené vyšetřovat jejich nejmenší zákryt (viz [2], str. 16—17). Platí

Věta 4. *Nejmenší zákryt systému všech rozkladů ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny v část. usp. množině M je rozkladem ve vložené část. usp. podmnožiny, o nichž platí, že jsou to buď lexikograficky nerozložitelné část. usp. množiny nebo řetězce nebo množiny navzájem nesrovnatelných prvků. Jsou-li to řetězce, pak jsou buď konečné nebo mají některý z ordinálních typů* ω, ω^*, $\omega^* + \omega$.

Důkaz. Především podle lemmatu 6 je nejmenší zákryt uvažovaného systému zase rozkladem ve vložené část. usp. podmnožiny v M. Označme jej $\overline{M}$ a nechť $P \in \overline{M}$. Je-li P prvkem některého rozkladu z uvažovaného systému, je P lexikograficky nerozložitelná. Není-li P prvkem žádného z uvažovaných rozkladů, je $P = \bigcup_{\iota \in I} P_\iota$, kde P_ι jsou lexikograficky nerozložitelné a vložené v M. Pro P_ι dále platí $P_\iota \neq P$ pro každý $\iota \in I$. Odtud a z konstrukce nejmenšího zákrytu (viz [2]) plyne, že existují alespoň dvě $P_\iota, P_\varkappa$ takové, že kard P_ι, kard $P_\varkappa > 1$. Podle věty 2 to znamená, že P není lexikograficky nerozložitelná a předpokládejme, že není ani řetězcem, tj. že existují $x, y \in P$, pro něž platí $x \parallel y$. Pak z konstrukce nejmenšího zákrytu plyne existence konečné posloupnosti P_i, $1 \leqq i \leqq k$ takové, že $x \in P_1$, $y \in P_k$, $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ a kard $P_i > 1$ pro každé i. Nyní se indukcí podle lemmatu 7 dokáže, že P_i, $1 \leqq i \leqq k$ je dvouprvková množina nesrovnatelných prvků. Nechť nyní P_ι je libovolná, pro niž platí kard $P_\iota > 1$. Pak zase existuje konečná posloupnost P'_i, $1 \leqq i \leqq n$ taková, že $P'_1 = P_1$, $P'_n = P_\iota$, $P'_i \cap P'_{i+1} \neq \emptyset$ a kard $P'_i > 1$ pro každé i, takže zase indukcí z lemmatu 7 plyne, že P_ι je množina nesrovnatelných prvků. Nechť konečně $u, v \in P$, $u \neq v$. Pak buď existuje P_ι taková, že $u, v \in P_\iota$ a tedy $u \parallel v$, nebo $u \in P_\iota$, $v \in P_\varkappa$, $\iota \neq \varkappa$, a jako shora se ukáže, že zase $u \parallel v$. Tedy P je množinou nesrovnatelných prvků.

Nechť nyní P je řetězec, který je prvkem nejmenšího zákrytu uvažovaného systému rozkladů. Jestliže P není konečný ani nemá žádný z uvedených ordinálních typů, existují prvky $a, b \in P$ takové, že množina všech prvků, které leží mezi a a b je nekonečná. Podobně jako v předešlé části důkazu se ukáže, že existuje konečná posloupnost část. usp. podmnožin P_i, $1 \leqq i \leqq k$ taková, že $a \in P_1$, $b \in P_k$, $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ a kard $P_i > 1$ pro každé i. Při tom P_i jsou vložené a lexikograficky nerozložitelné. Z lemmatu 7 zase plyne, že P_i jsou dvouprvkové řetězce, takže $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ je konečná množina. Avšak podle lemmatu 4 je $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ část. usp. podmnožina vložená v P, takže vzhledem k předpokladům a podle lemmatu 2 musí být $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ nekonečná a to je spor.

Věta 5. *Nejmenší zákryt systému všech rozkladů ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny dané část. usp. množiny M je rozkladem ve vložené a lexikograficky nerozložitelné podmnožiny právě tehdy, když každá vložená* *množina nesrovnatelných prvků v M má mohutnost nejvýše 2 a když žádný vložený řetězec v M neobsahuje tři prvky x, y, z takové, že x pokrývá y a y pokrývá z.*

Důkaz. Je-li uvedená podmínka splněna, pak každý vložený řetězec, který je buď konečný nebo má některý z ordinálních typů ω, ω^*, $\omega^* + \omega$, obsahuje nejvýše dva prvky, takže podle lemmatu 8 je lexikograficky nerozložitelný. Avšak také každá vložená množina nesrovnatelných prvků obsahující nejvýše dva prvky je podle lemmatu 8 lexikograficky nerozložitelná a tedy podle věty 4 je nejmenší zákryt uvažovaného systému rozkladů rozkladem ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny.

Jestliže uvedená podmínka není splněna, pak buď v M existuje vložený řetězec P a v něm prvky x, y, z takové, že x pokrývá y a y pokrývá z, nebo v M existuje vložená množina nesrovnatelných prvků P, která obsahuje alespoň tři prvky $x \neq y \neq z \neq x$. V obojím případě existují rozklady ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny, z nichž jeden obsahuje jako prvek podmnožinu $\{x, y\}$ a druhý podmnožinu $\{y, z\}$, takže nejmenší zákryt uvažovaného systému musí obsahovat prvek $Q \supset \{x, y, z\}$. Podle lemmatu 1 je podmnožina $\{x, y\} \neq Q$ vložená v Q a netriviální, takže podle věty 2 Q není lexikograficky nerozložitelná.

Není-li část. usp. množina lexikograficky nerozložitelná, pak podle věty 2 existují kromě nejmenšího a největšího rozkladu ještě další rozklady ve vložené část. usp. podmnožiny, avšak kromě nejmenšího rozkladu nemusí existovat žádný další rozklad ve vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny. Jako příklad uveďme řetězec, který má ordinální typ η nebo λ.[1]) Především tento řetězec není lexikograficky nerozložitelný a dokonce ani lexikograficky skoronerozložitelný, neboť jej lze vyjádřit ve tvaru $\sum_N M_x$, kde N má ordinální typ $\omega^* + \omega$ a M_x má ordinální typ $\eta + 1$ pro každý $x \in N$. Dále však platí, že každá část. usp. podmnožina vložená v řetězci musí být zase řetězcem. Má-li tedy vložený řetězec v daném řetězci být lexikograficky nerozložitelným, musí podle lemmatu 8 obsahovat nejvýše dva prvky. Kdyby však obsahoval dva prvky, obsahoval by podle lemmatu 2 nekonečně mnoho prvků, takže zbývá, aby obsahoval právě jediný prvek.

Uvažujme nyní o lexikograficky nerozložitelných faktorových část. usp. množinách na dané část. usp. množině.

Vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny splňují podmínku, že každá jejich vlastní vložená část. usp. podmnožina je jednoprvková, tedy triviální. V tomto smyslu lze říci, že vložené a lexikograficky nerozložitelné část. usp. podmnožiny jsou *minimálními* vloženými část. usp. podmnožinami. Nazvěme nyní obdobně část. usp. podmnožinu P vloženou v část. usp. množině M *maximální vloženou* v M, jestliže platí

$$P \neq M \text{ a } Q \text{ je vložená v } M,\ Q \neq P \subset Q \Rightarrow Q, M \text{ splynou.} \tag{6}$$

[1]) η příp. λ značí ordinální typ množiny všech racionálních příp. reálných čísel uspořádaných podle velikosti.

V část. usp. množině nemusí obecně existovat vůbec žádná maximální vložená část. usp. podmnožina. Na příklad v řetězci, který nemá ani největší ani nejmenší prvek, neexistuje žádná maximální vložená.

Lemma 9. *Jsou-li $P \neq Q$ maximální vložené část. usp. podmnožiny v část. usp. množině M a platí-li $P \cap Q \neq \emptyset$, pak $P \cup Q = M$.*

Důkaz. Především platí $P \neq P \cup Q$. Podle lemmatu 4 však $P \cup Q$ je vložená v M a ovšem $P \subset P \cup Q$, takže podle (6) musí být $P \cup Q = M$.

Lemma 10. *Je-li $\overline{\overline{M}}$ faktorová část. usp. množina na $\overline{M}$ a $\overline{M}$ faktorová část. usp. množina na M, pak existuje faktorová část. usp. množina $\overline{M}_1$ na část. usp. množině M, která je isomorfní s $\overline{\overline{M}}$.*

Důkaz. Každý prvek $\mathfrak{A}_x \in \overline{\overline{M}}$ je množinou prvků $P_\iota \in \overline{M}$ pro $\iota \in I_x$, kde $P_\iota \subset M$. Uvažujme množinu všech $A_x = \bigcup_{\iota \in I_x} P_\iota \subset M$. Z (1) a (2) ihned plyne, že tato množina je jistým rozkladem $\overline{M}_1$ ve vložené část. usp. podmnožiny v M a že přiřazení prvků $A_x \in \overline{M}_1$, $\mathfrak{A}_x \in \overline{\overline{M}}$ je isomorfismem mezi faktorovou část. usp. množinou $\overline{M}_1$ a $\overline{\overline{M}}$.

Věta 6. *Existují-li na část. usp. množině M alespoň dvě různé maximální vložené část. usp. podmnožiny, jsou ekvivalentní tvrzení:*

a) *Existují maximální vložené část. usp. podmnožiny $P \neq Q$, pro něž platí $P \cap Q \neq \emptyset$.*

b) *Existuje faktorová část. usp. množina na M, která je buď řetězcem nebo množinou nesrovnatelných prvků a která není lexikograficky nerozložitelná.*

c) *Existuje tříprvková faktorová část. usp. množina na M, která je buď řetězcem nebo množinou nesrovnatelných prvků.*

d) *Pro každé dvě maximální vložené část. usp. podmnožiny P, Q platí $P \cap Q \neq \emptyset$.*

Důkaz. a) $\Rightarrow$ b) Platí-li a), pak platí také $P - Q \neq \emptyset \neq Q - P$ a podle lemmatu 9 je $P \cup Q = M$. Podle lemmat 3 a 5 však je $\overline{M} = \{P - Q, P \cap Q, Q - P\}$ tříprvková faktorová část. usp. množina na M, která podle (5) je buď řetězcem nebo množinou nesrovnatelných prvků a podle lemmatu 8 $\overline{M}$ není lexikograficky nerozložitelná.

b) $\Rightarrow$ c) Platí-li b) a je-li $\overline{M}$ příslušná faktorová část. usp. množina na M, pak podle lemmatu 8 platí kard $\overline{M} > 2$ a tedy na $\overline{M}$ existuje tříprvková faktorová část. usp. množina $\overline{\overline{M}}$, která ovšem zase je buď řetězcem nebo množinou nesrovnatelných prvků. Avšak z lemmatu 10 plyne, že existuje faktorová část. usp. množina na M, která je isomorfní s $\overline{\overline{M}}$.

c) $\Rightarrow$ d) Nechť platí c) a nechť $\overline{M} = \{X, Y, Z\}$ je příslušná faktorová část. usp. množina. Nechť nejdříve $\overline{M}$ je řetězcem a nechť pro určitost platí $X <$

$< Y < Z$, takže podle (1) část. usp. podmnožiny $X \cup Y$, $Y \cup Z$ jsou netriviální vložené v M. Je-li R libovolná maximální vložená část. usp. podmnožina v M, pak platí buď $R = X \cup Y$ nebo $R = Y \cup Z$ nebo R non $\subset X \cup Y$, R non $\subset Y \cup \cup Z$ čili $R \cap X \neq \emptyset \neq R \cap Z$. V posledním případě však podle (5) z lemmatu 5 a podle lemmatu 2 musí být $Y \subset R$. V každém případě tedy platí $Y \subset R$ a proto zejména platí $P \cap Q \neq \emptyset$. Nechť nyní $\overline{M}$ je množinou nesrovnatelných prvků. Pak podle (1) část. usp. podmnožiny $X \cup Y$, $Y \cup Z$, $Z \cup X$ jsou netriviální vložené v M. Je-li R libovolná maximální vložená část. usp. podmnožina v M, pak buď R splyne s některou z množin $X \cup Y$, $Y \cup Z$, $Z \cup X$ nebo platí, že R není částí žádné z nich, tj. platí $R \cap X \neq \emptyset \neq R \cap Y$, $R \cap Z \neq \emptyset$. V posledním případě předpokládejme, že alespoň dvě z množin X, Y, Z nejsou částí R, na příklad X non $\subset R$, Y non $\subset R$. Pak platí $R \neq R \cup X \neq M$, takže podle lemmatu 4 je $R \cup X$ netriviální vložená v M, což je spor vzhledem k (6). Tedy v každém případě obsahuje R alespoň dvě z množin X, Y, Z, což zejména znamená, že $P \cap Q \neq \emptyset$.

d) $\Rightarrow$ a) Vzhledem k předpokladu věty je tato implikace zřejmá.

Věta 7. *Jestliže na část. usp. množině M existuje tříprvková faktorová část. usp. množina, která je řetězcem, pak existují nejvýše dvě maximální vložené část. usp. podmnožiny v M.*

Důkaz. Předpokládejme, že existují, alespoň tři P, Q, R navzájem různé. Podle věty 6 lze předpokládat, že $P \cap Q \neq \emptyset$. Pak podle lemmatu 9 platí $P \cup Q = M$ a podle lemmat 3 a 5 je faktorová část. usp. množina $\overline{M} = \{P - Q, P \cap Q, Q - P\}$ řetězcem (neboť kdyby byla množinou nesrovnatelných prvků, neexistovala by na ní faktorová část. usp. množina, která je řetězcem a má více než jeden prvek). Pro R musí platit R non $\subset P$, R non $\subset Q$ čili $R \cap (P - Q) \neq \emptyset \neq R \cap (Q - P)$ a podle (5) z lemmatu 5 a podle lemmatu 2 musí být $P \cap Q \subset R$. Jelikož však $Q \neq R$, existuje $x \in Q - R \subset Q - P$, takže $P \cup R \neq M$, což je spor vzhledem k lemmatu 9.

Věta 8. *Nechť na část. usp. množině M existuje rozklad $\overline{M}$ v maximální vložené část. usp. podmnožiny. Pak faktorová část. usp. množina $\overline{M}$ je lexikograficky nerozložitelná.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\overline{M}$ není lexikograficky nerozložitelná. Pak podle věty 2 existuje netriviální vložená část. usp. podmnožina $\mathfrak{A}$ v $\overline{M}$ a nechť $\mathfrak{A} = \underset{P_\iota}{\mathrm{E}}\{P_\iota \subset M, \iota \in I\}$. Pak podle (1) a (2) je $P = \bigcup_{\iota \in I} P_\iota$ netriviální vložená v M a při tom existuje $P_\iota \subset P$, $P_\iota \neq P$ a to je spor.

Uveďme nyní příklady lexikograficky nerozložitelných část. usp. množin. Především je každá jednoprvková a dvouprvková část. usp. množina lexikograficky nerozložitelná. Dále neexistuje tříprvková část. usp. množina, která je lexikograficky nerozložitelná, ale pro každé $n > 3$ existuje n-prvková část. usp. množina, která je lexikograficky nerozložitelná a má délku 2.

Na obr. 1 (str. 20) jsou Hasseovy diagramy některých konečných lexikograficky nerozložitelných část. usp. množin.

Na závěr uvedeme ještě jednu větu o lexikografickém součtu. Platí

Věta 9. *Platí*

$$\sum_{\substack{\Sigma N_v \\ N}} M_u \equiv \sum_N \left(\sum_{N_v} M_u\right) . \tag{7}$$

Důkaz. Především je zřejmé, že obě množiny na levé i na pravé straně v (7) jsou stejné, takže je třeba jen ukázat, že také příslušná částečná uspořádání jsou stejná.

Nechť tedy $x, y \in \sum_{\substack{\Sigma N_v \\ N}} M_u$, $x \neq y$ a nechť platí $x \varrho y$ v $\sum_{\substack{\Sigma N_v \\ N}} M_u$, když ϱ značí některý ze symbolů $\langle, \rangle, \|$. Potom existují $a, b \in \sum_N N_v$ takové, že $x \in M_a$, $y \in M_b$, a také existují $p, q \in N$ takové, že $a \in N_p$, $b \in N_q$, takže platí $x \in \sum_{N_p} M_u$, $y \in \sum_{N_q} M_u$. Je-li $a = b$, pak podle definice lexikografického součtu platí $x \varrho y$ v M_a a tedy také v $\sum_{N_p} M_u$ a v $\sum_N (\sum_{N_v} M_u)$. Je-li $a \neq b$, pak podle definice lexikografického součtu platí $a \varrho b$ v $\sum_N N_v$ a jsou zase dvě možnosti. Buď je $p = q$ a ovšem N_p je vložená v $\sum_N N_v$, takže podle definice lexikografického součtu platí $a \varrho b$ v N_p, odkud však plyne $x \varrho y$ v $\sum_{N_p} M_u$ a tedy také v $\sum_N (\sum_{N_v} M_u)$. Nebo je $p \neq q$ a potom musí být $p \varrho q$ v N. Jelikož však $x \in \sum_{N_p} M_u$, $y \in \sum_{N_q} M_u$, platí také $x \varrho y$ v $\sum_N (\sum_{N_v} M_u)$.

LITERATURA

[1] *G. Birkhoff*: Теория структур (ruský překlad 2. vyd.), Moskva 1952.

[2] *O. Borůvka:* Theorie rozkladů v množině, Spisy přír. fak. M. U., čís. *278* (1946), Brno 3—37.

Резюме

О ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ СУММЕ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

КАРЕЛ ЧУЛИК (Karel Čulík), Брно

(Поступило в редакцию 11/XI 1957 г.)

Частично упорядоченное (коротко част. упор.) подмножество $P \neq \emptyset$ част. упор. множества M мы называем *вложенным* в M, если имеет место

$$\{x, y \in P, z \in M - P\} \Rightarrow \{x < z \Leftrightarrow y < z\} \text{ и } \{z < x \Leftrightarrow z < y\} .$$

На каждом разложении $\overline{M}$ на част. упор. множестве M (если каждый элемент разложения является част. упор. подмножеством, вложенным в M) можно определить частичное упорядочение следующим образом:

$$P, Q \in \overline{M}, P \neq Q \Rightarrow \{P < Q \Leftrightarrow x < y, \quad \text{если} \quad x \in P, y \in Q\}.$$

Соответствующее част. упор. множество $\overline{M}$ мы называем *факторным* част. упор. множеством част. упор. множества M.

Тогда можно утверждать, что част. упор. множество M является *лексикографической суммой* системы част. упор. множеств $M_u \neq \emptyset$, $u \in N$ по част. упор. множеству $N \neq \emptyset$, т. е. $M \equiv \sum\limits_N M_u$ тогда и только тогда, если M_u вложено в M для любого $u \in N$, и N изоморфно факторному част. упор. множеству, определенному на разложении на вложенные подмножества M_u.

Мы скажем, что част. упор. множество M *лексикографически неразложимо*, соотв. *почти неразложимо*, если оно удовлетворяет условию

$$M \equiv \sum_N M_x \Rightarrow \text{ или } \operatorname{kard} M_x = 1 \text{ для любого } x \in N \text{ или } \operatorname{kard} N = 1,$$

соотв.

$$M \equiv \sum M_x \Rightarrow \text{ или существует } M_x, \text{ изоморфное } M, \text{ или } N \text{ изоморфно } M.$$

Далеко не всякое част. упор. множество можно представить в виде $M \equiv \sum\limits_N M_x$ так, чтобы все N и M_x были для любого $x \in N$ лексикографически неразложимыми или лишь почти неразложимыми част. упор. множествами.

Далее исследуются свойства вложенных част. упор. подмножеств, свойства разложений на вложенные и лексикографически неразложимые част. упор. подмножества и факторные част. упор. множества, являющиеся лексикографически неразложимыми, на данном част. упор. множестве. При этом част. упор. подмножество P, вложенное в M, называется *максимальным вложенным*, если имеет место

$$P \neq M \text{ и } Q \text{ вложено в } M,\ Q \neq P \subset Q \Rightarrow Q \equiv M.$$

Zusammenfassung

ÜBER DIE LEXIKOGRAPHISCHE SUMME DER TEILWEISE GEORDNETEN MENGEN

KAREL ČULÍK, Brno

(Eingegangen am 11. November 1957)

Eine teilweise geordnete (t. g.) Teilmenge $P \neq \emptyset$ der t. g. Menge M heisst *eingelegte* t. g. Menge in M, wenn folgende Bedingung

$$x, y \in P,\ z \in M - P \Rightarrow \{x < z \Leftrightarrow y < z\} \text{ und } \{z < x \Leftrightarrow z < y\}$$

erfüllt ist. Auf jeder Zerlegung $\overline{M}$ in die eingelegten t. g. Teilmengen in der t. g. Menge M ist es möglich eine teilweise Anordnung folgendermassen zu definieren:

$$P, Q \in \overline{M},\ P \not\equiv Q \Rightarrow \{P < Q \Leftrightarrow x < y, \text{ wo } x \in P,\ y \in Q\}.$$

Die betreffende t. g. Menge $\overline{M}$ heisst *t. g. Faktormenge* der t. g. Menge M.

Satz 1. *Eine t. g. Menge M ist dann und nur dann die lexikographische Summe eines Systems der t. g. Mengen $M_u \neq \emptyset$ über eine t. g. Menge $N \neq \emptyset$, d. h. $M \equiv \equiv \sum_N M_u$, wenn M_u eine eingelegte t. g. Teilmenge in M für jedes $u \in N$ ist und wenn N zu einer auf der Zerlegung in die eingelegten Teilmengen M_u definierten t. g. Faktormenge isomorph ist.*

Wir sagen, dass eine t. g. Menge M *lexikographisch unzerlegbar* bzw. *fastunzerlegbar* ist, wenn sie folgende Bedingung

$$M \equiv \sum_N M_u \Rightarrow \textit{entweder } \operatorname{kard} M_u = 1 \textit{ für alle } u \in N \textit{ oder } \operatorname{kard} N = 1\,,$$

bzw.

$$M \equiv \sum_N M_u \Rightarrow \textit{entweder gibt es } M_u, \textit{ die isomorph zu } M \textit{ oder } N \textit{ isomorph zu } M \textit{ ist,}$$

erfüllt.

Satz 2. *Eine t. g. Menge M ist dann und nur dann lexikographisch unzerlegbar, wenn auf M höchstens zwei t. g. Faktormengen existieren.*

Nicht jede t. g. Menge M lässt sich in der Form $M \equiv \sum_N M_u$ in solcher Weise ausdrücken, dass N und auch M_u für jedes $u \in N$ lexikographisch unzerlegbare oder nur fastunzerlegbare t. g. Mengen sind.

Weiter werden die Grundeigenschaften der eingelegten t. g. Teilmengen untersucht. Es gelten z. B.:

Lemma 3. *Der nichtleere Durchschnitt der eingelegten t. g. Teilmengen ist wieder eine eingelegte t. g. Teilmenge.*

Lemma 4. *Sind P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ die eingelegten t. g. Teilmengen und gilt $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ für $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, so ist auch $\bigcup_{i=1}^{n} P_i$ eine eingelegte t. g. Teilmenge.*

Lemma 5. *Sind P, Q eingelegte t. g. Teilmengen und gilt $P \cap Q \neq \emptyset, P - Q \neq \neq \emptyset \neq Q - P$, so sind auch $P - Q$, $Q - P$ eingelegte t. g. Teilmengen und für $x \in P - Q$, $y \in P \cap Q$, $z \in Q - P$ gilt $x \varrho y$, $y \varrho z$, $x \varrho z$, wo ϱ eines der folgenden Symbole bedeutet: $\langle, \rangle, \|$ (Unvergleichbarkeit).*

Über die Zerlegungen in eingelegte und lexikographisch unzerlegbaren t. g. Teilmengen gilt

Satz 5. *Die kleinste Überdeckung des Systems von allen Zerlegungen in eingelegten t. g. Teilmengen ist dann und nur dann eine Zerlegung von derselben Art, wenn jede eingelegte t. g. Teilmenge, in der jede zwei Elemente unvergleichbar sind, höchstens zwei Elemente enthält und wenn keine eingelegte Kette drei Elementen enthält, für die* $x > y > z$ *und* $x > a \geqq y \geqq b > z \Rightarrow a = y = b$ *gilt.*

Eine eingelegte t. g. Teilmenge P in t. g. Menge M heisst *maximal*, wenn

$$P \not\equiv M \text{ und } Q \textit{ eine eingelegte t. g. Teilmenge in } M \textit{ ist },$$
$$Q \not\equiv P \subset Q \Rightarrow Q \equiv M .$$

Satz 6. *Gibt es auf einer t. g. Menge M mindestens zwei maximale eingelegte t. g. Teilmengen, so sind folgende Bedingungen äquivalent:*

a) *Es existieren maximale eingelegte t. g. Teilmengen* $P \not\equiv Q$, *für die* $P \cap Q \neq \emptyset$ *gilt.*

b) *Es existiert eine t. g. Faktormenge auf M, die entweder eine Kette bildet oder nur aus Elementen, die paarweise unvergleichbar sind, besteht und die nicht lexikographisch unzerlegbar ist.*

Endlich ist klar, dass

$$\sum_{\underset{N}{\Sigma N_v}} M_u \equiv \sum_{N} \left(\sum_{N_v} M_u \right)$$

gelten muss.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

O ROVNOVÁŽNE ORIENTOVANÝCH KONEČNÝCH GRAFOCH

ANTON KOTZIG, Bratislava

(Došlo dne 13. listopadu 1957) DT: 519.51

V práci sa študujú niektoré vlastnosti takzvaných rovnovážne orientovaných grafov, pod čím sa rozumejú orientované grafy bez izolovaných uzlov, v ktorých počet hrán smerujúcich do ľubovoľného uzla rovná sa počtu hrán smerujúcich z tohoto uzla. Nadväzuje sa tu na známe vety o rozklade takýchto grafov na cykly, ďalej na niektoré vety o vlastnostiach eulerovských grafov a odvodzujú sa vety umožňujúce alebo usnadňujúce stanovenie počtu rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov daného orientovaného grafu. Poukazuje sa napokon na možnosť aplikácie získaných výsledkov pri riešení úlohy stanoviť počet rôznych lineárnych faktorov v danom párnom grafe.

1

V práci pod grafom rozumie sa vždy konečný graf. Ak v neorientovanom grafe G orientujeme každú z jeho hrán, dostaneme tak istý *orientovaný graf* $\vec{G}$. Rôznou orientáciou hrán toho istého neorientovaného grafu dostaneme prirodzene rôzne orientované grafy.

Ak hrana h v neorientovanom grafe je incidentná s uzlami u, v, vyjadrujeme sa obvykle tiež tak, že hrana h spojuje uzly u, v. Ak u je počiatočným uzlom v konečným uzlom orientovanej hrany h v grafe $\vec{G}$, hovoríme, že hrana h v grafe $\vec{G}$ *smeruje z uzla u do uzla v*. Pod *stupňom uzla* v grafe (orientovanom alebo neorientovanom) rozumie sa vždy počet hrán, s ktorými je uzol v grafe incidentný. Uzol u je *izolovaným uzlom* grafu, ak nie je incidentný so žiadnou hranou grafu. Graf je *eulerovským grafom*, ak neobsahuje izolované uzly a každý jeho uzol je párneho stupňa.

O uzle u orientovaného grafu $\vec{G}$ budeme hovoriť, že je *v rovnováhe*, alebo tiež, že je *rovnovážny*, ak nie je izolovaným uzlom a počet hrán z $\vec{G}$, ktoré smerujú do uzla u, rovná sa počtu hrán z $\vec{G}$ smerujúcich z uzla u. Orientovaný graf $\vec{G}$ nazveme *rovnovážne orientovaným grafom*, ak každý jeho uzol je rovnovážny.

Poznámka 1. Rovnovážne orientovaný graf, ktorý je súvislý, je špeciálnym prípadom takzvaného dobre orientovaného grafu, o ktorom pojednáva aj nedávno uverejnená práca [1].

Nech postupnosť $u_1, h_{1,2}, u_2, h_{2,3}, \ldots, u_{m-1}, h_{m-1,m}, u_m$ prvkov orientovaného grafu $\vec{G}$ (kde $m \geqq 2$, $h_{x,x+1}$ sú hrany, u_x sú uzly a hrana $h_{x,x+1}$ je incidentná s uzlami $u_x \neq u_{x+1}$) popisuje istý ťah T. Budeme hovoriť, že ťah T je *kontinuitne orientovaný*, ak pre všetky $x \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ buď platí: hrana $h_{x,x+1}$ smeruje v $\vec{G}$ z uzla u_x do uzla u_{x+1}, alebo pre všetky x platí: hrana $h_{x,x+1}$ smeruje z uzla u_{x+1} do uzla u_x. Ako je známe, kontinuitne orientovaná cesta nazýva sa *dráha* a kontinuitne orientovanej kružnici sa hovorí *cyklus*. Ľubovoľný cyklus je zrejme rovnovážne orientovaným grafom.

Pod *ohodnotením grafu* (orientovaného alebo neorientovaného) rozumie sa zobrazenie γ množiny hrán grafu do istej množiny čísel. Každej hrane grafu je v tomto zobrazení priradené číslo, ktoré sa nazýva *hodnotou hrany* v danom grafe. V práci budeme sa zaoberať len takými ohodnoteniami grafu, pri ktorých hrana grafu môže mať len hodnotu 1, 0, -1. Každému takémuto ohodnoteniu γ orientovaného grafu $\vec{G}$ možno priradiť orientovaný graf $\gamma(\vec{G})$ takto: Graf $\gamma(\vec{G})$ obsahuje práve tie hrany z $\vec{G}$, ktoré majú nenulovú hodnotu a obsahuje všetky uzly a len tie uzly z $\vec{G}$, ktoré sú s takýmito hranami incidentné, pričom hrany majúce v ohodnotení γ hodnotu 1 (resp. -1) majú tú istú (resp. opačnú) orientáciu v grafoch $\vec{G}$, $\gamma(\vec{G})$. Ak by platilo $\gamma(h) = 0$ pre všetky $h \in \vec{G}$, potom $\gamma(\vec{G})$ je nulový graf. Ak platí $\gamma(h) = 1$ pre všetky $h \in \vec{G}$, potom je $\vec{G} = \gamma(\vec{G})$; ak žiadna z hrán grafu $\vec{G}$ nemá hodnotu -1, potom $\gamma(\vec{G})$ je podgraf grafu $\vec{G}$.

Definujme si teraz násobenie ohodnotení γ_1, γ_2 takto: Ohodnotenie γ_3 grafu je súčinom ohodnotení γ_1, γ_2 (písané $\gamma_3 = \gamma_1 \cdot \gamma_2$), ak pre ľubovoľnú hranu h grafu platí: $\gamma_1(h) + \gamma_2(h) \equiv \gamma_3(h) \pmod 3$; $\gamma_3(h) \in \{-1, 0, 1\}$. Násobenie ohodnotení je zrejme komutatívne a asociatívne. Systém všetkých rôznych ohodnotení ľubovoľného nenulového grafu pri takto definovanom násobení je abelovská grupa o 3^m prvkoch (kde m je počet hrán grafu).

2

O rovnovážne orientovaných grafoch sú známe vety:[1])

Lemma 1. *V orientovanom grafe $\vec{G}$ existuje kontinuitne orientovaná eulerovská čiara práve vtedy, keď $\vec{G}$ je súvislý rovnovážne orientovaný graf.*

Lemma 2. *Pre orientovaný graf $\vec{G}$ existuje taký systém $\mathfrak{S} = \{\vec{K}_1, \vec{K}_2, \ldots, \vec{K}_p\}$ jeho cyklov, že ľubovoľná hrana z $\vec{G}$ je hranou práve jedného cyklu systému $\mathfrak{S}$ práve vtedy, keď $\vec{G}$ je rovnovážne orientovaný graf.*

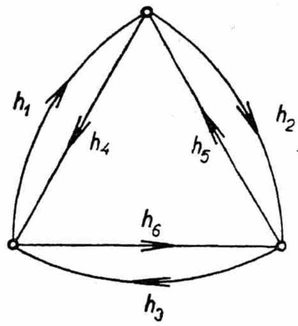
Poznámka 2. Dva rôzne systémy cyklov toho istého rovnovážne orientovaného grafu s vlastnosťami požadovanými v lemme 2 nemusia byť kvantitatívne ekvivalentné. Tak napr. v grafe znázornenom na obrázku 1 existujú systémy

---

[1]) Nasledujúce lemmy 1, 2, $\bar{1}$, $\bar{2}$, 3, na ktoré v práci nadväzujeme, sú uvedené napr. v Königovej knihe [2]. Uvádzame ich sústredene a v plnom znení v záujme prehľadnosti a pohodlia čitateľa, ako aj preto, že sa javilo potrebným preformulovať ich do našej terminológie.

$\mathfrak{S} = \{\vec{K}_1, \vec{K}_2\}$; $\mathfrak{S}^* = \{\vec{K}_1^*, \vec{K}_2^*, \vec{K}_3^*\}$ cyklov (kde $\vec{K}_1$ obsahuje hrany h_1, h_2, h_3; $\vec{K}_2$ hrany h_4, h_5, h_6 a kde hrany h_1, h_4 patria do $\vec{K}_1^*$, hrany h_2, h_5 do $\vec{K}_2^*$, hrany h_3, h_6 do $\vec{K}_3^*$), ktoré majú vlastnosti požadované lemmou 2, ale ktoré nemajú rovnaký počet prvkov.

Uvedené vety poukazujú na isté analogie medzi eulerovskými neorientovanými grafmi a rovnovážne orientovanými grafmi. Lemmám 1 a 2 odpovedajú totiž tieto známe vety o neorientovaných grafoch.



Obr. 1

Lemma 1. *V neorientovanom grafe G existuje eulerovská čiara práve vtedy, keď G je súvislý eulerovský graf.*

Lemma 2. *Pre neorientovaný graf G existuje taký systém $\mathfrak{S} = \{K_1, K_2, \ldots, K_p\}$ jeho kružníc, že ľubovoľná hrana z G je hranou práve jednej kružnice systému $\mathfrak{S}$ práve vtedy, keď G je eulerovský graf.*

Úzky vzťah medzi eulerovskými neorientovanými grafmi a rovnovážne orientovanými grafmi zvýrazňuje aj táto známa veta (pozri [2], str. 30):

Lemma 3. *Hrany neorientovaného grafu G možno orientovať tak, aby z grafu G vznikol rovnovážne orientovaný graf $\vec{G}$ práve vtedy, keď G je eulerovský graf.*

V uvedenej lemme ba ani v celej práci [2] nerieši sa otázka, koľkými spôsobmi možno eulerovský graf orientovať tak, aby vznikol rovnovážne orientovaný graf.[2]) Zaveďme toto označenie: $\varrho(G)$ bude znamenať počet rôznych takých rovnovážne orientovaných grafov, ktoré vzniknú orientáciou všetkých hrán grafu G. Odvoďme si vety, ktoré sa týkajú nadhodenej otázky.

Veta 1. *Nech G je ľubovoľný eulerovský graf, $G_1, G_2, \ldots, G_k$ nech sú jednotlivé jeho komponenty; potom platí:*

$$\varrho(G) = \varrho(G_1) \cdot \varrho(G_2) \ldots \varrho(G_k) .$$

Dôkaz je zrejmý.

Veta 2. *Nech G je ľubovoľný súvislý eulerovský graf, $G_1, G_2, \ldots, G_c$ nech sú jeho jednotlivé členy; potom platí:*

$$\varrho(G) = \varrho(G_1) \cdot \varrho(G_2) \ldots \varrho(G_c) .$$

Dôkaz. Ak G obsahuje jediný člen (tj. ak je $c = 1$), netreba nič dokazovať. Predpokladajme, že $c > 1$, tj. že G obsahuje aspoň jednu artikuláciu. Nech u je ľubovoľná artikulácia grafu G a nech u patrí do týchto a len týchto členov $G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_x}$ $(1 < b \leqq c)$ grafu G.

Nech $\vec{G}$ je ľubovoľný taký rovnovážne orientovaný graf, ktorý vznikne orientáciou všetkých hrán grafu G (člen G_{i_x} z grafu G stane sa tak orientova-

[2]) Túto úlohu si totiž König v svojej práci ani nevytyčuje.

ným podgrafom $\vec{G}_{i_x}$ grafu $\vec{G}$). Tvrdím: Uzol u je rovnovážny v ľubovolnom z členov $\vec{G}_{i_x}$ ($i = 1, 2, \ldots, b$). Dokážme to. Pretože $\vec{G}$ je rovnovážne orientovaný graf, existuje podľa lemmy 2 taký systém $\mathfrak{S} = \{\vec{K}_1, \vec{K}_2, \ldots, \vec{K}_p\}$ cyklov grafu $\vec{G}$, že ľubovoľná hrana z $\vec{G}$ je hranou práve jednoho cyklu z $\mathfrak{S}$. Také dve hrany ľubovoľného cyklu z $\mathfrak{S}$, ktoré sú incidentné s tým istým uzlom cyklu, patria zrejme do toho istého člena grafu $\vec{G}$. Teda množinu hrán incidentných s uzlom u a patriacich do $\vec{G}_{i_x}$ možno rozdeliť na istý počet t_x dvojíc hrán tak, že každá hrana množiny bude patriť práve do jednej dvojice a obe hrany dvojice patria do toho istého cyklu systému $\mathfrak{S}$. Z toho ihneď vyplýva, že práve t_x hrán množiny smeruje do uzla u a rovnaký počet hrán množiny smeruje v grafe $\vec{G}_{i_x}$ z uzla u. Preto u je rovnovážnym uzlom v $\vec{G}_{i_x}$. To však platí o ľubovoľnom uzle z $\vec{G}_{i_x}$, čiže: $\vec{G}_{i_x}$ je rovnovážne orientovaný graf, čo dokazuje naše tvrdenie.

V každom rovnovážne orientovanom grafe $\vec{G}$ má podľa predošlého rovnovážnu orientáciu každý jeho člen. Platí však zrejmě aj obrátene: ak v grafe $\vec{G}$ má každý z jeho členov rovnovážnu orientáciu, potom $\vec{G}$ je rovnovážne orientovaný graf. Z uvedeného vyplýva ihneď tvrdenie vety.

Veta 3. *Nech G_1, G_2 sú dva homoeomorfné súvislé eulerovské grafy, potom platí* $\varrho(G_1) = \varrho(G_2)$.

Dôkaz. Ak istú hranu h smerujúcu v rovnovážne orientovanom grafe $\vec{G}_1$ (ktorý vznikne z G_1 vhodnou orientáciou jeho hrán) z uzla u do uzla v ,,rozpolíme", tj. nahradíme ju hranami h', h'' a uzlom w (a to tak, že h' smeruje z uzla u do uzla w a hrana h'' smeruje z uzla w do uzla v), dostaneme istý graf $\vec{G}_1'$, ktorý je rovnovážne orientovaný, a príslušné neorientované grafy G_1, G_1' sú homoeomorfné. Je zrejmé, že graf G_1' je možné jediným spôsobom orientovať tak, že všetky hrany z G_1 až na rozpolenú hranu h majú tú istú orientáciu v $\vec{G}_1'$, ako v $\vec{G}_1$ a $\vec{G}_1'$ je pritom rovnovážne orientovaný graf. Obrátene: Ak dvojicu hrán h', h'' a uzol druhého stupňa w, ktorý je s nimi incidentný, máme nahradiť jedinou hranou tak, aby z rovnovážne orientovaného grafu vznikol opäť rovnovážne orientovaný graf (pričom orientácia spoločných hrán je v oboch grafoch rovnaká), je možné to urobiť jediným spôsobom. Možno preto každému rovnovážne orientovanému grafu $\vec{G}_1$ priradiť práve jeden rovnovážne orientovaný graf $\vec{G}_2$, pričom rôzne orientovaným grafom $\vec{G}_1(1)$, $\vec{G}_1(2)$ budú odpovedať rôzne orientované grafy $\vec{G}_2(1)$, $\vec{G}_2(2)$ a platí teda $\varrho(G_1) = \varrho(G_2)$, čo bolo treba dokázať.

Uveďme si ešte ďalšie dve vety týkajúce sa základných vlastností rovnovážne orientovaných grafov.

Veta 4. *Nech $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ sú dva iba orientáciou hrán sa líšiace rovnovážne orientované grafy, ktoré vzniknú orientáciou všetkých hrán istého eulerovského grafu G. Označme znakom $\vec{G}_3$ podgraf grafu $\vec{G}_1$, ktorý obsahuje tie hrany a len tie hrany z $\vec{G}_1$ (a v rovnakej orientácii ako v $\vec{G}_1$), ktoré majú inú orientáciu v $\vec{G}_2$ než v $\vec{G}_1$ a obsahuje okrem toho už len uzly z $\vec{G}_1$ incidentné s týmito hranami. O grafe $\vec{G}_3$ potom platí: $\vec{G}_3$ je rovnovážne orientovaný graf.*

Dôkaz. Pretože podľa predpokladu $\vec{G}_1 \neq \bar{G}_2$, je G_3 nenulový graf. Vzhľadom na spôsob, akým sme definovali $\vec{G}_3$, nemôže $\vec{G}_3$ obsahovať izolovaný uzol.

Nech u je ľubovoľný uzol z $\vec{G}_3$. Nech $2s$ je stupeň uzla u v grafe G a nech p (resp. q) je počet tých hrán incidentných s uzlom u, ktoré aj v grafe $\vec{G}_1$ aj v grafe $\vec{G}_2$ smerujú do uzla u (resp. z uzla u). Označme znakom $\bar{p}$ (resp. $\bar{q}$) počet tých hrán, ktoré v $\vec{G}_1$ (resp. v $\vec{G}_2$) smerujú do uzla u, ale v grafe $\vec{G}_2$ (resp. v grafe $\vec{G}_1$) smerujú z uzla u. Pretože oba grafy $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ sú podľa predpokladu rovnovážne orientované, platí: $p + \bar{p} = s$; $q + \bar{q} = s$; $p + \bar{q} = s$; $\bar{p} + q = s$. Z toho ihneď vyplýva, že je $\bar{p} = \bar{q}$, čo značí, že uzol u je v rovnováhe v grafe $\vec{G}_3$, a pretože u bol ľubovoľný uzol grafu $\vec{G}_3$, je $\vec{G}_3$ rovnovážne orientovaný graf. Dôkaz je vykonaný.

Veta 5. *Nech $\vec{G}_1$ je ľubovoľný rovnovážne orientovaný graf, $\vec{G}_0$ nech je ľubovoľný taký jeho podgraf, ktorý je tiež rovnovážne orientovaný. Ak zmeníme orientáciu hrán z $\vec{G}_0$ a orientáciu ostatných hrán z $\vec{G}_1$ ponecháme bez zmeny, vznikne tak z grafu $\vec{G}_1$ graf $\vec{G}_2$, ktorý je rovnovážne orientovaný.*

Dôkaz je zrejmý z dôkazu vety 4.

Prv než odvodíme ďalšie vety umožňujúce výpočet čísla $\varrho(G)$, definujme niektoré nové pojmy a zoznámime sa s niektorými ich vlastnosťami.

Nech G je ľubovoľný eulerovský graf a nech postupnosť $u_1, h_{1,2}, u_2, h_{2,3}, \ldots, u_m, h_{m,m+1}, u_{m+1}$ prvkov z G (kde u_x sú uzly, $h_{x,x+1}$ sú hrany a hrana $h_{x,x+1}$ spojuje uzly u_x, u_{x+1}) popisuje istý uzavretý ťah T (tj. platí $u_{m+1} = u_1$) v grafe G. Trojici prvkov $h_{x-1,x}, u_x, h_{x,x+1}$ (kde x je ľubovolné číslo z $\{1, 2, \ldots, m\}$; kladieme $h_{0,1} = h_{m,m+1}$) ťahu T budeme hovoriť *prechod ťahu T cez uhol u_x*. Poznamenajme, že prechodov cez istý uzol z G môže byť v ťahu T prípadne aj viac než jeden (v postupnosti popisujúcej ťah T môže byť $u_x = u_y$ aj keď $x \neq y$); je však zrejmé toto: Ak $\{h_{x-1,x}, u_x, h_{x,x+1}\}$, $\{h_{y-1,y}, u_y, h_{y,y+1}\}$ sú dva rôzne prechody cez ten istý uzol $u_x = u_y$ a to v tom istom ťahu T, potom tieto dva prechody nemajú spoločnú hranu (ináč by takáto spoločná hrana spojovala uzol u_x s uzlom u_y, kde $u_x = u_y$; čo nie je možné). Nech $\mathfrak{S} = \{T_1, T_2, \ldots T_m\}$ je ľubovoľný taký systém uzavretých ťahov, ktorý má túto vlastnosť: Ľubovoľná hrana z G je hranou práve jednoho ťahu systému $\mathfrak{S}$. Nechť v je ľubovoľný uzol z G, h ľubovoľná hrana incidentná s uzlom v. Hrana h nech patrí do T_i. Podľa predošlého existuje práve jeden prechod v ťahu T_i cez uzol v, ktorý obsahuje hranu h; nech h' je druhá hrana, ktorá patrí do tohoto prechodu. Žiadna iná hrana než hrana h' sa nevyskytuje v prechode cez uzol v spolu s hranou h ani v ťahu T_i a prirodzene ani v žiadnom inom ťahu systému $\mathfrak{S}$. Preto systému $\mathfrak{S}$ odpovedá jednoznačne rozklad množiny hrán incidentných s uzlom v na také dvojice hrán, že hrany dvojice a len hrany dvojice patria do toho istého prechodu cez uhol v v ťahu z $\mathfrak{S}$. Uzol v bol ľubovoľný uzol grafu G. Preto systému $\mathfrak{S}$ odpovedá v horeuvedenom zmysle istý systém $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ rozkladov množín hrán incidentných s jednotlivými uzlami grafu G na také dvojice hrán, ktoré s príslušným uzlom tvoria prechod v ťahu systému $\mathfrak{S}$.

Nech $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je množina uzlov z G. Označme znakom H_i množinu hrán z G incidentných s uzlom v_i a znakom R_i ľubovoľný rozklad množiny H_i na triedy po dvoch hranách. Snadno sa presvedčíme, že systému $\{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ odpovedá práve jeden taký systém uzavretých ťahov $\mathfrak{S} = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$, že platí $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}) = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ a $\mathfrak{S}$ má opäť tú vlastnosť, že ľubovoľná hrana z G je hranou práve jednoho ťahu z $\mathfrak{S}$. Jednotlivé ťahy systému $\mathfrak{R}$ pri danom systéme $\overline{\mathfrak{R}} = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ možno totiž najsť takto: Cestujme po prvkoch z G tak, že výjdeme z istého uzla w_1 po niektorej hrane $g_{1,2}$ s ním incidentnej; dostaneme sa tak do istého uzla ω_2. Ďalej cestujme po tej hrane (označme ju $g_{2,3}$), ktorá s hranou $g_{1,2}$ tvorí dvojicu v rozklade R_x zo systému $\overline{\mathfrak{R}}$. Dostaneme sa tak do istého uzla w_3. Pri tomto cestovaní po konečnom počte krokov dostaneme sa napokon do uzla w_1 tak, že by bolo treba — pri dodržaní pravidla, že z ľubovoľného uzla pokračujeme v ceste po tej hrane, ktorá s hranou po ktorej sme prišli do uvažovaného uzla tvorí dvojicu v príslušnom rozklade — pokračovať v cestovaní po hrane $g_{1,2}$. Je zrejmé, že postupnosť prvkov z G usporiadaných tak, ako sme pri cestovaní cez ne prechádzali, popisuje istý uzavretý ťah, ktorý má túto vlastnosť: Hrany ľubovoľného prechodu cez ľubovoľný uzol v_i tvoria dvojicu z R_i. Ak popísané cestovanie opakujeme s tým, že pri ďalšom cestovaní prvá precestovaná hrana nepatrí do žiadneho z ťahov, ktoré sme precestovali v predchádzajúcich cestovaniach, dostaneme napokon — pretože náš postup sa musí zastaviť tým, že už všetky hrany z G budú precestované — istý systém uzavretých ťahov $\mathfrak{S}$, ktorý má všetky požadované vlastnosti, a platí $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}) = \overline{\mathfrak{R}}$.

Teda každému systému rozkladov $\overline{\mathfrak{R}}$ odpovedá práve jeden systém uzavretých ťahov $\mathfrak{S}$ a každému systému uzavretých ťahov $\mathfrak{S}$ odpovedá práve jeden systém $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ rozkladov množín hrán incidentných s jednotlivými uzlami grafu G na triedy po dvoch hranách. (Dva systémy uzavretých ťahov s požadovanými vlastnosťami považujeme pritom za rovnaké práve vtedy, keď systémy ich prechodov sú rovnaké.) Výsledky vykonaných úvah možno zhrnúť do tejto vety:

Veta 6. *Nech G je ľubovoľný eulerovský graf, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ množina jeho uzlov a nech H_i je množina hrán z G incidentných s uzlom u_i. Označme znakom $\mu(G)$ počet rôznych systémov uzavretých ťahov grafu G, ktoré majú túto vlastnosť: Ľubovoľná hrana z G je hranou práve jednoho uzavretého ťahu systému. Označme ďalej znakom $\nu(G)$ počet rôznych systémov $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$, kde R_i je rozklad množiny H_i na triedy po dvoch hranách. Platí: $\mu(G) = \nu(G)$.*

Dôkaz je zrejmý z vykonaných úvah.

Počet $\mu(G)$ z vety 6 sa dá snadno určiť, ak poznáme stupeň každého z uzlov grafu G. O tom hovorí táto veta:

Veta 7. *Nech G je ľubovoľný eulerovský graf, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ množina jeho uzlov a nech $2s_i$ je stupeň uzla u_i v grafe G. O počte $\mu(G)$ z predošlej vety platí*

$$\mu(G) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(2s_i)!}{s_i!\, 2^{s_i}} = \frac{1}{2^m} \prod_{i=1}^{n} \frac{(2s_i)!}{s_i!}$$

(kde m je počet hrán grafu G).

Dôkaz. Nech u_i je ľubovoľný uzol z G a nech H_i je množina hrán z G incidentných s uzlom u_i; počet jej prvkov nech je $2s_i$. Rôznych rozkladov množiny H_i na triedy po dvoch hranách je zrejme

$$1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2s_i - 1) = \frac{(2s_i)!}{2^{s_i} \,.\, s_i!} \,.$$

Pretože rozklady $R_1, R_2, \ldots, R_n$ možno voliť nezávisle jeden od druhého, existuje celkom práve

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{(2s_i)!}{2^{s_i} \,.\, s_i!}$$

rôznych možností pre systém $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ s požadovanými vlastnosťami. Pretože súčet stupňov všetkých uzlov grafu rovná sa vždy dvojnásobku počtu jeho hrán, je $\sum_{i=1}^{n} s_i = m$, z čoho ihneď vyplýva tvrdenie vety.

Definujme si pojem *rozštepenia uzla* podľa rozkladu množiny hrán s ním incidentných: Nech G je ľubovoľný graf, v ľubovoľný jeho uzol, $H(v)$ množina hrán z G incidentných s uzlom v a $R_v = \{H_1, H_2, \ldots, H_s\}$ ľubovoľný rozklad množiny $H(v)$. Budeme hovoriť, že graf G_{R_v} vznikne z grafu G *rozštepením uzla v podľa rozkladu R_v*, ak o grafe G_{R_v} platí: (1) G_{R_v} obsahuje všetky hrany a len hrany z G; (2) G_{R_v} obsahuje všetky uzly z G s výnimkou uzla v a okrem toho obsahuje už len isté uzly $v_1, v_2, \ldots, v_s$; (3) ľubovoľný uzol v_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) je incidentný s hranami a len s hranami množiny H_i rozkladu R_v; incidencia ostatných dvojíc prvkov (rôzneho rozmeru) grafu G zostáva nezmenená aj v grafe G_{R_v}.

Veta 8. *Nech $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ je množina uzlov ľubovoľného eulerovského grafu G; R_i nech je ľubovoľný rozklad množiny hrán incidentných s uzlom $u_i \in U$ na triedy po dvoch hranách. Nech ďalej $\mathfrak{S} = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ je systému $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ odpovedajúci systém uzavretých ťahov grafu G, o ktorom platí: ľubovoľná hrana z G patrí práve do jednoho ťahu z $\mathfrak{S}$. Utvorme postupnosť grafov $G_1, G_2, \ldots, G_n$ takto: Graf G_i vznikne z grafu G_{i-1} rozštepením uzla u_i podľa rozkladu $R_i \in \mathfrak{R}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; kladieme $G_0 = G$). O grafe G_n potom platí:*

(a) *graf G_n obsahuje práve m komponent;*

(b) *ľubovoľná komponenta grafu G_n je kružnica;*

(c) *ľubovoľná komponenta z G_n obsahuje všetky hrany a len hrany patriace do istého ťahu z $\mathfrak{S}$ a ľubovoľná hrana z G je hranou práve jednej komponenty grafu G_n.*

Dôkaz. Ak rozštepíme všetky uzly grafu G (aby tak vznikol graf G_n), ľubovoľný prechod cez ľubovoľný uzol v ľubovoľnom ťahu z $\mathfrak{S}$ zmení sa len tak, že pôvodný uzol z G je nahradený istým uzlom druhého stupňa v grafe G_n. Preto dve hrany z G patriace do toho istého ťahu $T_i \in \mathfrak{S}$ sú hranami tej istej komponenty (označme ju K_i) grafu G_n. Potom ale K_i je súvislým pravidelným grafom druhého stupňa, čiže K_i je kružnica a to taká kružnica, ktorá obsahuje všetky hrany a len hrany ťahu T_i. Z toho ihneď vyplýva správnosť všetkých tvrdení vety.

Veta 9. *Nech G je ľubovoľný eulerovský graf, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = U$ množina jeho uzlov a nech uzol u_i je uzlom $2s_i$-teho stupňa v grafe G. Nech $\overline{\mathfrak{S}} = \{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{\mu(G)}\}$ je množina všetkých takých systémov uzavretých ťahov grafu G, ktoré majú túto vlastnosť: ľubovoľná hrana z G je hranou práve jedného ťahu systému. Označme znakom τ_j ($j = 1, 2, \ldots, \mu(G)$) počet ťahov systému $\mathfrak{S}_j$. O počte $\varrho(G)$ rôznych takých orientácií hrán grafu G, pri ktorých vznikne z grafu G rovnovážne orientovaný graf, platí*

$$\varrho(G) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (s_i!)} \cdot \sum_{j=1}^{\mu(G)} 2^{\tau_j}.$$

Dôkaz. Označme znakom $\delta(G)$ počet tých uzlov z G, ktoré sú vyššieho stupňa než druhého stupňa. Ak G obsahuje $\varkappa$ komponent a každá z komponent je kružnicou (a teda uzavretým ťahom), tj. ak je $\delta(G) = 0$, potom zrejme platí $\mu(G) = 1$, čiže potom existuje jediný systém $\mathfrak{S}_1 \in \overline{\mathfrak{S}}$ s $\varkappa = \tau_1$ ťahmi. Pretože ľubovoľnú kružnicu možno práve dvoma spôsobmi orientovať tak, aby vznikol rovnovážne orientovaný graf (cyklus), možno graf G orientovať práve $2^\varkappa$ rôznymi spôsobmi tak, že vznikne rovnovážne orientovaný graf. Čiže v uvažovanom prípade je $\varrho(G) = 2^\varkappa$. Je pritom zrejme $s_i = 1$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ a teda $2^\varkappa = \varrho(G) = 2^{\tau_1}$. Ak teda je $\delta(G) = 0$, veta platí.

Predpokladajme, že veta platí pre všetky také eulerovské grafy G', v ktorých je $\delta(G') \leqq k$ (kde k je isté celé nezáporné číslo), a predpokladajme, že je $\delta(G) = k + 1$. Potom G obsahuje aspoň jeden uzol u_x taký, že je $s_x > 1$. Počet rôznych rozkladov množiny hrán H_x incidentných s uzlom u_x na triedy po dvoch hranách je $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2s_x - 1) = p$. Nech $\mathfrak{R}_x = \{R_x(1), R_x(2), \ldots, R_x(p)\}$ je systém všetkých takýchto rozkladov. Označme znakom $G_x(y)$ graf, ktorý vznikne z grafu G rozštepením uzla u_x podľa rozkladu $R_x(y)$ ($y \in \{1, 2, \ldots, p\}$). O ľubovoľnom z grafov $G_x(y)$ platí zrejme $\delta(G_x(y)) = k$.

Označme znakom $\overline{\mathfrak{S}}_x(y)$ tú podmnožinu množiny $\overline{\mathfrak{S}}$, ktorá odpovedá systému takých rozkladov $\{R_1, R_2, \ldots, R_{x-1}, R_x(y), R_{x+1}, \ldots, R_n\}$, kde R_i pri $i \neq x$ je ľubovoľný rozklad množiny hrán incidentných s uzlom u_i na triedy hrán po dvoch hranách, avšak rozklad $R_x(y)$ je pevný; je to rozklad, podľa ktorého sme previedli rozštepenie uzla u_x, aby tak vznikol graf $G_x(y)$. Množiny $\overline{\mathfrak{S}}_x(y_1)$, $\overline{\mathfrak{S}}_x(y_2)$ sú pri rôznych y_1, y_2 zrejme disjunktné. Označme znakom A_y množinu tých indexov z $\{1, 2, \ldots, \mu(G)\}$, ktoré patria tým systémom uzavretých ťahov množiny $\overline{\mathfrak{S}}$; ktoré sú tiež prvkami množiny $\overline{\mathfrak{S}}_x(y)$. Podľa predpokladu (pretože je $\delta(G_x(y)) = k$ a uzly, ktoré vzniknú rozštepením uzla u_x, sú všetky druhého stupňa) platí

$$\varrho(G_x(y)) = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq x}} (s_i!)} \cdot \sum_{j \in A} 2^{\tau_j} .$$

Máme teda dokázať, že za prijatých predpokladov platí

$$\varrho(G) = \frac{1}{s_x!} [\varrho(G_x(1)) + \varrho(G_x(2)) + \ldots + \varrho(G_x(p))] .$$

Je zrejmé toto: Nech y je ľubovoľné číslo $\in \{1, 2, \ldots, p\}$ a $\vec{G}_x(y)$ nech je ľubovoľný rovnovážne orientovaný graf, ktorý vznikne orientáciou hrán grafu $G_x(y)$; ak graf $\vec{G}$ vznikne z grafu G takou orientáciou hrán z G, akú majú tieto hrany v grafe $\vec{G}_x(y)$, potom $\vec{G}$ je rovnovážne orientovaný graf.

Nech teraz $\mathfrak{G}$ je množina všetkých rovnovážne orientovaných grafov, ktoré vzniknú orientáciou hrán grafu G. Rozložme množinu $\mathfrak{G}$ na triedy $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, {}_r \left(\text{kde } r = \binom{2s_x}{s_x}\right)$ takto: Do tej istej triedy $\mathfrak{G}_i$ patria dva orientované grafy z $\mathfrak{G}$ práve vtedy, keď množina tých hrán, ktoré smerujú do uzla u_x, je v oboch grafoch rovnaká. Označme znakom γ_i počet prvkov triedy $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

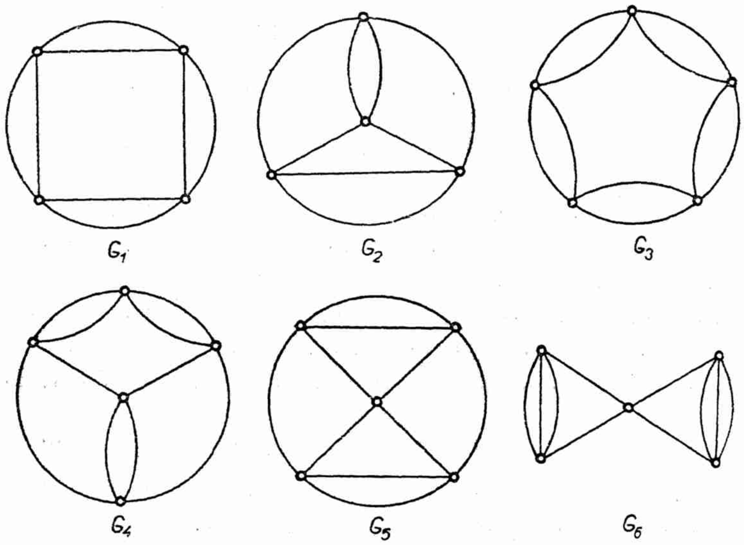
O čísle $\varrho(G_x(j))$ platí $\varrho(G_x(j)) = \sum_{i \in M_j} \gamma_i$, pričom M_j je množina tých indexov z $\{1, 2, \ldots, r\}$, pre ktoré má trieda $\mathfrak{G}_j$ túto vlastnosť: Z každej dvojice hrán rozkladu $R_x(y) \in \mathfrak{R}_x$ práve jedna hrana v ľubovoľnom grafe z $\mathfrak{G}_j$ smeruje do uzla u_x. Počet prvkov množiny M_j je zrejme práve 2^{s_x}, lebo z s_x dvojíc možno previesť výber po jednej hrane práve 2^{s_x} rôznymi spôsobmi. Na druhej strane ľubovoľný index $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ má túto vlastnosť: Index i patrí do práve $s_x!$ rôznych množín M_j (to vyplýva z toho, že pri danom rozklade množiny H_x na triedu hrán smerujúcich do uzla u_x resp. smerujúcich z uzla u_x možno previesť rozklad množiny H_x na triedy po dvoch hranách — tak, aby jedna hrana dvojice smerovala do uzla u_x a druhá hrana dvojice z uzla u_x — práve $s_x!$ rôznymi spôsobmi. Z uvedeného vyplýva ihneď toto:

$$\sum_{j=1}^{p} \varrho(G_x(j)) = s_x! \, \varrho(G) ,$$

čo bolo potrebné dokázať. Ak teda veta platí pre $\delta(G) \leqq k$, platí aj pre $\delta(G) = k + 1$, a pretože platí pro $\delta(G) = 0$, platí pre všetky prirodzené k. Tým je dôkaz vety vykonaný.

Poznámka 3. Vo vete 9 sme sa neobmedzili jen na grafy súvislé resp. len na grafy bez artikulácií, k čomu by nás skutočnosť, že máme už odvodené vety 1, 2, 3, oprávňovala. Význam týchto viet sa odvodením vety 9 nezmenšuje, lebo pri konkrétnom výpočte čísla $\varrho(G)$ dávajú uvedené vety možnosť postup výpočtu podstatne skrátiť.

Poznámka 4. Čísla $\varrho(G_1)$, $\varrho(G_2)$ môžu byť rôzne aj vtedy, keď eulerovské grafy G_1, G_2 sú oba súvislé pravidelné grafy toho istého (párneho) stupňa a majú rovnaký počet uzlov.



Obr. 2

Tak napr. o grafoch G_1, G_2 znázornených na obr. 2 platí: $\varrho(G_1) = 18$; $\varrho(G_2) = 16$, ačkoľvek oba tieto grafy sú súvislé pravidelné grafy štvrtého stupňa so štyrmi uzlami. Podobne je: $\varrho(G_3) = 34$; $\varrho(G_4) = 28$; $\varrho(G_5) = 26$; $\varrho(G_6) = 36$, ačkoľvek grafy G_3, G_4, G_5, G_6 sú všetky súvislé pravidelné grafy štvrtého stupňa s piatimi uzlami.

3

Položme si teraz túto otázku: Koľko rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov existuje v danom rovnovážne orientovanom grafe? Na túto otázku, ktorá — ako ukážeme — s predošlými otázkami úzko súvisí, odpovedá nasledujúca veta:

Veta 10. *Nech $\vec{G}$ je ľubovoľný rovnovážne orientovaný graf, ktorý vznikne orientáciou hrán istého eulerovského grafu G. Počet rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}$ rovná sa $\varrho(G) - 1$.*

Dôkaz. Nech $\mathfrak{S} = \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \ldots, \vec{G}_n\}$ je systém obsahujúci okrem všetkých rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}$ už len nulový graf $\vec{G}_1 = N$

a nech $\mathfrak{F} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_m\}$ je systém všetkých rovnovážne orientovaných grafov, ktoré vzniknú orientáciou hrán grafu G. Pre isté $x \in \{2, 3, \ldots, n\}$ platí $\vec{G}_x = G$. Podľa viet 4 a 5 možno každému grafu $\vec{G}_y \in \mathfrak{G}$ priradiť práve jeden graf $\in \mathfrak{F}$ takto: Grafu $\vec{G}_y$ priraďme ten graf $\in \mathfrak{F}$, ktorý vznikne z grafu $\vec{G}_x$, ak v ňom zmeníme orientáciu hrán patriacich do $\vec{G}_y$ a orientáciu ostatných jeho hrán ponecháme nezmenenú (grafu $\vec{G}_1 = N$ a len tomuto grafu odpovedá potom v tomto priradení graf $\vec{G}_x = \vec{G}_z \in \mathfrak{F}$). Obrátene: Ľubovoľnému grafu z $\mathfrak{F}$ možno priradiť práve jeden graf z $\mathfrak{G}$ takto: Grafu $\vec{F}_t \in \mathfrak{F}$ priradíme podgraf grafu $\vec{G}_x = \vec{F}_z$, ktorý pozostáva práve z tých hrán, ktoré majú rôznu orientáciu v grafoch $\vec{F}_t$, $\vec{F}_z$ a z tých uzlov, ktoré sú s takýmito hranami incidentné. Z toho vyplýva, že systémy $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ sú kvantitatívne ekvivalentné, čiže je $m = n$. Pretože do $\mathfrak{G}$ sme zahrnuli aj nulový graf a je $n = m = \varrho(G)$, počet nenulových rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}$ rovná sa $\varrho(G) - 1$. Dôkaz vety je vykonaný.

Poznámka 5. Ak by sme nulový graf N považovali za rovnovážne orientovaný podgraf ľubovoľného orientovaného grafu, potom by číslo $\varrho(G)$ udávalo priamo počet rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}$.

Rovnovážne orientované podgrafy môžu prirodzene existovať aj v takom orientovanom grafe, ktorý nie je rovnovážne orientovaný. Pri skúmaní takýchto orientovaných grafov môžu byť užitočné nasledujúce vety.

Veta 11. *Nech $\vec{G}$ je ľubovoľný taký orientovaný graf, v ktorom existujú aspoň dva rozne rovnovážne orientované podgrafy $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$. Označme znakom γ_1 (resp. γ_2) také ohodnotenie grafu $\vec{G}$, že platí $\gamma_1(\vec{G}) = \vec{G}_1$ (resp. $\gamma_2(\vec{G}) = \vec{G}_2$), a položme $\gamma_3 = \gamma_1^2 \cdot \gamma_2$; $\gamma_4 = \gamma_1 \cdot \gamma_2^2$. Platí: Grafy $\gamma_3(\vec{G})$, $\gamma_4(\vec{G})$ sú rovnovážne orientované grafy.*

Dôkaz. Nech h je ľubovoľná hrana z $\vec{G}$. Ak h nepatrí ani do $\vec{G}_1$ ani do $\vec{G}_2$, je $\gamma_1(h) = 0$, $\gamma_2(h) = 0$ a je tiež $\gamma_3(h) = \gamma_4(h) = 0$, tj. hrana h nepatrí ani do $\gamma_3(\vec{G})$ ani do $\gamma_4(\vec{G})$. Ak hrana h patrí do oboch grafov $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, potom je $\gamma_1(h) = \gamma_2(h)$, a pretože je nutne $\gamma_1^3(h) = 0$ pre ľubovoľné h, platí: $\gamma_3(h) = \gamma_4(h) = 0$; teda h aj v tomto prípade nepatrí ani do $\gamma_3(\vec{G})$ ani do $\gamma_4(\vec{G})$. Ak napokon h patrí do $\vec{G}_1$ a nepatrí do $\vec{G}_2$ (resp. ak h nepatrí do $\vec{G}_1$ a patrí do $\vec{G}_2$), potom je $\gamma_3(h) = -\gamma_1(h) \dotplus 0$; $\gamma_4(h) = \gamma_1(h) \dotplus 0$ (resp. $\gamma_3(h) = \gamma_1(h) \dotplus 0$; $\gamma_4(h) = -\gamma_1(h) \dotplus 0$). Pretože $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ sú podľa predpokladu dva rôzne podgrafy grafu $\vec{G}$, je aj graf $\gamma_3(\vec{G})$ aj graf $\gamma_4(\vec{G})$ nenulovým grafom a podľa predošlého obsahujú oba tieto grafy rovnaké prvky. Ľubovoľná ich hrana má však opačnú orientáciu v $\gamma_4(\vec{G})$ než v $\gamma_3(\vec{G})$. Ak preto vykonáme dôkaz, že $\gamma_3(\vec{G})$ je rovnovážne orientovaný graf, bude tým súčasne dokázané, že $\gamma_4(\vec{G})$ je rovnovážne orientovaný graf.

Vykonajme tento dôkaz: Nech u je ľubovoľný uzol z $\gamma_3(\vec{G})$. Označme znakom $\mu_1(u)$ (resp. $\mu_2(u)$ resp. $\mu_{1,2}(u)$) počet tých hrán z $\vec{G}$ smerujúcich do uzla u, ktoré patria do $\vec{G}_1$ a nepatria do $\vec{G}_2$ (resp. patria do $\vec{G}_2$ a nepatria do $\vec{G}_1$ resp.

patria aj do $\vec{G}_1$ aj do $\vec{G}_2$) a znakom $\nu_1(u)$ (resp. $\nu_2(u)$ resp. $\nu_{1,2}(u)$) označme obdobne počet hrán smerujúcich z uzla u. Pretože $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ sú podľa predpokladu rovnovážne orientované grafy, platí nutne

$$\mu_1(u) + \mu_{1,2}(u) = \nu_1(u) + \nu_{1,2}(u)\,, \quad \mu_2(u) + \mu_{1,2}(u) = \nu_2(u) + \nu_{1,2}(u)\,,$$

a teda

$$\mu_1(u) - \mu_2(u) = \nu_1(u) - \nu_2(u)\,.$$

V grafe $\gamma_3(\vec{G})$ smerujú do uzla u tie hrany a len tie hrany, ktoré v grafe $\vec{G}_1$ smerujú z uzla u a nepatria do $\vec{G}_2$, a tie hrany, ktoré v $\vec{G}_2$ smerujú do uzla u a nepatria do $\vec{G}_1$ (počet takých hrán, ktoré smerujú v $\gamma_3(\vec{G})$ do uzla u je spolu $\nu_1(u) + \mu_2(u)$ a z uzla u smerujú v grafe $\gamma_3(\vec{G})$ tie hrany a len tie hrany, ktoré v $\vec{G}_1$ smerujú do u a nepatria do $\vec{G}_2$ a tie hrany, ktoré v $\vec{G}_2$ smerujú z uzla u a nepatria do $\vec{G}_1$ (počet hrán smerujúcich v grafe $\gamma_3(\vec{G})$ z uzla u je teda $\mu_1(u) + {}$ $+ \nu_2(u)$)). Z uvedenej rovnice vyplýva ihneď, že u je rovnovážny uzol v grafe $\gamma_3(\vec{G})$. Pretože u bol ľubovoľný uzol grafu $\gamma_3(\vec{G})$, je tento graf (a tiež graf $\gamma_4(\vec{G})$) rovnovážne orientovaný graf. Dôkaz je vykonaný.

Veta 12. *Nech $\vec{G}_1$ je ľubovoľný orientovaný graf a nech $\vec{G}_0$ je ľubovoľný rovnovážne orientovaný podgraf grafu $\vec{G}_1$. Označme znakom $\vec{G}_2$ graf, ktorý vznikne z grafu $\vec{G}_1$, ak v ňom zmeníme orientáciu všetkých hrán z $\vec{G}_0$ v orientáciu opačnú a orientáciu ostatných hrán ponecháme bez zmeny. Platí: Počet rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}_2$ rovná sa počtu rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}_1$.*

Dôkaz. Nech $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p\}$ je množina všetkých tých ohodnotení grafu $\vec{G}_1$, ktoré prislúchajú jednotlivým rovnovážne orientovaným podgrafom grafu $\vec{G}_1$. Pre isté $x \in \{1, 2, \ldots, p\}$ platí $\gamma_x(\vec{G}_1) = \vec{G}_0$. Označme znakom γ_0 to ohodnotenie grafu $\vec{G}_1$, pri ktorom platí $\gamma_0(h) = 0$ pre všetky hrany z $\vec{G}_1$.

Tvrdím: Pre ľubovoľné $i \neq x$; $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ platí: Graf $\gamma_i\, \gamma_x^2(\vec{G}_1)$ je rovnovážne orientovaný podgraf grafu $\vec{G}_2$ (počet takýchto podgrafov je zrejme $p - 1$). Dokážeme to.

Že graf $\gamma_i\, \gamma_x^2(\vec{G}_1)$ je rovnovážne orientovaný, vyplýva z vety 11; treba už len dokázať, že uvažovaný graf je podgrafom grafu $\vec{G}_2$ resp. že ľubovoľná hrana z $\gamma_i\, \gamma_x^2(\vec{G}_1)$ má v tomto grafe takú istú orientáciu ako v grafe $\vec{G}_2$. Nech h je ľubovoľná hrana z $\gamma_i\, \gamma_x^2(\vec{G}_1)$. Sú len dve možnosti (pozri dôkaz predošlej vety): Buď h patrí do $\gamma_i(\vec{G}_1)$ a nepatrí do $\gamma_x(\vec{G}_1) = \vec{G}_0$, alebo h nepatrí do $\gamma_i(\vec{G}_1)$ a patrí do $\gamma_x(\vec{G}_1)$. V prvom prípade má h tú istú orientáciu v každom z týchto grafov $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\gamma_i\, \gamma_x^2(\vec{G}_1)$. V druhom prípade má h inú orientáciu v $\gamma_i\, \gamma_x^2(\vec{G}_1)$ než v grafe $\vec{G}_1$, a pretože h patrí do $\vec{G}_0$, má h inú orientáciu v grafe $\vec{G}_2$ než v grafe $\vec{G}_1$. Teda opäť h má rovnakú orientáciu v grafoch $\gamma_i\, \gamma_x^2(\vec{G}_1)$, $\vec{G}_2$. Z toho ihneď vyplýva, že $\gamma_i\, \gamma_x^2(\vec{G}_1)$ je podgrafom grafu $\vec{G}_2$. Obrátene zrejme platí: Ak $\vec{G}^*$ je ľubovoľný podgraf grafu $\vec{G}_2$ iný než $\gamma_x^2(\vec{G}_1)$, potom existuje práve jedno ohodnotenie γ_i v Γ také, že je $\vec{G}^* = \gamma_i\, \gamma_x^2(\vec{G}_1)$. Graf, ktorý vznikne z grafu $\gamma_x(\vec{G}_1) = \vec{G}_0$

zmenou orientácie všetkých jeho hrán, je identický s grafom $\gamma_0 \gamma_x^2(\vec{G}_1)$ a je rovnovážne orientovaný podgrafom grafu $\vec{G}_2$. Preto počet rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}_2$ rovná sa taktiež p, čo bolo potrebné dokázať.

Poznámka 6. Otázka koľko rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov existuje v ľubovoľnom orientovanom grafe $\vec{G}_1$ zostáva pravda naďalej otvorená. Veta 12 iba usnadňuje zistenie počtu rovnovážne orientovaných podgrafov v orientovanom grafe $\vec{G}_1$, ak poznáme tento počet aspoň v jednom takom orientovanom grade, ktorý možno z $\vec{G}_1$ utvoriť zmenou orientácie hrán ľubovoľného jeho rovnovážne orientovaného podgrafu.

4

Určenie počtu rovnovážne orientovaných podgrafov daného orientovaného grafu (ku ktorému sme si našli niektoré pomocné prostriedky) má — ako v ďalšom ukážeme — osobitný význam pri skúmaní otázky, koľko rôznych lineárnych faktorov existuje v danom párnom neorientovanom grafe G.[3])

O istej vlastnosti párneho grafu s lineárnym faktorom hovorí táto veta:

Lemma 4. *Nech G je ľubovoľný párny graf, v ktorom existuje aspoň jeden lineárny faktor L a nech rozklad $\mathfrak{R} = \{U_1, U_2\}$ je ľubovoľný taký rozklad jeho množiny uzlov na dve triedy, že ľubovoľná hrana z G spojuje uzly z rôznych tried, potom triedy U_1, U_2 majú rovnaký počet prvkov.*

Dôkaz. Ľubovoľná hrana z L je incidentná práve s jedným uzlom z U_1 a práve s jedným uzlom z U_2, a pretože ľubovoľný uzol z G je incidentný práve s jednou hranou z L, je platnosť lemmy zrejmá.

Veta 13. *Nech G je ľubovoľný párny graf, v ktorom existuje aspoň jeden lineárny faktor L, a nech $\mathfrak{R} = \{U_1, U_2\}$ je ľubovoľný taký rozklad množiny uzlov z G na dve triedy, že ľubovoľná hrana z G spojuje uzly z rôznych tried. Označme znakom $\vec{G}$ graf, ktorý vznikne z grafu G, ak jeho hrany orientujeme takto:*

(1) *ľubovoľná hrana z L smeruje z uzla triedy U_2 do uzla triedy U_1;*

(2) *ľubovoľná hrana nepatriaca do L smeruje v $\vec{G}$ z uzla triedy U_1 do uzla triedy U_2. Platí toto: Počet rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov grafu G rovná sa počtu rôznych lineárnych faktorov grafu G iných než L.*

Dôkaz. Pretože z ľubovoľného uzla z U_2 a tiež do ľubovoľného uzla z U_1 v grafe $\vec{G}$ smeruje práve jedna hrana, platí toto: Ľubovoľný rovnovážne orientovaný podgraf grafu $\vec{G}$ (ak taký existuje) je pravidelným grafom druhého stupňa a teda ľubovoľná komponenta takéhoto podgrafu je cyklus.

[3]) Definície pojmov: lineárny faktor grafu, párny graf, najde čitateľ napr. v citovanej Königovej knihe; v našej literatúre napr. v práci [3] alebo [4].

Tvrdím: Ak v G existuje aspoň jeden lineárny faktor L_1 iný než L, potom v $\vec{G}$ existuje cyklus, a obrátene: Ak v $\vec{G}$ existuje cyklus, potom v G existuje lineárny faktor jiný než L. Dokážme to.

Nech L_1 (kde $L_1 \neq L$) je ľubovoľný lineárny faktor grafu G. Kompozícia $L_1 \times L$ obsahuje aspoň jednu kružnicu K_1. Hrany kružnice K_1 (v ktorej sa striedajú hrany z L a hrany nepatriace do L_1, ak obiehame po jej hranách) sú v grafe $\vec{G}$ zrejme orientované kontinuitne, čiže podgraf $\vec{K}_1$ grafu $\vec{G}$ pozostávajúci z prvkov kružnice K_1 je cyklus. Obrátene: Nech $\vec{K}_2$ je ľubovoľný cyklus grafu $\vec{G}$. Kompozícia $K_2 \times L = L_2$ (kde K_2 je kružnica z G, ktorá pozostáva z prvkov cyklu $\vec{K}_2$ grafu $\vec{G}_2$) má zrejme túto vlastnosť: Ľubovoľný uzol z G je incidentný práve s jednou hranou z L_2; čiže L_2 je lineárny faktor grafu G a pritom iný než L. Dôkaz tvrdenia sme vykonali.

Z dokázaného ihneď vyplýva toto: Graf G má jediný lineárny faktor L práve vtedy, keď graf $\vec{G}$ neobsahuje žiadny cyklus.

Predpokladajme teraz, že okrem lineárneho faktora L existuje v grafe G ešte aspoň jeden lineárny faktor. Nech $L = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ je systém všetkých lineárnych faktorov grafu G iných než L. Označme znakom K_i kompozíciu $L \times L_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a znakom $\vec{K}_i$ podgraf grafu $\vec{G}$ obsahujúci prvky a len prvky kompozície K_i. Podľa už uvedeného je ľubovoľná komponenta grafu $\vec{K}_i$ cyklus a teda $\vec{K}_i$ je rovnovážne orientovaným podgrafom grafu $\vec{G}$. Pretože pre rôzne i, j, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, platí $\vec{K}_i \neq \vec{K}_j$, počet rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}$ je väčší, alebo sa rovná n. Z podaného dôkazu tvrdenia je však zrejmé aj toto: Ak $\vec{G}_x$ je ľubovoľný rovnovážne orientovaný podgraf grafu $\vec{G}$, všetky jeho komponenty sú potom cykly, a ak G_x je podgraf grafu G obsahujúci všetky prvky a len prvky z $\vec{G}_x$, potom kompozícia $G_x \times L$ je lineárny faktor grafu G. Preto systém $\{\vec{K}_1, \vec{K}_2, \ldots, \vec{K}_n\}$ obsahuje všetky rovnovážne orientované podgrafy grafu $\vec{G}$ a platnosť tvrdení vety je zrejmá.

LITERATÚRA

[1] *J. Sedláček:* O konečných orientovaných grafech, Časopis pro pěstování matematiky, *82*, 1957, 195—215.
[2] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.
[3] *A. Kotzig:* Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov, Bratislava, 1956.
[4] *A. Kotzig:* O istých rozkladoch konečných grafov, Mat. a fyz. čas. SAV, *5*, 1955.

Резюме

ОБ УРАВНОВЕШЕННО ОРИЕНТИРОВАННЫХ КОНЕЧНЫХ ГРАФАХ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава

(Поступило в редакцию 13/XI 1957 г.)

В статье исследуются некоторые свойства т. наз. уравновешенно ориентированных графов (граф, не содержащий изолированных вершин, называется уравновешенно ориентированным, если каждая его вершина является начальной и концевой вершиной для одного и того же количества ребер). При этом автор исходит из известных теорем о разложениях этих графов на циклы и о некоторых свойствах графов эйлеровского типа. Доказываются некоторые теоремы, позволяющие определить число уравновешенно ориентированных подграфов данного ориентированного графа. Наконец показано, как полученные результаты могут быть использованы для решения задачи: определить число различных факторов первой степени в данном четном графе.

Zusammenfassung

ÜBER DIE IM GLEICHGEWICHT GERICHTETEN ENDLICHEN GRAPHEN

ANTON KOTZIG, Bratislava

(Eingelangt am 13. November 1957)

In der Arbeit studiert man einige Eigenschaften der sogenannten im Gleichgewicht gerichteten Graphen (ein Graph — der keine isolierten Knotenpunkte besitzt — wird im Gleichgewicht gerichteter Graph genannt, wenn jeder sein Knotenpunkt ebensooft als Anfangspunkt wie als Schlusspunkt einer Kante erscheint). Dabei wird an bekannte Sätze über die Zerlegungen dieser Graphen in Zyklen und über einige Eigenschaften der Eulerschen Graphen angeknüpft. Man beweist einige Sätze, die die Berechnung der Anzahl von den im Gleichgewicht gerichteten Teilgraphen des gegebenen gerichteten Graphen ermöglichen oder erleichtern. Schliesslich zeigt man auf die Benützung der gewonnenen Resultate bei der Lösung der Aufgabe die Anzahl von verschiedenen Faktoren ersten Grades in dem gegebenen paaren Graphen zu bestimmen.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

POZNÁMKA O TENSORU TORSE TROJDIMENSIONÁLNÍHO PROSTORU S EUKLEIDOVSKOU KONEXÍ

ALOIS ŠVEC, Praha

(Došlo dne 19. listopadu 1957) DT: 513.723.6

V práci je studována plocha trojdimensionálního prostoru s eukleidovskou konexí. Je nalezena modifikace věty, podle níž na ploše eukleidovského prostoru jsou hlavní křivky vyťaty rozvinutelnými plochami kongruence normál, čímž je nalezen význam tensoru torse.

1. Buď dán prostor s eukleidovskou konexí E_3 základními rovnicemi (ve smyslu Cartanově)

$$\mathrm{d}M = \omega^i I_i\,,\quad \mathrm{d}I_i = \omega_i^j I_j\,, \tag{1}$$

$$\omega^i = \Gamma_j^i\,\mathrm{d}u^j\,,\quad \omega_i^j = \Gamma_{ki}^j\,\mathrm{d}u^k\,,\quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0\,, \tag{2}$$

kde $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$. Rovnice struktury píši ve tvaru

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}\omega^i] &= [\omega^j\omega_j^i] + S_{rs}^i[\omega^r\omega^s]\,, \quad S_{(rs)}^i = 0\,,\\ [\mathrm{d}\omega_i^j] &= [\omega_i^k\omega_k^j] + \tfrac{1}{2}R_{rsi}^j[\omega^r\omega^s]\,, \quad R_{(rs)i}^j = 0\,, \end{aligned} \tag{3}$$

kde S_{rs}^i resp. R_{rsi}^j je tensor torse resp. křivosti. V prostoru E_3 uvažuji plo chu π jež je dána rovnicí

$$\omega^3 = 0\,. \tag{4}$$

Vnějším diferencováním vychází

$$[\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] + 2S_{12}^3[\omega^1\omega^2] = 0\,, \tag{5}$$

Cartanovo lemma dává

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + (b - S_{12}^3)\,\omega^2\,,\quad \omega_2^3 = (b + S_{12}^3)\,\omega^1 + c\omega^2\,. \tag{6}$$

Dalším vnějším diferencováním (5) vychází

$$[\mathrm{d}S_{12}^3\,\omega^1\omega^2] = 0\,, \tag{7}$$

takže S_{12}^3 je invariant, v dalším bude udán jeho geometrický význam. Vnějším diferencováním (6) dostávám konečně

$$\begin{aligned} [(\mathrm{d}a - 2b\omega_1^2)\,\omega^1] + [(\mathrm{d}b - a\omega_2^1 - c\omega_1^2)\,\omega^2] + (.)[\omega^1\omega^2] = 0\,,\\ [(\mathrm{d}b - a\omega_2^1 - c\omega_1^2)\,\omega^1] + [(\mathrm{d}c - 2b\omega_2^1)\,\omega^2] + (.)[\omega^1\omega^2] = 0\,, \end{aligned} \tag{8}$$

čili

$$\delta a = 2be_1^2\,, \quad \delta b = ae_2^1 + ce_1^2\,, \quad \delta c = 2be_2^1\,. \tag{9}$$

Snadno se verifikuje, že *na π jsou invariantní formy*

$$\varphi_1 = \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}A)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\,, \tag{10}$$

$$\varphi_2 = I_3\,\mathrm{d}^2A = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 = a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2\,, \tag{11}$$

$$\varphi_3 = \mathrm{d}I_3^2 = (\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2\,. \tag{12}$$

Forma (10) je *metrická forma plochy*; geometrická interpretace formy φ_2 je táž, jako pro plochu v eukleidovském prostoru: Na π buď dána křivka γ, nechť γ' je její rozvinutí do lokálního prostoru bodu $M_0 \in \gamma$, pak průmět jejího vektoru křivosti $k\nu = \dfrac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}s^2}$ do normály plochy má délku $\varphi_2 : \varphi_1$. Složitější je interpretace formy φ_3. Buď γ křivka plochy π bodem M_0, daná rovnicemi $u^i = u^i(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$. Vektor $I_3(t)$ lokálního prostoru v bodě M_0 nechť vznikne přenosem jednotkového vektoru $I_3(t)$ normály plochy v bodě $M(u^i(t))$ do bodu M_0 podél oblouku křivky γ mezi t_0 a t; křivku $N = M_0 + I_3(t)$ nazvu *sférickým obrazem* γ_s křivky γ. Její délka je právě $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi_3}$.

2. Shodně s případem plochy v eukleidovském prostoru definuji *normální křivost* křivky na π formulí

$$k_n = -\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\,. \tag{13}$$

Hlavní křivky, tj. křivky s extremální hlavní křivostí, *mají rovnici*

$$b(\omega^1)^2 + (c - a)\,\omega^1\omega^2 - b(\omega^2)^2 = 0\,. \tag{14}$$

V každém bodě plochy jsou buď dva kolmé hlavní směry (reálné) nebo každý směr je hlavní (tyto plochy vyloučím z dalšího studia). Repery specialisuji tak, že hlavní křivky jsou $\omega^1\omega^2 = 0$, pak $b = 0$ a normální křivost křivky $\omega^1 = 0$ resp. $\omega^2 = 0$ je ${}^2k = -c$, resp. ${}^1k = -a$. *Eulerova křivost* plochy π je $K = {}^1k\,{}^2k = ac$, *střední křivost* $H = {}^1k + {}^2k = -(a + c)$, známý vztah mezi třemi základními formami plochy v eukleidovském prostoru je pak nahrazen rovnicí

$$(K - (S_{12}^3)^2)\varphi_1 + H\varphi_2 + \varphi_3 - 2S_{12}^3({}^1k - {}^2k)\,\omega^1\omega^2 = 0\,. \tag{15}$$

Na ploše v eukleidovském prostoru jsou hlavní křivky vyťaty rozvinutelnými plochami kongruence normál, zjistím modifikaci této věty v uvažovaném obecnějším případě. Řeknu, že normály plochy π podél její křivky γ tvoří rozvinutelnou plochu, jestliže platí následující: Na γ buď zvolen bod M_0, normála n v bodě $M \in \gamma$ buď pomocí dané konexe přenesena po γ do lokálního prostoru bodu M_0 do přímky n', souhrn přímek n' je pak rozvinutelná plocha; zřejmě nezáleží na volbě bodu M_0 na γ. Tvoří-li normály podél γ rozvinutelnou plochu, pak zřejmě na každé existuje bod $F = M + zI_3$ tak, že rozvinutí křivky (F) do lokálního prostoru libovolného bodu $M_0 \in \gamma$ je bod nebo křivka, jejíž tečna v bodě $F_0 = M_0 + z_0(I_3)_0$ prochází bodem M_0; musí tedy býti $\mathrm{d}F \equiv 0 \pmod{I_3}$, kde se diferencuje podél γ. Je

$$\mathrm{d}F \equiv \Omega^i I_i = (\omega^1 + z\omega_3^1)\, I_1 + (\omega^2 + z\omega_3^2)\, I_2 + \mathrm{d}z\, I_3\,.$$

Z $\Omega^1 = \Omega^2 = 0$ vychází vyloučením z rovnice sítě, v níž rozvinutelné plochy kongruence normál protínají plochu:

$$\omega^1\omega_2^3 - \omega^2\omega_1^3 \equiv S_{12}^3(\omega^1)^2 - ({}^2k - {}^1k)\,\omega^1\omega^2 + S_{12}^3(\omega^2)^2 = 0\,. \tag{16}$$

Pro úhel α těchto tzv. *torsálních křivek* se snadno nalezne

$$S_{12}^3 = \tfrac{1}{2}|{}^1k - {}^2k|\cos\alpha\,, \tag{17}$$

což dává geometrickou interpretaci složky tensoru torse S_{12}^3; S_{12}^3 nazývám *torsí* plochy π.

Buď nyní obecně dána plocha, jejíž tečná rovina je určena vektory $J_a^* = \alpha_a^j I_j$, kde $a = 1, 2$ a J_1^*, J_2^* jsou jednotkové navzájem kolmé vektory; vypočítám její torsi. Provedu-li změnu lokálních basí prostoru E_3 tak, že nové vektory base budou $J_i = \alpha_i^j I_j$ a vektory J_1, J_2 se na uvažované ploše shodují s uvažovanými vektory J_1^*, J_2^*, bude torse nutně $\overline{S}_{11}^3$, kde $\overline{S}_{jk}^i$ je tensor torse, jehož složky jsou počítány při lokálních basích J_i. Buď $\|\tilde{\alpha}_i^j\|$ matice inversní k orthogonální matici $\|\alpha_i^j\|$, pak je znám transformační zákon pro složky tensoru torse

$$\overline{S}_{jk}^i = \tilde{\alpha}_m^i \alpha_j^n \alpha_k^p S_{np}^m\,, \tag{18}$$

takže *torse plochy* je

$$\overline{S}_{12}^3 = \tilde{\alpha}_m^3 \alpha_1^n \alpha_2^p \alpha S_{np}^m\,. \tag{19}$$

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ О ТЕНЗОРЕ КРУЧЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА С ЕВКЛИДОВОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

(Поступило в редакцию 19/XI 1957 г.)

Пусть в трехмерном пространстве с евклидовой связностью (1)—(3) дана поверхность (4)—(6). На этой поверхности геометрически интерпретируются три основные формы (10)—(12), связанные между собою соотношением (15). Составляющая тензора кручения S_{12}^3 (т. наз. кручение поверхности) является инвариантом и дана геометрически уравнением (17), где α есть

угол между кривыми (16), в которых поверхность пересекается с развертывающимися поверхностями конгруэнции нормалей, а ^{i}k суть главные кривизны. Кривизна поверхности, касательная плоскость которой определяется векторами $J_a^* = \alpha_a^j I_j$, дана соотношением (19).

Résumé

REMARQUE SUR LE TENSEUR DE TORSION DE L'ESPACE À CONNEXION EUCLIDIENNE À TROIS DIMENSIONS

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 19 novembre 1957)

Soit donnée une surface (4) + (6) plongée dans l'espace à connexion euclidienne (1) — (3). J'ai trouvé l'interprétation géométrique des formes fondamentales (10) — (12) liées par la relation (15). La composante S_{12}^3 du tenseur de torsion est l'invariant dont l'interprétation géométrique est donnée par (17) où α est l'angle des courbes (16) et ^{i}k sont les courbures principales. La torsion de la surface au plan tangent donné par les vecteurs $J_a^* = \alpha_a^j I_j$ est (19).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

POZNÁMKA K PROJEKTIVNÍ DEFORMACI ROZVINUTELNÝCH NADPLOCH

ALOIS ŠVEC, Praha

(Došlo dne 19. listopadu 1957) DT: 513.734.3

Určuje se geometrický význam Cartanem udaných rovnic pro projektivní deformaci rozvinutelných nadploch v S_4.

Každé dvě rozvinutelné nadplochy, vytvořené oskulačními rovinami křivek v projektivním čtyřdimensionálním prostoru, jsou v projektivní deformaci 2. řádu, při čemž tato deformace závisí na dvou funkcích jedné proměnné. É. Cartan ve své práci *Sur la déformation projective des surfaces* (Annales de l'École Normal Supérieure, III ser., tom *37*, 1920) určil (bez důkazu) tuto korespondenci efektivně rovnicemi (118), jež přepíši následujícím způsobem:

Předpokládejme, že hrana vratu nadplochy (S) je $H(t)$ a souřadnice jsou tak normovány, že $[HH'H''H'''H'''']=1$, nadplocha je vytvořena body

$$A = H''(t) + u\,H'(t) + v\,H(t)\,; \tag{1}$$

nadplocha (Σ) buď podobně vytvořena body

$$B = K^{\cdot\cdot}(\bar{t}) + \bar{u}\,K^{\cdot}(\bar{t}) + \bar{v}\,K(\bar{t})\,, \tag{2}$$

kde $K(\bar{t})$ je její hrana vratu a $[KK^{\cdot}K^{\cdot\cdot}K^{\cdot\cdot\cdot}K^{\cdot\cdot\cdot\cdot}]=1$. Při tom značím důsledně čárkou derivaci podle t a tečkou derivaci podle $\bar{t}$. Cartanem stanovené rovnice deformace jsou potom

$$\begin{gathered}\bar{t} = f(t)\,,\\ \bar{u} = \frac{u}{f'(t)} + \varphi(t)\,,\\ \bar{v} = \frac{v}{f'^2(t)} + \frac{1}{2}u\left[\frac{\varphi(t)}{f'(t)} - \frac{f''(t)}{f'^3(t)}\right] + \frac{1}{4}\varphi^2(t) + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(t)}{f'(t)} - \frac{f'''(t)}{2f'^3(t)} + \frac{3f''^2(t)}{4f'^4(t)}\,.\end{gathered} \tag{3}$$

Nyní ukáži, jak lze tuto korespondenci geometricky interpretovati. *Především si libovolně* (ovšem až na určité podmínky regularity) *zvolím korespondenci mezi hranami vratu obou nadploch a předepíši, aby určité křivce γ na rozvinutelné přímkové ploše s hranou vratu $H(t)$ odpovídala jistá křivka $\bar{\gamma}$ na rozvinutelné přímkové ploše s hranou vratu $K(\bar{t})$*. Protože korespondence mezi sobě odpovídajícími rovinami obou nadploch je nutně projektivita, stačí k dokonalému geometrickému popisu (3) konstruovati tuto projektivitu.

Označím E_2 element 2. řádu hrany vratu nadplochy (S), ležící v určité její rovině, p buď tečna křivky γ, ležící v téže rovině. Podobný význam nechť mají $\bar{E}_2$ a $\bar{p}$ v odpovídající rovině nadplochy (Σ). Nyní existuje jediná projektivita mezi sobě odpovídajícími rovinami, v níž element E_2 přejde v $\bar{E}_2$ a p v $\bar{p}$. Projektivní deformace je pak souhrnem těchto projektivit.

Dokáži tuto větu a tím i Cartanovy rovnice. Korespondence mezi hranami vratu buď (3_1). Nejobecnější kolineace, převádějící v sebe odpovídající si roviny a v nich body hran vratu a jejich tečny, je

$$TH = K\,, \quad TH' = aK + bK^{\cdot}\,, \quad TH'' = cK + dK^{\cdot} + eK^{\cdot\cdot}\,. \tag{4}$$

TE_2 a $\bar{E}_2$ mají analytický styk 2. řádu právě tehdy, když existuje λ, μ tak, že

$$TH = K\,, \quad TH' = K' + \lambda K\,, \quad TH'' = K'' + 2\lambda K' + \mu K\,. \tag{5}$$

Z $K^{\cdot} = f'^{-1}K'\,, \quad K^{\cdot\cdot} = -f''f'^{-3}K' + f'^{-2}K''$ a (5) plyne

$$TH = K\,, \quad TH' = aK + f'K^{\cdot}\,, \quad TH'' = cK + (f'' + 2af')\,K^{\cdot} + f'^2K^{\cdot\cdot}\,. \tag{6}$$

Za křivku γ zvolím nyní křivku $H'(t)$ a za $\bar{\gamma}$ křivku

$$\frac{1}{2}\left(\varphi f' - \frac{f''}{f'}\right) K + f'K^{\cdot}\,, \tag{7}$$

kde $\varphi(t)$ je libovolná funkce. Snadno se zjistí, že kolineace (6) převádí v sebe tečny křivek γ a $\bar{\gamma}$ právě tehdy, když

$$c = \frac{1}{4}\varphi^2 f'^2 + \frac{1}{2}\varphi' f' - \frac{1}{2}\frac{f'''}{f'} + \frac{3}{4}\frac{f''^2}{f'^2}\,. \tag{8}$$

Píši-li nyní $T(H'' + uH' + vH) = f'^3(K^{\cdot\cdot} + \bar{u}K^{\cdot} + \bar{v}K)$, dostanu srovnáním vztahy $(3_{2,3})$.

Vhodnějším analytickým vyjádřením křivky $\bar{\gamma}$ by se Cartanovy rovnice zjednodušily.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ К ПРОЕКТИВНОМУ ИЗГИБАНИЮ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

АЛОИС ШВЕЦ, (Alois Švec), Прага

(Поступило в редакцию 19/XI 1957 г.)

Э. Картан (Annales l'Éc. N. Sup., *37*, 1920) ввел проективное изгибание двух развертывающихся гиперповерхностей (1) и (2) в S_4 при помощи уравнений (3). В настоящей статье указано геометрическое построение

этого изгибания. Возьмем какое-либо соответствие между кривыми $H(t)$ и $K(\bar{t})$; пусть E_2 и $\bar{E}_2$ — соответственно элементы второго порядка кривых $H(t)$ и $K(\bar{t})$ в соответствующих друг другу плоскостях. На развертывающейся поверхности с ребром возврата $H(t)$ возьмем кривую γ; пусть этой кривой соответствует кривая $\bar{\gamma}$ на развертывающейся поверхности с ребром возврата $K(\bar{t})$; пусть p и $\bar{p}$ — касательные к кривым γ и $\bar{\gamma}$ в соответственных точках. Существует единственное проективное соответствие между соответствующими друг другу плоскостями, при котором E_2 переходит в $\bar{E}_2$, а p в $\bar{p}$. Тогда проективное изгибание является совокупностью этих проективных соответствий.

Résumé

REMARQUE SUR LA DÉFORMATION PROJECTIVE DES HYPERSURFACES DÉVELOPPABLES

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 19 novembre 1957)

É. Cartan (Annales de l'Éc. N. Sup., *37*, 1920) a trouvé les équations (3) qui donnent la déformation projective d'ordre 2 la plus générale des hypersurfaces développables plongées dans S_4. J'ai trouvé l'interprétation géométrique: Soit choisie une correspondance entre les courbes $H(t)$ et $K(\bar{t})$, E_2 et $\bar{E}_2$ soient les élements correspondants d'ordre 2 des courbes $H(t)$ et $K(\bar{t})$. Sur la surface développable avec l'arrête de rebroussement $H(t)$ soit choisie une courbe γ et soit $\bar{\gamma}$ la courbe correspondante de la surface développable avec l'arrête de rebroussement $K(\bar{t})$; p et $\bar{p}$ soient les tangentes des courbes γ et $\bar{\gamma}$ aux points correspondants. Il existe une seule homographie entre les plans correspondants qui transforme E_2 en $\bar{E}_2$ et p en $\bar{p}$. La déformation projective est l'ensemble des homographies considérées.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

KONVEXE KETTEN IN l-GRUPPEN

JÁN JAKUBÍK, Košice

(Eingelangt am 22. November 1957) DT: 519.4:519.5

Es sei R eine konvexe und maximale Kette in einer l-Gruppe G. In dieser Arbeit untersuchen wir die gruppentheoretischen Eigenschaften der Menge R.

G sei eine l-Gruppe (siehe [1], Kap. XIV). Dann hat G gewisse verbandstheoretische Eigenschaften (die sich nur auf die Operationen $\cap$, $\cup$ beziehen) und gewisse gruppentheoretische Eigenschaften. Es ist bekannt, dass aus verbandstheoretischen Eigenschaften wichtige gruppentheoretische Eigenschaften folgen können. (Z. B.: Ist G ein relativ vollständiger Verband, dann ist G eine kommutative Gruppe.[1]))

In dieser Arbeit wollen wir folgende Frage untersuchen: Es sei R eine konvexe und maximale Kette in einer l-Gruppe G. Welche Gruppeneigenschaften hat dann die Menge R? Die Antwort ist in Satz 2 gegeben.

Wir erwähnen zuerst einige Grundbegriffe und Bezeichnungen (s. [1]). Es sei G eine Menge. Setzen wir voraus, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. G ist eine Gruppe (die Gruppenoperation und das Einselement der Gruppe G bezeichnen wir — auch in dem nicht-kommutativen Fall — mit den Symbolen $+$, 0),
2. G ist ein Verband (die verbandstheoretischen Operationen und die Relation der teilweisen Ordnung bezeichnen wir $\cap$, $\cup$, $\leqq$),
3. für beliebige Elemente $x, y, a, b \in G$ gilt

$$x \leqq y \Rightarrow a + x + b \leqq a + y + b\,.$$

Dann nennen wir G eine l-Gruppe.

(Wenn wir anstatt der Bedingung 2 die schwächere Bedingung

2'. G ist eine teilweise geordnete Menge (die Relation der teilweisen Ordnung bezeichnen wir mit $\leqq$) postulieren und wenn wir die Bedingungen 1, 3 der vorigen Definition in Gültigkeit lassen, so nennen wir G eine teilweise geordnete Gruppe.)

[1]) Diesen Satz hat Iwasawa bewiesen (Jap. Jour. Math. *18* (1943)). Siehe auch [1], S. 234.

Im weiteren Text bedeutet G immer eine l-Gruppe, die mehr als ein Element besitzt; kleine Buchstaben bezeichnen Elemente aus G.

In [1] sind folgende Behauptungen bewiesen: G ist ein distributiver Verband. Wenn $x \cap y = 0$, dann ist $x + y = x \cup y$. Es gilt

$$a + (x \cap y) + b = (a + x + b) \cap (a + y + b)$$

und dual.

Wenn die Elemente x, y unvergleichbar sind (d. h. x non $\leqq y$, y non $\leqq x$), dann schreiben wir $x \parallel y$.

Eine nichtleere Untermenge $R \subset G$ ist eine konvexe Kette in G, wenn die folgenden Bedingungen erfült sind:

a) jede zwei Elemente aus R sind vergleichbar,

b) wenn $x, y \in R$, $x < z < y$, dann ist $z \in R$.

Für jede Untermenge $A \subset G$ bezeichnen wir mit A^+ die Menge aller $x \in A$, $x \geqq 0$ und mit $-A$ die Menge aller Elemente $-x$ (wobei $x \in A$).

Es sei R_1 eine konvexe und von oben nicht begrenzte Kette in G, und es sei 0 das kleinste Element in R_1. Dann gelten die Behauptungen 1—5:

1. *Wenn $x, y \in R_1$, $x \leqq y$, dann ist $y - x \in R_1$, $-x + y \in R_1$.*

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt $0 \leqq y - x \leqq y$, und daher $y - x \in R_1$. Analog beweist man den zweiten Teil der Behauptung.

2. *Wenn $x, y \in R_1$ ist, dann ist $x + y \in R_1$.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass $x + y \bar{\in} R_1$. Da die Kette R_1 von oben nicht begrenzt ist, existiert $z \in R_1$, z non $\leqq x + y$. Es ist klar, dass $x + y \geqq 0$; nach der Voraussetzung über die Konvexität der Kette R_1 kann also die Beziehung $z \geqq x + y$ nicht gelten, und daher ist

$$z \parallel x + y\,. \tag{1}$$

Offensichtlich ist $z \geqq y$, und demnach wegen 1 $z - y \in R_1$. Aus (1) ergibt sich $z - y \parallel x$, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind.

3. *Bezeichnen wir $R = R_1 \cup (-R_1)$. Dann ist R eine konvexe Kette in G.*

Beweis. Offensichtlich ist R eine Kette. Setzen wir voraus, dass $x, y \in R$, $x < a < y$, $a \bar{\in} R$. Dann wäre $x < 0 < y$ und gleichzeitig

$$0 \parallel a\,. \tag{2}$$

Bezeichnen wir $(-x) \cup y = z$. Aus (2) folgt $-z < a < z$,[2])

$$0 < a + z < 2z\,. \tag{3}$$

Da $z \in R_1$, gilt nach 2 $2z \in R_1$, also nach (3) $a + z \in R_1$. Aus der Beziehung (2) ergibt sich aber $z \parallel a + z$, was ein Widerspruch ist.

In den Absätzen 4, 5 verwenden wir dieselbe Bezeichnungen wie in 3.

[2]) Die Ungleichung auf der linken Seite folgt aus $-(a \cup b) = (-a) \cap (-b)$. Siehe [1], S. 215.

4. *Wenn $x, y \in R_1$, dann ist $x - y \in R$, $-y + x \in R$.*

Beweis. Da $-y \leqq x - y \leqq x$ ist, gilt nach 3 $x - y \in R$. Analog kann man die zweite Behauptung beweisen.

5. *Die Menge R ist eine Untergruppe der Gruppe G.*

Beweis. Im Hinblick auf die Konstruktion der Menge R genügt es zu zeigen: Wenn $u, v \in R$ ist, dann ist $u + v \in R$. Wenn $u, v \in R_1$ oder $u, v \in R_2$ ist, gilt dies nach 2; wenn das eine der Elemente u, v zu R_1 und das andere zu R_2 gehört, gilt die Behauptung nach 4.

6. *Es seien R_1, P_1 zwei verschiedene konvexe von oben nicht begrenzte Ketten in G und es sei 0 das kleinste Element in der Kette R_1 und in der Kette P_1. Dann gilt für beliebige Elemente $x \in R_1$, $y \in P_1$ die Beziehung $x \cap y = 0$.*

Beweis. Setzen wir voraus, es existieren Elemente $r \in R_1$, $p \in P_1$, für welche die Beziehung $r \cap p = z > 0$ gilt. Es sei R_1' (P_1') die Menge aller $x \in R_1$ ($y \in P_1$), für welche $x > z$ ($y > z$). R_1' und P_1' sind konvexe von oben nicht begrenzte Ketten. Man überzeugt sich leicht, dass keine von den Beziehungen $R_1' \subset P_1'$, $P_1' \subset R_1'$ gelten kann, und daher gibt es Elemente $r_1 \in R_1'$, $p_1 \in P_1'$, wobei r_1 nicht zu P_1' und p_1 nicht zu R_1' gehört. Die Elemente r_1, p_1 müssen dann unvergleichbar sein. Bezeichnen wir $z' = r_1 \cap p_1$, $r' = r_1 - z'$, $p' = p_1 - z'$. Da $0 < z' < r_1$, $z' < p_1$ ist, gilt $0 < r' < r_1$, $0 < p' < p_1$, und weiter

$$r' \cap p' = (r_1 - z') \cap (p_1 - z') = (r_1 \cap p_1) - z' = 0\,. \tag{4}$$

Wenn $r' \geqq z$, $p' \geqq z$ wäre, könnte die Gleichung (4) nicht erfüllt sein. Wenn $r' < z$ oder $p' < z$ ist, dann sind die Elemente r', p' vergleichbar und damit $r' \cap p' = \min(r', p') > 0$, was ein Widerspruch mit der Gleichung (4) ist.

7. Wir wollen eine Kette R aus G maximal (in G) nennen, wenn sie keine echte Untermenge einer Kette $R' \subset G$ ist. Aus dem Auswahlaxiom folgt, dass eine maximale Kette in G von oben und von unten nicht begrenzt ist (da G (siehe [1], Kap. XIV) kein grösstes und kein kleinstes Element enthält).

R sei eine maximale und konvexe Kette in G, $0 \in R$. Dann ist $R = R^+ \cup (-R^+)$.

Beweis. Bezeichnen wir $R^+ = R_1$, $-R^- = R_2$. Es genügt zu zeigen, dass $R_1 = R_2$ ist. Setzen wir voraus, es wäre $R_1 \neq R_2$. Offensichtlich sind R_1, R_2 konvexe und von oben nicht begrenzte Ketten in G mit dem kleinsten Element 0 und daher ist wegen 6 für beliebige Elemente $x \in R_1$, $y \in R_2$ die Gleichung $x \cap y = 0$ erfüllt. Demnach enthalten auch die Ketten $-R_1$, $-R_2$ ein einziges gemeinsames Element, und zwar 0. Wählen wir Elemente $r \in R_1$, $p \in -R_2$, $p < 0 < r$. Bezeichnen wir jetzt $z = p + r$. Es gilt $p < z < r$, und daher $z \in R$, d. h. $z \in R_1$ oder $z \in -R_2$. Wenn $z \in R_1$, dann ist nach 1 $r - z \in R_1$. Da $r - z = -p$ ist, ist das ein Widerspruch zu der Voraussetzung $-p \in R_2$. Wenn $z \in -R_2$ ist, so ist nach 5 $-z + p \in R_2 \cup (-R_2)$. Da $-z + p = -r$ ist, sind wir zu einem Widerspruch zu der Voraussetzung $r \in R_1$, $-r \in -R_1$ gelangt.

8. *R sei eine maximale und konvexe Kette in G, $0 \in R$. Dann ist die Menge R eine Untergruppe in G.*

Der Beweis folgt aus 5 und 7.

Wir bezeichnen weiter mit R eine (feste) maximale und konvexe Kette in G, $0 \in R$.

9. Jedem Element $x \in G^+$ ordnen wir ein Element $x_1 \in R^+$ in der folgenden Weise zu:

a) Wenn $x \in R^+$ ist, setzen wir $x_1 = x$.

b) Es sei $x \bar{\in} R^+$. Dann kann das Element x nicht mit allen Elementen der Kette R^+ vergleichbar sein, also existiert $r_0 \in R^+$, $x \parallel r_0$. Wir setzen $x_1 = r_0 \cap x$.

Für jedes Element $r \in R^+$, $r > x_1$ gilt $r \cap x = x_1$. (Für $r \in \langle x_1, x_0 \rangle$ ist das klar. Es sei $r > r_0$, $r \cap x = x'$. Dann ist $x' \geqq x_1$; der Fall $x' \geqq r_0$ ist aber ausgeschlossen, denn dann wäre $x \geqq r_0$, und der Fall $x_1 < x' < r_0$ ist auch ausgeschlossen, denn es wäre $r_0 \cap x = x'$. Demnach muss die Gleichung $x' = x_1$ gelten.) Daraus folgt, dass das Element x_1 nur von x (und nicht von r_0) abhängt. Aus dem Verlauf der Überlegung folgt weiter

$$x_1 = \sup r(r \in R^+, r \leqq x) . \tag{5}$$

10. *Im folgenden Text hat das Symbol x_1 (für $x \in G^+$) dieselbe Bedeutung wie in 9. Bezeichnen wir mit x_2 das Element, für welches die Gleichung $x = x_1 + x_2$ gilt. Dann ist $x_1 \cap x_2 = 0$.*

Beweis. Bezeichnen wir $x_1 \cap x_2 = u$; offensichtlich ist $u \in R^+$. Dann gilt für ein bestimmtes Element $k \geqq 0$ die Gleichung $x_2 = u + k$, $x = (x_1 + u) + k$. Nach 2 ist $x_1 + u \in R^+$ und daher gilt $x_1 \leqq x_1 + u \leqq x$. Wegen (5) ist dann $u = 0$.

Aus der im Absatz 9 gemachten Überlegung folgt jetzt: Für jedes $r \in R^+$ gilt $r \cap x_2 = 0$.

11. Im folgenden Text hat das Symbol x_2 dieselbe Bedeutung wie in 10. Es sei Q die Menge aller x_2 ($x \in G^+$). Nach 10 ist $Q \subset G^+$.

Wenn sich das Element $x \in G^+$ in der Form $x = y + z$, $y \in R^+$, $z \in Q$ darstellen lässt, dann ist $y = x_1$, $z = x_2$.

Beweis. Aus dem letzten Satz des Absatzes 10 folgt, dass der Durchschnitt eines beliebigen Elementes der Menge $M_1 = \{x_1, y\}$ mit einem beliebigen Element der Menge $M_2 = \{x_2, z\}$ (die Möglichkeit $x_1 = y$, $x_2 = z$ ist nicht ausgeschlossen) gleich 0 ist, also gilt auch $(x_1 \cup y) \cap (x_2 \cup z) = 0$. Daher ergibt sich

$$x = x \cup x = (x_1 + x_2) \cup (y + z) = (x_1 \cup x_2) \cup (y \cup z) =$$
$$= (x_1 \cup y) \cup (x_2 \cup z) = (x_1 \cup y) + (x_2 \cup z) .$$

Durch Vergleichung dieses Ergebnisses mit den Gleichungen $x = x_1 + x_2 = y + z$ folgt offensichtlich $x_1 = y$, $x_2 = z$. (Wäre z. B. $x_1 \neq y$, dann müsste $x_1 \cup y > x_1$ oder $x_1 \cup y > y$ gelten, und damit $x > x$ sein.)

12. *Es gilt $z \in Q$ dann und nur dann, wenn für ein Element $r_0 \in R$, $r_0 > 0$ die Gleichung $r_0 \cap z = 0$ gilt.*

Beweis. Die Behauptung „nur dann" wurde im Absatz 10 bewiesen. Es sei $r_0 \in R^+$, $r_0 > 0$, $r_0 \cap z = 0$. Aus der im Absatz 9 gemachten Überlegung folgt, dass dann für jedes $r \in R^+$ die Bedingung $r \cap z = 0$ erfüllt ist. Wählen wir $r > r_0$, $r \in R^+$ und bezeichnen $x = r_0 + z = r_0 \cup z$. Dann gilt $r \cap x = r \cap (r_0 \cup z) = r_0$, und also $r_0 = x_1$, $z = x_2$, $z \in Q$.

13. *Wenn $y, z \in Q$ ist, dann ist $y + z \in Q$, $y \cup z \in Q$, $y \cap z \in Q$.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus dem Satze 6, [1], Kap. XIV. Die zweite Behauptung ist eine Folgerung der Distributivität des Verbandes G. Die dritte Behauptung ist klar.

14. Jetzt brauchen wir einige Hilfsbegriffe, die sich auf verbands-geordnete Halbgruppen beziehen. (Die Halbgruppenoperation wollen wir — ähnlich wie bei Gruppen — mit $+$ bezeichnen, auch in dem nicht-kommutativen Fall.)

M sei eine Menge. Setzen wir voraus, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. M ist eine Halbgruppe (in bezug auf die Operation $+$),

2. M ist ein Verband (die Verbandsoperationen und die Relation der teilweisen Ordnung bezeichnen wir mit $\cap$, $\cup$, $\leqq$),

3. es gilt die Bedingung 3 aus der Definition der l-Gruppe (wenn wir M anstatt G setzen).

Dann nennen wir M eine verbands-geordnete Halbgruppe.

Weiter setzen wir voraus, dass die Halbgruppe M ein solches Element 0 enthält, dass für jedes $x \in M$ die Gleichungen $0 + x = x + 0 = x$ gelten.

Eine Untermenge $M_1 \subset M$ wollen wir eine C-Menge in M nennen, wenn

a) $x, y \in M_1 \Rightarrow x + y \in M_1$,

b) M_1 ein Teilverband in M ist,

c) $0 \in M_1$.

Wir führen den Begriff des direkten Produktes ein. Es seien M_1, M_2 C-Mengen in M. M ist ein direktes Produkt von M_1, M_2, wenn sich jedes Element $x \in M$ eindeutig in der Gestalt $x = a + b$, $a \in M_1$, $b \in M_2$ darstellen lässt und wenn dabei diese Bedingung gilt: für beliebige $x, y \in M$ folgt aus den Beziehungen

$$x^1 = a^1 + b^1\,, \quad x^2 = a^2 + b^2 \quad (a^i \in M_1,\ b^i \in M_2,\ i = 1, 2)$$

die Gleichung

$$x^1 \circ x^2 = (a^1 \circ a^2) + (b^1 \circ b^2)\,,$$

wobei $\circ$ beliebige aus den Operationen $+, \cap, \cup$ ist. M_1, M_2 sind direkte Faktoren in M. In Symbolen $M \cong M_1 \times\cdot M_2$.

Bemerkung. In der vorangehenden Erklärung ist als ein Sonderfall der Begriff des direkten Produktes für l-Gruppen enthalten. Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Erklärung (für l-Gruppen) mit der in [2], S. 153 gegebenen Definition übereinstimmt.

15. *Für $a \in G^+$ haben die Symbole a_1, a_2 im weiteren Text dieselbe Bedeutung wie in 9 und 10. Es seien $x, y \in G^+$. Bezeichnen wir $u = x \cap y$, $v = x \cup y$, $z = x + y$. Dann ist $u_i = x_i \cap y_i$, $v_i = x_i \cup y_i$, $z_i = x_i + y_i$ $(i = 1, 2)$.*

Beweis. a) $u = (x_1 \cup x_2) \cap (y_1 \cup y_2) = (x_1 \cap y_1) \cup (x_2 \cap y_2)$. Offensichtlich ist $x_1 \cap y_1 \in R^+$. Nach 13 gilt $x_2 \cap y_2 \in Q$. Wegen 12 ist $(x_1 \cap y_1) \cap (x_2 \cap y_2) = 0$. Es ist daher $u = (x_1 \cap y_1) + (x_2 \cap y_2)$. Die erste Behauptung folgt jetzt aus 11.

b) $v = (x_1 \cup x_2) \cup (y_1 \cup y_2) = (x_1 \cup y_1) \cup (x_2 \cup y_2)$. Weiter wie in a).

c) Da $y_1 \in R^+$, $x_2 \in Q$ ist, gilt $y_1 \cap x_2 = 0$ und daher $y_1 + x_2 = y_1 \cup x_2 = x_2 + y_1$ Daraus folgt $z = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$.

16. Aus 9, 10, 11, 13 und 15 ergibt sich:

G^+ ist ein direktes Produkt ihrer C-Mengen R^+, Q

$$G^+ \cong R^+ \times Q. \tag{6}$$

17. *Jeder Produktzerlegung der verbands-geordneten Halbgruppe $G^+ \cong A_0 \times B_0$ entspricht eine Produktzerlegung der l-Gruppe G, $G \cong A \times B$, wobei A, B Untergruppen in G sind und die Gleichungen $A^+ = A_0$, $B^+ = B_0$ erfüllt sind.*

Beweis. Setzen wir voraus, die verbands-geordnete Halbgruppe G^+ lässt sich in der Gestallt $G^+ \cong A_0 \times B_0$ darstellen. Nach Lemma 2, § 5, [2] gibt es eine solche direkte Zerlegung der Gruppe G

$$G \cong A \times B, \tag{*}$$

dass $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ gilt. Dabei (siehe [2], S. 164) gilt die Beziehung (*) auch in Bezug auf die teilweise Ordnung, d. h. in Bezug auf die Operationen $\cap$, $\cup$.

Offensichtlich ist $A_0 \subset A^+$. Es sei $z \in A^+$. Nach der Voraussetzung und wegen 14 existieren Elemente $a \in A_0$, $b \in B_0$, für welche die Gleichung $z = a + b$ gilt. Wenn $b \neq 0$, ergibt sich (da $b \in B$) wegen (*) $z \bar{\in} A$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Demnach ist $b = 0$, d. h. $z = a$, $z \in A_0$. Damit haben wir die Beziehungen $A^+ \subset A_0$, $A^+ = A_0$ bewiesen. In analoger Weise gewinnt man die Gleichung $B^+ = B_0$.

Satz 1. *R sei eine maximale und konvexe Kette in G, $0 \in R$. Dann ist R ein direkter Faktor in G.*

Beweis. Konstruieren wir die Produktzerlegung der l-Gruppe G, welche der Produktzerlegung (6) von G^+ entspricht:

$$G \cong A \times B.$$

Es gilt $R^+ = A^+$. Wir wollen die Gleichung $A = R$ beweisen.

Es sei $x \in R$. Wenn $x \geqq 0$ ist, dann ist $x \in R^+ \subset A$. Wenn $x < 0$ ist, dann ist $-x \in R^+ \subset A$, also (da A eine Untergruppe in G ist) gilt $x \in A$.

Wenn $x \in A$, $x \geqq 0$ ist, dann ist $x \in A^+ \subset R$. Falls $x \in A$, $x < 0$ ist, gilt $-x \in R^+$, also ist nach 8 $x \in R$. Es sei jetzt x ein beliebiges Element aus A. Da A ein Teilverband in G ist, gilt $x \cap 0 \in A$, $x \cup 0 \in A$ und nach dem schon Bewiesenen $x \cap 0 \in R$, $x \cup 0 \in R$. Da die Kette R konvex ist, gilt $x \in R$.

17.1. Im Absatz 14 wurde die Produktzerlegung einer verbandsgeordneten Halbgruppe erklärt; diese Zerlegung hatte zwei Faktoren. In einer analogen Weise kann man eine Produktzerlegung mit n Faktoren definieren.

Wir erwähnen noch ohne Beweis folgende Behauptungen (die Beweise folgen durch eine einfache Überlegung aus Satz 1):

a) $R_1, \ldots, R_n$ *seien (miteinander verschiedene) maximale und konvexe Ketten in einer l-Gruppe* G, $0 \in R_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Dann kann die l-Gruppe* G *in ein direktes Produkt*

$$G \cong R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n \times Q$$

zerlegt werden.

b) *Setzen wir voraus,* $R_1, \ldots, R_n$ *haben dieselben Eigenschaften wie in* a). *Es sei* G_1 *ein von der Menge* $R_1^+ \cup R_2^+ \cup \ldots \cup R_n^+$ *erzeugter Teilverband in* G. *Wenn* $G_0 = G^+$ *ist, dann gilt*

$$G \cong R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n .$$

17.2. *Es sei* R_0 *eine konvexe Kette mit dem kleinsten Element* 0 *und mit dem grössten Element* r *in einer l-Gruppe* G. *Dann ist das Intervall* $\langle 0, 2r \rangle$ *auch eine Kette.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass das Intervall $\langle 0, 2r \rangle$ keine Kette ist. Dann existiert ein Element $z \in G$, $0 < z < 2r$, $z \parallel r$. Bezeichnen wir $z \cap r = u$, $z \cup r = v$. Es seien p, q die Elemente, für welche die Gleichungen

$$u + p = z, \quad u + q = r \tag{6.1}$$

erfüllt sind. Nach dem Satz 4, Kap. XIV, [1] gilt dann

$$r + p = v . \tag{6.2}$$

Offensichtlich ist $p \geqq 0$, $q \geqq 0$. Aus $p = 0$ $(q = 0)$ ergibt sich $z < r$ $(z > r)$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Also gilt $p > 0$, $q > 0$.

Nach der zweiten Gleichung (6.1) ist $q \leqq r$ und wegen (6.2) $r + p \leqq 2r$, also gilt $p \leqq r$. Da $\langle 0, r \rangle$ eine Kette ist, gilt $p \cap q = p$ oder $p \cap q = q$ und daher ist $p \cap q \neq 0$. Aber wegen (6.1) gilt

$$p \cap q = (-u + z) \cap (-u + r) = (-u) + (z \cap r) = 0 .$$

Damit sind wir zu einem Widerspruch gelangt und der Beweis ist erbracht.

Durch vollständige Induktion ergibt sich:

Die Menge $R_1 = \cup\, nR_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist eine konvexe Kette in G. (Dabei ist nR_0 die Menge aller Elemente der Gestalt nx, $x \in R_0$.)

Wenn die l-Gruppe G archimedisch ist, dann ist die Kette R_1 von oben nicht begrenzt. Im Hinblick auf Satz 1 folgt:

Satz 1'. *G sei eine archimedische l-Gruppe. Es sei $r \in G$, $r > 0$ und das Intervall $\langle 0, r\rangle = R_0$ sei eine Kette. Dann lässt sich die l-Gruppe G in ein direktes Produkt*

$$G \cong R \times Q$$

zerlegen, wobei R eine Kette ist und $R_0 \subset R$.

Bemerkung. An einem Beispiel kann man zeigen, dass eine analoge Behauptung für nicht-archimedische l-Gruppen im allgemeinen nicht gilt.

18. *Es sei $G^+ \cong A \times B$, $x \in G^+$, $x = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Dann gilt $a \cap b = 0$.*

Beweis. Aus den Gleichungen $x = a + b$, $0 = 0 + 0$ folgt nach der Definition des direkten Produktes (siehe 14)

$$x = x \cup x = (a \cup 0) + (b \cup 0)$$

und daher gilt $a \cup 0 = a$, $b \cup 0 = b$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$. Aus den Gleichungen $a = a + 0$, $b = 0 + b$ ergibt sich dann

$$a \cap b = (a \cap 0) + (b \cap 0) = 0\,.$$

19. Man kann die Frage stellen, ob man die durch Satz 1 beendete Überlegung in einer solchen Weise verallgemeinern kann, dass man als den Ausgangspunkt der Überlegung keine konvexe von oben unbegrenzte Kette R_1, sondern einen konvexen von oben nicht begrenzten Teilverband $S_0 \subset G$, $0 \in S_0$ wählt. Folgendes Beispiel zeigt, dass diese Voraussetzungen zu einer Möglichkeit der Verallgemeinerung nicht genügen:

G sei die l-Gruppe aller stettigen im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ definierten Funktionen (mit der gewöhnlichen teilweisen Ordnung, wobei als Gruppenoperation die Addition dient) und S_0 sei die Menge aller $f \in G^+$, für welche

$$x \in \langle 0, \tfrac{1}{2}\rangle \Rightarrow f(x) = 0 \text{ gilt}\,.$$

Die Menge S_0 genügt den oben gegebenen Bedingungen (ausserdem ist S_0 eine C-Menge in G). Setzen wir voraus, dass für eine gewisse C-Menge $S' \subset G^+$ die Beziehung $G^+ \cong S_0 \times S'$ gilt. Nach 18 ist dann für jedes $a \in S_0$, $b \in S'$

$$a \cap b = 0\,.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich leicht, dass für jedes $b \in S'$ und jedes $x \in (\tfrac{1}{2}, 1\rangle$ $b(x) = 0$ ist. Aus der Stetigkeit folgt weiter $b(\tfrac{1}{2}) = 0$. Da nach der Voraussetzung jede Funktion $f \in G^+$ in der Form $f = a + b$, $a \in S_0$, $b \in S'$ darstellbar ist, gilt für jedes $f \in G^+$ $f(\tfrac{1}{2}) = a(\tfrac{1}{2}) + b(\tfrac{1}{2}) = 0$. Damit sind wir zum Widerspruch gelangt.

20. S sei ein Verband mit dem kleinsten Element 0. Setzen wir voraus, dass S_0, S' konvexe Teilverbände in S sind, $0 \in S_0$, $0 \in S'$. Weiter setzen wir voraus, dass sich jedes Element $x \in S$ eindeutig in der Form $x = a \cup b$, $a \in S_0$, $b \in S'$ darstellen lässt, und dass aus den Beziehungen

$$x = a_1 \cup b_1 , \quad y = a_2 \cup b_2 , \quad a_i \in S_0 , \quad b_i \in S' \quad (i = 1, 2)$$

die Gleichung

$$x \cap y = (a_1 \cap a_2) \cup (b_1 \cap b_2)$$

folgt. Dann wollen wir S ein *direktes Produkt* seiner Teilverbänden S_0, S' nennen. In Symbolen $S \cong S_0 \times S'$. S_0, S' sind direkte Faktoren in S.

Es ist leicht einzusehen, dass sich diese Erklärung (für Verbände, die ein kleinstes Element besitzen) nur förmlich von der in [1], Kap. II gegebenen Definition des direkten Produktes unterscheidet.

21. Anstatt der im Absatz 19 ausgesprochenen Vermutung, die sich als falsch erwiesen hat, beweisen wir den

Satz 3. *S_0 sei ein direkter Faktor in dem Verband G^+. Dann ist die Menge S_0 zugleich ein direkter Faktor in der verbands-geordneten Halbgruppe G^+.*

Beweis. Setzen wir voraus, der Verband G^+ ist in dem im Absatz 20 definierten Sinne in ein direktes Produkt $G^+ \cong S_0 \times S'$ zerlegt. Wenn $a \in S_0$, $b \in S'$ ist, ist nach 20

$$a \cap b = (a \cup 0) \cap (0 \cup b) = (a \cap 0) \cup (0 \cap b) = 0 .$$

Wenn weiter $x \in G^+$ ist und wenn für jedes $b \in S'$ die Gleichung $x \cap b = 0$ erfüllt ist, dann gilt $x \in S_0$. Wenn wir nämlich das Element x in der Form $x = a \cup b$, $a \in S_0$, $b \in S'$ darstellen, ist nach der Voraussetzung $b = 0$, also $x = a$.

Es seien a, a' Elemente aus S_0. Nach dem schon Bewiesenen und nach Satz 6, [1], Kap. XIV gilt $(a + a') \cap b = 0$ für jedes $b \in S'$. Daher folgt $a + a' \in S_0$, so dass S_0 eine C-Menge in G^+ ist. Jedes Element $x \in G^+$ ist eindeutig in der Form

$$x = a \cup b = a + b , \quad a \in S_0 , \quad b \in S'$$

darstellbar; wenn bei dieser Darstellung zugleich $x' = a' + b'$ ist, dann gilt (da $b \cap a' = 0$)

$$x + x' = (a + b) + (a' + b') = (a + a') + (b + b') .$$

Damit haben wir bewiesen, dass die verbands-geordnete Halbgruppe G^+ ein direktes Produkt ihrer C-Mengen S_0, S' ist.

Folgerung. Wenn der Verband G^+ in ein direktes Produkt $G^+ \cong S_0 \times S'$ zerlegbar ist, dann lässt sie die l-Gruppe G in das direkte Produkt $G \cong A \times B$ zerlegen, wobei $A^+ = S_0$, $B^+ = S'$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 3 und aus 17.

22. Wir wollen sagen, dass eine teilweise geordnete Gruppe G *eine einzige Komponente hat*, wenn für jedes Element $x \in G$ Elemente $u, v \in G$ existieren, für welche die Beziehungen $u \leqq 0$, $u \leqq x$, $v \geqq 0$, $v \geqq x$ gelten. (Siehe [2].)

Durch Beispiele zeigt man leicht, dass der Satz 3 im allgemeinen für teilweise geordnete Gruppen nich gilt.

Man kann die Frage stellen, ob die Sätze 1 und 3 für teilweise geordnete Gruppen mit einer einzigen Komponente gültig sind. Die positive Antwort scheint sehr wahrscheinlich.

LITERATUR

[1] *G. Birkhoff*: Lattice theory, revised ed., Amer. Math. Soc. Colloquium Publications vol. XXV, New York 1948.

[2] *Е. П. Шимбирева:* К теории частично упорядоченных групп, Матем. сборник *20* (1947), 145—178.

Výtah

KONVEXNÉ REŤAZCE VO SVÄZOVO USPORIADANÝCH GRUPÁCH

JÁN JAKUBÍK, Košice

(Došlo dne 22. listopadu 1957)

Nech G je sväzovo usporiadaná grupa, obsahujúca viac ako jeden prvok. Používame rovnaké označenia ako v [1], kap. XIV. Množina $R \subset G$ je maximálny konvexný reťazec v G, ak R je reťazec, ktorý v G nie je zhora ani zdola ohraničený, a ak zo vzťahu $x, y \in R$, $z \in G$, $x < z < y$ vyplýva $z \in R$.

Veta 1. *Nech R je maximálny a konvexný reťazec v G, $0 \in R$. Potom R je priamy faktor vo sväzovo usporiadanej grupe G.*

Veta 2. *Nech R' je maximálny a konvexný reťazec v G. Potom R' má tvar $R' = x + R$, pričom $x \in R'$ a R je priamy faktor v G.*

Veta 1'. *Nech G je archimedovská sväzovo usporiadaná grupa. Nech $r \in G$, $r > 0$, nech interval $\langle 0, r \rangle = R_0$ je reťazcom. Potom sa G dá rozložiť na priamy súčin $G \cong R \times Q$, pričom R je reťazec a platí $R_0 \subset R$.*

V odseku 20 je definovaný pojem rozkladu na priamy súčin pre sväzy s najmenším prvkom; táto definícia sa len formálne líši od definície, uvedenej v [1], kap. II.

Veta 3. *Nech S_0 je priamy faktor vo sväze G^+. Potom je S_0 zároveň priamym faktorom vo svázovo usporiadanej pologrupe G^+.*

Dôsledok. Ak sa sväz G^+ dá rozložiť na priamy súčin $G^+ \cong S_0 \times S'$, potom sa svázovo usporiadaná grupa G dá rozložiť na priamy súčin $G \cong A \times B$, pričom $A^+ = S_0$, $B^+ = S'$.

Резюме

ВЫПУКЛЫЕ ЦЕПИ В l-ГРУППАХ

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 22/XI 1957 г.)

Пусть G — l-группа, содержащая более одного элемента. Воспользуемся обозначениями из книги [1], гл. XIV. Множество $R \subset G$ будет максимальной и выпуклой цепью в G, если R сверху и снизу не органиченная цепь и если из соотношений $x, y \in R$, $z \in G$, $x < z < y$ вытекает $z \in R$.

Теорема 1. *Пусть R — максимальная и выпуклая цепь в G, $0 \in R$. Тогда R является прямым сомножителем в G.*

Теорема 2. *Пусть R — максимальная и выпуклая цепь в G. Тогда $R = x + R'$, причем $x \in R'$ и R' — прямый сомножитель в G.*

В абзаце 20 определяется понятие разложения в прямое произведение для структур, в которых существует наименьший элемент; наше определение только формально отличается от определения, данного в [1], гл. II.

Теорема 3. *Пусть S_0 — прямой сомножитель в структуре G^+. Тогда S_0 является тоже прямым сомножителем в структурно упорядоченной полугруппе G^+.*

Следствие. Если структуру G^+ можно разложить в прямое произведение $G^+ \cong S_0 \times S'$, то l-группа G разложима в прямое произведение $G \cong A \times B$, причем $A^+ = S_0$, $B^+ = S'$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

POZNÁMKA K PHRAGMÉN-LINDELÖFOVU PRINCIPU

JAROSLAV FUKA, Praha

(Došlo dne 28. listopadu 1957) DT: 517.531

Je známo, že větu o maximu pro subharmonické funkce lze rozšířit tak, že se v okolí jednoho hraničního bodu připustí singularita jistého typu. V článku jest analysována přípustná singularita v závislosti na tvaru hranice definiční oblasti funkce v okolí singulárního bodu. Zvláště jsou studovány oblasti, jejichž hranice má v singulárním bodě bod vratu.

1

V celém článku rozumíme termínem „konformní zobrazení" prosté a konformní zobrazení, úhlem $U_{\alpha,\Theta}$ o vrcholu z_0 množinu těch bodů $z = x + iy$, pro něž $|\arg(z - z_0) - \alpha\pi| < \Theta \frac{\pi}{2}$, kde $0 \leqq \alpha \leqq 2$, $0 < \Theta \leqq 2$ (je-li $\alpha = 0$, budeme index α vynechávat), sektorem $S_{r,\Theta}$ množinu těch bodů z, pro něž platí $|\arg z| < \Theta \frac{\pi}{2}$, $|z| < r$, kde $0 < \Theta \leqq 2$; K_r bude znamenat otevřený kruh se středem v počátku a poloměrem r.

Definice. (Viz [1] str. 1) Budiž $u(z)$ reálná funkce v oblasti G. Říkáme, že $u(z)$ je *subharmonická v* G, jestliže má tyto vlastnosti:

(S_0) $-\infty \leqq u(z) < +\infty$, existuje bod $z_0 \in G$ tak, že $u(z_0) \neq -\infty$.

(S_1) $u(z)$ je shora polospojitá v G, tj. ke každému bodu $z_0 \in G$ a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $|z - z_0| < \delta$ platí $u(z) < u(z_0) + \varepsilon$.

(S_2) Budiž G' oblast, ležící i se svou hranicí H' uvnitř G. Budiž $h(z)$ funkce harmonická v G', spojitá v $G' + H'$, $h(z) \geqq u(z)$ v H'. Potom $h(z) \geqq u(z)$ v G'.

Platí nyní tyto známé věty:

Věta 1.1. *Budiž G omezená oblast, ležící v úhlu U_Θ. Budiž $u(z)$ funkce subharmonická v G.*

a) *Nechť v každém bodě $\bar{z}$ hranice G, $\bar{z} \neq 0$, platí* $\limsup\limits_{z \in G,\, z \to \bar{z}} u(z) \leqq C$.

b) *Nechť v bodě $z = 0$ (leží-li ovšem na hranici G) platí* $\limsup\limits_{z \in G,\, z \to 0} u(z)\, r^k =$

$= M < \infty$, *kde* $0 < k < \frac{1}{\Theta}$, $r = |z|$. *Potom v každém bodě* $z \in G$ *platí* $u(z) \leqq C$ *a je-li v některém bodě* $z_0 \in G$ $u(z_0) = C$, *je* $u(z) = C$ *identicky v* G (srovnej [3], str. 115).

Věta 1.2. *Budiž* G *omezená oblast, ležící uvnitř oblasti, jejíž hranici tvoří kružnice* c_1 *se středem v bodě* $h_1 i$ *a poloměrem* $|h_1|$ *a kružnice* c_2 *se středem v bodě* $h_2 i$ *a poloměrem* $|h_2|$, $h_1 \neq h_2$. *Budiž* $u(z)$ *funkce subharmonická v* G.

a) *Nechť v každém bodě* $\bar{z}$ *hranice* G, $\bar{z} \neq 0$, *platí* $\limsup_{z \in G,\, z \to \bar{z}} u(z) \leqq C$.

b) $\limsup_{z \in G,\, \mathrm{Re}\, z < 0,\, z \to 0} u(z) \leqq C$ *(existují-li ovšem v* G *body* $z \to 0$, $\mathrm{Re}\, z < 0$*)*.

c) $\limsup_{z \in G,\, \mathrm{Re}\, z > 0,\, z \to 0} u(z)\, e^{-k \frac{1}{r}} = M < \infty$, *kde* $0 < k < \frac{2\pi}{H_1}$, $H_1 = \left|\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right|$, $r = |z|$.

Potom v každém bodě $z \in G$ *platí* $u(z) \leqq C$ *a je-li* $u(z_0) = C$ *v některém bodě* $z_0 \in G$, *je* $u(z) = C$ *identicky v* G.

V tomto odstavci uvedeme na ukázku důkaz věty 1.2 a některé pomocné věty. V dalším odstavci pak zobecníme věty 1.1 a 1.2.

Důkaz věty 1.2. Definujme v G funkci

$$\omega(z) = e^{k' \frac{x}{x^2+y^2}} \cos \left[k' \left(- \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{H_2}{4}\right)\right],$$

kde

$$H_2 = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}, \quad k < k' < \frac{2\pi}{H_1}.$$

$\omega(z)$ je reálná část funkce $e^{k' \left(\frac{1}{z} + \frac{H_2}{4} i\right)}$ a je tedy harmonická v G. Je-li $z \in G$, je

$$-\frac{1}{4}\left|\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right| < \mathrm{Im} \left(\frac{1}{z} + \frac{H_2}{4} i\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{H_2}{4} < \frac{1}{4}\left|\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right|,$$

tj.

$$\left| k' \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{H_2}{4}\right)\right| < k' \cdot \frac{H_1}{4} < \frac{2\pi}{H_1} \cdot \frac{H_1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

a tedy

$$\cos \left[k' \left(- \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{H_2}{4}\right)\right] \geqq \eta > 0\,.$$

Je tedy $\omega(z) > 0$ v G. Označme $F_\sigma(z) = u(z) - \sigma\, \omega(z)$. $F_\sigma(z)$ je subharmonická v G a podle c) pro dostatečně malá r platí

$$F_\sigma(z) < M' e^{k \frac{1}{r}} - \sigma e^{k' \frac{x}{x^2+y^2}} \cos \left[k' \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{H_2}{4}\right)\right], \quad \text{kde} \quad M' > M\,.$$

Je však

$$\frac{x}{x^2+y^2} : \frac{1}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} \to 1$$

pro $x \to 0$, $x > 0$, neboť $\frac{y}{x} \to 0$:

Tedy $e^{k' \frac{x}{x^2+y^2}} > e^{k'' \cdot \frac{1}{r}}$, $k < k'' < k'$ pro dostatečně malá r. Je tedy

$$F_\sigma(z) < e^{k \frac{1}{r}} \left(M - \sigma\eta e^{(k''-k)\frac{1}{r}} \right),$$

tj.

$$\limsup_{z \in G,\ \mathrm{Re}\, z > 0,\ z \to 0} F_\sigma(z) = -\infty < C$$

pro každé $\sigma > 0$. Podle principu maxima pro subharmonické funkce ([1], str. 6) tedy platí $F_\sigma(z) \leqq C$ všude v G. Přejdeme-li k limitě pro $\sigma \to 0$, dostáváme $u(z) \leqq C$ všude v G. Je-li v některém bodě $z_0 \in G$ $u(z_0) = C$, je opět podle principu maxima $u(z) = C$ všude v G.

Lemma 1.1. *Budiž $u(z)$ funkce subharmonická v oblasti G. Budiž $\zeta = \chi(z)$ konformní zobrazení oblasti G na oblast H. Potom funkce $\varphi(\zeta) = u(\chi^{-1}(\zeta)) = u(z)$ je subharmonická v oblasti H.*

Důkaz. Máme dokázat, že $\varphi(\zeta)$ splňuje v H podmínky (S_0), (S_1), (S_2). Důkaz podmínek (S_0), (S_1) je zřejmý, dokážeme tedy jen podmínku (S_2). Budiž G' libovolná oblast taková, že $G' + H' \subset H$, kde H' je hranice G'. Budiž $\omega'(\zeta)$ harmonická v G', spojitá v $G' + H'$ a $\omega'(\zeta) \geqq \varphi(\zeta)$ v H'. Potom též $\chi^{-1}(G' + H') \subset G$, $\omega(z) = \omega'(\chi(z))$ je harmonická v $\chi^{-1}(G')$, spojitá v $\chi^{-1}(G' + H')$, $\omega(z) \geqq$ $\geqq u(z)$ v $\chi^{-1}(H')$. Zřejmě $\chi^{-1}(H')$ je hranicí oblasti $\chi^{-1}(G')$. Poněvadž $u(z)$ splňuje podmínku (S_2) v G, je $\omega(z) \geqq u(z)$ v $\zeta^{-1}(H' + G')$ a tedy $\omega'(\zeta) \geqq \varphi(\zeta)$ v $G' + H'$.

Lemma 1.2. *Budiž $u(z)$ funkce definovaná v Jordanově oblasti G. Nechť v bodě z_0 hranice G platí $\limsup_{z \in G,\ z \to z_0} u(z) \leqq C < \infty$. Budiž dále $\zeta = \omega(z)$ konformní zobrazení oblasti G na Jordanovu oblast H. Potom v bodě $\zeta_0 = \omega(z_0)$ platí $\limsup_{\zeta \in H,\ \zeta \to \zeta_0} \varphi(\zeta) \leqq$ C, kde $\varphi(\zeta) = u(\omega^{-1}(\zeta)) = u(z)$.*

Důkaz. Užije se známého faktu, že konformní zobrazení Jordanových oblastí lze spojitě rozšířit na hranici (viz např. [2], str. 409).

Lemma 1.3. *Budiž dána Jordanova oblast G a budiž γ její hranice. Nechť existuje $r_0 > 0$ tak, že průnik G s každým kruhem K_r, $0 < r < r_0$ je vnitřek „trojúhelníka“ T_r, jehož „strany“ tvoří: oblouk kružnice c_1 se středem v bodě $h_1 i$ a poloměrem $|h_1|$, oblouk kružnice c_2 se středem v bodě $h_2 i$ a poloměrem $|h_2|$, $h_1 \neq h_2$, a konečně ten oblouk kružnice k_r, jež je hranicí kruhu K_r, jehož krajní body jsou* *průsečíky k_r s c_1 a c_2 a který v K_r přísluší menšímu středovému úhlu. Budiž $w = f(z)$ konformní zobrazení oblasti G na oblast G', jejíž hranici tvoří kružnice c_1 a c_2 takové, že $f(0) = 0$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že ve vnitřku T_δ platí $|f(z)| < (1 + \varepsilon)\,|z|$.*

Důkaz. Nejdříve poznamenejme, že konformní zobrazení pásu $a < y < b$ na pravou polorovinu má tvar $\omega = e^{\frac{\pi}{b-a}\left(z - \frac{a+b}{2} i\right)}$ a že funkce $\frac{1}{z}$ zobrazí jednoduše souvislou oblast, jejíž hranici tvoří kružnice c_1, c_2 na pás $-\frac{1}{2h_1} < y < -\frac{1}{2h_2}$ nebo $-\frac{1}{2h_2} < y < -\frac{1}{2h_1}$. Označíme-li tedy $z = \varphi(\omega)$ konformní zobrazení pravé poloroviny na G takové, že $\varphi(0) = 0$, a dále $H_1 = \left|\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right|$ (podle předpokladu je $H_1 > 0$), $H_2 = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$, potom funkce $\psi(\omega) = e^{\frac{2\pi}{H_1}\left(\frac{1}{\varphi(\omega)} + \frac{H_2}{4} i\right)}$ zobrazuje konformně část okolí počátku roviny ω na část okolí bodu $z = 0$ ležící v pravé polorovině, při čemž úsečce imaginární osy roviny ω je přiřazena úsečka imaginární osy roviny z. Podle principu symetrie tedy platí $\psi(\omega) = \omega(c_1 + c_2\omega + \ldots)$, $c_1 \neq 0$. To znamená, že pro dostatečně malá $z \in G$ platí

$$e^{\frac{2\pi}{H_1}\left(\frac{1}{z} + \frac{H_2}{4} i\right)} = e^{\frac{2\pi}{H_1}\left(\frac{1}{w} + \frac{H_2}{4} i\right)} (c_1 + \ldots) = e^{\frac{2\pi}{H_1}\left(\frac{1}{w} + \frac{H_2}{4} i\right) + \log (c_1 + \ldots)}$$

(jednoznačná větev logaritmu existuje, neboť pro dostatečně malá z a tedy pro dostatečně malá w je $c_1 + \ldots \neq 0$). Pro dostatečně malá $z \in G$ tedy platí

$$\frac{2\pi}{H_1}\left(\frac{1}{z} + \frac{H_2}{4} i\right) = \frac{2\pi}{H_1}\left(\frac{1}{w} + \frac{H_2}{4} i\right) + \log (c_1 + \ldots)\,,$$

tj.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w}\left[1 + w\,\frac{H_1}{2\pi} \log (c_1 + \ldots)\right].$$

K $\varepsilon > 0$ existuje tedy $\delta > 0$ tak, že pro $|z| < \delta$, $z \in G$ platí

$$\frac{1}{|z|} \leqq \frac{1}{|w|} (1 + \varepsilon)\,,$$

tj. $|w| \leqq |z|(1 + \varepsilon)$, c. b. d.

2

Definice 2.1. Budiž dána oblast G, jejíž hranici tvoří uzavřená křivka γ. Budiž $z_0 \in G$. Označme M množinu všech úhlů $U_{\alpha,\Theta}$ o vrcholu z_0, jež mají tuto vlastnost: Všechny body oblasti G, jež leží v jistém okolí bodu z_0, leží v $U_{\alpha,\Theta}$.

Označme N množinu všech Θ takových, že $U_{\alpha,\Theta} \in M$. Budiž $N \neq \emptyset$. Budiž $\vartheta = \inf \Theta$, $\vartheta > 0$. Potom říkáme, že γ má v bodě z_0 *úhlový bod řádu* ϑ.

Věta 2.1. *Budiž G omezená oblast, jejíž hranice γ má v počátku úhlový bod řádu Θ. Budiž $u(z)$ funkce subharmonická v G. Nechť jsou dále splněny předpoklady* a), b) *věty* 1.1. *Potom zůstává v platnosti i tvrzení věty* 1.1.

Důkaz. Nechť tedy v počátku platí $\limsup\limits_{z \in G,\, z \to 0} u(z)\, r^k = M < \infty$, $0 < k < \dfrac{1}{\Theta}$. Zvolme číslo k' tak, že $k < k' < \dfrac{1}{\Theta}$. Poněvadž γ má podle předpokladu v počátku úhlový bod řádu Θ, existuje úhel $U_{\alpha, \frac{1}{k'}}$ o vrcholu v počátku tak, že body oblasti G, ležící v jistém okolí počátku, leží v $U_{\alpha, \frac{1}{k'}}$. Bez újmy na obecnosti můžeme zřejmě klást $\alpha = 0$. Předpokládejme nejdříve, že $\dfrac{1}{k'} < 1$. V tom případě můžeme sestrojit tak malé kružnice k_1, k_2 dotýkající se v počátku ramen úhlu $U_{\frac{1}{k'}}$ a protínající se v bodě $a < 0$, že oblast G i $U_{\frac{1}{k'}}$ leží ve vnějšku každé z kružnic k_1, k_2. Transformací $\zeta = \dfrac{z}{z - a}$ přejde oblast bodů ležících vně každé z kružnic k_1, k_2 v úhel $U'_{\frac{1}{k'}}$ v rovině ζ, oblast G v oblast $G' \subset U'_{\frac{1}{k'}}$, funkce $u(z)$ ve funkci $u'(\zeta) = u(z)$ definovanou v G'. Podle lemmatu 1.1 je $u'(\zeta)$ subharmonická v G' a zřejmě platí

$$\limsup_{\zeta \in G',\, \zeta \to \bar{\zeta}} u'(\zeta) \leqq C$$

v každém hraničním bodě $\bar{\zeta} \neq 0$ oblasti G'. Poněvadž funkce $\zeta = \dfrac{z}{z - a}$ má v okolí počátku rozvoj $\zeta = -\dfrac{z}{a}\left(1 + \dfrac{z}{a} + \ldots\right)$, platí v jistém okolí počátku $|\zeta| \leqq K|z|$, $K < \infty$. V bodě $\zeta = 0$ tedy platí

$$\limsup_{\zeta \in G',\, \zeta \to 0} u'(\zeta)\, |\zeta|^{k'} \leqq \limsup_{z \in G,\, z \to 0} u(z)\, |z|^{k'} \,.\, K^{k'} = K^{k'} \,.\, M < \infty \,.$$

$u'(\zeta)$ tedy splňuje předpoklady a), b) věty 1.1. Je tedy $u'(\zeta) \leqq C$ všude v G', a je-li $u'(\zeta_0) = C$, $\zeta_0 \in G'$, je $u'(\zeta) = C$ identicky. Stejné tvrzení platí tedy i v oblasti G pro funkci $u(z) = u'(\zeta)$, c. b. d.

Je-li $1 < \dfrac{1}{k'} < 2$, sestrojíme opět tak malé kružnice k_1, k_2 dotýkající se v počátku ramen úhlu $U_{\frac{1}{k'}}$ a protínající se v bodě $a < 0$, že oblast G i $U_{\frac{1}{k'}}$ leží v oblasti, která je vnějškem průniku vnitřků kružnic k_1, k_2. Další postup je stejný.

Definice 2.2. Budiž dána oblast G, jejíž hranicí je uzavřená křivka γ. Budiž $z_0 \in \gamma$. Označme $V_{\alpha,\beta}$ oblast, jejíž hranici tvoří dvojice parabol $z_0 + (x + ix^\alpha)\,e^{i\beta}$, $z_0 + (x - ix^\alpha)\,e^{i\beta}$, při čemž polopřímka $z_0 + te^{i\beta}$, $t > 0$, leží ve $V_{\alpha,\beta}$. Označme M množinu všech $V_{\alpha,\beta}$, jež mají tuto vlastnost: Všechny body oblasti G, jež leží v jistém okolí bodu z_0, leží ve $V_{\alpha,\beta}$. Označme N množinu všech α takových, že $V_{\alpha,\beta} \in M$. Budiž $N \neq \emptyset$. Budiž $\varrho = \sup\limits_{\alpha \in N} \alpha$, $\varrho \geqq 2$, $\varrho < \infty$. Potom říkáme, že γ má v bodě z_0 *bod vratu řádu* $\varrho - 1$.

Definice 2.3. Budiž dána oblast G, jejíž hranicí je uzavřená křivka γ. Budiž $z_0 \in \gamma$. Nechť γ má v bodě z_0 bod vratu řádu ϱ. Označme $W^\varrho_{h_1,h_2}$, $h_1 > h_2$, oblast, jejíž hranici tvoří dvojice parabol

$$z_0 + (x + ih_1x^{\varrho+1})\,e^{i\beta}\,, \quad z_0 + (x + ih_2x^{\varrho+1})\,e^{i\beta}\,,$$

při čemž polopřímka $z_0 + te^{i\beta}$, $t > 0$, leží ve $W^\varrho_{h_1,h_2}$. Označme M množinu všech $W^\varrho_{h_1,h_2}$, jež mají tuto vlastnost: Všechny body oblasti G, jež leží v jistém okolí bodu z_0, leží ve $W^\varrho_{h_1,h_2}$. Označme N_1 množinu h_1 takových, že k nim existují h_2 tak, že $W^\varrho_{h_1,h_2} \in M$, a N_2 množinu h_2 takových, že k nim existují h_1 tak, že $W^\varrho_{h_1,h_2} \in M$. Budiž $N_1 \neq \emptyset$ (pak je zřejmě i $N_2 \neq \emptyset$). Budiž $H_1 = \inf\limits_{h_1 \in N_1} h_1$, $H_2 = \sup\limits_{h_2 \in N_2} h_2$, $H_1 > H_2$. Potom říkáme, že γ má v bodě z_0 *bod vratu řádu ϱ typu* $[H_1, H_2]$.

Lemma 2.1. *Budiž G oblast, jejíž hranicí je křivka γ. Nechť γ má v počátku bod vratu řádu ϱ typu $[H_1, H_2]$. Nechť G leží uvnitř úhlu $U_{\frac{2}{\varrho'}}$, $\varrho' > \varrho$. Zobrazení $\zeta = z^\varrho$ převede G v G' a γ v γ'. Potom křivka γ' má v počátku bod vratu řádu* 1 *typu* $[\varrho H_1, \varrho H_2]$.

Důkaz. Budiž $\varrho h_1 > \varrho H_1 > \varrho H_2 > \varrho h_2$. Podle předpokladu existuje oblast $W^\varrho_{h_1',h_2'}$ ($h_1 > h_1' > H_1$, $H_2 > h_2' > h_2$) tak, že pro jisté okolí O počátku roviny z platí $G \cap O \subset W^\varrho_{h_1',h_2'}$. Nyní však je

$$(x + iax^{\varrho+1})^\varrho = x^\varrho(1 + iax^\varrho)^\varrho$$

a tedy

$$(x + iax^{\varrho+1})^\varrho = x^\varrho + i\varrho ax^{2\varrho} + O(x^{2\varrho})$$

pro $x \to 0$. Existuje tedy oblast $W^1_{\varrho h_1',\varrho h_2'}$ tak, že v jistém okolí $O' \subset \zeta(O)$platí $G' \cap O' \subset W^1_{\varrho h_1',\varrho h_2'}$. Kdyby nyní γ' měla v počátku bod vratu řádu 1 typu $[\varrho H_1', \varrho H_2']$, $H_1' < H_1$, $H_2' > H_2$, ukázali bychom stejným způsobem existenci oblasti $W^\varrho_{H_1'',H_2''}$ v rovině z, při čemž by v jistém okolí O počátku roviny z platilo $O \cap G \subset W^\varrho_{H_1'',H_2''}$ a $H_1 > H_1'' > H_1'$, $H_2' > H_2'' > H_2$, což podle předpokladu není možné. Stejně se vyloučí možnosti $H_1' = H_1$, $H_2' > H_2$ a $H_1' < H_1$, $H_2' = H_2$. γ' má tedy v počátku bod vratu řádu 1 typu $[\varrho H_1, \varrho H_2]$.

Stejným způsobem se dokáže

Lemma 2.2. *Budiž G oblast, jejíž hranicí je uzavřená křivka γ. Nechť γ má v počátku bod vratu řádu ϱ typu $[H_1, H_2]$. Zobrazme oblast G na oblast G' pomocí* zobrazení $\zeta = \frac{-az}{z-a} = z\left(1 + \frac{z}{a} + \ldots\right)$. *Potom G' má v počátku opět bod vratu řádu ϱ typu $[H_1, H_2]$.*

Lemma 2.3. *Budiž dána parabola $p(x) = \frac{1}{2a} x^2$. Potom pro dostatečně malá x leží polokružnice $k(x) = a' - a' \sqrt{1 - \frac{x^2}{a'^2}}$ nad [pod] parabolou $p(x)$, je-li $0 < a' < a$ nebo $0 > a > a'$ [$a' > a > 0$ nebo $0 > a' > a$], tj. pro taková a' platí $k(x) - p(x) > 0$ [$k(x) - p(x) < 0$].*

Důkaz. Pro dostatečně malá x je

$$k(x) = a' - a' \sqrt{1 - \frac{x^2}{a'^2}} = a' - a'\left(1 - \frac{x^2}{2a'^2} - O_1(x^4)\right) = \frac{x^2}{2a'} + O(x^4)$$

a tedy

$$k(x) - p(x) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a}\right) + O(x^4),$$

tj.

$$\begin{aligned} k(x) - p(x) > 0 \quad &\text{pro} \quad a > a' > 0 \quad \text{nebo} \quad 0 > a > a', \\ k(x) - p(x) < 0 \quad &\text{pro} \quad a' > a > 0 \quad \text{nebo} \quad 0 > a' > a, \quad \text{c. b. d.} \end{aligned}$$

Důsledek. Budiž dána oblast G, jejíž hranicí je uzavřená křivka γ. Nechť γ má v počátku bod vratu řádu 1 typu $[H_1, H_2]$. Potom ke každému $\eta > 0$ existuje kružnice k_1 se středem v bodě $\frac{1}{2h_1} i$ a poloměrem $\frac{1}{2|h_1|}$ a kružnice k_2 se středem v bodě $\frac{1}{2h_2} i$ a poloměrem $\frac{1}{2|h_2|}$ tak, že $H_1 + \eta > h_1 > H_1$, $H_2 > h_2 > H_2 - \eta$ a že oblast T, jejíž hranici tvoří k_1, k_2, obsahuje všechny body oblasti G ležící v jistém okolí počátku.

Důkaz. Stačí to dokázat pro η dostatečně malé. Zvolme tedy $\eta > 0$ tak, aby čísla H_1 a $H_1 + \eta$ resp. H_2 a $H_2 - \eta$ měla stejná znamení, je-li $H_1 \neq 0$, resp. $H_2 \neq 0$. Podle definice existují čísla h_1', h_2' tak, že oblast $W^1_{h_1', h_2'}$ obsahuje všechny body jistého okolí počátku ležící v G, při čemž $H_1 + \eta > h_1' > H_1$, $H_2 > h_2' > H_2 - \eta$. Z právě dokázaného lemmatu plyne okamžitě tvrzení.

Věta 2.2. *Budiž G omezená oblast, jejíž hranice γ má v počátku bod vratu řádu ϱ typu $[H_1, H_2]$. Budiž $u(z)$ funkce subharmonická v G.*

a) *Nechť v každém bodě $\bar{z} \in \gamma$, $\bar{z} \neq 0$, platí $\limsup\limits_{z \in G,\, z \to \bar{z}} u(z) \leqq C$.*

b) $\limsup\limits_{z \in G,\, z \to 0} u(z)\, e^{-k\frac{1}{r^\varrho}} = M < \infty$, *kde* $0 < k < \frac{\pi}{\varrho(H_1 - H_2)}$, $r = |z|$.

Potom v každém bodě $z \in G$ platí $u(z) \leqq C$, a je-li v některém bodě $z_0 \in G$ $u(z) = C$, je $u(z) = C$ identicky v G.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve, že $G \subset U_{\frac{2}{\varrho'}}$, $\varrho' > \varrho$. Zobrazme oblast G pomocí zobrazení $z' = z^{\varrho}$ na oblast G'. Její hranice γ' bude mít v počátku podle lemmatu 2.1 bod vratu řádu 1 typu $[\varrho H_1, \varrho H_2]$. Podle důsledku lemmatu 2.3 můžeme tedy sestrojit kružnici k_1 se středem v bodě $\frac{1}{2h_1} i$ a poloměrem $\frac{1}{2|h_1|}$ a kružnici k_2 se středem v bodě $\frac{1}{2h_2} i$ a poloměrem $\frac{1}{2|h_2|}$ tak, že $h_1 > \varrho H_1 > > \varrho H_2 > h_2$ a $k < \frac{\pi}{h_1 - h_2} < \frac{\pi}{\varrho(H_1 - H_2)}$ a že body oblasti G', ležící v jistém okolí O' bodu $z' = 0$, leží v jednoduše souvislé oblasti T, jejíž hranici tvoří kružnice k_1 a k_2. Existuje tedy dále kružnice K se středem v počátku tak, že oblast T', jež obsahuje bod ∞ a jejíž hranici tvoří oblouky kružnic k_1 a k_2 a oblouk kružnice K, obsahuje G'. Zobrazme konečně T' na T pomocí funkce $\zeta = f(z')$, $f(0) = 0$. Oblast G' přejde v oblast $H \subset T$. V H máme tedy definovánu funkci $U(\zeta) = u'(z') = u(z)$. Podle lemmatu 1.1 je $U(\zeta)$ subharmonická v H a podle lemmatu 1.2 v každém bodě $\bar{\zeta}$ hranice oblasti H, $\bar{\zeta} \neq 0$, platí

$$\limsup_{\zeta \in H,\, \zeta \to \bar{\zeta}} U(\zeta) \leqq C .$$

Funkce $U(\zeta)$ splňuje tedy podmínky a), b) věty 1.2. Zřejmě dále platí

$$\limsup_{z' \in G',\, z' \to 0} u'(z')\, e^{-k \frac{1}{|z'|}} = M .$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, že $k' = (1 + \varepsilon)\, k < \frac{\pi}{h_1 - h_2}$. Potom podle lemmatu 1.3 existuje množina T_δ tak, že pro $z' \in T_\delta$ platí $|f(z')| < (1 + \varepsilon)\, |z'|$, tj. $\frac{k}{|z'|} < \frac{k'}{|\zeta|}$, $\zeta = f(z')$, a tedy

$$\limsup_{\zeta \in H,\, \zeta \to 0} U(\zeta)\, e^{-\frac{k'}{|\zeta|}} < \infty .$$

Poněvadž je $k' < \frac{\pi}{h_1 - h_2}$, splňuje funkce $U(\zeta)$ v oblasti $H \subset T$ i předpoklad c) věty 1.2. V H tedy platí $U(\zeta) \leqq C$, a je-li $U(\zeta_0) = C$, $\zeta_0 \in H$, je $U(\zeta) = C$ všude v H. Totéž platí tedy také o funkci $u(z) = U(\zeta)$ v G.

Zbývá nakonec zbavit se omezení $G \subset U_{\frac{2}{\varrho'}}$, $\varrho' > \varrho$.

Poněvadž G má v počátku bod vratu řádu ϱ typu $[H_1, H_2]$, existuje kruh K_r se středem v počátku a poloměrem r tak, že $K_r \cap G \subset S_{r, \frac{2}{\varrho'}}$, $\varrho' > \varrho$, tj. $G \subset E$, kde $E = R - (K_r - S_{r, \frac{2}{\varrho'}})$, R je rozšířená rovina. Stejně jako v důkazu věty 2.1 sestrojíme dostatečně malé kružnice k_1, k_2 a použijeme zobrazení $z_1 =$

$= \frac{-az}{z-a}$. Oblast G přejde v oblast G_1, jež leží uvnitř úhlu $U^1_{\frac{2}{\varrho'}}$ a má podle lemmatu 2.2 v počátku bod vratu řádu ϱ typu $[H_1, H_2]$. Funkce $u_1(z_1) = u(z)$, definovaná v G_1, je podle lemmatu 1.1 subharmonická a v každém bodě $\bar{z}_1$ hranice G_1, $\bar{z}_1 \neq 0$, platí

$$\limsup_{z_1 \in G_1,\ z_1 \to \bar{z}_1} u_1(z_1) \leqq C\,.$$

Zvolíme-li dostatečně malé $\delta > 0$, platí v T_δ $|z_1| < (1+\varepsilon)\,|z|$, tj. $\frac{k}{|z|} < \frac{(1+\varepsilon)}{|z_1|}$, a tedy lze zvolit $k_1 = (1+\varepsilon)\,k$ tak, že $k < k_1 < \frac{\pi}{\varrho(H_1 - H_2)}$ a že

$$\limsup_{z_1 \in G_1,\ z_1 \to 0} u_1(z_1)\, e^{-k_1 \frac{1}{|z_1|^\varrho}} < \infty\,,$$

čímž je úloha převedena na úlohu již vyšetřovanou.

LITERATURA

[1] *T. Radó*: Subharmonic functions, Berlin 1937.

[2] *А. И. Маркушевич:* Теория аналитических функций, Москва-Ленинград 1950.

[3] *И. И. Привалов:* К общей теории гармонических и субгармонических функций, Математический сборник 1936, том *1* (*43*), 103—122.

Резюме

ЗАМЕТКА К ПРИНЦИПУ ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЕФА

ЯРОСЛАВ ФУКА (Jaroslav Fuka), Прага

(Поступило в редакцию 28/XI 1957 г.)

В работе обобщена — с помощю элементарных конформных отображений — теорема Фрагмена-Линделёфа для полосы. В виде примера доказываемых теорем приводим частный случай теоремы 2.2:

Пусть G — область, ограниченная жордановой кривой γ. Пусть γ состоит в некоторой окрестности начала из двух парабол

$$p_1 \equiv x + ih_1x^{\varrho+1}\,, \quad p_2 \equiv x + ih_2x^{\varrho+1}\,, \quad x \geqq 0,\ h_1 > h_2\,.$$

Пусть $u(z)$ — функция, субгармоническая в G и удовлетворяющая условиям

a) *для каждой точки* $\bar{z} \in \gamma$, $\bar{z} \neq 0$, $\limsup_{z \in G,\ z \to \bar{z}} u(z) \leqq C$

б) $\limsup\limits_{z \in G,\, z \to 0} u(z)\, e^{-k\frac{1}{r^\varrho}} = M < \infty,\ 0 \leqq k < \dfrac{\pi}{\varrho(h_1 - h_2)},\ r = |z|$.

Тогда в каждой точке $z \in G$ $u(z) \leqq C$, *и если в некоторой точке* $z_0 \in G$ $u(z) = C$, *то* $u(z) = C$ *всюду в* G.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ZUM PRINZIP VON PHRAGMÉN-LINDELÖF

JAROSLAV FUKA, Praha

(Eingelangt am 28. November 1957)

In dieser Arbeit ist, mit Hilfe der elementaren konformen Abbildungen, der Phragmén-Lindelöf'sche Satz für den unendlichen Parallelstreifen verallgemeinert.

Als Beispiel der bewiesenen Sätze führen wir einen Spezialfall des Satzes 2.2 an.

Es sei G ein Gebiet, das durch eine Jordankurve γ begrenzt ist. In einer Umgebung des Nullpunktes sei die Kurve γ aus zwei Parabeln

$$p_1 \equiv x_1 + ih_1x^{\varrho+1}\,, \quad p_2 \equiv x + ih_2x^{\varrho+1}\,, \quad x \geqq 0\,, \quad h_1 > h_2\,,$$

zusammengesetzt. Es sei $u(z)$ eine subharmonische Funktion in G, welche folgenden Bedingungen genügt:

a) *In jedem Punkte* $\bar{z} \in \gamma$, $\bar{z} \neq 0$, *gilt* $\limsup\limits_{z \in G,\, z \to \bar{z}} u(z) \leqq C$,

b) $\limsup u(z)\, e^{-k\frac{1}{r^\varrho}} = M < \infty,\ 0 < k < \dfrac{\pi}{\varrho(h_1 - h_2)},\ r = |z|$.

Dann gilt $u(z) \leqq C$ *in jedem Punkte* $z \in G$, *und wenn* $u(z_0) = C$ *in einem Punkte* $z_0 \in G$ *ist, so ist in* G *identisch* $u(z) = C$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

O JISTÝCH ROZKLADOVÝCH MNOŽINÁCH ROVINY

MILAN SEKANINA, Brno

(Došlo dne 10. února 1958) DT: 519.52

Věnováno prof. Otakaru Borůvkovi, členu korespondentu ČSAV, k jeho šedesátým narozeninám.

Článek se zabývá rozkladovými množinami roviny, které jsou částí přímky s komplementem (vzhledem k přímce) o mohutnosti menší než mohutnost kontinua.

Podmnožina M roviny E_2 se nazývá *rozkladová množina* roviny E_2, existuje-li na E_2 rozklad takový, že jeho prvky jsou množiny shodné s M (viz [1]). Přímky chápeme jako množiny bodů a značíme je malými latinskými písmeny $p, l, \ldots$. Body značíme malými řeckými písmeny $\alpha, \beta, \ldots$. Průsečík přímek p_1 a p_2 zapisujeme též jako $p_1 \cap p_2$. Je-li $M \subset E_2$, card $M \geqq 2$, potom $p(M)$ značí přímku (existuje-li), obsahující M.

Nechť nyní je l libovolně, ale pevně zvolená přímka v E_2, M její podmnožina, $\mathfrak{m} = \text{card } M < 2^{\aleph}$.[1]) Předpokládejme, že $N = l - M$ je rozkladová množina roviny, $\boldsymbol{R}$ nechť značí rozklad roviny E_2 v množiny shodné s N. Prvky tohoto rozkladu budeme značit N_ι, $n_\iota = p(N_\iota)$. Protože card $(n_{\iota_1} - N_{\iota_1}) < 2^{\aleph_0}$ a že pro $\iota_k \neq \iota_1$ je $N_{\iota_k} \cap N_{\iota_l} = \emptyset$, je $n_{\iota_1} \neq n_{\iota_k}$ pro $\iota_1 \neq \iota_k$. Množinu všech n_ι označme $\mathfrak{N}$. τ_ι nechť značí pro dané ι libovolně, ale pevně zvolenou shodnost roviny takovou, že $\tau_\iota(N) = N_\iota$. V dalším budeme studovat strukturu rozkladu $\boldsymbol{R}$. Ukážeme, že přímky n_ι tvoří dvě osnovy rovnoběžných přímek, z nichž jedna obsahuje všechny možné rovnoběžky s daným směrem, druhá právě $\mathfrak{m}$ rovnoběžek.

Lemma 1. *Bodem $\alpha \in E_2$ prochází nejvýše* max $(\mathfrak{m}, \aleph_0)$ *přímek n_ι.*

Důkaz. Buď $\mathfrak{U}$ množina všech přímek n_ι, které procházejí bodem α. Připusťme, že card $\mathfrak{U} >$ max $(\mathfrak{m}, \aleph_0)$. Existuje právě jedna přímka n_{ι_0} v $\mathfrak{U}$ tak, že $\alpha \in N_{\iota_0}$. Označme $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U} - \{n_{\iota_0}\}$. Pro $n_\iota \in \mathfrak{U}_1$ platí $\alpha \in n_\iota - N_\iota$. Tedy M není prázdná množina. Existuje tedy $\beta \in n_{\iota_0} - N_{\iota_0}$. Nechť $\beta \in N_{\iota_1}$. Přímka n_{ι_1} pro-

[1]) Případem, že card $(l - M) < 2^{\aleph}$, jsem se zabýval v článku [1].

tíná všechny přímky z $\mathfrak{U}$ s eventuální výjimkou jedné z nich (totiž té, která je s ní rovnoběžná). Tedy n protíná opět card $\mathfrak{U}$ přímek z $\mathfrak{U}_1$. Poněvadž card (n_{ι_1} — — N_{ι_1}) = $\mathfrak{m}$, existuje mezi těmito přímkami card $\mathfrak{U}$ přímek takových, že mají neprázdný průnik s N_{ι_1}. Množinu těchto přímek označme $\mathfrak{U}_2$. Pro $n_\iota \in \mathfrak{U}_2$ platí tedy $N_{\iota_1} \cap n_\iota \neq \emptyset$. Poněvadž též α non $\in N_\iota$, musí být vzdálenost bodu $N_{\iota_1} \cap n_\iota$ a bodu α rovna vzdálenosti jisté dvojice bodů z M. Je-li $\mathfrak{m}$ konečné, je $\binom{\mathfrak{m}}{2}$ dvojic různých bodů z M, je-li $\mathfrak{m}$ nekonečné, je jich právě $\mathfrak{m}$, tedy je v obou případech tato mohutnost nanejvýš max ($\mathfrak{m}, \aleph_0$). Poněvadž body $N_{\iota_1} \cap n_\iota$ leží na přímce n_{ι_1} a je jich více než max ($\mathfrak{m}, \aleph_0$) = 2 max ($\mathfrak{m}, \aleph_0$), došli jsme ke sporu. Tím je lemma dokázáno.

Nyní uvedeme tvrzení obecnější:

Budiž dáno pět různých přímek $l_1, \ldots, l_5$ s těmito vlastnostmi:

l_1, l_2 se protínají v bodě α a l_3, l_4, l_5 neprocházejí bodem α. Nechť dále platí (ϱ metrika v E_2) $\varrho(l_1 \cap l_i, l_2 \cap l_i) = r$ pro $i = 3, 4, 5$. Potom platí

Lemma 2. *Nechť v_i je bod přímky l_i, $i = 3, 4, 5$, pro nějž platí $\varrho(l_1 \cap l_i, v_i) = d_1 \neq 0$, $\varrho(l_2 \cap l_i, v_i) = d_2 \neq 0$, kde d_1 a d_2 jsou kladná čísla nezávislá na i. Potom body v_i neleží v přímce.*

Důkaz plyne ihned ze známé věty (viz např. [2], odst. 72), že body v_i leží na elipse.

Přejdeme opět k vyšetřování rozkladu $\boldsymbol{R}$.

Lemma 3. *Nechť $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{N}$ taková, že pro $n_{\iota_1} \in \mathfrak{U}$, $n_{\iota_2} \in \mathfrak{U}$, $n_{\iota_1} \neq n_{\iota_2}$ je $n_{\iota_1} \nparallel n_{\iota_2}$. Potom* card $\mathfrak{U} < 2^{\aleph_0}$.

Důkaz. Připusťme, že existuje $\mathfrak{U}$ tak, že card $\mathfrak{U} = 2^{\aleph_0}$. Zvolme libovolně, ale pevně tři různé přímky $n_{\iota_0}, n_{\iota_0'}, n_{\iota_0''} \in \mathfrak{U}$. Nechť $\mathfrak{U}_1$ je množina těch přímek n_ι z $\mathfrak{U}$, pro něž platí $N_\iota \cap n_{\iota_0} = \emptyset$. Je zřejmě v důsledku lemmatu 1 card $\mathfrak{U}_1 = 2^{\aleph_0}$. Nechť $\mathfrak{U}_2$ je množina těch přímek n_ι z $\mathfrak{U}_1$, pro něž $N_\iota \cap n_{\iota 0'} = \emptyset$. Je opět card $\mathfrak{U}_2 = 2^{\aleph_0}$. Je tedy pro $n_\iota \in \mathfrak{U}_2$

$$n_\iota \cap n_{\iota_0} = \tau_\iota(\alpha_\iota)\,, \quad n_\iota \cap n_{\iota_0'} = \tau_\iota(\beta_\iota)$$

pro jisté $\alpha_\iota, \beta_\iota \in M$. Protože card $M < 2^{\aleph_0}$, existuje podmnožina $\mathfrak{U}_3 \subset \mathfrak{U}_2$ o mohutnosti $\mathfrak{n}$ větší než max ($\mathfrak{m}, \aleph_0$) takových přímek n_ι, že pro $n_\iota, n_{\iota'} \in \mathfrak{U}_3$ je $\alpha_\iota = \alpha_{\iota'}$, $\beta_\iota = \beta_{\iota'}$. Označíme-li totiž pro $\alpha, \beta \in M$ symbolem $I(\alpha, \beta)$ množinu těch indexů ι, pro něž $\alpha_\iota = \alpha$, $\beta_\iota = \beta$, dostáváme systém množin o mohutnosti nanejvýš rovné max ($\mathfrak{m}, \aleph_0$). Každý index ι patří právě do jedné z množin $I(\alpha, \beta)$, totiž do $I(\alpha_\iota, \beta_\iota)$. Sjednocení všech množin $I(\alpha, \beta)$ má tedy mohutnost $2^{\aleph_0}$ a musí tedy existovat dvojice α_1, β_1 tak, že

$$\text{card}\, I(\alpha_1, \beta_1) > \max(\mathfrak{m}, \aleph_0)\,.$$

$\mathfrak{U}_3$ je potom na příklad množina všech přímek $n_\iota \in \mathfrak{U}_2$, pro něž $\iota \in I(\alpha_1, \beta_1)$. Mezi přímkami n_ι z $\mathfrak{U}_3$ je opět $\mathfrak{n}$ takových, že $N_\iota \cap n_{\iota_0''} = \emptyset$. Je tedy $N_\iota \cap n_{\iota_0''} = \tau_\iota(\gamma_\iota)$ pro vhodné $\gamma_\iota \in M$. Existuje dále množina

$$\mathfrak{U}_4 \subset \mathfrak{U}_3 , \quad \operatorname{card} \mathfrak{U}_4 = \mathfrak{n}' > \max(\mathfrak{m}, \aleph_0)$$

taková, že pro $n_\iota, n_{\iota'} \in \mathfrak{U}_4$ je $\gamma_\iota = \gamma_{\iota'}$, což nahlédneme bezprostředně úpravou důkazu existence $\mathfrak{U}_3$. Pro $n_\iota, n_{\iota'} \in \mathfrak{U}_4$ je tedy

$$\varrho(n_\iota \cap n_{\iota_0}, n_\iota \cap n_{\iota_0'}) = \varrho(n_{\iota'} \cap n_{\iota_0}, n_{\iota'} \cap n_{\iota_0'}) = \varrho(\alpha_\iota, \beta_\iota) ,$$
$$\varrho(n_\iota \cap n_{\iota_0''}, n_\iota \cap n_{\iota_0'}) = \varrho(n_{\iota'} \cap n_{\iota_0''}, n_{\iota'} \cap n_{\iota_0'}) = \varrho(\gamma_\iota, \beta_\iota) ,$$
$$\varrho(n_\iota \cap n_{\iota_0''}, n_\iota \cap n_{\iota_0}) = \varrho(n_{\iota'} \cap n_{\iota_0''}, n_{\iota'} \cap n_{\iota_0}) = \varrho(\gamma_\iota, \alpha_\iota) .$$

Ale $\operatorname{card} \mathfrak{U}_4 = \mathfrak{n}' > \max(\mathfrak{m}, \aleph_0)$. Bodem $n_{\iota_0} \cap n_{\iota_0'}$, může procházet podle lemmatu 1 maximálně $\max(\mathfrak{m}, \aleph_0)$ přímek z $\mathfrak{U}_4$. V $\mathfrak{U}_4$ existují l_3, l_4, l_5 tak, že neprocházejí bodem $n_{\iota_0} \cap n_{\iota_0'}$. Tyto přímky spolu s $n_{\iota_0} = l_1$ a $n_{\iota_0'} = l_2$ splňují předpoklady lemmatu 2. Při tom body $v_i = l_i \cap n_{\iota_0''}$ leží na přímce $n_{\iota_0''}$, což je spor s tvrzením lemmatu 2.

Lemma 4. *Existují přímky p_1, p_2 tak, že každá přímka $n_\iota \in \mathfrak{N}$ je buď rovnoběžná s p_1 nebo s p_2.*

Důkaz. Nechť $\mathfrak{U}'$ je množina takových přímek $n_{\iota'}$, že každá přímka n_ι z $\boldsymbol{R}$ je rovnoběžná právě s jednou přímkou $n_{\iota'}$ z $\mathfrak{U}'$. Podle lemmatu 3 je $\operatorname{card} \mathfrak{U}' < 2^{\aleph_0}$. Je-li $n_{\iota'} \in \mathfrak{U}'$, označíme symbolem $\mathfrak{U}(n_{\iota'})$ množinu všech přímek z $\mathfrak{N}$ rovnoběžných s $n_{\iota'}$. Poněvadž všech přímek n_ι je $2^{\aleph_0}$ a $\mathfrak{N} = \bigcup_{n_{\iota'} \in \mathfrak{U}'} \mathfrak{U}(n_{\iota'})$, existuje n_{ι_1} tak, že

$$\operatorname{card} \mathfrak{U}(n_{\iota_1'}) = \mathfrak{n} > \max(\mathfrak{m}, \aleph_0) .$$

Označme jednodušeji $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(n_{\iota_1'})$. Připusťme, že tvrzení lemmatu 4 neplatí. Potom existují dvě přímky $n_{\iota_1}, n_{\iota_2} \in \mathfrak{N} - \mathfrak{U}$ tak, že $n_{\iota_1} \nparallel n_{\iota_2}$. Nechť $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}$ je množinou všech takových přímek n_ι z $\mathfrak{U}$, že $N_\iota \cap n_{\iota_1} = \emptyset$, $N_\iota \cap n_{\iota_2} = \emptyset$. Snadno zjistíme, že $\operatorname{card} \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{n}$. Při tom $\varrho(n_\iota \cap n_{\iota_1}, n_\iota \cap n_{\iota_2})$ může nabýt maximálně $\max(\mathfrak{m}, \aleph_0)$ hodnot. Pro $n_\iota \in \mathfrak{U}_1$ existuje však maximálně ještě jedna přímka $n_{\iota'} \in \mathfrak{U}_1$ tak, že $\varrho(n_\iota \cap n_{\iota_1}, n_\iota \cap n_{\iota_2}) = \varrho(n_{\iota'} \cap n_{\iota_1}, n_{\iota'} \cap n_{\iota_2})$ (a to rovnoběžka s n_ι, která má od průsečíku $n_{\iota_1} \cap n_{\iota_2}$ tutéž vzdálenost jako n_ι). Tím jsme došli ke sporu.

Věta 1. *Nechť p_1 a p_2 jsou přímky z lemmatu 4. Nechť $\mathfrak{N}_1$ ($\mathfrak{N}_2$) je množina těch přímek n_ι z $\mathfrak{N}$, pro něž $n_\iota \parallel p_1$ ($n_\iota \parallel p_2$). Pak lze označení zvolit tak, že*

1. *existuje $n_1 \in \mathfrak{N}_1$ tak, že pro $n_\iota \in \mathfrak{N}_2$ je $N_\iota \cap n_1 \neq \emptyset$,*
2. *$\mathfrak{N}_1$ obsahuje všechny rovnoběžky s p_1*, $\operatorname{card} \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{m}$.

Důkaz. Podle lemmatu 4 má aspoň jedna z množin $\mathfrak{N}_1$ a $\mathfrak{N}_2$ mohutnost $2^{\aleph_0}$. Označení lze volit tak, že je to $\mathfrak{N}_1$. Je-li $M = \emptyset$, potom $\mathfrak{N}_2 = \emptyset$ a lemma je dokázáno. Je-li $M \neq \emptyset$, existuje $n_{\iota_1} \in \mathfrak{N}_2$. Nechť $\mathfrak{U}$ je množina všech těch přímek $n_\iota \in \mathfrak{N}_1$, pro něž $N_{\iota_1} \cap n_\iota \neq \emptyset$. Je $\operatorname{card} \mathfrak{U} = 2^{\aleph_0}$. Množinu $\mathfrak{U}$ rozložme nyní ve dvě třídy $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ takto: dvě přímky n_ι, $n_{\iota'}$ z $\mathfrak{U}$ patří do téže třídy právě tehdy, když existuje translace τ^*, pro niž $\tau^*(N_\iota) = N_{\iota'}$. Označení budiž zvoleno tak, že card $\mathfrak{U}_1 = 2^{\aleph_0}$. Zvolme libovolně, ale pevně $n_{\iota_2} \in \mathfrak{U}_1$, a pro každé $n_\iota \in \mathfrak{U}_1$ translaci τ_ι^* tak, že $\tau_\iota^*(N_{\iota_2}) = N_\iota$. Z definice množiny $\mathfrak{U}_1$ plyne, že pro $n_\iota \in \mathfrak{U}_1$ je $n_\iota \cap n_{\iota_1} = \tau_\iota^*(\alpha_\iota)$ pro jisté $\alpha_\iota \in n_{\iota_2} - N_{\iota_2}$. Poněvadž card $\mathfrak{U}_1 = 2^{\aleph_0}$ a card $(n_\iota - N_\iota) = \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, existuje podmnožina $\mathfrak{U}_1' \subset \mathfrak{U}_1$, card $\mathfrak{U}_1' = \mathfrak{n}' > \mathfrak{m}$ takových n_ι, že pro n_ι, $n_{\iota'} \in \mathfrak{U}_1'$ je $\alpha_\iota = \alpha_{\iota'} = \alpha$. Připusťme nyní, že existuje $n_{\iota_3} \in \mathfrak{N}_2$ tak, že pro $n_{\iota_4} \in \mathfrak{U}_1'$ platí $N_{\iota_3} \cap n_{\iota_4} = \emptyset$. Potom je pro $n_\iota \in \mathfrak{U}_1'$ také $N_{\iota_3} \cap n_\iota = \emptyset$. Kdyby totiž pro některé $n_\iota \in \mathfrak{U}_1'$ platilo $N_{\iota_3} \cap n_\iota \neq \emptyset$, potom by z $N_{\iota_3} \cap n_\iota \in N_{\iota_3}$ plynulo $N_{\iota_3} \cap n_\iota$ non $\in N_\iota$ a tedy $N_{\iota_3} \cap n_\iota \in n_\iota - N_\iota$. Existuje pak $\beta \in n_{\iota_2} - N_{\iota_2}$ tak, že $\tau_\iota^*(\beta) = N_{\iota_3} \cap n_\iota$. Je však

$$\varrho(n_{\iota_3} \cap n_{\iota_4}, n_{\iota_1} \cap n_{\iota_4}) = \varrho(n_{\iota_3} \cap n_\iota, n_{\iota_1} \cap n_\iota)$$

(jedná se o protější strany rovnoběžníka), tedy

$$\tau_{\iota_4}^*(\beta) = n_{\iota_3} \cap n_{\iota_4} \quad \text{a} \quad n_{\iota_3} \cap n_{\iota_4} \in n_{\iota_4} - N_{\iota_4} \Rightarrow n_{\iota_3} \cap n_{\iota_4} \text{ non} \in N_{\iota_4}\,,$$

čili $n_{\iota_3} \cap n_{\iota_4} \in N_{\iota_3}$ a $N_{\iota_3} \cap n_{\iota_4} \neq \emptyset$, což je ve sporu s naším předpokladem. Tím jsme shora uvedené tvrzení pro n_ι dokázali. Ale máme opět spor, protože takových rovnoběžných přímek n_ι může existovat v $\boldsymbol{R}$ pouze $\mathfrak{m}$. Za n_1 můžeme tedy položit libovolnou přímku z $\mathfrak{U}_1'$. Pro každé $n_\iota \in \mathfrak{N}_2$ je $N_1 \cap n_\iota = \emptyset$, tedy card $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{m}$. Tvrzení o $\mathfrak{N}_1$ je potom evidentní. Tím je věta dokázána.

Věta 2. *Pro $\zeta \in M$ existuje translace τ přímky l tak, že $\tau(M) \subset M$, ζ non $\in \tau(M)$.*

Důkaz. Nechť $\mathfrak{N}_1$ a $\mathfrak{N}_2$ jsou množiny z věty 1, n_1 přímka z tvrzení 1 věty 1. Nechť $\eta \in n_1 - N_1$. Existuje $n_{\iota_2} \in \mathfrak{N}_2$ tak, že $\eta \in N_{\iota_2}$. Dále existuje $\eta' \in n_{\iota_2} - N_{\iota_2}$. Nechť $\eta' \in N_{\iota_3}$ (při tom $n_{\iota_3} \in \mathfrak{N}_1$). Nechť τ' je translace roviny E_2 ve směru p_2 (definici p_2 viz v lemmatu 4), která převádí přímku n_{ι_3} v n_1. Z tvrzení 1 věty 1 o n_1 ihned plyne, že

$$\tau'(n_{\iota_3} - N_{\iota_3}) \subset n_1 - N_1 \quad \text{a} \quad \eta \text{ non} \in \tau'(n_{\iota_3} - N_{\iota_3})\,.$$

Dále je

$$\tau'(n_{\iota_3} - N_{\iota_3}) \cong n_1 - N_1\,,$$

tj. existuje shodnost τ'' přímky n_1 tak, že

$$\tau''(\tau'(n_{\iota_3} - N_{\iota_3})) = n_1 - N_1\,.$$

Protože $\tau'(n_{\iota_3} - N_{\iota_3})$ je vlastní podmnožina v $n_1 - N_1$, je τ'' translací. Tvrzení věty pak plyne ze shodnosti $M \cong n_1 - N_1$.

Ukážeme, že podmínka vyslovená ve větě 2, je podmínkou dostatečnou při $\mathfrak{m} = \aleph_0$ pro to, aby $N = l - M$ byla rozkladovou množinou roviny. Uveďme nejprve pomocné tvrzení:

Lemma 5. *Nechť p je přímka, $M \subset p$, card $M = \aleph_0$. Nechť je splněna následující vlastnost* (V):

Pro $\zeta \in M$ existuje translace τ přímky p tak, že ζ non $\in \tau(M) \subset M$. Potom existuje posloupnost podmnožin $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ taková, že

1. *pro M_n existuje translace σ_n přímky p tak, že $\sigma_n(M) = M_n \subset M$,*
2. $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots \supset M_n \supset \ldots,$
3. $\prod_{n=0,1,\ldots} M_n = \emptyset$.

Důkaz. Ad 1. Uspořádejme body z M do posloupnosti $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}$. Existuje translace na p τ_1 tak, že ξ_1 non $\in \tau_1(M) \subset M$. Položme $\varphi_1 = \tau_1$. Buďtež definovány translace φ_k pro $k < n$ tak, že $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}(M) \subset M$. Nechť n_1 je první index, pro nějž $\xi_{n_1} \in \varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}(M)$. Existuje translace τ_{n_1} na p tak, že ξ_{n_1} non $\in \tau_{n_1}(M) \subset \subset M$. Položíme $\varphi_n = \tau_{n_1}$. Je

$$\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}\, \varphi_n(M) = \varphi_n[\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}(M)] \subset \varphi_n(M) \subset M\,.$$

Položíme $\sigma_n = \varphi_1 \ldots \varphi_n$, $M_n = \sigma_n(M)$, $M_0 = M$.

Ad 2. $M_{n+1} = \sigma_{n+1}(M) = \sigma_n \,.\, \varphi_{n+1}(M) \subset \sigma_n(M) = M_n$.

Ad 3. Nechť $\xi_n \in M_{n-1}$. Potom $n_1 = n$ a ξ_n non $\in \sigma_n(M) = M_n$. Tedy ξ_n non $\in \prod_{n=0,1,\ldots} M_n$.

Poznámka. Je-li C množina všech celých čísel a $C + n\pi$ (π libovolné iracionální číslo) značí množinu, která vznikne z C translací o $n\pi$, pak $\bigcup(C + n\pi)$, při čemž se sčítá přes přirozená n, je příklad množiny s vlastností (V).

Věta 3. *Nechť $M \subset p$ má vlastnost* (V), card $M = \aleph_0$. *Potom $p - M$ je rozkladovou množinou roviny E_2.*

Důkaz. Zaveďme v E_2 kartézskou soustavu souřadnic. Nechť např. p splyne s osou souřadnic x, body z M ztotožníme s jejich souřadnicemi $x_1, \ldots, x_n, \ldots$. Nechť dále $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n \supset \ldots$ je posloupnost z lemmatu 5. Nechť $x \in p$. Potom nechť $n(x)$ je první index takový, že x non $\in M_{n(x)}$. $n(x)$ existuje, což plyne z vlastnosti 3 lemmatu 5. Položme pro $x_i \in M$ $p_i \equiv x = x_i$; nechť R_i je množina bodů (x_i, y), kde $y \in p - M_{n(x_i)-1}$, $l_k \equiv y = k$ (k reálné číslo), P_k budiž množina bodů (y, k), kde $y \in p - M_{n(k)}$.

Ukážeme, že systém všech množin P_k a R_i tvoří rozklad na E_2:

1. P_k, R_i jsou neprázdné. 2. $P_k \cap R_i = \emptyset$.

Důkaz. Jedná se o to, že průsečík přímek l_k a p_i (x_i, k) nepatří do $P_k \cap R_i$. Rozlišme dva případy:

$$\text{a) } n(k) < n(x_i)\,, \quad \text{b) } n(k) \geqq n(x_i)\,.$$

Ad a): Potom $x_i \in M_{n(k)}$, tedy x_i non $\in p - M_{n(k)}$, tedy bod (x_i, k) non $\in P_k$.

Ad b): Potom $k \in M_{n(x_i)-1}$, tedy k non $\in p - M_{n(x_i)-1}$, tedy (x_i, k) non $\in R_i$.

3. $\bigcup R_i \cup \bigcup P_k = E_2$.

Důkaz. Uvažujme o bodu (a, b):

a) nechť a non $\in M$. Potom $(a, b) \in P_b$.

b) $a = x_i$ pro jisté i, b non $\in M$. Potom $(a, b) \in R_i$.

c) $a, b \in M$, $a = x_i$, $b = x_j$.

c′) Nechť $n(b) < n(a)$. Potom b non $\in M_{n(a)-1}$, tedy $(a, b) \in R_i$.

c″) Nechť $n(b) \geqq n(a)$. Potom $a \in p - M_{n(b)}$, tedy $(a, b) \in P_b$. Je zřejmě $P_k \cong p - M \cong R_i$. Tím je věta 3 dokázána.

Ukážeme, že věta 3 obecně neplatí pro $\mathfrak{m}$, když $\aleph_0 < \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$. Nechť tedy $\mathfrak{m}$ je kardinální číslo, pro něž platí $\aleph_0 < \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$. Budiž H Hamelova base,[2]) M množina indexů, card $M = \mathfrak{m}$. Nechť $G \subset H$, card $G = \mathfrak{m}$. Budeme též psát $G = \{p_i\}$, $i \in M$. Položme $G_i = G - \{p_i\}$. Nechť $H_1 \subset H$, card $H_1 = \mathfrak{m}$, $G \cap H_1 = \emptyset$ (H_1 zřejmě existuje). Budeme psát $H_1 = \{x_i\}$, $i \in M$. Nechť $\mathfrak{G}_i = [G_i]$ je additivní grupa vytvořená množinou G_i,

$$\mathscr{G}_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} (x_i + \mathfrak{G}_i + np_i)$$

($x_i + \mathfrak{G}_i + np_i$ znamená množinu všech čísel tvaru $x_i + g + np_i$, $g \in \mathfrak{G}_i$), $\mathscr{G} = \bigcup_{i \in M} \mathscr{G}_i$. Je card $\mathscr{G} = \mathfrak{m}$. Ukážeme, že $E_1 - \mathscr{G}$ *není rozkladovou množinou na* E_2 (E_1 zde značí množinu všech reálných čísel), ačkoli má vlastnost (V). Důkaz provedeme pomocí několika dílčích tvrzení:

a) $\mathscr{G}_i$ *jsou navzájem disjunktní.*

b) $\mathscr{G}_i + np_k = \mathscr{G}_i$, *n celé*, $i \neq k$.

c) $x_i + g + np_i$ non $\in \mathscr{G}_i + (n + 1)\, p_i \subset \mathscr{G}_i$, *n celé nezáporné*, $g \in \mathfrak{G}_i$.

Důkaz tvrzení a), b), c) je evidentní z definice $\mathscr{G}_i$.

d) $\mathscr{G}$ *má vlastnost* (V). Důkaz plyne z b) a c).

e) *Nechť* $\mathscr{G} + t \subset \mathscr{G}$. *Potom* $\mathscr{G}_i + t \subset \mathscr{G}_i$ *a* $t = \Sigma k_j p_j$, $k_j \geqq 0$ *celé, při čemž se sčítá přes všechna* p_j *a jen konečně mnoho* k_j *je větších než nula.*

Důkaz. Nechť

$$x_i + g + n_i p_i + t = x_k + g' + m_k p_k\,,\quad x_k + g' + m_k p_k + t = x_l + g'' + r_l p_l\,,$$

při čemž $g \in \mathfrak{G}_i$, $g' \in \mathfrak{G}_k$, $g'' \in \mathfrak{G}_l$.

Připusťme, že $i \neq k$. Potom

$$t = x_k - x_i + g' - g + m_k p_k - n_i p_i\,,$$

$$t = x_l - x_k + g'' - g' + r_l p_l - n_k p_k\,,$$

[2]) Množina reálných čísel $H = \{a_0, a_1, \ldots\}$ se nazývá Hamelovou basí, když každé reálné číslo a se dá vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru $a = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \ldots$, kde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ jsou racionální čísla, při čemž je jen konečně mnoho různých od nuly. Je card $H = 2^{\aleph_0}$ (viz G. Hamel: Eine Basis aller Zahlen…, Math. Annalen, *60* 459—462).

což je spor s tím, že $x_i, x_k, x_l \in H_1$ a $H_1 \cap G = \emptyset$. Tím je dokázáno prvé tvrzení. Dále plyne, že

$$t = (g' - g) + (n_i - m_i)\, p_i\,.$$

Je $x_i + t = x_i + (g' - g) + (n_i - m_i)\, p_i \in \mathscr{G}_i$. Odtud $n_i - m_i \geqq 0$. Číslo $g' - g$ jakožto prvek grupy $[G]$ vzniklo sečtením konečného počtu p_i resp. $-p_i$. Tím je tvrzení e) dokázáno.

Označme ještě množinu indexů $j \in M$, pro něž $k_j > 0$, symbolem $N[t]$.

f) *Nechť $\mathscr{G} + t \subset \mathscr{G}$, $x_i + g + np_i$ non $\in \mathscr{G} + t$ pro jisté $i \in M$, $g \in \mathfrak{G}_i$ a n celé nezáporné. Potom $x_i + g' + np_i$ non $\in \mathscr{G} + t$ pro každé $g' \in \mathfrak{G}_i$ a $0 \leqq m \leqq n$.*

Důkaz. Nechť $t = \Sigma k_j p_j$. Připusťme, že $k_i \leqq n$.
Potom

$$t = g'' + (n - k_i)\, p_i\,, \quad g'' \in \mathfrak{G}_i\,.$$

$\mathfrak{G}_i$ je grupa, tedy $g' - g'' \in \mathfrak{G}_i$ a

$$x + g - g'' + k_i p_i + g'' + (n - k_i)\, p_i = x + g + np_i \in \mathscr{G} + t\,,$$

což je spor s předpokladem. Tedy $k_i > n$. $x \in \mathscr{G}_i + t \Rightarrow x = x_i + g_1 + mp_i$, kde $g_1 \in \mathfrak{G}_i$ a $m > n$.

g) *Nechť $\mathscr{G} \supset \mathscr{G} + t_1$, $\mathscr{G} \supset \mathscr{G} + t_2, \ldots, \mathscr{G} \supset \mathscr{G} + t_n, \ldots$*

Potom $\prod_{n=1}^{\infty} (\mathscr{G} + t_n) \neq \emptyset$.

Důkaz. Existuje index $k \in M$, pro nějž platí k non $\in N[t_n]$ pro všechna přirozená n. Je potom podle b) $\mathscr{G}_k + t_n = \mathscr{G}_k$ pro všechna přirozená n. Tedy $\mathscr{G}_k \subset \prod_{n=1}^{\infty} (G + t)$.

Věta. *Množina $E_1 - \mathscr{G}$ není rozkladovou množinou roviny.*

Důkaz. Připusťme, že existuje rozklad $\boldsymbol{R}$ na rovině v množiny shodné s $E_1 - \mathscr{G}$. Nechť $\mathfrak{N}_1$ a $\mathfrak{N}_2$ jsou množiny přímek z věty 1, n_1 z téže věty zvolme za osu x kosoúhlých souřadnic, za osu y zvolme přímku rovnoběžnou s přímkami z $\mathfrak{N}_2$ a počátek a orientaci zvolme tak, aby prvek rozkladu $\boldsymbol{R}$ ležící nyní v ose x měl za množinu svých x-ových souřadnic množinu $E_1 - \mathscr{G}$. Projekci množiny $N \subset E_2$ na osu x (resp. y) označíme jako $N(x)$ (resp. $N(y)$).

Zvolme nyní libovolně, ale pevně $i \in M$ a uvažujme o bodech

$$(x_i, 0), (x_i + p_i, 0) \ldots, (x_i + np_i, 0), \ldots, \text{kde je } n \text{ celé nezáporné}\,. \quad (1)$$

Uvažujme dále o přímkách ${}^n m \equiv x = np_i + x_i$. Z toho, že body (1) neleží v $n_1 - \mathscr{G}$, plyne, že v přímce ${}^n m$ leží prvek rozkladu $\boldsymbol{R}$; označme jej ${}^n M$. Nechť nyní bod $(np_i + x_i, c)$ není prvkem ${}^n M$. Potom tento bod leží v jistém $M \in \boldsymbol{R}$, M pak leží v přímce $p \equiv y = c$. Z vlastnosti přímky n_1 plyne, že $E_1 - M(x) \subset \mathscr{G}$. Protože $np_i + x_i$ non $\in E_1 - M(x)$, je podle f) $n' p_i + x_i$ non $\in E_1 - M(x)$

pro n', $0 \leqq n' \leqq n$. Z toho plyne, že $(n'p_i + x_i, c) \in M$, a tedy $(n'p + x_i, c)$ non $\in {}^{n'}M$. Je potom

$$({}^0m - {}^0M)(y) \supset ({}^1m - {}^1M)(y) \supset \ldots \supset ({}^nm - {}^nM)(y) \ldots .$$

Poněvadž $({}^nm - {}^nM)(y) \cong \mathscr{G}$, existuje podle g) $y^* \in \prod_{n=0}^{\infty} ({}^nm - {}^nM)(y)$. V přímce $p^* \equiv y = y^*$ nechť leží $Y^* \in \boldsymbol{R}$. Podle volby y^* jsou body

$$(np_i + x_i, y^*) \in Y^* \text{ pro } n \text{ celé nezáporné.} \tag{2}$$

Dále je $(p^* - Y^*)(x) = \mathscr{G} + t$ pro vhodné t, $(p^* - Y^*)(x) \subset \mathscr{G}$ a podle e) $\mathscr{G}_i + t \subset \mathscr{G}_i$. Ale podle f) v důsledku (2) je $\mathscr{G}_i \cap (p^* - Y^*)(x) = \emptyset$. Došli jsme tedy ke sporu. Věta je tím dokázána.

LITERATURA

[1] *M. Sekanina:* O rozkladech v eukleidovských prostorech, Časopis pro pěstování matematiky, *83* (1958), 70—79.
[2] *H. Wieleitner:* Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВАХ РАЗЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

МИЛАН СЕКАНИНА (Milan Sekanina), Брно

(Поступило в редакцию 10/II 1958 г.)

В статье рассматриваются разложения $\boldsymbol{R}$ евклидовой плоскости E_2 на множества, конгруэнтные с подмножеством N прямой l, причем $\mathfrak{m} = \operatorname{card}(l - N) < 2^{\aleph_0}$. В том случае, когда такое разложение существует, называем N множеством разложения E_2.

Пусть $\mathfrak{N}$ обозначает множество тех прямых, на которых лежат элементы $\boldsymbol{R}$. Тогда $\mathfrak{N}$ состоит из двух подмножеств $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, из которых одно состоит из всех параллельных прямых определенного направления, а другое содержит в точности $\mathfrak{m}$ параллельных прямых другого направления (теорема 1).

В теореме 2 доказывается, что для того, чтобы N было множеством разложения E_2, необходимо, чтобы для каждой точки ξ множества $l - N$ существовало сдвижение τ прямой l такое, что $\tau(l - N) \subset l - N$, ξ non $\in \tau$ $(l - N)$. Если $\mathfrak{m} = \aleph_0$, то это условие является также достаточным; в случае $\aleph_0 < \mathfrak{m}$ это не имеет места.

Summary

ON CERTAIN DECOMPOSITION SETS OF THE PLANE

MILAN SEKANINA, Brno

(Received February 10, 1958)

The paper is concerned with the decompositions $\boldsymbol{R}$ of the euclidean plane E_2 into the sets congruent with a given subset N of the straight line l, when $\mathfrak{m} = \operatorname{card}(l - N) < 2^{\aleph_0}$. When such a decomposition exists, we say that N is a decomposition set of E_2.

Let $\mathfrak{N}$ be the set of the straigt lines, in which elements of $\boldsymbol{R}$ are contained. It is proved, that $\mathfrak{N}$ consists of two subsets $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, one of which consists of all straight lines parallel to a given direction, the other contains exactly $\mathfrak{m}$ straight lines parallel to another direction (theorem 1).

In theorem 2 we prove that the following condition is necesary for N being a decomposition set of E_2:

If ξ is a point of $l - N$, there exists a translation τ of l such that $\tau(l - N) \subset \subset l - N$, ξ non $\in \tau(l - N)$. In the case $\mathfrak{m} = \aleph_0$ this condition is sufficient, but this is not the case for $\mathfrak{m} > \aleph_0$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

POZNÁMKA K TEORII (BB)-INTEGRÁLU

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha.

(Došlo dne 15. února 1958) DT: 517.6

Výsledků obsažených v práci [1] je využito k odvození podmínek (BB)-integrability náhodné funkce intervalu.

1. Úvod a shrnutí. V práci [4] jsme zavedli pojem náhodné funkce intervalu s nezávislými přírůstky a pojem (BB)-integrálu takové funkce. Při studiu podmínek (BB)-integrability byla tam v § 5 dokázána věta 15 udávající nutné a postačující podmínky (BB)-integrability dané náhodné funkce $\boldsymbol{X}$ definované v intervalu K, za předpokladu, že $\boldsymbol{X}$ je na K spojitá v $\emptyset$.[1])

H. Bergström studoval v [1] podmínky existence limitních zákonů rozložení součtů nezávislých náhodných proměnných a dokázal některé věty, jichž lze využíti k odvození podmínek (BB)-integrability náhodné funkce intervalu podobně, jako jsme v [4] využili vět uvedených v § 25 monografie [2]. Místo poměrně složitých podmínek věty 15 z [4] dostaneme tak jednu podmínku jednodušší, ovšem s přihlédnutím k dalšímu předpokladu (b). Bez zajímavosti není ani důsledek pomocné věty z odstavce 2, resp. jejího zobecnění; je uveden v odstavci 4 a týká se souvislosti (BB)-integrability s existencí (BB)-integrálu.

2. Pomocná věta. Provedeme si nejprve některé pomocné úvahy z teorie Burkillova integrálu, které nám později poslouží při důkazu naší hlavní věty. Budiž K konečný interval v $R = (-\infty, \infty)$ a budiž $f(I, x)$ konečná reálná funkce intervalu definovaná pro $I \subset K$, $x \in R$. Řekneme, že Burkillův integrál $\int_K f(I, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in R$, jestliže pro libovolnou posloupnost $\{\mathscr{D}_n\}$ dělení intervalu K splňující $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{I \in \mathscr{D}_n} f(I, x) = \int_K f(I, x) < \infty \tag{1}$$

stejnoměrně vzhledem k $x \in R$.

Podmínku stejnoměrné konvergence integrálu $\int_K f(I, x)$ lze vyjádřiti též tímto ekvivalentním způsobem (srv. [3], 3.6):

[1]) Znalost práce [4] se v tomto článku předpokládá, a proto bez rozpaků používáme pojmů i označení, které jsme v [4] zavedli.

Ke každému kladnému ε existuje kladné δ takové, že pro libovolná dvě dělení $\mathscr{D}_1$ a $\mathscr{D}_2$ intervalu K splňující $\nu(\mathscr{D}_1) < \delta$ a $\nu(\mathscr{D}_2) < \delta$ platí

$$\sup_{x \in R} |\sum_{I \in \mathscr{D}_1} f(I, x) - \sum_{I \in \mathscr{D}_2} f(I, x)| < \varepsilon . \tag{2}$$

Lemma. *Jestliže Burkillův integrál* $\int_K f(I, x)$ *konverguje stejnoměrně vzhledem k* $x \in R$, *pak pro každý interval* $J \subset K$ *integrál* $\int_J f(I, x)$ *rovněž konverguje stejnoměrně vzhledem k* $x \in R$.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$, najdeme takové $\delta > 0$, aby pro každá dvě dělení intervalu K s normami menšími než δ platilo (2). Budiž J libovolný interval $J \subset K$ a buďtež $\mathscr{D}_1'$ a $\mathscr{D}_2'$ dvě dělení intervalu J s normami menšími než δ. Dělení $\mathscr{D}_1'$ a $\mathscr{D}_2'$ doplníme na dělení $\mathscr{D}_1$ resp. $\mathscr{D}_2$ celého intervalu K tak, aby se jejich normy nezvětšily; přitom v intervalech tvořících rozdíl $K - J$ (které mohou být i prázdné), doplňujeme obě dělení týmiž intervaly. Pro dělení $\mathscr{D}_1$ a $\mathscr{D}_2$ platí tedy (2), avšak

$$\sum_{I \in \mathscr{D}_1 - \mathscr{D}_1'} f(I, x) = \sum_{I \in \mathscr{D}_2 - \mathscr{D}_2'} f(I, x) , \tag{3}$$

takže skutečně

$$\sup_{x \in R} |\sum_{I \in \mathscr{D}_1'} f(I, x) - \sum_{I \in \mathscr{D}_2'} f(I, x)| < \varepsilon , \tag{4}$$

c. b. d.

3. Hlavní věta. Budiž K konečný interval v R, budiž $\mathbf{X}$ náhodná funkce intervalu s nezávislými přírůstky definovaná v K. Označíme $F(I, x)$ distribuční funkci náhodné proměnné $X(I)$ a pro $0 < \eta < \infty$ položíme pak

$$M_j(I, \eta) = \int_{|x| < \eta} x^j \, \mathrm{d}F(I, x) , \quad j = 1, 2 . \tag{5}$$

Symbolem $E(x)$ označíme distribuční funkci náhodné proměnné $V\{0\}$, symbolem $\Phi(x)$ označíme distribuční funkci normální, tj.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t . \tag{6}$$

O náhodné funkci $\mathbf{X}$ budeme v tomto odstavci stále předpokládat, že splňuje následující dvě podmínky:

(a) funkce $\mathbf{X}$ je spojitá v $\emptyset$, tj. platí

$$\lim_{|I| \to 0} F(I, x) = E(x) \tag{7}$$

stejnoměrně vzhledem k $I \subset K$;[2])

(b) pro každé konečné kladné η existuje konečný horní Burkillův integrál

$$\overline{\int_K} |M_1(I, \eta)| < \infty . \tag{8}$$

[2]) Konvergencí distribučních funkcí rozumíme obvyklou konvergenci v podstatě.

Poznámka. Je zřejmé, že podmínka (b) je splněna např. vždy tehdy, jestliže náhodné proměnné $X(I)$ mají symetrické (okolo nuly) zákony rozložení; stačí dokonce, aby tato podmínka byla splněna jen pro dostatečně malé intervaly $I \subset K$. V tomto případě bude ovšem $M_1(I, \eta) = 0$ pro každé $\eta < \infty$, a tedy (8) platí, neboť integrál je roven nule.

Každé distribuční funkci $F(I, x)$ a kladnému číslu σ pak přiřadíme tzv. Weierstrassovu transformaci $F_\sigma(I, x)$ vzorcem

$$F_\sigma(I, x) = F(I, x) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right), \tag{9}$$

(používáme přitom obvyklé značky * pro označení konvoluce dvou distribučních funkcí). Položme nyní

$$\begin{aligned} H_\sigma(I,x) &= F_\sigma(I,x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right), \\ &= [F(I,x) - E(x)] * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Funkce $H_\sigma(I, x)$ je pro každé $\sigma > 0$, $I \subset K$, rozdílem dvou distribučních funkcí, tedy funkcí s omezenou variací, a platí $-1 \leqq H_\sigma(I, x) \leqq 1$ pro všechna $x \in R$, $\sigma > 0$, $I \subset K$.

Nyní již můžeme vysloviti svou hlavní větu vyjadřující podmínky (BB)-integrability funkce $\mathbf{X}$ v intervalu K za předpokladu, že $\mathbf{X}$ splňuje podmínky (a) a (b):

Věta. *Nutnou a postačující podmínkou (BB)-integrability funkce $\mathbf{X}$ v K jest, aby pro každé $\sigma > 0$ Burkillův integrál*

$$\int_K H_\sigma(I, x) \tag{11}$$

konvergoval stejnoměrně vzhledem k $x \in R$.

Důkaz. I. Ukážeme si nejprve nutnost této podmínky. Je-li tedy $\mathbf{X}$ (BB)-integrabilní v K, pak ovšem existuje i (BB)-$\int_K \mathbf{X}$. Budiž $\{\mathscr{D}_n\}$ libovolná posloupnost dělení intervalu K splňující podmínku $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$. Nechť dělení $\mathscr{D}_n$ se skládá z intervalů $I_1^{(n)}, I_2^{(n)}, \ldots, I_{k_n}^{(n)}$. Položíme-li nyní

$$F_k(n; x) = \begin{matrix} F(I_k^{(n)}, x) & \text{pro } 1 \leqq k \leqq k_n\,, \\ E(x) & \text{pro } k_n < k\,, \end{matrix} \tag{12}$$

pak tyto distribuční funkce $F_k(n; x)$ tvoří dvojnou posloupnost, která splňuje podmínku C_0 (a tedy také podmínku C) práce Bergströmovy (srv. [1], § 10), tj. platí

$$\lim_{n \to \infty} F_k(n; x) = E(x) \tag{13}$$

stejnoměrně vzhledem ke k; to plyne z předpokladu (a). Kromě toho je tato posloupnost také *centrovaná*, tj. platí vzorec (10.4) práce Bergströmovy, což je důsledkem předpokladu (b). Podle Bergströmovy věty 17.1 pak ovšem posloupnost funkcí

$$f_{0k_n}(n, x) = \sum_{j=1}^{k_n} [F_j(n; x) - E(x)] \tag{14}$$

je cauchyovská ve W-normě, tj. platí pro každé $\sigma > 0$

$$\sup_{x \in R} \left| f_{0k_n}(n, x) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - f_{0k_m}(m, x) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right| < \varepsilon \tag{15}$$

jakmile n a m jsou dostatečně velká. V našem označení je však (15) ekvivalentní se vztahem

$$\sup_{x \in R} \left| \sum_{I \in \mathscr{D}_n} H_\sigma(I, x) - \sum_{I \in \mathscr{D}_m} H_\sigma(I, x) \right| \to 0 \tag{16}$$

platným pro každé $\sigma > 0$, takže pro každé $\sigma > 0$ existuje limita

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{I \in \mathscr{D}_n} H_\sigma(I, x) , \tag{17}$$

a to stejnoměrná vzhledem k $x \in R$. Zbývá již nyní jen ukázati, že tato limita je nezávislá na konkretní volbě posloupnosti dělení $\mathscr{D}_n$. To se však již snadno provede obvyklým způsobem: vezměme dvě takové posloupnosti $\{\mathscr{D}'_n\}$ a $\{\mathscr{D}''_n\}$ splňující $\nu(\mathscr{D}'_n) \to 0$, $\nu(\mathscr{D}''_n) \to 0$. Pro obě existují (stejnoměrně vzhledem k $x \in R$) limity (17). Utvoříme kombinovanou posloupnost $\{\mathscr{D}_n\}$ tak, že položíme $\mathscr{D}_{2k-1} = \mathscr{D}'_k$, $\mathscr{D}_{2k} = \mathscr{D}''_k$ pro $k = 1, 2, \ldots$ Platí zřejmě opět $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$, a tedy i vztah obdobný (16), z toho však již vyplývá rovnost obou limit. Dokázali jsme tak skutečně stejnoměrnou konvergenci integrálu (11).

II. Předpokládejme nyní naopak, že podmínka věty je splněna, máme pak dokázati, že pro libovolný interval $J \subset K$ existuje integrál (BB)-$\int_J \mathbf{X}$. Budiž tedy J libovolný takový interval, v důsledku pomocné věty, kterou jsme si dokázali v odstavci 2, konverguje také integrál $\int_J H_\sigma(I, x)$ stejnoměrně vzhledem k $x \in R$, a to pro každé kladné σ. Budiž $\{\mathscr{D}_n\}$ libovolná posloupnost dělení intervalu J, klademe opět $\mathscr{D}_n = \{I_1^{(n)}, \ldots, I_{k_n}^{(n)}\}$, rovněž funkce $F_k(n; x)$ a $f_{0k_n}(n, x)$ definujeme analogicky jako v prvé části důkazu. Posloupnost $\{f_{0k_n}(n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ je v důsledku stejnoměrné konvergence integrálu $\int_J H_\sigma(I, x)$ opět cauchyovská ve W-normě, takže odtud plyne i existence limity konvolucí

$$\lim_{n \to \infty} F(I_1^{(n)}, x) * \ldots * F(I_{k_n}^{(n)} x) = G(J, x) \tag{18}$$

s limitní distribuční funkcí $G(J, x)$, zřejmě nezávislou na volbě dělení $\mathscr{D}_n$. Existuje tedy (BB)-integrál náhodné funkce $\mathbf{X}$ v intervalu J, c. b. d.; $G(J, x)$ je příslušná distribuční funkce.

4. Důsledky. Jak vyplývá z důkazu naší věty, stačí k zaručení stejnoměrné konvergence integrálu (11) již existence (BB)-integrálu náhodné funkce $\mathbf{X}$ v intervalu K. Odtud vyplývá bezprostředně tento zajímavý

Důsledek. *Za předpokladu splnění podmínek* (a) *a* (b) *je existence integrálu* $(BB)\text{-}\int_K \mathbf{X}$ *nutnou a postačující podmínkou* (BB)*-integrability náhodné funkce* $\mathbf{X}$ *v intervalu* K.

Jak jsme si ukázali v [4], § 6, není obecně (BB)-integrabilita důsledkem existence (BB)-integrálu; náhodná funkce uvedená v § 6 práce [4] jako protipříklad nevyhovuje ovšem podmínce (a). Předpoklad (b) však přitom splněn je, neboť všechny příslušné náhodné proměnné mají symetrické zákony rozložení, protože jejich charakteristické funkce jsou vesměs reálné.

Dá se však ukázati, že podmínka (b) není zde podstatná a že ji lze vypustit. Lemma dokázané v odstavci 2 lze totiž bezprostředně rozšířiti i na komplexní funkce intervalu a na případ, kdy x probíhá libovolnou množinu v R (viz též [6]). Platí tedy

Věta. *Budiž* $\mathbf{X}$ *náhodná funkce intervalu definovaná v intervalu* K, *spojitá v* $\emptyset$. *Nechť existuje* $(BB)\text{-}\int_K \mathbf{X}$. *Potom je* $\mathbf{X}$ *v* K (BB)*-integrabilní.*

Důkaz. Budiž $\psi(I, s)$ příslušná ψ-funkce náhodné funkce $\mathbf{X}$. Ježto

$$(BB)\text{-}\int_K \mathbf{X} \sim B \lim_{n\to\infty} \sum_{I_j^{(n)} \in \mathscr{D}_n} X(I_i^{(n)}) \tag{19}$$

pro libovolnou posloupnost $\{\mathscr{D}_n\}$ dělení intervalu K, pro kterou $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$, a náhodné proměnné $X(I_j^{(n)})$ jsou v důsledku spojitosti funkce $\mathbf{X}$ nekonečně malé (srv. [2], [4]), je nutně $(BB)\text{-}\int_K \mathbf{X} \in \mathfrak{X}$ (viz [2], § 24). Pro každé $s \in R$ tedy existuje *konečná* limita

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{I_j^{(n)} \in \mathscr{D}_n} \psi(I_j^{(n)}, s) = \int_K \psi(I, s)\,, \tag{20}$$

a dokonce (srv. [5], věta 3, str. 199) Burkillův integrál (20) konverguje stejnoměrně vzhledem k s v každém konečném intervalu $\subset R$. Podle našeho lemmatu konverguje tedy takto lokálně stejnoměrně také integrál $\int_J \psi(I, s)$ pro libovolný interval $J \subset K$. Odtud však již vyplývá (BB)-integrabilita funkce $\mathbf{X}$ v K, c. b. d.

Poznámka. Je celkem zřejmé, že také $(BB)\text{-}\int_J \mathbf{X} \in \mathfrak{X}$ pro libovolný interval $J \subset K$, takže neurčitý integrál je pak funkcí typu ID.

5. Závěrečné poznámky. Je zřejmé, že předpoklad (a) ve větě odstavce 3 je zbytečně silný, neboť, jak plyne z Bergströmových výsledků, stačí, aby místo podmínky C_0 — odpovídající předpokladu (a) — splňovaly distribuční funkce $F_k(n, x)$ definované vzorci (12) jenom slabší podmínku C. Tímto případem se však zde již nebudeme zabývati; vrátíme se k němu ostatně na jiném místě při studiu jiných, slabších druhů spojitosti náhodných funkcí intervalu než je spojitost v $\emptyset$, tak jak jsme si ji zavedli v [4].

Podmínka stejnoměrné konvergence integrálu (11) vyjadřuje, jak jsme se o tom již zmínili, cauchyovskost ve W-normě posloupností funkcí $\{f_{0k_n}(n, x)\}$.

Jestliže místo této podmínky použijeme ekvivalentní s ní podmínky vyjádřené tzv. QM-konvergencí posloupností $\{f_{0k_n}(n, x)\}$ (srv. [1], § 9, věta 9.4), dostaneme podmínky (existence Burkillova integrálu funkce $H(I, x) = F(I, x) - E(x)$ a podmínky pro funkce $M_j(I, \eta)$, $j = 1, 2$) zřejmě příbuzné podmínkám věty 15 z [4], resp. analogických existenčních vět odvozených z vět § 25 monografie [2].

LITERATURA

[1] *H. Bergström:* On the limit theorems for convolutions of distribution functions; Journal für die reine und angewandte Mathematik, *198* (1957), 121–142, (Part I), und *199* (1958), 1–22 (Part II).

[2] *B. W. Gniedenko, A. N. Kolmogorow:* Rozkłady graniczne sum zmiennych losowych niezależnych, Warszawa 1957.

[3] *L. A. Ringenberg:* The theory of the Burkill integral; Duke Math. Journal, *15* (1948), 239–270.

[4] *F. Zítek:* Fonctions aléatoires d'intervalle; Czechoslovak Math. Journal, *8* (83), 1958, 583–609.

[5] *O. Onicescu, G. Mihoc, C. T. Ionescu-Tulcea:* Calculul probabilităţilor si aplicaţii, Bucureşti 1956.

[6] *F. Zítek:* Burkillovy integrály závislé na parametru; Časopis pro pěstování matematiky, *84* (1959), v tisku.

Резюме

ЗАМЕТКА К ТЕОРИИ (BB)-ИНТЕГРАЛА

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

(Поступило в редакцию 15/II 1958 г.)

Опираясь на результаты Г. Бергштрема (см. [1]), автор выводит одно необходимое и достаточное условие (BB)-интегрируемости случайной функции интервала (см. [4]).

Предположим, что изучаемая случайная функция $\mathbf{X}$ удовлетворяет основным условиям (7) (равномерно для $I \subset K$), (= непрерывность в $\emptyset$ на K) и (8) (для всех $\eta: 0 < \eta < \infty$), где $F(I, x)$ — функция распределения случайной величины $X(I)$ и функция $M_1(I, \eta)$ определена в (5). Тогда справедлива следующая

теорема. *Случайная функция* $\mathbf{X}$ *(BB)-интегрируема в K тогда и только тогда, когда для людого $\sigma > 0$ интеграл Бэркилла (11) сходится равномерно для $x \in R = (-\infty, \infty)$.*

Здесь $H_\sigma(I, x)$ — функция, определенная через (10), (9) и (6). Под равномерной сходимостью интеграла Бэркилла (вещественной) функции $f(I, x)$ мы разумеем, что (1) имеет место равномерно для $x \in R$, или, что выполня-

ется (2) для любых двух разбиений $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ интервала K, если только нормы этих двух разбиений достаточно малы.

Из доказательства нашей теоремы вытекает следующее (см. [4], § 6)

следствие. *Если* **X** *удовлетворяет основным условиям* (7) *и* (8), *то* **X** *(BB)-интегрируема в K тогда и только тогда, когда существует* (BB)-$\int_K \mathbf{X}$.

Далее однако указывается, что условие (8) здесь можно опустить, так что если **X** удовлетворяет (7), то уже из существования (BB)-$\int_K \mathbf{X}$ следует и (BB)-интегрируемость **X** в K.

Résumé

UNE REMARQUE SUR L'INTÉGRALE-(BB)

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 15 février 1958)

En s'appuyant sur les résultats obtenus par M. H. Bergström (voir [1]), l'auteur établit une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité-(BB) d'une fonction aléatoire d'intervalle (voir [4]).

On suppose que la fonction aléatoire **X** considérée soit continue en $\emptyset$ sur K (condition (a)) et qu'elle satisfasse à (8) pour tout η, $0 < \eta < \infty$ (condition (b)); la fonction $M_1(I, \eta)$ étant définie par (5) où $F(I, x)$ désigne la fonction de répartition de la variable aléatoire $X(I)$. Dans ces conditions, le théorème suivant a lieu:

Théorème. *La fonction aléatoire d'intervalle* **X** *définie dans K y est intégrable-(BB) si et seulement si pour tout $\sigma > 0$ l'intégrale de Burkill* (11) *converge uniformément par rapport à $x \in R$.*

La fonction $H_\sigma(I, x)$ est définie par (10), (9) et (6). Par la convergence uniforme par rapport à $x \in R = (-\infty, \infty)$ de l'intégrale de Burkill d'une fonction (réelle) d'intervalle $f(I, x)$ on entend le fait que (1) a lieu uniformément par rapport à $x \in R$, ou bien que pour toute paire de partitions $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ de l'intervalle K en question et dont les normes sont suffisamment petites, on a (2).

Comme une conséquence directe de la démonstration de ce théorème on obtient le suivant (cf. [4], § 6)

corollaire. *Sous les conditions* (a) *et* (b), **X** *est intégrable-(BB) dans K si et seulement si l'intégrale* (BB)-$\int_K \mathbf{X}$ *existe.*

Ensuite on montre cependant que la condition (b) n'est point nécessaire et qu'il suffit de (a) seul pour garantir l'équivalence de l'intégrabilité-(BB) de **X** dans K avec l'existence de l'intégrale en question.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

ŘEŠENÍ BIHARMONICKÉHO PROBLÉMU PRO NEKONEČNÝ NEKONVEXNÍ KLÍN

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Došlo dne 18. února 1958)

DT 517.516

V této práci je definován biharmonický problém pro nekonečný nekonvexní klín a je dokázána existence a unicita řešení.

1. Úvod

V článku [1] část I a II je rozřešen biharmonický problém pro nekonečný konvexní klín. V tomto pojednání dokážeme existenci a unicitu řešení biharmonického problému pro nekonečný nekonvexní klín. Metoda je totožná s metodou, na níž je založena výše zmíněná práce, což umožňuje užít při důkazech prakticky stejných postupů. Použití stejné symboliky nám dovoluje podstatně stručnější probírání jednotlivých otázek, než to je učiněno ve zmíněné práci; k hladkému porozumění je třeba se s touto prací seznámit. Rozdíl mezi oběma pracemi je v podstatě v definici problému a je důsledkem toho, že v prvém případě šlo o konvexní, v druhém případě o nekonvexní klíny.

Definice, resp. věty, resp. číslované vztahy z práce [1] označíme symboly D1..., resp. V1..., resp. R1... a např. větu 8 z práce [1] citujeme V1,8.

2. Předběžné úvahy

V definici D1,4 rozumíme nekonečným klínem množinu bodů o průvodiči $r \in (0, \infty)$ a amplitudě $\Theta \in \left(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right)$, $\pi < \omega < 2\pi$.

Definice 1. *$u(r, \Theta) \in A$, jsou-li pro ni splněny podmínky* D 1,4.

Jak bude dokázáno dále, je $\lambda_1(\omega) = \operatorname{Re} p_1(\omega) = p_1(\omega)$ a $\frac{1}{2} < \lambda_1(\omega) < 1$. Množina A obsahuje kromě nuly např. funkci $r^2 e^{\sqrt{r}\cos\frac{\Theta}{2}} . \cos\left(\sqrt{r}\sin\frac{\Theta}{2}\right)$. Mellinův obraz funkce $u(r, \Theta)$ z A dostaneme ve tvaru R1,15a až R1,15d. Postup je doslova stejný jako důkaz V1,8.

Věta 1. *Buďte* p_1 *a* $q_1 \neq 1$ *kořeny s nejmenší kladnou reálnou částí a s nezápornou imaginární částí transcendentních rovnic*

$$p \sin \omega + \sin p\omega = 0\,, \tag{1}$$

$$q \sin \omega - \sin q\omega = 0\,. \tag{2}$$

Buď $\pi \leqq \omega \leqq 2\pi$. *Potom platí*

1. $\operatorname{Im} p_1 = 0$, 2. $\lambda_1(\omega) = p_1(\omega)$ *je spojitá a monotonní funkce v intervalu* $\langle \pi, 2\pi \rangle$, 3. $\pi < \omega < 2\pi \Rightarrow \frac{1}{2} < \lambda_1(\omega) < 1$, 4. $\lambda_1(\pi) = 1$, $\lambda_1(2\pi) = \frac{1}{2}$, 5. $p_1(\omega) < \operatorname{Re} q_1(\omega)$.

Důkaz. Označme $z = p\omega$ resp. $q\omega$, $z = \xi + i\eta$, $\dfrac{\sin \omega}{\omega} = \Omega$. Rovnice (1) a (2) přejdou v rovnice

$$\Omega\xi \pm \sin \xi \operatorname{ch} \eta = 0\,, \tag{3}$$

$$\Omega\eta \pm \cos \xi \operatorname{sh} \eta = 0\,. \tag{4}$$

Zde odpovídá horní znaménko rovnici (1) a dolní rovnici (2). Budeme nejdříve vyšetřovat rovnici (1). Je-li $\eta = 0$, je rovnice (4) identicky splněna. Rovnice (3) potom dostává tvar

$$\Omega\xi + \sin \xi = 0\,. \tag{5}$$

Buď ξ_1 prvý průsečík přímky $\Omega\xi$ s funkcí $-\sin \xi$. Je $\xi_1(\pi) = \xi_1(2\pi) = \pi$ a pro $\pi < \omega < 2\pi$ je $\dfrac{\pi}{2} < \xi_1(\omega) < \pi$. Zřejmě $\xi_1(\omega)$ je spojitá funkce ω v intervalu $\langle \pi, 2\pi \rangle$. Je $\dfrac{\xi_1(\omega)}{\omega} = \lambda_1(\omega)$. Vskutku, kdyby pro $\omega \in (\pi, 2\pi)$ bylo $\operatorname{Im} p_1(\omega) > 0$, potom by z rovnice (4) (označíme $p_1(\omega) = \xi_2 + i\eta_2$) plynulo, že $\cos \xi_2 = -\Omega \,.\, \dfrac{\eta_2}{\operatorname{sh} \eta_2} > 0$. Odtud plyne nutně, že $\xi_2 > \frac{3}{2}\pi$, a tedy $\xi_2 > \xi_1$, což je spor. Z rovnice (3) s dolním znaménkem plyne, že pro $\pi < \omega < 2\pi$ je $\omega \,.\, \operatorname{Re} q_1 > \pi$. Tím je dokázán bod 1, 4, 5, věty 1.

Rovnici (5) přepišme do tvaru $\lambda_1 \,.\, \sin \omega + \sin (\omega\lambda_1) = 0$. Pro $\pi < \omega < 2\pi$ je

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\lambda_1 \sin \omega + \sin (\omega\lambda_1)) = \sin \omega + \omega \cos (\omega\lambda_1) < 0\,,$$

a tedy z věty o implicitních funkcích plyne, že $\dfrac{d\lambda_1}{d\omega} = -\lambda_1 \dfrac{\cos \omega + \cos \xi_1}{\sin \omega + \omega \cos \xi_1}$.

Pro $\omega = \pi$ je $\cos \omega + \cos \xi_1 = -2$. Je-li $\pi < \omega < 2\pi$, potom $\cos \omega + \cos \xi_1 \neq 0$. Vskutku, kdyby bylo $\cos \omega + \cos \xi_1 = 0$, potom by platilo zároveň, že $\cos \omega + \cos \xi_1 = 0$ a $\sin \omega + \dfrac{\omega}{\xi_1} \sin \xi_1 = 0$. Odtud plyne

$$1 = \cos^2 \omega + \sin^2 \omega = \cos^2 \xi_1 + \frac{\omega^2}{\xi_1^2} \sin^2 \xi_1 = 1 + \sin^2 \xi_1 \left(\frac{\omega^2}{\xi_1^2} - 1\right)$$

a tedy nutně je $\omega = \xi_1$, což je spor. Je tedy $\frac{d\lambda_1}{d\omega} < 0$; odtud již plyne bod 2 a 3 věty 1, čímž je tato věta dokázána.

3. Definice, řešení a unicita řešení biharmonického problému

Definice 2. *Buďte funkce $f_1(r)$, $f_2(r)$ reálné, absolutně spojité na každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$ a takové, že $f_1(0) = f_2(0)$, a nechť pro nějaká μ, ν, pro něž platí $-\lambda_1(\omega) - 1 < \mu, \nu < \lambda_1(\omega) - 1$, je:*

1. $\int_0^1 [f_i'(r)]^2 r^{2\mu+1} \, dr < \infty, \quad \int_1^\infty [f_i'(r)]^2 r^{2\nu+1} \, dr < \infty, \quad i = 1, 2.$

Dále buďte $g_1(r)$, $g_2(r)$ takové reálné funkce, že

2. $\int_0^1 [g_i(r)]^2 r^{2\mu+1} \, dr < \infty, \quad \int_1^\infty [g_i(r)]^2 r^{2\nu+1} \, dr < \infty, \ i = 1, 2$ *(nemusí být $\mu < \nu$).*

Biharmonickým problémem pro nekonečný nekonvexní klín nazýváme úlohu stanovit funkci $u(r, \Theta)$, pro niž platí:

3. *$u(r, \Theta)$ je reálná funkce definovaná na klínu K se čtyřmi spojitými derivacemi a biharmonická,*

4. $$\lim_{\Theta \to \pm\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[f_{\frac{1}{2}}'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) \right]^2 r^{2\gamma+1} \, dr = 0 ,$$

$$\lim_{\Theta \to \pm\frac{\omega}{2}} \int_1^\infty \left[f_{\frac{1}{2}}'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) \right]^2 r^{2\delta+1} \, dr = 0 ,$$

$$\lim_{\Theta \to \pm\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[g_{\frac{1}{2}}(r) \mp \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) \right]^2 r^{2\gamma+1} \, dr = 0 ,$$

$$\lim_{\Theta \to \pm\frac{\omega}{2}} \int_1^\infty \left[g_{\frac{1}{2}}(r) \mp \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) \right]^2 r^{2\delta+1} \, dr = 0 .$$

(zde γ, δ jsou reálná čísla, pro něž platí $-\lambda_1(\omega) - 1 < \gamma, \delta < \lambda_1(\omega) - 1$).

5. *Ke každému $0 \leqq \varphi < \frac{\omega}{2}$ existuje konstanta $M(\varphi)$ tak, že*

$$z \ 0 < r \leqq 1, \ |\Theta| \leqq \varphi \Rightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \leqq M r^{-\gamma-1} , \quad \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right| \leqq M r^{-\gamma-1} ,$$

$$a \ z \ 1 \leqq r < \infty , \quad |\Theta| \leqq \varphi \Rightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \leqq M r^{-\delta-1} , \quad \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right| \leqq M r^{-\delta-1} ,$$

6. $\lim_{r \to 0} [u(r, 0) - f_1(0)] = 0.$

Dokážeme nyní existenci řešení.

Věta 2. *Jestliže funkce $f_i(r)$, $g_i(r)$ splňují podmínky definice 2, potom existuje řešení příslušné těmto funkcím a vyhovuje podmínkám definice 2. Navíc platí $\gamma = \mu$, $\delta = \nu$.*

Důkaz. Předpokládejme, že platí $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, uvažovali bychom místo $f_1(r)$ resp. $f_2(r)$, $f_1(r) - f_1(0)$ resp. $f_2(r) - f_2(0)$, a k nalezenému řešení připočetli konstantu $f_1(0)$. Rozdělme stejně jako v [1] okrajové podmínky na dvě části: $f_1(r) = f_{11}(r) + f_{12}(r)$ atd. Postup bude nyní stejný jako v důkazu V1,10. Je tedy $r\, f'_{i1}(r) \in h_{\mu\nu'}$, $r\, g_{i1}(r) \in h_{\mu\nu'}$, $i = 1, 2$, kde ν' je libovolné číslo větší než μ, $r\, f'_{i2}(r) \in h_{\mu'\nu}$, $g_{i2}(r) \in h_{\mu'\nu}$, $f_{i2}(r) \in h_{\mu'\nu}$, $i = 1, 2$, kde μ' je libovolné číslo menší než ν.

Důležitý rozdíl oproti důkazu V1,10 spočívá v tomto: Z $f_1(0) = f_2(0) = 0$ a z R1,25 plyne, že je také $f_{11}(r) \in h_{\mu\nu'}$. Pochopitelně v průběhu důkazu nemůžeme (a není to zapotřebí) předpokládat $\mu > 0$.

Nyní již důkaz bodů 3, 4, 5 bude probíhat zcela stejně jako v [1]. Vedle odhadů 5 dokážeme stejným způsobem odhad $|u| \leqq Mr^{-\mu}$, $0 < r \leqq 1$. Protože platí $\mu < \lambda_1(\omega) - 1 < 0$, je $\lim\limits_{r \to 0} u(r, 0) = 0$, což je bod 6. Tím je důkaz věty 2 proveden.

Toto řešení můžeme psát ve tvaru konvoluce okrajových podmínek a Greenových funkcí, definovaných takto:

Definice 3. $H_1(r, \Theta, \omega) =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{-(n+2)\sin(n+2)\frac{\omega}{2}\cos n\Theta + n\sin n\frac{\omega}{2}\cos(n+2)\Theta}{n\,((n+1)\sin\omega + \sin(n+1)\,\omega)}\, r^{-n}\, dn\,,$$

$H_2(r, \Theta, \omega) =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{(n+2)\cos(n+2)\frac{\omega}{2}\sin n\Theta - n\cos n\frac{\omega}{2}\sin(n+2)\Theta}{n((n+1)\sin\omega - \sin(n+1)\,\omega)}\, r^{-n}\, dn\,,$$

$$H_3(r, \Theta, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\cos(n+2)\frac{\omega}{2}\cos n\Theta - \cos n\frac{\omega}{2}\cos(n+2)\Theta}{(n+1)\sin\omega + \sin(n+1)\,\omega}\, r^{-n}\, dn\,,$$

$$H_4(r, \Theta, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\sin(n+2)\frac{\omega}{2}\sin n\Theta - \sin n\frac{\omega}{2}\sin(n+2)\Theta}{(n+1)\sin\omega - \sin(n+1)\,\omega}\, r^{-n}\, dn\,,$$

kde x je libovolné číslo z intervalu $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$, $\pi < \omega < 2\pi$.

Věta 3. *Řešení biharmonického problému, získané výše uvedeným postupem, příslušné funkcím $f_1(r)$, $f_2(r)$, $g_1(r)$, $g_2(r)$, (platí $f_1(0) = f_2(0) = 0$) se dá psát ve tvaru*

$$u(r, \Theta) = \int_0^\infty H_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [f_1'(s) + f_2'(s)] \, ds +$$

$$+ \int_0^\infty H_2\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [f_1'(s) - f_2'(s)] \, . \, ds + \int_0^\infty H_3\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [g_1(s) + g_2(s)] \, ds +$$

$$+ \int_0^\infty H_4\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [g_1(s) - g_2(s)] \, ds \, . \tag{6}$$

Důkaz věty 3 je týž jako důkaz V1,12.

Následující věta je analogická s V1,11:

Věta 4. *Platí:* $|H_i(r, \Theta, \omega)| \leq M(\varphi, x) \, r^{-x}$, *kde je* $r \in (0, \infty)$, $|\Theta| \leq \varphi < \frac{\omega_0}{2}$, $-\lambda_1(\omega) - 1 < x < \lambda_1(\omega) - 1$ *a* ω *je dosti blízko k* ω_0.

Dokážeme nyní větu o unicitě.

Věta 5. *Nechť* $u(r, \Theta)$ *je řešení biharmonického problému pro nekonvexní klín, definované v definici 2, a nechť přísluší nulovým okrajovým podmínkám. Potom* $u(r, \Theta) = 0$.

(Postup důkazu je analogický důkazu V 1,13 a proto budeme už postupovat rychleji.)

Důkaz. Vsuňme do klínu K klín K_a, jehož symetrála leží na symetrále klínu K a jehož vrchol je vzdálen o a od vrcholu klínu K. Vrcholový úhel K_a buď $\pi < \omega' < \omega$ a buď dosti blízký ω. Opišme kolem vrcholu klínu K_a kružnici o dosti malém poloměru. Uvnitř této kružnice je $u(r, \Theta) = \text{Re}\,(\chi(z) + \bar{z}\,\varphi(z))$. ($\chi(z)$ a $\varphi(z)$ jsou holomorfní funkce ve vyšetřované kružnici.) Střed této kružnice buď počátkem souřadného systému, osa x nechť je totožna se symetrálou klínu K_a. Definujme funkce $\chi^*(\zeta)$, $\varphi^*(\zeta)$ takto: $\chi^*(\zeta) = \chi(\zeta^2 - 1)$, $\varphi^*(\zeta) = \varphi(\zeta^2 - 1)$. Ke každému celému $m \geq 0$ můžeme najít konstanty $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m$, tak, že $\chi^{*(i-1)}(1) = \mu^{(i-1)}(1)$, $\varphi^{*(i-1)}(1) = \nu^{(i-1)}(1)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, kde $\mu(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} A_i e^{-i\zeta}$, $\nu(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} B_i e^{-i\zeta}$. (Viz důkaz V1,13.) Bude-li m dost velké, potom užijeme-li lemmatu 2 z [1], dostaneme, že

$$w(x, y) = w(\varrho, \vartheta) = u^*(\varrho, \vartheta) - \text{Re}\,(\mu(\sqrt{1 + z}) + \bar{z}\,\nu(\sqrt{1 + z}))$$

leží v množině A (A je množina funkcí uvažovaná na klínu K_a), a dá se tedy psát ve tvaru (6). Zde ϱ, ϑ jsou polární souřadnice klínu K_a a $u^*(\varrho, \vartheta) = u(r, \Theta)$. Protože však je

$$\text{Re}\,(\mu(\sqrt{1 + z}) + \bar{z}\,\nu(\sqrt{1 + z})) - \mu(1) \in A$$

a tudíž $u(r, \Theta)$ se dá psát ve tvaru (6), dá se psát v tomto tvaru také $u^*(\varrho, \vartheta) - u(a, 0)$. Nyní již snadno provedeme limitní přechod (viz VI,13) pro $a \to 0$. Vzhledem k tomu, že $\lim_{a \to 0} u(a, 0) = 0$, dostáváme

$$u(r, \Theta) = \int_0^\infty H_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega'\right) \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial s}\left(s, \frac{\omega'}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial s}\left(s, -\frac{\omega'}{2}\right)\right] \mathrm{d}s + \ldots . \tag{7}$$

Z podmínek 4 definice 2 je patrno, že limita pravé strany (7), když $\omega' \to \omega$ je rovna nule, a tedy $u(r, \Theta) = 0$, což bylo dokázat.

Stejně jako pro konvexní klíny dává Papkovičovo číslo $p_1(\omega)$ horní hranici růstů okrajových podmínek. Protože je $\lambda_1(\omega) > \frac{1}{2}$ pro $0 < \omega < 2\pi$, je zřejmé, že pro všechny klíny (konvexní i nekonvexní) jsou přípustné okrajové podmínky, dané prvými derivacemi hledaného řešení na hranici, integrovatelnými s kvadrátem. Podobně jako řešení biharmonického problému pro konvexní klín, má řešení biharmonického problému pro nekonvexní klín (až na detaily) stejné vlastnosti v blízkosti hranice. Formulace těchto vlastností i důkazy se dají téměř bez rozdílu přenést z části II práce [1].

LITERATURA

[1] *J. Nečas:* Řešení biharmonického problému pro nekonečný klín I a II. Čas. pro pěst. mat. *83* (1958), 257—286 a 399—424.

Резюме

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага

(Поступило в редакцию 18/II 1958 г.)

РЕШЕНИЕ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО НЕВЫПУКЛОГО КЛИНА

Настоящая работа содержит дополнение результатов, содержащихся в работе: „Решение бигармонической задачи для бесконечного клина", теоремой о существовании и единственности решения бигармонической проблемы для бесконечного невыпуклого клина. Используемые здесь методы доказательств, опирающиеся на применение преобразования Меллина, были разработаны в указанной выше работе.

Если выразить точки клина в полярных координатах r, Θ, $0 < r < \infty$, $|\Theta| < \frac{\omega}{2}$ так, чтобы полярная ось совпадала с биссектрисой угла, то кра-

евые условия искомой действительной бигармонической функции имеют вид:

$$u\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = f_1(r),\ u\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = f_2(r),\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = g_1(r),$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = -g_2(r)\,.$$

В работе предполагается, что $f_i(r)$ абсолютно непрерывны на каждом конечном интервале из $\langle 0, \infty)$, $i = 1, 2$, $f_1(0) = f_2(0)$ и что имеет место

$$\int_0^1 [f_i'(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, \mathrm{d}r < \infty, \quad \int_1^\infty [f_i'(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, \mathrm{d}r < \infty\,,$$
$$\int_0^1 [g_i(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, \mathrm{d}r < \infty, \quad \int_1^\infty [g(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, \mathrm{d}r < \infty, \quad i = 1, 2\,.$$

Притом μ, ν лежат в интервале $(-\lambda_1(\omega) - 1,\ \lambda_1(\omega) - 1)$, где $\lambda_1(\omega)$ — действительная часть числа Папковича. Доказывается, что $\omega > \pi \Rightarrow \frac{1}{2} < \lambda_1(\omega) < 1$. Выполнение краевых условий понимается в следующем смысле:

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[f_1'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\gamma+1}\, \mathrm{d}r = 0\,,$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty \left[f_1'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\delta+1}\, \mathrm{d}r = 0$$

и так далее. Далее предполагается, что $\lim\limits_{r \to 0} u(r, 0) = f_1(0)$ и что существует постоянная, зависящая лишь от φ так, что

$$|\Theta| \leqq \varphi < \frac{\omega}{2},\ 0 < r \leqq 1 \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1},\ \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1}\,;$$
$$|\Theta| \leqq \varphi < \frac{\omega}{2},\ 1 < r \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\delta-1},\ \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\delta-1}\,.$$

При этом мы требуем, чтобы постоянные γ, δ лежали в интервале $(-\lambda_1(\omega) - 1,\ \lambda_1(\omega) - 1)$.

В работе доказывается, что существует в точности одно решение задачи. Отказавшись от требования, чтобы постоянные γ, δ лежали в интервале $(-\lambda_1(\omega) - 1,\ \lambda_1(\omega) - 1)$, мы нарушили бы единственность.

Так как $\lambda_1(\omega) > \frac{1}{2}$, краевые условия $f_i(r)$, $g_i(r)$ могут быть как для выпуклого, так и для невыпуклого клина такие, что

$$\int_0^\infty [f_i'(r)]^2\, \mathrm{d}r < \infty, \qquad \int_0^\infty [g_i(r)]^2\, \mathrm{d}r < \infty.$$

Résumé

SOLUTION DU PROBLÈME BIHARMONIQUE POUR LE COIN INFINI PAS CONVEX

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Reçu le 18 février 1958)

Le présent travail complète les résultats contenus au travail „Solution du problème biharmonique pour le coin infini" par les théorèmes sur l'existence et l'unicité de la solution du problème biharmonique pour le coin infini pas convex.

Ces théorèmes, on les démontre par la même méthode comme au travail précedent en s'appuyant sur la transformation de Mellin.

Si l'on introduit dans le coin les coordonnés polaires, $0 < r < \infty$, $|\Theta| < \frac{\omega}{2}$, dont l'axe polaire coincide avec la bisetrice de l'angle ω du coin, les conditions aux limites de la fonction biharmonique cherchées sont les suivants:

$$u\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = f_1(r)\,, \quad u\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = f_2(r), \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = g_1(r)\,, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = -\, g_2(r)\,.$$

Les fonctions $f_i(r)$, $i = 1, 2$ sont supposées absolument continues sur chaque interval fini de $\langle 0, \infty)$ et les fonctions $f_i(r), g_i(r)$, $i = 1, 2$, sont soumises à ces conditions-ci:

$$\int_0^1 [f_i'(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, \mathrm{d}r < \infty\,, \quad \int_1^\infty [f_i'(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, \mathrm{d}r < \infty\,,$$

$$\int_0^1 [g_i(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, \mathrm{d}r < \infty\,, \quad \int_1^\infty [g_i(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, \mathrm{d}r < \infty\,, \quad i = 1, 2\,, \quad f_1(0) = f_2(0)\,.$$

Les nombres μ et ν sont contenues dans l'intervalle $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$ où $\lambda_1(\omega)$ est la partie réelle du nombre du Papkovič. Est montré, que $\omega > \pi \Rightarrow \frac{1}{2} < \lambda_1(\omega) < 1$. Les conditions aux limites sont remplies au sens suivant:

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[f_1'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\gamma+1}\, \mathrm{d}r < \infty\,,$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty \left[f_1'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\delta+1}\, \mathrm{d}r = 0 \text{ etc.}$$

Puis on suppose, que $\lim\limits_{r \to 0} u(r, 0) = f_1(0)$ et qui'il existe une constante ne dépendante que de φ, telle qu'on a

$$|\Theta| \leqq \varphi < \frac{\omega}{2}, \quad 0 < r \leqq 1 \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1}, \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1},$$

$$|\Theta| \leqq \varphi < \frac{\omega}{2}, \quad 1 \leqq r \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\delta-1}, \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\delta-1}.$$

On exige que les nombres γ, δ soient dans l'intervalle $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$. On démontre qu'il existe une et une seule solution du problème ainsi défini. Si nous n'exigeons pas d'avoir les constantes γ, δ dans l'intervalle $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$ nous perdrions l'unicité. Du fait $\lambda_1(\omega) > \frac{1}{2}$ suit que les conditions aux limites $f_i(r)$, $g_i(r)$ pour les coins convexes et pas convexes sont admisibles si les intégrales

$$\int_0^\infty [f_i'(r)]^2\, \mathrm{d}r, \quad \int_0^\infty [g_i(r)]^2\, \mathrm{d}r, \quad i = 1, 2,$$

sont finis.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

O $(n + 1)$-ÚHELNÍKU V E_n S MAXIMÁLNÍM OBJEMEM KONVEXNÍHO OBALU

BOHUSLAV MÍŠEK, Honice

(Došlo dne 4. března 1958)

DT: 513.19

V práci jde hlavně o zjištění délky stran, velikosti úhlů dvou daných stran anebo dané strany a dané úhlopříčky a o výpočet maximálního objemu konvexního obalu $(n + 1)$-úhelníka v E_n při daném obvodu.

Definice 1. *Budiž n přirozené číslo, E_n eukleidovský prostor n-rozměrný. Mějme $n + 1$ navzájem různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ v E_n; pak soustavu úseček A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}, A_{n+1}A_1$ nazveme $(n + 1)$-úhelníkem. Body A_k nazveme jeho vrcholy a úsečky A_kA_{k+1} jeho stranami pro každé k, při čemž $A_k = A_l$, když $k \equiv l \pmod{n + 1}$. Součet délek všech stran $(n + 1)$-úhelníka $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n+1}A_1}$ nazveme jeho obvodem a označíme jej O.*

Definice 2. *Z množiny $(n + 1)$-úhelníků s pevně daným obvodem O nazveme ten, jehož konvexní obal má maximální objem, $(n + 1)$-úhelníkem A.*

O $(n + 1)$-úhelníku A odvodíme řadu vět zjišťujících některé jeho základní vlastnosti a platných pro každé přirozené n, pokud není jinak stanoveno. V dalším budeme slovy „trojúhelník $A_1A_2A_3$", „rovina $A_1A_2A_3$", „prostor $A_1A_2 \ldots A_k$" rozumět trojúhelník o vrcholech A_1, A_2, A_3, resp. rovinu procházející vrcholy A_1, A_2, A_3, resp. lineární prostor nejnižší dimense, v němž leží vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_k$; atp.

Věta 1. *Vrcholy $(n + 1)$-úhelníka A jsou lineárně nezávislé body v E_n.*

Důkaz. Buďtež $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}$ navzájem různé body v E_n, v_k vzdálenost bodu B_{k+1} od prostoru $B_1B_2 \ldots B_k$ a V_k objem konvexního obalu bodů B_1, $B_2, \ldots, B_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Pak platí

$$V_k = \frac{v_k}{k} V_{k-1} = \frac{1}{k!} v_1v_2 \ldots v_k \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{1}$$

při čemž klademe $V_0 = 1$. Kdyby vrcholy $(n + 1)$-úhelníka A byly lineárně závislé, existovalo by alespoň jedno $k = 1, 2, \ldots, n$, pro něž by $v_k = 0$, tedy i $V_n = 0$, tj. objem jeho konvexního obalu by jistě nebyl maximální.

Věta 2. *Všechny strany $(n + 1)$-úhelníka A jsou stejně dlouhé.*

Důkaz. Nechť existují dvě nestejně dlouhé sousední strany. Můžeme předpokládat, že to jsou strany A_1A_2, A_2A_3, tedy že platí $\overline{A_1A_2} \neq \overline{A_2A_3}$. V množině $(n + 1)$-úhelníků o pevném O a pevných vrcholech $A_1, A_3, A_4, \ldots, A_{n+1}$ může mít podle (1) maximální objem konvexního obalu jenom ten, který má maximální součin v_1v_2 značící dvojnásobný obsah trojúhelníka $A_1A_2A_3$. Tento trojúhelník má však za daných podmínek maximální obsah jedině při $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$, což je spor.

Definice 3. *Rovinu ležící spolu s lineárním podprostorem E_{k-1} v prostoru E_k $(k = 3, 4, \ldots, n)$ nazveme kolmou k tomuto podprostoru, obsahuje-li nevlastní podprostor jednoho z těchto útvarů nevlastní podprostor normálového prostoru druhého z těchto útvarů v E_k a naopak. Dvě roviny ležící v E_k $(k = 3, 4, \ldots, n)$ nazveme k sobě kolmými, obsahují-li každá alespoň jednu normálu druhé.*

Poznámka 1. Definice 3 nazývá kolmými útvary, které splňují alespoň stereometrické podmínky kolmosti dvou rovin. S hlediska vícerozměrné eukleidovské geometrie nejde v žádném z obou definovaných případů o kolmost úplnou; protože nižší z obou útvarů, u nichž mluvíme o kolmosti, je vždy dvojrozměrný, jde o kolmost poloviční. (Srv. [1], str. 47 a násl.) Pro naše další úvahy však tento pojem dostačuje.

Věta 3. *Budiž $n \geqq 3$. Rovina $A_1A_kA_{k+1}$ $(k = 3, 4, \ldots, n)$ u $(n + 1)$-úhelníka A je kolmá k prostoru $A_1A_2 \ldots A_k$.*

Důkaz. Úhel roviny $A_1A_kA_{k+1}$ s prostorem $A_1A_2 \ldots A_k$ je úhel φ, který svírá přímka roviny $A_1A_kA_{k+1}$ kolmá k A_1A_k se svým kolmým průmětem do prostoru $A_1A_2 \ldots A_k$. (Viz [1], str. 68—81.) Budiž v_d vzdálenost bodu A_{k+1} od přímky A_1A_k. Objem konvexního obalu $(n + 1)$-úhelníka je pak podle (1)

$$V_n = \frac{1}{n!} v_1 \ldots v_{k-1} v_d \sin \varphi v_{k+1} \ldots v_n \,.$$

Nabývá-li φ různých hodnot u $(n + 1)$-úhelníka s pevným obvodem O, je jasné, že vždy lze sestrojit takový $(n + 1)$-úhelník, který při témže obvodu podrží také hodnoty všech vzdáleností $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_d, v_{k+1}, \ldots, v_n$. V množině takových $(n + 1)$-úhelníků o konstantních $O, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_d, v_{k+1}, \ldots, v_n$ má však maximální V_n nutně ten, pro nějž platí $\sin \varphi = 1$, což znamená kolmost roviny $A_1A_kA_{k+1}$ a prostoru $A_1A_2 \ldots A_k$.

Věta 4. *Budiž $n \geqq 3$. Rovina $A_1A_kA_{k+1}$ $(k = 3, 4, \ldots, n)$ u $(n + 1)$-úhelníka A je kolmá ke každé rovině $A_pA_qA_r$ $(p, q, r = 1, 2, \ldots, k;\ p \neq q \neq r \neq p)$.*

Důkaz. Poněvadž rovina $A_pA_qA_r$ je obsažena v prostoru $A_1A_2 \ldots A_k$, je věta 4 bezprostředním důsledkem věty 3.

Definice 4. *Úhlem stran A_kA_{k+1}, A_lA_{l+1} $(n + 1)$-úhelníka budeme rozumět úhel vektorů $A_{k+1} - A_k$ a $A_l - A_{l+1}$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n + 1;\ k \neq l)$.*

Věta 5. *Úhly, které svírají libovolné dvě strany $(n+1)$-úhelníka A, jsou stejné.*

Důkaz. Vektor $A_{k+1} - A_k$ označme stručně $\boldsymbol{a}_k$. Podle věty 3 je rovina $A_1A_2A_3$ kolmá k prostoru $A_3A_4 \dots A_{n+1}A_1$. To znamená vzhledem k větě 2, že vektor $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$ je kolmý k vektoru $\boldsymbol{a}_k$ pro $k = 3, 4, \dots, n + 1$; tedy platí o skalárním součinu těchto vektorů

$$(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{a}_k = 0\,, \quad \text{čili} \quad \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_k\,.$$

Nechť α_{kl} je úhel vektorů $\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{a}_l$. Pak platí, ježto podle věty 2 $|\boldsymbol{a}_1| = |\boldsymbol{a}_2|$,

$$\cos\alpha_{1k} = \frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_k}{|\boldsymbol{a}_1|\,.\,|\boldsymbol{a}_k|} = \frac{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_k}{|\boldsymbol{a}_2|\,.\,|\boldsymbol{a}_k|} = \cos\alpha_{2k}\,.$$

Tedy $\alpha_{1k} = \alpha_{2k}$ $(k = 3, 4, \dots, n + 1)$. Zcela obdobně lze dokázat $\alpha_{2k} = \alpha_{3k}$ pro $k = 4, 5, \dots, n + 1$; atd. Tím je důkaz hotov pro stranu $A_{n+1}A_1$ a tedy pro všechny strany.

Položme v dalším $\alpha_{kl} = \alpha$.

Věta 6. *Pro úhel α libovolných dvou stran $(n+1)$-úhelníka A platí* $\cos\alpha = \dfrac{1}{n}$.

Důkaz. Ježto strana A_1A_2 svírá podle věty 5 se všemi ostatními stranami stejný ostrý úhel, pak promítneme-li kolmo na tuto stranu všechny vrcholy A_k $(k = 3, 4, \dots, n + 1)$, rozdělí tyto průměty vzhledem k větě 2 stranu A_1A_2 na n stejných dílů. Odtud plyne ihned, že úhel α strany A_1A_2 s kteroukoliv jinou stranou vyhovuje vztahu

$$\cos\alpha = \frac{1}{n}\,.$$

Vzhledem k větě 5 platí tento vztah pro kterékoliv dvě strany.

Definice 5. *Budiž $n \geqq 3$. Úhlopříčkou $(n+1)$-úhelníka nazveme každou úsečku A_kA_l pro $k, l = 1, 2, \dots, n + 1$; $k \neq l - 1, l, l + 1$. Úhlopříčka A_kA_l rozdělí všechny vrcholy, resp. strany $(n+1)$-úhelníka ve dvě skupiny, S_{kl} a S_{lk}, resp. s_{kl} a s_{lk}: Jdeme-li po obvodu $(n+1)$-úhelníka směrem stoupajících indexů u vrcholů, nalezneme skupinu S_{kl} (s_{kl}) na cestě od A_k k A_l, skupinu S_{lk} (s_{lk}) na cestě od A_l k A_k; do žádné ze skupin S_{kl}, S_{lk} nepočítáme vrcholy A_k, A_l. Úhlem strany A_jA_{j+1} a úhlopříčky A_kA_l budeme rozumět úhel vektorů $A_{j+1} - A_j$ a $A_l - A_k$, patří-li strana A_jA_{j+1} do skupiny s_{kl}, a vektorů $A_{j+1} - A_j$ a $A_k - A_l$, patří-li strana A_jA_{j+1} do skupiny s_{lk}.*

Věta 7. *Úhlopříčka A_kA_l $(n+1)$-úhelníka A svírá s každou jeho stranou skupiny s_{kl} stejný úhel β_{kl} a s každou jeho stranou skupiny s_{lk} stejný úhel β_{lk}.*

Důkaz. Označme $\boldsymbol{a}_j$ vektor $A_{j+1} - A_j$, $\boldsymbol{u}_{kl}$ vektor $A_l - A_k$, β_{jkl} úhel strany A_jA_{j+1} a úhlopříčky A_kA_l, tj. úhel vektorů $\boldsymbol{a}_j$, $\boldsymbol{u}_{kl}$, resp. $\boldsymbol{a}_j$, $\boldsymbol{u}_{lk}$ $(j, k, l = 1, 2, \dots, n + 1$; $k \neq l - 1, l, l + 1)$. Podle věty 3 je rovina $A_kA_{k+1}A_{k+2}$ kolmá k prostoru $A_{k+2}A_{k+3} \dots A_{n+1}A_1 \dots A_k$. Tedy vektor $\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_{k+1}$ je kolmý k vektoru $\boldsymbol{u}_{kl}$

$(k, l = 1, 2, \ldots, n + 1;\ k \neq l - 1, l, l + 1)$, takže platí o skalárním součinu těchto vektorů

$$(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{k+1})\, \mathbf{u}_{kl} = 0\,.$$

Zcela obdobně jako v důkazu věty 5 odvodíme odtud $\beta_{kkl} = \beta_{k+1,kl}$, a dále $\beta_{k+1,kl} = \beta_{k+2,kl}, \ldots, \beta_{l-2,kl} = \beta_{l-1,kl}$. Tím je důkaz hotov pro stranu ze skupiny s_{kl}, označíme-li její úhel s úhlopříčkou A_kA_l prostě β_{kl}. Analogicky provedeme důkaz pro strany ze skupiny s_{lk}, zaměníme-li vektor $\mathbf{u}_{kl}$ za vektor $\mathbf{u}_{lk} = -\mathbf{u}_{kl}$.

Věta 8. *Nechť $k < l$. Kolmé průměty vrcholů skupiny S_{kl} (S_{lk}) na úhlopříčku A_kA_l $(n + 1)$-úhelníka A dělí tuto úhlopříčku na $l - k$ $(n + 1 - l + k)$ stejných dílů.*

Důkaz je analogický k důkazu věty 6: Ježto úhlopříčka A_kA_l svírá se všemi stranami skupiny s_{kl} stejný ostrý úhel, pak vzhledem k větě 2 dělí tuto úhlopříčku kolmé průměty příslušných vrcholů na ni na stejné díly v počtu rovném počtu stran s_{kl}.

Poznámka 2. Rozšíříme-li definici úhlopříčky A_kA_l také pro $k = l - 1$, $l + 1$, tj. nazveme-li úhlopříčkou i kteroukoliv stranu $(n + 1)$-úhelníka, pak je zřejmé, že věty 5 a 6 jsou speciálním případem vět 7 a 8 i následující věty 9.

Položme nyní v dalším pro stručnost $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots = \overline{A_{n+1}A_1} = a$, $\overline{A_kA_l} = u_{kl} = u_{lk} = \overline{A_lA_k}$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n + 1;\ k \neq l)$.

Věta 9. *Nechť $k < l$. Úhel β_{kl}, resp. β_{lk} úhlopříčky A_kA_l se stranou skupiny s_{kl}, resp. s_{lk} $(n + 1)$-úhelníka A je určen vztahem*

$$\cos \beta_{kl} = \sqrt{\frac{n + 1 - l + k}{n(l - k)}}\,, \quad \text{resp.} \quad \cos \beta_{lk} = \sqrt{\frac{l - k}{n(n + 1 - l + k)}}\,.$$

Důkaz. Podle věty 8 platí pro $k < l$

$$\cos \beta_{kl} = \frac{u_{kl}}{(l - k)\, a}\,, \quad \cos \beta_{lk} = \frac{u_{kl}}{(n + 1 - l + k)\, a}\,. \tag{2}$$

Z trojúhelníka $A_kA_lA_{l+1}$ plyne podle věty kosinové pro $k < l$

$$u_{k,l+1}^2 = a^2 + u_{kl}^2 - 2au_{kl} \frac{u_{kl}}{(n + 1 - l + k)\, a} = a^2 + \frac{n - 1 - l + k}{n + 1 - l + k} u_{kl}^2\,.$$

Ježto $u_{k,k+1} = a$, platí $u_{k,k+2}^2 = 2\,\dfrac{n - 1}{n}\, a^2$, $u_{k,k+3}^2 = 3\,\dfrac{n - 2}{n}\, a^2, \ldots, u_{kl}^2 = (l - k)\dfrac{n + 1 - l + k}{n}\, a^2$, což dosazeno do vzorců (2) dává ihned po zkrácení vzorce věty 9.

Poznámka 3. Podle věty 6 a 9 platí $\cos \beta_{kl} \cos \beta_{lk} = \dfrac{1}{n} = \cos \alpha$, tj. součin kolmých průmětů strany skupiny s_{kl} a strany skupiny s_{lk} na úhlopříčku A_kA_l

(speciálně součin kolmých průmětů strany na sebe samu a jiné strany na tuto stranu) u $(n+1)$-úhelníka A s pevným O je pro dané n konstantní a roven vždy n-té části čtverce jeho strany.

Předcházející věty nám pomohou konečně vypočítat objem konvexního obalu $(n+1)$-úhelníka A jako funkci strany a dimense. Platí totiž

Věta 10. *Budiž dán obvod O. Objem V_n konvexního obalu $(n+1)$-úhelníka A je určen vztahem*

$$V_n = \frac{a^n}{n!}\sqrt{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}},$$

kde $a = \dfrac{O}{n+1}$.

Důkaz. Podle (1) platí $V_n = \dfrac{1}{n!} v_1 v_2 \dots v_n$. Vyjádřeme v_k $(k = 2, 3, \dots, n)$ z trojúhelníka $A_1 A_k A_{k+1}$. Vzhledem k větě 2, 3 a 9 platí

$$v_k = a \sin \beta_{k1} = a \sqrt{1 - \frac{k-1}{n(n-k+2)}} = a \sqrt{\frac{(n+1)(n-k+1)}{n(n-k+2)}}.$$

Tedy, ježto $v_1 = a$,

$$V_n = \frac{a^n}{n!}\sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}}\sqrt{\frac{(n+1)(n-2)}{n(n-1)}}\sqrt{\frac{(n+1)(n-3)}{n(n-2)}}\dots\sqrt{\frac{n+1}{2n}},$$

tj. po zkrácení

$$V_n = \frac{a^n}{n!}\sqrt{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}}.$$

LITERATURA

[1] *P. H. Schoute:* Mehrdimensionale Geometrie, I. Teil: Die linearen Räume, Leipzig 1902.

Резюме

О $(n+1)$-УГОЛЬНИКЕ В E_n С МАКСИМАЛЬНЫМ ОБЪЕМОМ ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ

БОГУСЛАВ МИШЕК (Bohuslav Míšek), Гонице

(Поступило в редакцию 4/III 1958 г.)

В этой работе доказываются некоторые свойства $(n+1)$-угольника в n-мерном евклидовом пространстве E_n, выпуклая оболочка которого имеет максимальный объём при данном периметре. Главные результаты содержатся в следующих теоремах ($A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ значат вершины, a — сторону $(n+1)$-угольника):

1. *Вершины суть линейно независимые точки в* E_n.

2. *Все стороны равны.*

3. *Плоскость* $A_1A_kA_{k+1}$ *перпендикулярна к* $(k - 1)$*-мерному линейному пространству* $A_1A_2 \ldots A_k$ $(k = 3, 4, \ldots, n)$.

4. *Все углы какой-либо стороны с какой-либо другой стороной равны и определены уравнением* $\cos \alpha = \frac{1}{n}$.

5. *Объём выпуклой оболочки определяется по формуле*

$$V_n = \frac{a^n}{n!}\sqrt{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}}.$$

Автор выводит ещё несколько теорем об углах диагоналей и сторон.

Summary

ON THE SIMPLEX POLYGON WITH THE GREATEST VOLUME OF ITS CONVEX HULL

BOHUSLAV MÍŠEK, Honice

(Received March 4, 1958)

In this paper there are proved some properties of the simplex polygon in n-dimensional Euclidean space E_n the convex hull of which has the greatest volume with a given circumference. The main results are obtained in the following theorems ($A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ indicate the vertices, a the side of the simplex polygon):

1. *The vertices are linearly independent points in* E_n.

2. *All sides are equal.*

3. *The plane* $A_1A_kA_{k+1}$ *is perpendicular to* $(k - 1)$*-dimensional linear space* $A_1A_2 \ldots A_k$ $(k = 3, 4, \ldots, n)$.

4. *The angles of any two sides are equal and given by the equation* $\cos \alpha = \frac{1}{n}$.

5. *The volume of the convex hull is expressed by the formula*

$$V_n = \frac{a^n}{n!}\sqrt{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}}.$$

The author deduces some more theorems about the angles of diagonals and sides.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

1. Buď Y K-lineál, který je zároveň Banachovým (tj. úplným normovaným lineárním) prostorem s normou φ. Předpokládejme, že

$$\varphi(a) = \varphi(|a|) \tag{1}$$

pro každé $a \in Y$. Rozhodněte, zda platí implikace

$$a, b \in Y\,, \quad 0 \leqq a \leqq b \Rightarrow \varphi(a) \leqq \varphi(b)\,. \tag{2}$$

Poznámka 1. K-lineál je, zhruba řečeno, „lineární svaz"; název je převzat z [1]. O K-lineálech se může čtenář poučit též v práci [2].

Poznámka 2. Buď Y množina všech spojitých funkcí f v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, pro něž existuje $f'_+(0)$ (derivace zprava v bodě 0). Definujme v Y přirozeným způsobem polouspořádání a lineární operace; dále položme $\varphi(f) = |f'_+(0)| + \max |f(x)|$. Potom je Y K-lineál a normovaný lineární prostor, pro nějž platí (1) a neplatí (2); prostor Y však není úplný.

LITERATURA

[1] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва-Ленинград 1950.

[2] *J. Mařík:* Vrcholy jednotkové koule v prostoru funkcionál na daném polouspořádaném prostoru, Čas. pro pěst. mat. *79* (1954), 3—40.

Jan Mařík, Praha

*

K problému č. 3 položenému Karlem Kartákem v Časopise pro pěstování matematiky roč. *83* (1958), str. 355 oznamuji toto:

Týž problém byl již před více než dvaceti lety položen a úplně rozřešen J. von Neumannem. Viz např. J. von Neumann, Functional operators, The Institute for Advanced Study, 1933—1934, 1934—1935, nebo též P. Jordan — J. von Neumann, On inner product in linear, metric spaces, Annals of Mathematics *36* (1935), 719—723, kde jsou též další literární odkazy.

Miroslav Novotný, Brno

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

REFERÁTY

TEORIE KŘIVKY KLEINOVA PĚTIROZMĚRNÉHO PROSTORU A JEJÍ APLIKACE NA SEGREHO KONGRUENCE W

(Vlastní referát z přednášky přednesené dne 24. února 1958 v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků".)

C. Segre ukázal v práci [2] synthetickým způsobem, že každé kongruenci W s fokálními plochami přímkovými (v dalším nazývejme tyto kongruence *Segreho kongruencemi*) trojrozměrného prostoru lze v Kleinově pětirozměrném prostoru přiřadit jistou rozvinutelnou plochu. Segreho kongruence W, která nenáleží lineárnímu komplexu a jejíž asociovaná kongruence rovněž nenáleží lineárnímu komplexu, je v Kleinově prostoru representována rozvinutelnou plochou tečen prostorové křivky, která neleží v podprostoru Kleinova prostoru. Snadno se vidí, že studium kongruencí W uvedeného typu je ekvivalentní se studiem rozvinutelných ploch, resp. jejich hran vratu, které neleží v podprostoru Kleinova pětirozměrného prostoru. Autor se v přednášce omezil na uvedené kongruence.

Buď dán v projektivním Kleinově prostoru $\bar{P}_5$ oblouk křivky $\bar{C} \equiv \{x(\tau)\}$, (který neleží v podprostoru prostoru $\bar{P}_5$), v jehož každém bodě existují jednoznačně lineární oskulační prostory $\bar{P}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$, $\bar{P}_1$ je tečnou), které mají s křivkou $\bar{C}$ styk právě i-tého řádu; nechť žádný bod uvažovaného oblouku křivky $\bar{C}$ neleží na Kleinově hyperkvadrice Γ (K-kvadrice Γ) a prostory $\bar{P}_i$ nechť nejsou tečnými prostory K-kvadriky Γ, která je dána rovnicí $x \,.\, x \equiv 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6) = 0$. K-kvadrika určená předcházející rovnicí buď kladně orientována (Γ^+); bod $x \in \bar{P}_5$ je kladný (záporný) vzhledem ke K-kvadrice Γ^+, jestliže $x \,.\, x > 0$ ($x \,.\, x < 0$). Faktor homogenity souřadnic bodů křivky $\bar{C}$ a nový parametr, který označme t, lze volit tak, že pro aritmetickou křivku $x_i = x_i(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$) platí $x \,.\, x = \varepsilon_1$, $x' \,.\, x' = \varepsilon_2$ ($\varepsilon_j^2 = 1, j = 1, 2$), kde čárky značí derivace podle parametru t. Říkejme, že křivka $x_i = x_i(t)$ kladně orientovaná s rostoucím parametrem t je dána v normálním tvaru. V každém bodě této křivky existuje oskulační simplex, který je současně polárním ke K-kvadrice Γ^+, jehož vrcholy jsou aritmetické body, ${}^1N$, ${}^2N$, ${}^3N$, ${}^4N$, ${}^5N$, ${}^6N$, které lze určit až na znaménka π_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) a které splňují relace ${}^iN \,.\, {}^iN = \varepsilon_i$ ($\varepsilon_i^2 = 1$); platí Frenetovy vzorce

$$\begin{aligned}
{}^1N' &= \pi_2 {}^2N , \\
{}^2N' &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\pi_2 {}^1N + \varepsilon_1\pi_3K_1 {}^3N , \\
{}^3N' &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\pi_3K_1 {}^2N + \varepsilon_2\pi_4K_2 {}^4N , \\
{}^4N' &= -\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\pi_4K_2 {}^3N + \varepsilon_3\pi_5K_3 {}^5N , \\
{}^5N' &= -\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\pi_5K_3 {}^4N + \varepsilon_4\pi_6K_4 {}^6N , \\
{}^6N' &= -\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\pi_6K_4 {}^5N ,
\end{aligned}$$

kde $K_i = \sqrt{|{}^{i+1}N' \,.\, {}^{i+1}N' - \varepsilon_i K_{i-1}^2|}$ ($i = 1, 2, 3, 4$, $K_0 = 1$) a čárky značí derivace podle parametru t. Tři z bodů ${}^iN$ jsou kladné a tři záporné vzhledem ke K-kvadrice Γ^+. Funkce $K_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) a znaménka ε_j ($j = 1, 2, \ldots, 6$) tvoří úplný systém projektivních diferenciálních invariantů orientované křivky prostoru $\bar{P}_5$ vzhledem k podgrupě projektivních unimodulárních transformací (které reprodukují K-kvadriku Γ^+), která odpovídá grupě unimodulárních projektivních transformací trojrozměrného projektivního prostoru P_3. Uvažované orientované křivce odpovídá v prostoru P_3 Segreho kongruence W, určená jako orientovaná vrstva regulů až na unimodulární projektivní transformace.

Křivka, která representuje asociovanou kongruenci ke kongruenci dané, je opsána bodem ${}^6N$, jehož parametr u je vázán s parametrem t diferenciální rovnicí $du = K_4 \, dt$. Invarianty $\tilde{K}_j$ a $\tilde{\varepsilon}_i$ ($j = 1, 2, 3, 4, i = 1, 2, \ldots, 6$) křivky, která representuje asociovanou kongruenci, jsou vyjádřeny pomocí invariantů původní křivky relacemi $\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_{7-i}$ a $\tilde{K}_j = \dfrac{K_{4-j}}{K_4}$.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby fokální plochy Segreho kongruence W, resp. kongruence asociované byly reálné, je $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, resp. $\varepsilon_5 = -\varepsilon_6$. Nutná a postačující podmínka pro to, aby paprsky kongruence a tím současně kongruence asociované byly reálné, je, aby se znaménka $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ navzájem nerovnala.

V další části přednášky navázal autor na práci [1]. Segreho kongruence W, která je určena řídícími křivkami C_y, C_z a $C_{\bar{y}}, C_{\bar{z}}$ fokálních ploch (křivky jsou opsány body $y, z, \bar{y}, \bar{z}$, jejichž parametr v je t. zv. normálním parametrem, viz [1]), přísluší v prostoru $\bar{P}_5$ křivka v normálním tvaru, opsaná bodem $x(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \lambda|\alpha|[(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})]$ ($\lambda^2 = 1, \pi^2 = 1$, α je funkce parametru v), jehož parametr t je vázán s parametrem v diferenciální rovnicí $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2|S|}$. Invarianty této křivky jsou s invarianty $\omega, \pi, \varepsilon = Q^2 - PR$, $H = Q'^2 - P'R'$, $\alpha \neq 0$, $S \neq 0$, $K = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{vmatrix}$ ($\omega^2 = 1, \pi^2 = 1, \varepsilon^2 = 1, H \neq 0, \alpha \neq 0, S \neq 0, K \neq 0$ funkce v) kongruence W (viz [1]) vázány relacemi

$$K_1 = \left|\frac{\alpha}{S}\right|, \quad K_2 = \frac{1}{|S|}, \quad K_3 = \frac{\sqrt{|H|}}{2|S|}, \quad K_4 = \frac{|K|}{4|SH|},$$

$$\varepsilon_1 = -\pi\omega, \quad \varepsilon_2 = \pi\omega, \quad \varepsilon_3 = -\omega, \quad \varepsilon_4 = \omega\varepsilon, \quad \varepsilon_5 = \omega \operatorname{sgn} H, \quad \varepsilon_6 = -\omega\varepsilon \operatorname{sgn} H.$$

Ukazuje se, že změnou znamének invariantů α, S, K v práci [1] se kongruence jako geometrický útvar nemění. Kongruence W neexistuje, jestliže pro invarianty v práci [1] platí $\varepsilon = \operatorname{sgn} H = -1$, neboť tato relace má za následek $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6$, což je spor s tvrzením, že tři ze znamének ε_i jsou kladná a tři záporná.

LITERATURA

[1] *J. Klapka*: O W-kongruencích s fokálními plochami přímkovými, Spisy přír. fak. MU v Brně, č. *69*, 1926.

[2] *C. Segre*: Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate, Accad. Reale delle Sc. di Torino, *42*, 1906–1907, 539–550.

Vladimír Horák, Brno

PROJEKTIVNÍ DEFORMACE SEGREHO KONGRUENCÍ W

(Vlastní referát z přednášky přednesené dne 19. května 1958 v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků".)

V přednášce se autor zabýval projektivní deformací Segreho kongruencí W, tj. kongruencí W s fokálními plochami přímkovými a jejich zobrazením do Kleinova pětirozměrného prostoru. Při vyšetřování bylo použito početního aparátu a označení zavedeného v práci [2]. Systém diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(Q + S - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right) y - Pz + \alpha \bar{y}, \quad & z' &= Ry + \left(S - Q - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right) z + \alpha \bar{z}, \\
\bar{y}' &= -\left(Q + S + \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right) \bar{y} + P\bar{z} + \pi\alpha y, \quad & \bar{z}' &= -R\bar{y} + \left(Q - S - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right) \bar{z} + \pi\alpha z,
\end{aligned} \tag{1}
$$

kde $\pi^2 = 1$ a $P, Q, R, S, \alpha \neq 0$ jsou funkce parametru v, který byl zvolen tak, že platí $(y, z, y', z') = (\bar{y}, \bar{z}, \bar{y}', \bar{z}') = \omega$ $(\omega^2 = 1)$ a čárky značí derivace podle parametru v, určuje řídící křivky Cy, Cz a $C\bar{y}$, $C\bar{z}$ opsané body y, z a $\bar{y}$, $\bar{z}$ přímkových fokálních ploch Segreho kongruencí W. Paprsky kongruence určují mezi fokálními plochami asymptotickou transformaci, v níž bodu $A_1 = t_1\, y(v) + t_2\, z(v)$ koresponduje bod $A_2 = t_1\, \bar{y}(v) + t_2\, \bar{z}(v)$; tyto body opisují asymptotiky na fokálních plochách, jestliže buď $t_1, t_2 =$ konst, nebo $v =$ const. Předpokládejme, že v uvažovaném intervalu parametru v platí $Q^2 - PR \neq 0$ a $(Q^2 - PR)'^2 - 4(Q^2 - PR)(Q'^2 - P'R') \neq 0$, takže studované kongruence nejsou ani fleknodální, ani nenáleží speciálnímu lineárnímu komplexu.

Nechť systém (1) v napsaném pořadí určuje kongruenci W, která je orientována tak, že bod A_1 (A_2) je prvním (druhým) ohniskem, které opisuje první (druhou) fokální plochu; řídící křivky Cy, $C\bar{y}$ $(Cz, C\bar{z})$ jsou prvními (druhými) řídícími křivkami svých fokálních ploch a vrstva regulů, na něž se dá kongruence rozložit, je kladně orientována s rostoucím parametrem v. Změna pořadí ohnisek nebo řídících křivek fokálních ploch má za následek jistou změnu v pořadí rovnic v systému (1). Uvažujme o druhé orientované kongruenci W, kterou určuje systém diferenciálních rovnic, který obdržíme ze systému (1) transformací

$$
\begin{pmatrix} y, & z, & \bar{y}, & \bar{z}, & P, & Q, & R, & S. & \alpha, & v, & t_1, & t_2, & \pi, & \omega \\ {}^1y, & {}^1z, & {}^1\bar{y}, & {}^1\bar{z}, & {}^1P, & {}^1Q, & {}^1R, & {}^1S, & {}^1\alpha, & {}^1v, & \tau_1, & \tau_2, & {}^1\pi, & {}^1\omega \end{pmatrix}. \tag{2}
$$

Označme tento systém diferenciálních rovnic (1′). Systémy (1) a (1′) se od sebe liší pouze indexem 1.

Autor uvedl nutné a postačující podmínky pro to, aby Segreho kongruence W určené systémy (1) a (1′) byly v rozvinutelné transformaci, která je nutně asymptotická. Vhodnou volbou řídících křivek fokálních ploch obou kongruencí lze docílit, že rozvinutelná transformace je dána rovnicemi

$$
t_1 = \tau_1\,, \quad t_2 = \tau_2\,, \quad v = {}^1v\,; \tag{3}
$$

jestliže (3) je rozvinutelnou transformací mezi kongruencemi určenými systémy (1) a (1′), potom platí $P = {}^1P$, $Q = {}^1Q$, $R = {}^1R$ a funkce α, S, ${}^1\alpha$, ${}^1S$ a znaménka π, ω, ${}^1\pi$, ${}^1\omega$ jsou libovolné.

Každá rozvinutelná transformace (3) je projektivní asymptotickou deformací prvního řádu; ke každému páru paprsků odpovídajících si v rozvinutelné transformaci (3) existuje ∞^5 tečných kolineací. K libovolné Segreho kongruenci existuje třída Segreho kongruencí závislá na dvou funkcích jedné proměnné $({}^1\alpha, {}^1S)$, které jsou v projektivní asymptotické deformaci prvního řádu s kongruencí danou. V této třídě existuje podtřída kongruencí náležejících lineárnímu komplexu (${}^1S \equiv 0$), závislá na jedné funkci jedné proměnné (${}^1\alpha$), které jsou v projektivní deformaci prvního řádu s kongruencí danou. Rozvinutelná transformace (3) je projektivní deformací prvního řádu současně podél všech paprsků regulů $v = {}^1v =$ konst, neboť existuje tečná kolineace společná všem párům odpovídajících si paprsků. Geometrické výsledky týkající se některých speciálních typů tečných kolineací neuvádíme.

Aby rozvinutelná transformace (3) byla projektivní deformací druhého řádu, je nutné a stačí, aby platilo kromě $P = {}^1P$, $Q = {}^1Q$, $R = {}^1R$ ještě $\pi = {}^1\pi$ a $\alpha = {}^1\alpha$, resp. $\alpha = - {}^1\alpha$. Oskulační kolineace je dána rovnicemi

$$Hy = \varrho\, {}^1y\,, \quad Hz = \varrho\, {}^1z\,, \quad H\bar{y} = \varrho^{-1}\, {}^1\bar{y}\,, \quad H\bar{z} = \varrho^{-1}\, {}^1\bar{z}\,, \tag{4}$$

kde $\varrho^2 = 1$, resp. $\varrho^2 = -1$, když $\alpha = {}^1\alpha$, resp. $\alpha = - {}^1\alpha$. Rozvinutelná transformace (3) je projektivní deformací druhého řádu současně podél všech paprsků regulů $v = {}^1v =$ konst, neboť oskulační kolineace nezávisí na parametrech t_1 a t_2. K libovolné Segreho kongruenci W existuje třída Segreho kongruencí W závislá na jedné funkci jedné proměnné (${}^1S$), které jsou v projektivní deformaci druhého řádu s danou kongruencí; v této třídě existuje právě jedna kongruence náležející lineárnímu komplexu. O Segreho kongruencích W lze snadno dokázat, že jsou totožné s kongruencemi W s asymptotickou dualisací, o nichž E. Čech rovněž dokázal tvrzení o existenci třídy kongruencí v projektivní deformaci s kongruencí danou (viz [1]).

V druhé části přednášky zabýval se autor zobrazením dvojice Segreho kongruencí W v rozvinutelné transformaci a v projektivní deformaci prvního a druhého řádu do Kleinova pětirozměrného projektivního prostoru $\bar{P}_5$, při čemž se omezil pouze na Segreho kongruence W, které nenáleží lineárnímu komplexu a jejichž asociované nenáleží rovněž lineárnímu komplexu. Každá Segreho kongruence W uvedeného typu je v prostoru $\bar{P}_5$ representována křivkou v normálním tvaru, která neleží v podprostoru prostoru $\bar{P}_5$. Úplný systém projektivních diferenciálních invariantů (vzhledem k jisté grupě transformací reprodukujících Kleinovu hyperkvadriku) tvoří čtyři funkce jedné proměnné K_1, K_2, K_3, K_4 vesměs kladné a šest znamének $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_6$, z nichž tři jsou kladná a tři záporná. (Viz referát z přednášky „Teorie křivky Kleinova pětirozměrného prostoru a její aplikace na Segreho kongruence W“ v tomto časopise na str. 106.)

Buďte ${}^1t$ parametr a ${}^1K_1$, ${}^1K_2$, ${}^1K_3$, ${}^1K_4$, ${}^1\varepsilon_1$, ${}^1\varepsilon_2, \ldots, {}^1\varepsilon_6$ projektivní invarianty jiné křivky v normálním tvaru v prostoru $\bar{P}_5$. Ukázkou uveďme jen výsledky pro Segreho kongruence W v projektivní deformaci druhého řádu. Zavedeme-li mezi body křivek korespondenci určenou diferenciální rovnicí $\dfrac{dt}{d^1t} = \dfrac{{}^1K_2}{K_2}$, potom nutné a postačující podmínky pro to, aby tyto křivky representovaly Segreho kongruence W, které lze na sebe projektivně deformovat, jsou, aby v korespondujících bodech platilo

$$\frac{K_i}{K_j} = \frac{{}^1K_i}{{}^1K_j}\,, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \text{a} \quad \varepsilon_m = {}^1\varepsilon_m\,, \quad \text{resp.} \quad \varepsilon_m = - {}^1\varepsilon_m\,, \quad m = 1, 2, \ldots, 6\,.$$

Segreho kongruence W je v projektivní deformaci se svou asociovanou kongruencí, když a jen když platí $K_1 = K_3$, $K_4 = 1$, $\varepsilon_i = - \varepsilon_{7-i}$. Korespondence mezi body křivek v normálním tvaru, které representují pár asociovaných kongruencí v projektivní deformaci, je určena diferenciální rovnicí $dt = d^1t$. Projektivní deformace se redukuje na pouhou projektivitu; třída těchto kongruencí závisí na dvou funkcích jedné proměnné a jednom znaménku, jak již také stanovil J. Klapka v práci [2].

LITERATURA

[1] *E. Čech*: Déformation projective des congruences W, Чех. мат. ж. *6 (81)*, 1956, 401—414.

[2] *J. Klapka*: O W-kongruencích s fokálními plochami přímkovými, Spisy přír. fak. MU v Brně, č. *69*, 1926, 1—30.

Vladimír Horák, Brno

O PROSTORECH S AFINNÍ KONEXÍ, KTERÉ DOVOLUJÍ ZAVÉST POJEM ÚHLU

(Referát o přednášce prof. A. Haimovice (Iaşi), konané ve schůzi matematické obce pražské dne 26. září 1958)

Mějme dvojrozměrný afinní prostor. Souřadnice bodu označíme (x^i), složky vektoru X^i a T^k_{ij} koeficienty konexe. Úhel dvou vektorů X^i, Y^i je pak definován těmito podmínkami:

a) je vyjádřen funkcí $V(x^i, X^i, Y^i)$ souřadnic bodu a obou vektorů, kterážto funkce je homogenní nultého řádu vzhledem k X^i a k Y^i;

b) je aditivní, tj. $V(x^i; X^i, Z^i) = V(x^i, X^i, Y^i) + V(x^i, Y^i, Z^i)$;

c) je nezávislý na souřadnicovém systému;

d) je invariantní vzhledem k lineární translaci vektorů.

Z těchto předpokladů se pak odvodí tyto důsledky:

1. $V(x^i, X^i, Y^i) = U(x^i, X^i) - U(x^i, Y^i)$, kde U je nová funkce.

2. Funkce U je definována systémem rovnic:

$$\frac{\partial U}{\partial x^i} - T^k_{ji} X^j \frac{\partial U}{\partial X^k} = \omega_i(x^i) ; \quad X^i \frac{\partial U}{\partial X^i} = 0 ,$$

kde ω_i jsou složky libovolného kovariantního vektoru.

Po doplnění systému dostaneme tento výsledek:

A) Prostory, které dovolují zavésti pojem úhlu, jsou dány relacemi $R^j_{i12k} = \lambda_k R^j_{i12} + \mu_k \delta^j_i$, jež lze interpretovati geometricky.

B) Vezmeme-li formu $R^*_{ij}\xi^i\xi^j$, kde $R^*_{ij} = \frac{1}{2}(R_{ij} + R_{ji})$ a je-li tato forma positivně definitní, pak úhel je popsán vztahem

$$\cos V = \frac{R^*_{ij} X^i Y^j}{\sqrt{R^*_{ij} X^i X^j}\sqrt{R^*_{ij} Y^i Y^j}} .$$

Je možno též v ostatních případech udat obdobnou formuli pro úhel. Z předchozí definice úhlu plyne řada zajímavých důsledků, o kterých se autor v přednášce zmínil.

František Nožička, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

RECENSE

Jozef Garaj, **Základy vektorového počtu**, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava 1957, I. vyd., náklad 3200 výt., str. 212, obr. 101, cena Kčs 10,80 brož.

V této knize se používá výhradně vektorové symboliky, při níž nejsou tedy východiskem transformační vztahy mezi složkami v různých systémech souřadnic, ale pojem vektoru a tensoru se zavádí invariantně, jak se tomu většinou děje v přednáškách na technických vysokých školách. Proto v první části je vyložena *vektorová algebra* způsobem obvyklým v knihách, věnovaných vektorovému počtu v trojrozměrném euklidovském prostoru. Jsou proto nejdříve uvedeny základní početní operace s vektory (skalární násobení vektoru, sčítání vektorů a zákony pro sčítání, skalární součin dvou vektorů, rozklad vektoru do složek, speciálně pro pravoúhlý systém základních vektorů, vektorový součin dvou vektorů, složené součiny vektorů a vektorové rovnice). Tato první část, v níž jsou v propočtených příkladech provedeny vektorově některé úlohy z analytické geometrie a kde je ukázáno též použití skalárního příp. vektorového součinu v geometrii a ve fysice, je zakončena vztahy pro transformaci souřadnic vektoru a vyjádřením směrových kosinů pravoúhlého systému jednotkových vektorů vzhledem k jinému takovému systému (Eulerovy úhly).

V druhé části (*tensorová algebra*) je nejdříve definována diáda a diadický součin vektorů a podány nejjednodušší vlastnosti diád (skalární součin vektoru a diády, rovnost dvou diád). Na definici souboru n diád je založen pojem tensoru druhého stupně, jehož vlastnosti jsou pak dokazovány pomocí dříve vyložených vlastností diád. Zvláště důležitým vztahem je vyjádření tensoru součtem tří diád, které umožňují zavedení vektorových souřadnic (pravých příp. levých) tensoru vzhledem ke zvolenému nekomplanárnímu systému. Speciálně v pravoúhlém systému jsou získány tzv. ortogonální složky daného tensoru. Potom lze dokázat existenci tří hlavních směrů definovaných násobením zprava příp. zleva. Pro další výklad je podána definice symetrického a antisymetrického tensoru na základě pojmu tensoru sdruženého k danému tensoru a je proveden rozklad tensoru na symetrickou a antisymetrickou část. Důležité je to, že tensor má obecně 9 různých souřadnic, symetrický tensor 6 souřadnic a antisymetrický tensor jen 3 souřadnice. Proto lze tensoru jednoznačně přiřadit kvadratickou plochu a toto přiřazení je vzájemně jednoznačné, je-li daný tensor symetrický. Tato kvadratická plocha je obrazem symetrického tensoru, kdežto antisymetrický tensor má za obraz určitý vektor, takže obrazem obecného tensoru je pak kvadratická plocha a vektor. Pro vektorový součin vektoru a tensoru se rozlišuje opět pravý příp. levý součin, který je zase tensorem, jako je tensorem druhého stupně i skalární součin dvou tensorů. Speciálně zavedený tensor identity umožňuje určení reciprokého tensoru. Po stanovení tří skalárů tensoru jsou v závěru této části podány transformační vztahy pro ortogonální souřadnice tensoru a ukázáno zcela krátce, jak lze sestrojit tensory vyšších stupňů.

Třetí část (*vektorová analysa*) je po uvedení pojmu vektorové funkce skalárního argumentu, definice její limity, spojitosti, derivace s jejími vlastnostmi (včetně Taylorova vzorce), neurčitého a určitého integrálu, věnována základům diferenciální geometrie křivek a pohybu tuhého tělesa.

Nejdůležitější částí celé knihy je pak čtvrtá část, která se zabývá *teorií polí*. V této části také nevystačí čtenář pouze se základními pojmy z algebry a se znalostí pojmu derivace a integrace funkce, jako tomu bylo v předcházejících částech, je tu třeba znát poněkud více, jak to vyžadují závěrečné odstavce této části. V úvodu části o teorii polí je nejdříve pojem vysvětlen a po výkladu o zobrazení skalárního pole je zaveden gradient skalárního pole a s ním souvisící Hamiltonův operátor. Pomocí tohoto operátoru jsou pak definovány další pojmy teorie polí (divergence vektoru, rotace vektoru a gradient vektoru a obdobně pro tensor). Pak jsou dokazovány různé vztahy pro tyto pojmy (v běžném textu v příkladech i v úlohách) a zvláště je ukázáno stanovení Laplaceova operátoru. Na výklad o pojmu vektorového pole navazuje definice vektorové čáry a odvození její diferenciální rovnice. Dále je vyloženo, kdy se vektorové pole nazývá potenciálovým (bezvírovým), pro kterýžto pojem jsou uvedeny nutné a postačující podmínky. S vektorovým polem souvisí cirkulace vektorového pole (křivkový integrál) a tok vektoru uzavřenou plochou (plošný integrál), který za určitých předpokladů lze převést na objemový integrál (Gaussova věta), jehož pomocí lze vyložit též fysikální význam divergence vektoru. Při zvolených předpokladech pro čáru, podél níž je integrováno, je obdobně vyložen též fysikální význam rotace vektoru. Závěr knihy tvoří převedení křivkového integrálu cirkulace vektorového pole na plošný integrál (Stokesova věta) a výklady na použití ve fysice kniha končí.

Uvedená kniha je napsána pro čtenáře, který má jisté předběžné znalosti základních matematických disciplin, které však (s výjimkou čtvrté části) nepřesahují minimální požadavky. Přímo v textu je řešeno mnoho příkladů, které by bylo možno uvést běžně jako věty a řešení příkladů jako jejich důkazy. Mezi jinými příklady jsou propočteny základní úlohy o lineárních útvarech z analytické geometrie v rovině a v prostoru. Výsledků propočtených příkladů se dále v průběhu výkladu používá, proto tyto příklady prohlubují do značné míry vyloženou látku a je tedy třeba si je propočítat. Tím též čtenář získá určitou praxi v užívání naučených definic a vět a vidí, jakým způsobem se při řešení jednotlivých příkladů dostane k příslušným výsledkům. Výborným doplňkem knihy, který nebývá vždy v pomocných učebnicích tohoto druhu, je řada úloh, které jsou čtenáři předloženy k samostatnému řešení a u nichž jsou vždy uvedeny výsledky příp. u složitějších úloh i návod k řešení. Tato učebnice sice připomíná knihu: D. Ilkovič, Vektorový počet, výklad látky je však poměrně užší a svým způsobem bude dobrou učebnicí pro studenty některých technických fakult a také pro každého, kdo potřebuje se rychle seznámit se základy vektorového počtu.

Provedení tisku knihy vykazuje řadu nedostatků, zejména v tisku obrázků, kde by byl lepší popis šablonou a nikoliv tiskem, protože v tomto případě jsou indexy většinou nečitelné (a někdy i ostatní písmena), a potom v dosti značném počtu (sice celkem) nepodstatných chyb, které nebyly korekturou postihnuty. Tisk obrázků samých neodpovídá významu knihy a nedosahuje úrovně obrázků z jiných našich knih a učebnic, např. vydávaných v SNTL. Při tom popis v obr. 38 nesouhlasí s textem, v obr. 76a chybí u nábojů označení, v obr. 65b netvoří kružnice svazek a názorné obrázky, pracované zřejmě v pravoúhlé axonometrii, působí většinou pohledově nepříznivě vlivem volby obrazu os, který určuje průmět vodorovné roviny. Je třeba rovněž připomenout, že v limitních vztazích se dnes používá výhradně šipky pro vyznačení konvergence a že se upustilo od používání rovnítka. Tečný vektor křivky by měl být označen **t**, jak je zvykem v učebnicích diferenciální geometrie, stejně jako snad mělo být upuštěno od označení vektorů (s výjimkou úhlových rychlostí) řeckými písmeny, protože rozlišení tloušťkou od skaláru není dost patrné. Protože uvedená literatura má být snadno dosažitelná, je nutno upozornit, že knihy: Craig, Vector and Tensor analysis (1943) a Н. С. Дубнов, Основы векторного исчисления, část I (1933), nejsou snadno dostupné; ostatní doporučovanou literaturu lze však v podstatě běžně studovat.

Karel Drábek, Praha

И. В. Проскуряков, **Сборник задач по линейной алгебре.** (I. V. Proskuřjakov, Sbírka úloh z lineární algebry), Moskva 1957, 368 stran.

Podám nejprve obsah spisu aspoň v hlavních rysech:

Odd. 1. *Determinanty*, § 1—8, úloha 1—553.

Odd. 2. *Soustavy lineárních rovnic*, § 9—11, úl. 554—787.

Odd. 3. *Matice a kvadratické formy*, úl. 788—1276. § 12. Výkony s maticemi. § 13. Mnohočlenové matice. § 14. Podobné matice. Charakteristické a minimální mnohočleny. Jordanova a diagonální forma matice. Maticové funkce. § 15. Kvadratické formy.

Odd. 4. *Vektorové prostory a jejich lineární zobrazení*, úl. 1227—1633. § 16. Afinní vektorové prostory. § 17. Euklidovy a unitární prostory. § 18. Lineární zobrazení libovolných vektorových prostorů. § 19. Lineární zobrazení Euklidových a unitárních vektorových prostorů.

Doplněk. Grupy, okruhy a tělesa, úl. 1634—1753.

Jak je patrné, jde o sbírku úloh velmi obsáhlou. Autor se snažil při sestavování této pomůcky podat v prvé řadě dostatečné množství látky k procvičení základních úloh (např. výpočtu determinantů s číselnými prvky, řešení soustav lineárních rovnic s číselnými koeficienty atp.), za druhé, podat úlohy objasňující základní pojmy a jejich vztahy (např. vztah vlastností matic a vlastností kvadratických forem na jedné straně a lineárních zobrazení na straně druhé), za třetí, podat úlohy doplňující učební běh a přispívající k rozšíření matematického obzoru (např. vlastnosti Pfaffova agregátu příslušného ke kososymetrickému determinantu).

Velmi často se ve sbírce vyskytují úlohy dokázat věty, které lze najít i v učebnicích. Autor zařadil takové úlohy vycházeje z té okolnosti, že při přednáškách pro nedostatek času je mnohdy nutno odkazovat posluchače na příslušnou literaturu. A tu může sbírka příkladů prokázat dobrou službu, ježto jsou v ní podány také návody pomáhající provést samostatně důkazy, což přispívá k pronikavějšímu vniknutí do učebního postupu. Ježto se autor snažil sestavit sbírku příkladů tak, aby mohla sloužit bez obtíží jako pomocná kniha při přednáškách, stává se, že se v ní látka opakuje, třeba v málo odlišné stylisaci. Tak je podáno v podstatě totéž v odstavci o kvadratických formách a později v odstavci o lineárním zobrazení. Některé úlohy jsou formulovány tak, že je možno je řešit jak pro případ reálného prostoru Euklidova, tak pro případ komplexního prostoru unitárního. Autor je toho mínění, že tento postup je při sbírce příkladů vhodný, ježto takto je dána větší přizpůsobivost při použití.

Na začátku některých paragrafů je uveden návod. Ten obsahuje také krátký nástin terminologie a označení v těch případech, kdy v učebnicích není úplné jednoty v tomto směru. Výjimečné postavení zaujímá úvod k § 5, kde jsou podány hlavní metody k výpočtu determinantů libovolného řádu a uvedeny příklady na každou metodu. Je to jistě pokrok proti postupu dosud všeobecně používanému v učebnicích i ve sbírkách příkladů, kdy bývají uvedeny jen různé příklady na výpočet determinantů, není však podána stylizace příslušného návodu, takže se studující setkávají se značnými obtížemi.

U řadových čísel úloh, kde je ve výsledku uvedeno řešení nebo návod k němu, je připojena hvězdička. Řešení je uvedeno jen u malého počtu úloh. Jsou to buď úlohy obsahující obecné metody, kterých možno použít při řadě dalších úloh (např. úloha 1151 udávající postup při vyčíslení maticové funkce a úloha 1529 obsahující sestrojení báze, při níž matice lineárního zobrazení je v Jordanově tvaru), nebo úlohy zvláště nesnadné (např. úlohy 1433, 1714, 1617). Návody obsahují zpravidla pouze základní myšlénky nebo metodu řešení a provedení samotného řešení přenechávají čtenáři. Jen pro nesnadnější úlohy obsahuje návod také krátký nástin řešení (např. u úloh 546, 1492, 1632).

Při srovnání s dosavadními sbírkami (nehledíme-li k podrobnostem) je novinkou zařazení úloh na mnohočlenové matice (§ 13), na lineární zobrazení afinních a metrických prostorů (§ 18, § 19). Trochu stranou výkladům o lineární algebře leží doplňky věnované grupám, okruhům a tělesům.

Nebylo dosud zvykem připojovat ke sbírkám příkladů rejstřík. Jistě by se však zvýšila přehlednost a používatelnost sbírky, kdyby se tento zvyk vžil i u sbírek příkladů.

Karel Rychlík, Praha

Claude Chevalley, **The construction and study of certain important algebras.** Publications of the Mathematical society of Japan, sv. 1, 1955, str. VI + 64.

Spis přináší obsah přednášek o některých důležitých pojmech multilineární algebry, které konal autor r. 1954 v Japonsku. O této látce je však pojednáváno z hlediska zcela neobvyklého, což bylo možno uskutečnit teprve v posledních létech, hlavně v důsledku nových prací o homologii a Lieově teorii. Práce má v prvé řadě význam jako úvod do těchto nových metod. K jejímu porozumění stačí znát základní pojmy moderní algebry. Při tom však nechci tvrdit, že by její studium bylo zcela snadné. Jen zařazením pod vhodně zvolené pojmy bylo umožněno shrnout na místě tak omezeném tolik látky. Je to přesvědčující příklad pro účelnost těchto pojmů nové algebry. Tenzorové a vnější násobení mají velký význam i mimo algebru: může tedy spis zajímat pracovníky i z jiných oborů matematiky.

Slovem *okruh* se vždy rozumí okruh s jednotkou 1. Jako homomorfismy tohoto okruhu A se uvažují homomorfismy zobrazující jednotku na jednotku. Okruh A může být v kap. I i nekomutativní, v dalším je vždy komutativní. Modul M nad A (základním okruhem, okruhem skalárů) bude vždy modul unitární ($AM = M$); αx s $\alpha \in A$, $x \in M$ se nazývá skalárním násobkem prvku x. Zobrazení modulu nad A do modulu nad A se nazývá lineární, je-li to homomorfismus příslušné aditivní grupy, který komutuje s každým skalárním násobením pro každý prvek z A. Pod slovem algebra E nad A se rozumí modul nad A s asociativním násobením. E je nadto okruh, pro který ještě platí

$$\alpha(xy) = (\alpha x)\, y = x(\alpha y) \quad (x, y \in E;\ \alpha \in A)\,.$$

Homomorfismem algeber se myslí okruhový homomorfismus zobrazující jednotku na jednotku. Podmnožina S algebry E se nazývá množinou generátorů pro E, je-li E nejmenší podalgebra obsahující S a jednotku 1 algebry E.

Kap. I: *Graduované* (graded) *algebry*. Nejprve pojednáno o volných algebrách. K tomu je definován ostřejší pojem universální algebry. Pro tyto algebry je prokázána existence a unicita a tím provedeny tyto důkazy i pro algebry volné. Pro aditivní grupu Γ je Γ-graduovaná algebra E definována jako algebra nad A, která jako modul nad A má rozklad v direktní součet $E = \sum_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$. Přitom pro podmoduly E_γ, $E_{\gamma'}$ platí $E_\gamma E_{\gamma'} \leqq E_{\gamma+\gamma'}$ (tj. $x \in E_\gamma$ a $x' \in E_{\gamma'} \Rightarrow xx' \in E_{\gamma+\gamma'}$). Zvláštní případy Γ-graduovaných algeber jsou algebry graduované a polograduované. Při nich je Γ grupa celých čísel, popřípadě celých čísel mod 2. Konečně je definována zobecněná derivace.

Kap. II: *Tenzorové algebry*. Tenzor se obvykle označuje písmenem s indexy horními a dolními. To proto, že se užívá báze. Autor se takovému vyjádření vyhýbá; při jeho definici není třeba báze užívat. Definuje pojem tenzorové algebry T nad modulem M (což je modul nad komutativním okruhem A), jako algebru nad A vytvořenou M a 1; každé lineární zobrazení M do libovolné algebry E nad A lze rozšířit na homomorfismus T v E. Dokazuje pak existenci a unicitu T. Charakterisuje T také jako graduovanou algebru, při čemž komponenty se zápornými indexy jsou vesměs rovny 0. Tenzorový součin dvou modulů nad A je utvořen jako podmodul tenzorové algebry nad direktním součtem oněch dvou modulů nad A. Je ukázáno, jak lze derivaci definovat jako tenzorovou algebru a konečně je definován „kosý" tenzorový součin dvou polograduovaných algeber.

Kap. III. *Cliffordovy algebry.* Cliffordova algebra je přidružena ke kvadratické formě $f(x)$ a zhruba řečeno vyhovuje vztahu $x^2 = f(x) \,.\, 1$. Autor nejprve definuje kvadratickou formu bez užití báze modulu M nad okruhem A. Přitom definuje zároveň příslušnou bilineární formu modulu $M \times M$ nad A. Cliffordova algebra C kvadratické formy f je definována jako $C = T/I$, kde T je tenzorová algebra nad M a I je ideál z T vytvořený všemi prvky tvaru $x^2 - f(x) \,.\, 1$, $x \in M$. Speciálními případy Cliffordovy algebry jsou kvaternionové algebry (A je těleso charakteristiky $\neq 2$, M má hodnost 2 nad A) a vnější algebra E nad M, což je Cliffordova algebra pro $f = 0$. C je polograduovaná algebra a E graduovaná algebra. Spinory jsou zavedeny pomocí Cliffordovy algebry nad tělesem.

Kap. IV: *Některá použití vnějších algeber.* Tu pojednáno o Plückerových souřadnicích, pak o Pfaffových invariantech (pomocí exponenciální funkce ve vnější algebře) a o determinantech. Konečně uvedeno použití v kombinatorické topologii.

*

Jako sv. 2 sbírky Publications of the Mathematical society of Japan vyšel spis: *Katsumi Nomizu,* **Lie groups and differential geometry.** 1956, str. XIV + 80.

Autor dává zcela moderní úvod do diferenciální geometrie ve velkém z hlediska vláknových svazků a teorie Lieových grup. Základem knihy je rukopis přednášky o teorii souvislostí, kterou autor konal na universitě v Nagoya v zimě r. 1955.

Obsah (zkrácený): Kap. I. Diferenciální variety. Kap. II. Souvislost ve vláknových svazcích. Kap. III. Lineární souvislost.

*

Jako sv. 3 této sbírky vyšla kniha: *Paul R. Halmos,* **Lectures on ergodic theory.** 1956, str. VIII + 100.

Autor spisu, od něhož pocházejí knihy „Measure theory", 1950 a „Introduction to Hilbert space", 1951 (první z nich je přeložena i do ruštiny: П. Халмош, Теория меры 1953) podává obsah své přednášky o ergodické teorii konané na universitě v Chicagu v létě r. 1955. Není to tedy monografie vyčerpávající látku. V úvodu žádá autor čtenáře, aby si představil, že poslouchá řadu hovorů, které mají oživit zájem o užitečný, ne však zcela běžný obor matematiky. Autorův záměr bude více než splněn, docílí-li kniha toho, že se čtenář pokusí o řešení některých pozoruhodných otevřených problémů z ergodické teorie a popřípadě je skutečně rozřeší.

Výňatek z obsahu: Rekurence. Průměrná konvergence. Bodová konvergence. Ergodičnost. Míšení. Algebra míry. Diskrétní spektrum. Automorfismy kompaktních grup. Zobecněné vlastní hodnoty. Slabá aproximace. Stejnoměrná aproximace. Kategorie. Invariantní míry. Zobecněné ergodické věty. Neřešené úlohy (deset).

Karel Rychlík, Praha

R. Kochendörffer, **Determinanten und Matrizen.** B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1957, 144 stran.

Kniha R. Kochendörffera je určena posluchačům, kteří začínají studium matematiky na vysoké škole. Autor, který je sám universitním profesorem, navazuje tu nejprve bezprostředně na středoškolskou matematiku, takže první část spisu mohou číst bez obtíží i studenti středoškolští. Druhá polovina knihy má ovšem už rychlejší tempo, čímž se autoru podařilo podat v knížce nepříliš rozsáhlé látku dosti obsáhlou.[1]) I v druhé části knihy se však přibližuje k školským znalostem čtenářovým, výklad se namnoze konfrontuje se středoškolskou matematikou a pedagogické záměry autorovy dokresluje též 33 cvičení, jež jsou připojena k některým paragrafům a jejichž řešení (nebo aspoň výsledky) najdeme v závěru knížky. Jen některá z těchto cvičení jsou počtářske úkoly; většinou se i ve cvičeních čtenář seznamuje s novými vlastnostmi zaváděných pojmů, při čemž si může dobře prověřit, zda těmto pojmům porozuměl.[2])

Kochendörfferova knížka je rozdělena do devíti kapitol nestejného rozsahu i nestejné náročnosti, jejichž náplně si nyní všimněme podrobněji.

První kapitola má připravený charakter. Čtenář se tu seznámí se symboly $\sum_{i=1}^{m} a_i$, $\prod_{i=1}^{m} a_i$ a s matematickou indukcí a v paragrafu o polynomech je bez důkazu uvedena základní věta algebry a několik vlastností mnohočlenů. V závěru první kapitoly se středoškolským způsobem zavádí pojem permutace.

Středoškolský charakter má rovněž počátek druhé kapitoly, v němž se na soustavách lineárních rovnic o dvou a o třech neznámých ukazuje užitečnost pojmu (čtvercové) matice a jejího determinantu. Od determinantů 2. a 3. stupně se pak přechází k obecné definici determinantu n-tého stupně ($n \geqq 2$).

Nejdůležitější vlastnosti determinantů jsou vyloženy ve třetí kapitole. Vedle vlastností základních uváděných v každé elementární učebnici nalezneme tu též Weierstrassovu charakterisaci determinantu čtvercové matice (podle níž je determinant matice A polynomem homogenním a lineárním v prvcích každé řady matice A, který výměnou dvou řad matice A mění znaménko a jenž je pro jednotkovou matici roven 1). Je definována matice transponovaná (označení A'), zkoumán její determinant a jsou probrány metody pro výpočet daného determinantu — rozvoj determinantu — podle prvků jisté řady a pravidlo Sarrusovo. Odvození Cramerova pravidla navazuje na druhou část knížky a konečně závěr této třetí kapitoly pojednává o násobení determinantů.

Čtvrtá kapitola má už abstraktnější náplň, neboť se v ní čtenář seznámí s pojmem grupy — totiž — s grupou regulárních matic. K tomu je zapotřebí uvést definici součinu dvou matic (ne už jen čtvercových, nýbrž i obdélníkových), pojem regulární matice a definici matice A^{-1} inversní k dané matici regulární A. V závěru seznamuje autor čtenáře též se sčítáním a odčítáním matic.

Důležite pojmy lineární algebry, probírané v páté kapitole, kladou opět zvýšený požadavek na čtenáře, který ke studiu přistoupil jen se znalostí středoškolské matematiky. Vektorový prostor je tu definován jako množina všech matic typu $(n, 1)$ — vektorů — jejichž prvky jsou libovolná reálná nebo komplexní čísla. Jsou formulovány axiómy vektorového prostoru; již z předcházejících úvah o obdélníkových maticích plyne, že tyto axiómy jsou splněny pro matice typu $(n, 1)$. Base vektorového prostoru se zavádí jako soustava vektorů taková, že každý vektor prostoru lze psát jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů z této base; lineární nezávislost vektorů base je pak uvedena jako charakteristická vlastnost base a nasnadě je tu též definice dimense. Ve dvou paragrafech si Kochendörffer všímá pojmu hodnost matice, načež v závěru páté části je zavedena norma (komplexního) vektoru a definován pojem ortogonální base.

---

[1]) Zkratkovitý charakter knížky ilustruje např. okolnost, že pojem (číselného) tělesa zavádí tu Kochendörffer jen v poznámce pod čarou na str. 33.

[2]) V předmluvě doporučuje autor čtenáři aby při studiu věnoval velkou pozornost právě řešení úloh; mezi literaturou, kterou v tomto ohledu doporučuje na doplnění, je i u nás dobře známá sbírka Фаддеев-Соминский: Сборник задач по высшей алгебре (uvádí se tu však nesprávně jméno druhého autora).

Šestá kapitola pojednává o lineárních rovnicích. Tato teorie je probrána ve dvou dílčích úlohách: určiti obecné řešení homogenní soustavy a vyhledati jedno speciální řešení soustavy nehomogenní. Zpracování této části ovšem nemá středoškolský ráz, nýbrž pracuje se tu s výše zavedenými pojmy lineární algebry. Jen v závěrečném paragrafu tohoto oddílu, pojednávajícím o početních metodách při řešení lineárních rovnic, najdeme opět reminiscenci na středoškolskou matematiku.

V sedmé kapitole, věnované hermitovským a kvadratickým formám, se čtenář mj. seznámí s charakteristickou rovnicí hermitovské matice, se zákonem setrvačnosti a s některými vlastnostmi positivně (a negativně) definitních hermitovských forem.

Obsáhlejší předposlední osmá kapitola doplňuje v jistém směru kapitolu třetí, neboť se zde uvádějí některé další vlastnosti determinantů a matic. Autor definuje determinant Vandermondův, podává Hadamardův odhad determinantu a odvozuje Laplaceovu větu. Jeden paragraf této části je věnován otázce rozložitelnosti matice a podrobněji se zkoumají matice podobné.[3]) Dále se zobecňuje pojem charakteristické rovnice, jenž byl výše zaveden jen pro matice hermitovské, a odvozují se některé vlastnosti charakteristických čísel. Závěr oddílu si pak všímá Kroneckerova součinu matic a odvozuje Cayley-Hamiltonovu rovnici.

Poslední, devátá kapitola rozbírá podrobněji pojem podobnosti matic. Ukazuje se, že podobnost je ekvivalencí v množině všech matic téhož typu, a třídám, na něž se tato množina vzhledem na uvedenou ekvivalenci rozpadne, se dává geometrický význam (lineárních zobrazení na vektorovém prostoru). Pozornost je pak věnována zejména invariantům, jež zůstanou zachovány při podobnosti matic.

Tolik tedy ve stručnosti k obsahu Kochendörfferovy knížky. Závěrem bych chtěl říci, že tento úvod do studia determinantů a matic, jdoucí sice mnohem výše, než jsme zvyklí očekávat od spisů obdobného rozsahu a obdobného zaměření, ale svědčící o dobrých učitelských zkušenostech autorových, je možno i našim studentům doporučit.

Jiří Sedláček, Praha

Eduard Winter, **Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1746—1766.** Dokumente für das Wirken LEONHARD EULERS in Berlin. Zum 250 Geburtstag. Akademie-Verlag. Berlin 1957, XIV, 394 str.

Spisovatel se podjal záslužného činu, že vydal Knihy záznamů (Registres) Berlínské Akademie z let 1746—1766. Jsou prací tehdejšího stálého tajemníka této akademie Johanna Friedricha Samuela Formeye.

Tyto knihy záznamů umožňují podat doklady velikých zásluh Eulerových o rozvoj Berlínské akademie. Zároveň s již uveřejněnými protokoly Petrohradské akademie, na níž Euler působil v létech 1727 až 1741 a pak od r. 1766 až do smrti r. 1783, ukazují jeho činnost vědeckou a organisátorskou na obou akademiích. Vydáním těchto knih uctívá Berlínská akademie 250. výročí narození Eulera, jehož mnohostranné činnosti je zavázána velikými díky.

Kniha obsahuje obraz Eulerův z r. 1751 od E. Handmanna.

Karel Rychlík Praha

J. Lukaszewicz, M. Warmus: **Metody numericzne i graficizne.** Część I. (Numerické a grafické metody početní. Díl I.) 1. vydání. Vydalo Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa 1956, 429 stran, 77 obrázků, 1 příloha, 9 tabulek, cena 29,20 zł.

[3]) Definice podobných matic je podána na str. 112, avšak rejstřík odkazuje (pod heslem „ähnliche Matrizen") na str. 123.

Kniha byla koncipována jako příručka a učebnice základních metod numerického a grafického počtu. Předpokladem pro její studium je znalost základů algebry, geometrie a infinitesimálního počtu. Je zaměřena velmi zřetelně k bezprostřednímu použití vyložených metod. Po názorném objasnění pojmu resp. po vymezení problému, k jehož řešení příslušná metoda slouží, následuje zpravidla teoretický výklad, doprovázený numerickými příklady resp. obrázky. Zvláštní důraz je kladen na pokud možno jednoduché odhady chyb — ať už chyb zaokrouhlovacích, chyb metod nebo chyb odčítaných hodnot při použití grafických pomůcek (stupnic, logaritmického pravítka, nomogramů).

Úvodní 1. kapitola se zabývá teorií maximálních chyb a statistickou teorií chyb. Nejdříve pojednává o přesnosti měřených veličin a o absolutních a relativních chybách měřených veličin a čísel, získaných přibližným výpočtem. Dále odvozuje z Taylorova rozvoje výrazy pro absolutní a relativní chyby funkce jedné a více proměnných vlivem nepřesnosti argumentů. Výklad statistické teorie chyb je zaměřen k statistickým odhadům přesnosti naměřených fysikálních veličin a pravděpodobnostnímu ohodnocení přesnosti funkčních hodnot, když jsou dány konfidenční intervaly argumentů.

Druhá kapitola jest úvodem k diferenčnímu počtu. Jsou zde definovány obyčejná, zpětná, střední a poměrná diference a vyloženy základní vzájemné vztahy mezi nimi a jejich vztah k derivaci. Do této kapitoly je též zařazena stať o metodě vyjádření polynomu jako lineární kombinace faktoriálních mnohočlenů.

Ve třetí kapitole se vysvětluje pojem a význam interpolace. Jsou zde uvedeny Lagrangeova formule a způsob jejího výpočtu Aitkenovou iterační metodou, obecná Newtonova formule, dále pak formule Gaussova, Stirlingova, Besselova, Everettova a formule pro interpolaci pomocí racionální lomené funkce.

Teorie chyb vzniklých interpolací jest podána z obecnějšího hlediska v další čtvrté kapitole, pojednávající o aproximaci. V ní se nejdříve uvádějí existenční teorémy — Weierstrassův o existenci aproximačního polynomu a Borelův o existenci polynomu, který jest optimální aproximací dané funkce. Metodám stanovení optimálních aproximací je věnována podstatná část kapitoly; z nich jmenujme velmi pěkně zpracovaný výklad o Čebyševových polynomech. Dále se tato kapitola zabývá vyrovnáváním funkčních hodnot a experimentálních dat metodou nejmenších čtverců; diskutuje se a vysvětluje se pravděpodobnostní charakter této metody. Dále se zde vysvětluje použití ortogonálních polynomů v teorii aproximace, Fourierova řada a metody harmonické analysy. Tuto rozsáhlou a velmi pěkně zpracovanou kapitolu uzavírá diskuse o výběru vhodné aproximační metody s ohledem na vlastnosti dané funkce, na požadavky, kladené na aproximující funkci a na výpočtové možnosti.

Pátá kapitola se zabývá aplikacemi metod postupných aproximací na řešení algebraických a transcendentních rovnic a systémů rovnic o více neznámých, vyjma systémů lineárních rovnic, které jsou probírány samostatně v následující kapitole. Dále je zde vyložena Sturmova metoda s aplikací na separaci kořenů do dostatečně malých intervalů. Z iteračních metod pro řešení rovnic o jedné neznámé se uvádí pravidlo „regula falsi" s naznačením důkazu konvergence posloupnosti postupných aproximací k přesnému řešení a s odhadem chyby n-té aproximace. Dále je tu uvedena Eulerova metoda a jako její zvláštní případ Newtonova metoda. U Newtonovy metody se uvádí kriterium, kdy posloupnost postupných aproximací konverguje k přesnému řešení, a dále pak se odvozují praktická pravidla pro numerický výpočet a pro způsoby zaokrouhlování čísel během výpočtu. Oddíl metod řešení rovnic o jedné neznámé je zakončen podrobným řešením příkladu, při němž se vtipně kombinují jednotlivé probrané metody. Z metod řešení rovnic o více neznámých je uvedena zobecněná Newtonova metoda postupných aproximací a iterační metoda. Kapitolu zakončuje informativní výklad postupu výpočtu relaxačními metodami.

V šesté kapitole se uvádějí nejdůležitější metody řešení systémů lineárních rovnic: Metoda eliminační s odhadem maximálních chyb, vzniklých nepřesností parametrů daného systému a šířením zaokrouhlovacích chyb; eliminační metoda je upravena do výpočtového schématu (které navrhl W. E. MILNE v knize Numerical Calculus). Dále se vysvětluje, jak se určí nejlepší řešení (ve smyslu metody nejmenších čtverců) sporné soustavy p lineárních rovnic s n ($< p$) neznámými. Podstatnou část kapitoly tvoří výklad teorie krakowianů a jejich aplikace na řešení systémů lineárních rovnic.

Sedmá kapitola vychází ze způsobu zpracování a vzorců kapitoly o interpolaci. Uvádějí se zde nejčastěji používané metody numerické derivace a integrace. Pečlivě jest zpracována stať o odhadech chyb při numerické derivaci. Grafické derivaci je věnován informativní odstavec; není zde však vyložena metoda sestrojení tečny v daném bodě grafu funkce. Ze vzorců pro numerickou integraci jsou uvedena známá pravidla, lichoběžníkové a Simpsonovo a integrační vzorce Newton-Cotesův, Čebyševův a Gaussův. O grafické integraci pojednává informativní odstavec. Podrobnější výklad této látky má být podán v připravovaném druhém dílu knihy.

Druhá část knihy podává přehled základních pomůcek a metod grafického počtu. Začíná výkladem (kapitola VIII) o stupnicích a grafických papírech. Vysvětlují se základní pojmy grafického počtu (jako kóta, modul, stupnice apod.) a konstrukce a použití stupnic. Nejužívanější grafické papíry (milimetrový, logaritmický, semilogaritmický a mocninový) jsou definovány parametrickými rovnicemi a z těch pak jsou odvozeny typy funkcí, které jsou na nich zobrazeny přímkou. Dále se zde objasňuje informativně pojem anamorfosy a princip grafické anamorfosy.

Do deváté kapitoly jest zařazeno pojednání o logaritmickém pravítku se zaměřením na jeho účelné využití; vysvětlují se některé obraty, které se často vyskytují při technických výpočtech.

V poslední desáté kapitole jsou vysvětleny základní metody konstrukce *nomogramů.* Kapitola je rozdělena na dvě části: V první části jsou vyloženy způsoby sestrojení průsečíkových nomogramů pro nejjednodušší vztahy mezi třemi proměnnými; pěkným příkladem jejich aplikace je vypracovaný nomogram pro určení reálných i imaginárních kořenů redukované kubické rovnice. Tuto část kapitoly uzavírá výklad o Massauově rovnici, kterou lze zobrazit nomogramy s trojnásobnou soustavou přímek. Ve druhé části této kapitoly jsou vyloženy způsoby sestrojení základních typů spojnicových nomogramů. Stručně je připojen výklad o sdružování nomogramů a binárním poli.

Kniha je zakončena tabulkami Gaussovy a Studentovy funkce, tabulkami Stirlingových a interpolačních koeficientů a přehledem nejdůležitějších vzorců pro numerickou derivaci a integraci; použití jmenovaných tabulek a vzorců bylo vyloženo v příslušných kapitolách knihy.

V textu knihy postřehneme řadu originálních náhledů a způsobů zpracování této tak značně rozsáhlé a rozmanité látky. Pro jasnou a přehlednou formu zpracování bude kniha jistě vyhledávána nejen studujícími na vysokých školách technických směrů, ale i pracovníky mnoha technických oborů.

Stanislav Maloň, Praha

Günter Pickert: **Projektive Ebenen.** Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955, VIII + 343 stran, 60 obrazů; cena sešitového výtisku 44,80 DM, vázaného 48,60 DM. Vyšlo jako LXXX. svazek edice „Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften".

Teorie abstraktních rovin je novou matematickou disciplinou vzniklou v tomto století. Z geometrického hlediska se vyvinula ze studia axiomů incidence (Hilbert, Veblen, Young), teorie tkání[1]) (Blaschke, Bol, Thomsen, Reidemeister) a teorie konfiguračních vět (Mou-

[1]) Z německého „Gewebe"; profesor W. BLASCHKE razí v poslední době název plástev (*Wabe*).

fangová, Hall, Skornjakov), z algebraického hlediska z teorie zobecněných těles, jako např. alternativních těles, kvasitěles, kartézských grup a dvojitých lup[2]) (Hall, Bruck, Kleinfeld, Smiley, Pickert). Podle mého názoru má teorie abstraktních rovin nárok na samostatnou existenci především proto, že konfigurační věta Desarguesova platná v aspoň trojrozměrných prostorech s incidencí (a umožňující převést studium těchto prostorů na studium vektorových prostorů nad asociativními tělesy) nemusí platit v rovině s incidencí, tj. v abstraktní rovině.

Některé soubornější články o abstraktních rovinách uvádím ve stručném seznamu na konci recense. Od r. 1955, kdy byla Pickertova kniha vydána, bylo dosaženo mnoha dalších pozoruhodných výsledků zejména v USA, SSSR a NSR.

Kniha profesora Pickerta je prvním obsáhlým kompendiem o abstraktních rovinách; články a spisy uvedené na konci recense podávají pouze pohledy dílčí. Pickertova kniha je věnována specialistům algebraikům i geometrům. Je sepsána s velkým mistrovstvím; poskytuje přehled i podrobné cenné prameny k dalším výzkumům. Zvláštní znalosti se pro studium knihy nepředpokládají; z algebry se předpokládá např. znalost pojmu asociativního tělesa, vektorového prostoru, Galoisových těles, z topologie znalost pojmů uzavřenosti, regularity, kompaktnosti; z hlubších vět užívá autor bez důkazu pouze Wedderburnovy věty o komutativitě konečných asociativních těles a Pontrjaginovy věty o asociativních tělesech, která jsou souvislá a lokálně kompaktní.

Našel jsem několik málo tiskových chyb. Na str. 25, 3. řádek zdola: místo S. 14 má být S. 19; na str. 49, 8. řádek shora: místo $a = 0$, $b = 0$ má být $a^\sigma = 0$, $b^\sigma = 0$; na str. 118, 8. řádek shora: místo Satz 10 má být Satz 17.

Uvedu nejprve názvy kapitol: 1. *Základní pojmy*. 2. *Tkáně*. 3. *Věta Desarguesova*. 4. *Desarguesovské roviny*. 5. *Věta Pappova*. 6. *Alternativní tělesa*. 7. *Moufangovské roviny*. 8. *Translační roviny*. 9. *Roviny s uspořádáním*. 10. *Topologické roviny*. 11. *Möbiusovy sítě*. 12. *Konečné roviny*. Před 1. kapitolou je stručný úvod o způsobu označování. Po 12. kapitole pak následuje dodatek, seznam literatury (236 prací), seznam vzorců a symbolů a věcný rejstřík.

Protože recense je určena především čtenářům o téma nezainteresovaným, pokusím se v dalším o výklad alespoň těch pojmů, které se vyskytují v nadpisech kapitol.

Ke kapitole 1: Východiskem je pojem incidenční struktury, definované jako dvojice množin $\mathfrak{P}$ (množiny „bodů"), $\mathfrak{G}$ (množiny „přímek") spolu s binární relací $\mathrm{I} \subset \mathfrak{P} \times \mathfrak{G}$ (incidencí), při čemž platí implikace $x_i \mathrm{I} y_k$; $i, k = 1, 2 \Rightarrow$ buďto $x_1 = x_2$ anebo $y_1 = y_2$. Speciální incidenční strukturou je projektivní rovina a afinní rovina. U projektivní roviny dva různé body jsou incidentní vždy s jedinou přímkou, ke dvěma různým přímkám existuje vždy jediný bod s oběma incidentní a konečně existují čtyři body, z nichž žádné tři nejsou incidentní s touž přímkou. Afinní rovina vznikne z projektivní vypuštěním jedné (nevlastní) přímky a všech s ní incidentních (nevlastních) bodů. Konfigurační větou rozumí se implikace pro body $X_1, \ldots, X_n$ a přímky $p_1, \ldots, p_\gamma$ incidenční struktury, při níž z určitých vztahů $X_a \neq X_b$, $p_\alpha \neq p_\beta$, $X_c \mathrm{I} p_\gamma$, X_d non $\mathrm{I} p_\delta$ vyplývají další incidence $X_e \mathrm{I} p_\varepsilon$ ($a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ jsou příslušné indexy). Z daných bodů a přímek některé vystupují jako pevné, ostatní jako proměnné.

Metodou, kterou podal v r. 1945 M. HALL, lze přiřadit každé afinní rovině „souřadnice" tak, že každý bod je representován uspořádanou dvojicí souřadnic a incidence bodů s touž přímkou je vystižena Hallovou ternární operací definovanou na množině souřadnic. Specialisací této ternární operace lze za dalších předpokladů dojít k obvyklým operacím sečítání (+) a násobení (.). Profesor Pickert Hallovu metodu poněkud pozměnil pro účely své knihy.

[2]) Lupa je kvasigrupa s neutrálním prvkem; název lupa (podle anglického *loop*) zavedl u nás profesor O. BORŮVKA.

Ke kapitole 2: Incidenční struktura spolu s n-ticí navzájem různých bodů $A_1, \dots, A_n$ nazývá se n-tkání, když: (1) každá přímka je incidentní s jedním z bodů $A_1, \dots, A_n$, (2) každý z bodů $A_1, \dots, A_n$ je incidentní s některým bodem různým od $A_1, \dots, A_n$, (3) existuje bod B, který je různý od $A_1, \dots, A_n$, přičemž žádná z trojic B, A_i, A_j $(i \neq j)$ není incidentní s touž přímkou. Body 3-tkáně lze vyjádřit jako uspořádané dvojice „souřadnic", přičemž incidenci bodů s touž přímkou odpovídá binární operace (podle potřeby buďto sčítání nebo násobení); množina souřadnic spolu s touto operací je lupou. 4-tkáním pak odpovídají dvojité lupy, tj. množiny se sčítáním a násobením, jejichž aditivní systém i multiplikativní systém je lupou a platí identita $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$, kde 0 je aditivní neutrální prvek. Konfiguračním větám pro tkáně odpovídají důležité algebraické zákony, např. asociativita, komutativita, existence inverzního prvku ap.

Ke kapitole 3: Věta Desarguesova o dvou „perspektivních trojúhelnících" je dobře známa z elementů geometrie. Je to zvláštní případ konfigurační věty.

Ke kapitole 4: Roviny, v nichž platí bez výjimky Desarguesova věta, nazývají se desarguesovské.. Patří k základním poznatkům, že Hallův souřadnicový systém je pro desarguesovské roviny asociativním tělesem, tj. množinou se sčítáním a násobením, přičemž aditivní systém je abelovskou grupou, multiplikativní systém grupou a platí oba distributivní zákony pro násobení nad sčítáním.

Ke kapitole 5: Věta Pappova, vyšetřovaná v této kapitole, je rovněž dobře známa z elementů geometrie (též pod názvem věta Pappova-Pascalova); její platnost v afinní rovině má za následek, že Hallův souřadnicový systém je komutativním tělesem.

Ke kapitole 6: Obsah této kapitoly je ryze algebraický a je věnován pojmu alternativního tělesa, které se od asociativního tělesa liší tím, že asociativní zákon pro násobení je nahrazen alternativním zákonem $(xx)y = x(xy)$, $x(yy) = (xy)y$.

Ke kapitole 7: Moufangovskými rovinami nazývá autor roviny, v nichž platí bez výjimky malá Desarguesova věta (při ní „střed perspektivity" je incidentní s „osou perspektivity"). Hallovy souřadnicové systémy moufangovských rovin jsou alternativními tělesy.

Ke kapitole 8: Translační roviny jsou ty afinní roviny, v nichž platí malá věta Desarguesova pro nevlastní „osu perspektivity". Hallův souřadnicový systém translační roviny je kvasitělesem (též Veblen-Wedderburnovým systémem). Kvasitěleso je množina se sčítáním a násobením; její aditivní systém je abelovskou grupou, jejíž multiplikativní systém je lupou a pro niž platí dále: $(x + y) z = xz + yz$, $x \cdot 0 = 0$ (0 je neutrální prvek pro sčítání), rovnice $xa = xb + c$ je pro $a \neq b$ jednoznačně řešitelná.

Ke kapitole 9: V afinní rovině s uspořádáním jsou všecky přímky (jako bodové množiny) uspořádány navzájem konsistentně, což znamená, že paralelním promítáním se uspořádání dvou přímek buďto zachovává anebo mění v opačné. Projektivní rovinu s uspořádáním definuje autor poněkud složitěji užitím relace oddělování dvou bodových dvojic na přímce.

Ke kapitole 10: V topologické rovině je jak množina bodů tak i množina přímek topologickým prostorem; operace spojování dvou bodů a protínání dvou přímek jsou přitom vzhledem k zavedeným topologiím spojité. V knize Pickertově nejsou ještě zahrnuty první podrobnější výsledky o topologických rovinách od L. A. Skornjakova (1954) a H. Salzmanna (1957).

Ke kapitole 11: Möbiusovy sítě jsou desarguesovské projektivní roviny „vytvořené" čtyřmi body, z nichž žádné tři nejsou incidentní s touž přímkou.

Ke kapitole 12: Roviny s konečným počtem bodů nazývají se konečné. Jejich studium souvisí se studiem Steinerových systémů, blokových plánů a diferenčních množin; výklad těchto pojmů přesahuje rámec stručné recense.

LITERATURA

[1] *Л. А. Скорняков,* Проективные плоскости, Усп. мат. наук *6*, № *6 (46)*, 1951, 112—154.

[2] *H. G. Forder,* Coordinates in geometry, Auckland Univ. Coll. Bull., Math. Ser. *41*, No. 1, 1953.

[3] *M. Hall,* Projective planes and related topics, California Inst. of Techn. 1954.

[4] Contributions to geometry, Supplement to the Am. Math. Monthly LXII, No. 7, 1955.

[5] *E. Artin,* Geometric algebra, New York 1957.

Václav Havel, Brno

Jan Vyšín: **Lineární lomená funkce,** vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1958, 120 stran, 37 obr., cena 4,20 Kčs.

V knižnici Populární přednášky o matematice vyšla po osmnácti překladech jako 19. svazek původní česká populární přednáška, jejímž autorem je Jan Vyšín. Lze souhlasit s autorem v tom, že lineární lomená funkce je vhodným thematem pro populární spis, protože má rozsáhlé použití v matematice, zejména v elementární geometrii.

Knížka je rozdělena do tří kapitol. V kapitole první se probírají algebraické vlastnosti lineární lomené funkce, druhá kapitola pojednává o jejím geometrickém významu (zejména s ohledem na geometrii projektivní) a konečně ve třetí kapitole je prodiskutován geometrický význam lineární lomené funkce komplexní proměnné. Výklad navazuje na středoškolskou matematiku, takže brožuru mohou s porozuměním číst i žáci nejvyšších tříd jedenáctiletky. Některá tvrzení, jejichž důkaz by vyžadoval komplikovanějších úvah, nejsou v knížce dokázána.

Pokud se týká nedopatření, která se v brožuře vyskytují, chci upozornit na záměnu obrázků na straně 19 a dále na straně 72. V příkladě 8 na stranách 57—59 je početní chyba, která ovlivnila i úvahy v desátém příkladě (strana 63). Nesprávně jsou očíslovány výsledky cvičení ke kapitole I (na straně 114) a obdobná závada je též na straně 118 u výsledků ke kapitole III.

Jiří Sedláček, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

ZPRÁVY

AKADEMIK EDUARD ČECH VYZNAMENÁN ŘÁDEM REPUBLIKY

President republiky ANTONÍN NOVOTNÝ propůjčil na návrh vlády Řád republiky akademiku EDUARDU ČECHOVI, řediteli Matematického ústavu Karlovy university. Časopis pro pěstování matematiky přinesl zhodnocení Čechovy činnosti při příležitosti jeho šedesátin v r. 1953. Od té doby pracoval E. Čech intensivně zejména v oboru diferenciální geometrie; uveďme zde jen, že v r. 1954 byl po druhé vyznamenán státní cenou, a to za práce z projektivní diferenciální geometrie korespondencí. Všichni českoslovenští matematici mají upřímnou radost z vysoké pocty, které se zaslouženě dostalo akademiku E. Čechovi, blahopřejí mu srdečně a přejí mu mnoho svěžesti do další práce.

Redakce

NÁVŠTĚVY ZAHRANIČNÍCH MATEMATIKŮ V ČSR

Rumunský matematik dr. A. HAIMOVICI, profesor při katedře diferenciální geometrie university v Iaşi se zúčastnil v druhé polovině září turistického zájezdu do ČSR. Při této příležitosti navštívil matematicko-fysikální fakultu Karlovy university, kde byla dne 25. září 1958 uspořádána s pedagogickými pracovníky matematických kateder beseda věnovaná otázkám organisace školství v Rumunské lidové republice. V krátkém úvodním proslovu vzpomněl prof. A. Haimovici desetiletého výročí reformy školství v Rumunsku a jejího významu pro další rozvoj celého školství v této zemi a seznámil účastníky besedy se strukturou rumunského vysokého školství. V bohaté diskusi pak byly vyměněny zkušenosti s vyučováním matematice na školách středních i vysokých u nás i v Rumunské lidové republice.

Dne 26. září 1958 přednášel profesor Haimovici v matematické obci pražské na téma „Sur les espaces à connexion affine qui admettent la notion d'angle" (O prostorech s afinní konexí, v nichž lze zavést pojem úhlu). Výtah této přednášky je v tomto časopise uveřejněn na str. 110.

Jan Pavlíček, Praha

*

Ve dnech 28. září až 8. října navštívili Prahu dva polští hosté, kandidát fysikálně-matematických věd K. RADZISZEWSKI a Mgr J. KISYŃSKI z Lublina.

Dne 29. září měli přednášky v matematické obci pražské. Referát K. Radziszewského „O jistém extremálním problému pro tělesa vepsaná do konvexních těles" se týkal výsledků o obdélnících resp. kvádrech vepsaných do konvexní oblasti nebo konvexního tělesa. Jako příklad výsledků uveďme věty:

Do každé konvexní oblasti lze vepsat obdélník, jehož obsah je větší nebo roven polovině obsahu oblasti.

Do každého konvexního tělesa trojdimensionálního prostoru, které má rovinu symetrie, lze vepsat kvádr tak, že platí $J \geqq \frac{2}{9}V$, kde J je objem kvádru a V objem konvexního tělesa. V případě, že konvexní těleso je simplex, platí rovnost.

V referátu J. Kisyńského „O kompaktních množinách měřitelných funkcí" byly uvedeny jisté nutné a postačující podmínky pro kompaktní množiny měřitelných funkcí vzhledem ke konvergenci podle míry. (Analogie známé Arzelovy-Ascoliovy věty platné pro množiny spojitých funkcí.) Byla vytčena souvislost s kompaktností v prostorech L_p.

Ivo Vrkoč, Praha

*

1. října přiletěl do Prahy starší vědecký pracovník Ústavu mechaniky AV SSSR V. V. Rumjancev na 14denní návštěvu Československa. Prof. Rumjancev měl četné vědecké rozhovory s pracovníky ústavu ČSAV i vysokých škol.

V matematické obci pražské přednesl referát na téma „O stabilitě pohybu gyroskopu v Cardanově závěsu". Ljapunovovou druhou metodou podal řešení úlohy o stabilitě pohybu těžkého symetrického gyroskopu v Cardanově závěsu s respektováním hmoty závěsných kruhů. Ukázal též vyšetření vlivu dissipativních sil na stabilitu pohybu.

Ve dnech 9. až 11. října navštívil náš host Brno a Bratislavu.

Zdeněk Vorel, Praha

*

Dne 1. října 1958 přijeli do Prahy kandidáti věd P. I. Čuškin a V. P. Smirjagin, pracovníci moskevského Výpočtového střediska sovětské akademie věd. Cílem jejich čtrnáctidenního pohybu v ČSR bylo prohloubení styků s československými pracovníky v oboru numerických metod a matematických strojů. Oba hosté navštívili Matematický ústav ČSAV a seznámili se s jeho strukturou a s novými pracemi týkajícími se jejich oboru. Prohlédli si také Výzkumný ústav matematických strojů a jednali o další spolupráci s n. p. Tesla Hloubětín.

Dne 6. října přednášeli v matematické obci pražské na téma: „Elektronkové počítací stroje v SSSR. Řešení aerodynamických úloh na elektronkových počítacích strojích". První část přednášky v podání V. P. Smirjagina se týkala konstrukčních principů dvou nejlepších sovětských samočinných počítačů „BESM" a „Strela". V druhé části přednášky P. I. Čuškin uvedl některé výsledky, jichž Výpočtové středisko dosáhlo v numerickém řešení aerodynamických úloh.

Z mimopražských institucí navštívili oba hosté brněnskou universitu a Slovenskou akademii věd.

Hana Kostiuková, Praha

VALNÉ SHROMÁŽDĚNÍ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÉ UNIE V ST. ANDREWS

Mezinárodní matematická unie vznikla ve své nynější formě v r. 1950 (původně existovala již před první světovou válkou, později však zanikla). V letech 1956—1958 přistoupily k ní též Bulharsko, Československo, Maďarsko, Polsko, Rumunsko a Sovětský svaz. Unie sdružuje nyní převážnou většinu zemí, v nichž se soustavně rozvíjí matematika; členem Unie však dosud bohužel není Čína.

Cílem Unie je podle stanov podporovat mezinárodní spolupráci v matematice; zejména se pak ve stanovách uvádí podpora Mezinárodního kongresu matematiků (jenž se schází, jak známo, zpravidla jednou za 4 roky), jiných mezinárodních vědeckých shromáždění a veškeré mezinárodní aktivity v matematice, přispívající k „rozvoji matematické vědy ve kterémkoli z jejich aspektů, ryzím, aplikovaném nebo vyučovacím". Jednotlivé země jsou členy Unie prostřednictvím své příslušné organisace, např. akademie věd. Vrcholným orgánem Unie je valné shromáždění, které zasedá zpravidla jednou za 4 roky; každá členská země na něm má 1—5 hlasů (např. SSSR a USA mají pět hlasů, Polsko čtyři, ČSR tři apod.). Valné shromáždění volí devítičlenný výkonný výbor v čele s předsedou, jímž v období 1955—1958 je HEINZ HOPF (Švýcarsko).

Letošní třetí valné shromáždění se konalo 11. až 13. srpna v St. Andrews (sídle třetí nejstarší britské university) ve Skotsku. Bylo na něm zastoupeno 30 z 36 členských zemí; československými delegáty byli ŠT. SCHWARZ a M. KATĚTOV. Na shromáždění byla podána zpráva o činnosti Unie a jejich komisí. Svou činnost ukončila komise pro světový adresář matematiků; adresář, obsahující asi 3400 jmen, byl již vydán tiskem. Budou pracovat komise pro výměnu matematiků, pro vědecké publikace apod., které si postupně ujasňují možnosti a metody své práce. Velmi agilně pracuje komise pro vyučování matematice, jejíž práce se pravděpodobně v brzké době účastní také Československo.

Na shromáždění byly schváleny některé menší změny stanov Unie a byla prodiskutována řada dalších bodů. V závěru zasedání byl jednomyslně v tajném hlasování zvolen na období 1959—1962 nový výkonný výbor ve složení:

předseda — R. NEVANLINNA (Finsko), místopředsedové — P. S. ALEKSANDROV (SSSR) a P. MORSE (USA), tajemník — B. ECKMANN (Švýcarsko), členové — K. CHANDRASEKHARAN, C. CHOQUET, H. KNESER, J. F. KOKSMA, K. KURATOWSKI.

Miroslav Katětov, Praha

MEZINÁRODNÍ KONGRES MATEMATIKŮ V EDINBURGHU

Ve dnech 14. až 21. srpna 1958 se konal v Edinburghu (Skotsko) mezinárodní kongres matematiků (připomeňme zde místa a roky předcházejících kongresů: Curych 1897, Paříž 1900, Heidelberg 1904, Řím 1908, Cambridge 1912, Štrasburk 1920, Toronto 1924, Bologna 1928, Curych 1932, Oslo 1936, Cambridge, U. S. A. 1950, Amsterodam 1954). Kongresu se účastnilo asi 1700 matematiků, s nimiž přijelo do Edinburghu několik set rodinných příslušníků (tzv. „associate members"). Z Československa se účastnili letošního kongresu M. KATĚTOV, J. KURZWEIL, ŠT. SCHWARZ, M. ZLÁMAL; poměrně značná byla tentokrát účast matematiků sovětských (přes 30), polských (asi 25) a maďarských (asi 25).

Na zahájení i na závěr kongresu se konalo společné zasedání všech účastníků. Vědecký program kongresu sestával jako obvykle jednak ze společných jednohodinových přednášek (bylo jich ohlášeno 21), jednak ze zasedání sekcí. Sekcí, po případě podsekcí bylo jedenáct: I. Logika a základy. IIA. Algebra. IIB. Teorie čísel. IIIA. Klasická analysa. IIIB. Funkcionální analysa. IV. Topologie. VA. Algebraická geometrie. VB. Diferenciální geometrie. VI. Pravděpodobnost a statistika. VIIA. Aplikovaná matematika. VIIB. Matematická fysika. VIIC. Numerická analysa. VIII. Dějiny a vyučování. Sekce (podsekce) zasedaly při tom často také ve dvou nebo třech souběžných skupinách. Na pořadu sekcí I—VII bylo podle údajů v předběžném programu 38 půlhodinových přednášek (na pozvání) a přes 600 krátkých (patnáctiminutových) sdělení; pro zajímavost uvádím (zaokrouhleně a někdy odhadem) přibližný počet sdělení v sekcích (podsekcích): I — 25, IIa — 65, IIb — 40, IIIa — 130, IIIb — 65, IV — 40, Va — 30, Vb — 35, VI — 50, VIIa — 60, VIIIb — 25, VIIc — 50. Poněkud jiné uspořádání bylo v VIII. sekci, kde byly na programu především tři hodinové referáty (vyučování matematice pro věkový stupeň do 15 let, vědecké základy matematiky ve středoškolském vyučování, srovnávací studie metod uvedení do geometrie), k nim pak vždy polodenní všeobecná diskuse; kromě toho byly v VIII. sekci (podle předběžného programu) dvě půlhodinové přednášky a 22 krátkých sdělení (z toho 4 historická, ostatní k otázkám vyučování). V důsledku velkého počtu sdělení, byl čas na dotazy a diskuse v sekcích I—VII nepatrný (vlastně jen 5 minut po každém sdělení); přesto byla někdy diskuse dosti živá — potom ovšem spíše mimo vlastní zasedání.

Všichni českoslovenští účastníci přednesli na kongresu stručná sdělení: *M. Katětov* o doplňkové dimensi (kodimensi) množiny v topologickém prostoru, *J. Kurzweil* o spojité závislosti na parametru a zobecněných obyčejných diferenciálních rovnicích, *Št. Schwarz* o duálních pologrupách a *M. Zlámal* o smíšeném problému pro jisté typy rovnic třetího řádu.

Kromě vlastního vědeckého jednání byl ovšem na kongresu též bohatý kulturní a společenský program. Také zde, stejně jako při organisaci vlastního odborného programu, splnili hostitelé velmi dobře svůj úkol.

Ke zhodnocení kongresu je třeba říci, že se často kladla otázka, zda jsou účelné tak široké kongresy, zahrnující celou matematiku. Odpovědi vyznívají různě a není jasné, k jakému názoru a k jakým praktickým závěrům se nakonec dojde. Jisté je, že i ve své nynější formě jsou mezinárodní matematické kongresy velmi užitečné. Přednášky a sdělení doplňují — někdy velmi podstatně — poznatky získané z literatury; zejména důležitý a podnětný je však přímý osobní styk mezi účastníky, který nelze nahradit žádným jiným způsobem. Počet našich účastníků byl bohužel velmi malý, takže s prací většiny sekcí jsme se nemohli seznámit. Bude-li příště počet účastníků větší, bude mimo jiné možné účelně rozvrhnout návštěvu sekcí a tak získat též soustavnější představu o tom, jak se na kongresu jeví matematika jako celek.

Miroslav Katětov, Praha

31. ZASEDÁNÍ MEZINÁRODNÍHO STATISTICKÉHO ÚSTAVU (ISI) V BRUSELU

Ve dnech 2. až 8. září 1958 konalo se v Bruselu mimořádné 31. zasedání ISI. Příští zasedání bude 1960 v Tokiu. Jednání proběhla v sedmi shromážděních (A a B) věnovaných statistickým metodám zjišťování životní úrovně, světovému sčítání lidu chystanému na rok 1960, statistickým problémům v astronomii, s nimiž se naše statistická veřejnost seznámila při nedávné návštěvě J. NEYMANA a E. L. SCOTTOVÉ, dále aplikacím v biologii a průmyslu a konečně výběrovým šetřením a analyse mezizávislých dynamických systémů.

Československo bylo zastoupeno těmito delegáty: dr. A. ŽALUDOVÁ (VÚTT, na vlastní náklady), dr. F. FAJFR (předseda SÚS), ing. F. HERBST (SÚS), dr. JAR. HÁJEK (MÚČSAV), B. KORDA (VŠE Praha). A. Žaludová přednesla sdělení „Necentrální t-test s použitím rozpětí", J. Hájek sdělení „O teorii poměrových odhadů". Za SÚS bylo předloženo sdělení „Výběrová šetření o nákladech na výstavbu domů v ČSR".

Jaroslav Hájek, Praha

MATEMATICKÁ KONFERENCIA V SMOLENICIACH

V dňoch 15. až 20. septembra 1958 konala sa v Domove vedeckých pracovníkov v Smoleniciach za účasti asi 100 českých a slovenských matematikov matematická konferencia, poriadaná Slovenským výborom Jednoty čs. matematikov a fyzikov. Pracovnú náplň konferencie tvorily otázky polytechnickej výchovy v stredoškolskej matematike, metodické otázky vo vyučovaní matematiky na stredných školách, problém spojenia matematiky s praxou a tradícia československej matematiky.

Ladislav Mišík, Bratislava

KONFERENCE O NOMOGRAFII

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie zeměměřické fakulty ČVUT (vedoucí profesor dr. VÁCLAV PLESKOT) uspořádá ve dnech 7., 8. a 9. září 1959 v Praze konferenci o nomografii. Cílem konference je:

a) koordinovat vědeckou činnost našich pracovníků v nomografii a seznámit je se současným stavem nauky,

b) seznámit pracovníky vědeckých a výzkumných ústavů i výrobních odvětví s účinností nomografických metod a obráceně získat od těchto pracovníků podněty, které by ovlivnily směr bádání při aplikaci nomografie.

Bližší informace na katedře matematiky FZ, Praha 2, Na bojišti 3.

Karel Komínek, Praha

ZPRÁVA O POBYTU DOC. DR. MILOŠE ZLÁMALA V POLSKU

Ve dnech 15. května až 6. června 1958 navštívil Polsko dr. MILOŠ ZLÁMAL, docent přírodovědecké fakulty v Brně. Cílem jeho studijní cesty bylo seznámit se blíže s prací polských matematiků zabývajících se obyčejnými i parciálními diferenciálními rovnicemi.

M. Zlámal přednesl v Lublíně, Gdansku, Varšavě, Poznani a Krakově celkem sedm přednášek z teorie obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic. Setkal se s řadou předních matematických pracovníků a na těchto schůzkách získal cenné poznatky, zejména v Krakově a Lublíně.

Miloš Zlámal, Brno

NÁVŠTĚVA ČSL. MATEMATIKŮ V SSSR

Ve dnech 16. června až 2. července 1958 navštívili prof. dr. VLADIMÍR KNICHAL a inž. MILAN STANĚK Výpočtové středisko Akademie věd SSSR v Moskvě. V řadě konsultací s vědeckými pracovníky tohoto střediska seznámili se tito soudruzi s rychloběžnými počítači Ural, BESM a Strela a podrobně se informovali o organisačních a technických problémech spojených s řešením technicky velmi náročných numerických úkolů.

Vladimír Knichal, Praha

OBHAJOBY DISERTAČNÍCH PRACÍ KANDIDÁTŮ A DOKTORŮ VĚD

Na matematicko-fysikální fakultě KU v Praze obhájili disertační práce tito kandidáti fysikálně-matematických věd: Dne 4. září 1958 MILOSLAV DRIML práci „Distribuční a charakteristické funkcionály v abstraktních prostorech"; dne 25. září 1958 JAROMÍR ABRHAM práci „O některých otázkách lineárního a nelineárního programování" a doc. dr. JÁN JAKUBÍK práci „Vytvorujúce rozklady na svätzoch a priame súčiny svätzov".

Při Matematickém ústavu ČSAV v Praze obhájili dne 2. října 1958 disertační práce tito kandidáti fysikálně-matematických věd: dr. LADISLAV KOSMÁK práci „Metoda sítí pro jednorozměrné lineární okrajové problémy", dr. ČESTMÍR VITNER práci „Výjimečné body na křivkách v Riemannových prostorech", IVO VRKOČ práci „O integrální stabilitě" a dr. RUDOLF VÝBORNÝ práci „O některých základních vlastnostech řešení okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnici parabolického typu".

Téhož dne obhájil dr. JAROSLAV KURZWEIL disertační práci doktora fysikálně-matematických věd na téma „Zobecněné obyčejné diferenciální rovnice a spojitá závislost parametru".

Redakce

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

Začátkem studijního roku 1958—1959 byly opět zahájeny pravidelné přednášky a diskuse v matematické obci pražské. Konají se od 17 hod. 15 min. na Matematicko-fysikální fakultě KU v Praze II, Ke Karlovu 3, zpravidla každé pondělí.

Dosud se konaly tyto přednášky s diskusemi:

24. 9. 1958: *A. Haimovici* (Jaşi), O organisaci vyučování matematice v Lidové republice rumunské.

26. 9. 1958: *A. Haimovici* (Jaşi), Sur les espaces à connexion affine qui admettent la notion d'angle.

29. 9. 1958: *K. Radziszewski* (Lublin), O jistém extremálním problému pro tělesa vepsaná do konvexních těles.

J. Kisyński (Lublin), O kompaktních množinách měřitelných funkcí.

1. 10. 1958: *Hilmar Grimm* (Jena), Matematicko-statistické problémy počítání bakterií.

6. 10. 1958: *V. P. Smirjagin* (Moskva), Elektronkové počítací stroje výpočtového střediska Akademie věd SSSR.

P. I. Čuškin (Moskva), Řešení aerodynamických úloh na elektrických počítacích strojích.

8. 10. 1958: *V. V. Rumjancev* (Moskva), O stabilitě pohybu gyroskopu v Cardanově závěsu.

13. 10. 1958: *Miroslav Katětov* a *Jaroslav Kurzweil*, O matematickém kongresu v Edinburku.

Redakce

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959). — Vydává Československá akademie věd v Nakladatelství ČSAV, Vodičkova 40, Praha 2. — Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd, Praha 2, Žitná 25, tel. 241193. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. — Administrace: Poštovní novinový úřad, Praha 3, Jindřišská 14. — Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky přijímá každý poštovní novinový úřad nebo doručovatel. — Tiskne Knihtisk, n. p., závod 05 (Prometheus), Praha VIII, tř. Rudé armády 171. — Vyšlo v únoru 1959 — A-13354