Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

POZNÁMKA K PHRAGMÉN-LINDELÖFOVU PRINCIPU

JAROSLAV FUKA, Praha

(Došlo dne 28. listopadu 1957) DT: 517.531

Je známo, že větu o maximu pro subharmonické funkce lze rozšířit tak, že se v okolí jednoho hraničního bodu připustí singularita jistého typu. V článku jest analysována přípustná singularita v závislosti na tvaru hranice definiční oblasti funkce v okolí singulárního bodu. Zvláště jsou studovány oblasti, jejichž hranice má v singulárním bodě bod vratu.

1

V celém článku rozumíme termínem „konformní zobrazení" prosté a konformní zobrazení, úhlem $U_{\alpha,\Theta}$ o vrcholu z_0 množinu těch bodů $z = x + iy$, pro něž $|\arg (z - z_0) - \alpha\pi| < \Theta \frac{\pi}{2}$, kde $0 \leqq \alpha \leqq 2$, $0 < \Theta \leqq 2$ (je-li $\alpha = 0$, budeme index α vynechávat), sektorem $S_{r,\Theta}$ množinu těch bodů z, pro něž platí $|\arg z| < \Theta \frac{\pi}{2}$, $|z| < r$, kde $0 < \Theta \leqq 2$; K_r bude znamenat otevřený kruh se středem v počátku a poloměrem r.

Definice. (Viz [1] str. 1) Budiž $u(z)$ reálná funkce v oblasti G. Říkáme, že $u(z)$ je *subharmonická v* G, jestliže má tyto vlastnosti:

(S_0) $-\infty \leqq u(z) < +\infty$, existuje bod $z_0 \in G$ tak, že $u(z_0) \neq -\infty$.

(S_1) $u(z)$ je shora polospojitá v G, tj. ke každému bodu $z_0 \in G$ a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $|z - z_0| < \delta$ platí $u(z) < u(z_0) + \varepsilon$.

(S_2) Budiž G' oblast, ležící i se svou hranicí H' uvnitř G. Budiž $h(z)$ funkce harmonická v G', spojitá v $G' + H'$, $h(z) \geqq u(z)$ v H'. Potom $h(z) \geqq u(z)$ v G'.

Platí nyní tyto známé věty:

Věta 1.1. *Budiž G omezená oblast, ležící v úhlu U_Θ. Budiž $u(z)$ funkce subharmonická v G.*

a) *Nechť v každém bodě $\bar{z}$ hranice G, $\bar{z} \neq 0$, platí* $\limsup_{z \in G,\, z \to \bar{z}} u(z) \leqq C$.

b) *Nechť v bodě $z = 0$ (leží-li ovšem na hranici G) platí* $\limsup_{z \in G,\, z \to 0} u(z)\, r^k =$

$= M < \infty$, *kde* $0 < k < \dfrac{1}{\Theta}$, $r = |z|$. *Potom v každém bodě* $z \in G$ *platí* $u(z) \leqq C$ *a je-li v některém bodě* $z_0 \in G$ $u(z_0) = C$, *je* $u(z) = C$ *identicky v* G (srovnej [3], str. 115).

Věta 1.2. *Budiž* G *omezená oblast, ležící uvnitř oblasti, jejíž hranici tvoří kružnice* c_1 *se středem v bodě* $h_1 i$ *a poloměrem* $|h_1|$ *a kružnice* c_2 *se středem v bodě* $h_2 i$ *a poloměrem* $|h_2|$, $h_1 \neq h_2$. *Budiž* $u(z)$ *funkce subharmonická v* G.

a) *Nechť v každém bodě* $\bar{z}$ *hranice* G, $\bar{z} \neq 0$, *platí* $\limsup\limits_{z \in G,\, z \to \bar{z}} u(z) \leqq C$.

b) $\limsup\limits_{z \in G,\, \mathrm{Re}\, z < 0,\, z \to 0} u(z) \leqq C$ *(existují-li ovšem v* G *body* $z \to 0$, $\mathrm{Re}\, z < 0$).

c) $\limsup\limits_{z \in G,\, \mathrm{Re}\, z > 0,\, z \to 0} u(z)\, e^{-k \frac{1}{r}} = M < \infty$, *kde* $0 < k < \dfrac{2\pi}{H_1}$, $H_1 = \left|\dfrac{1}{h_1} - \dfrac{1}{h_2}\right|$, $r = |z|$.

Potom v každém bodě $z \in G$ *platí* $u(z) \leqq C$ *a je-li* $u(z_0) = C$ *v některém bodě* $z_0 \in G$, *je* $u(z) = C$ *identicky v* G.

V tomto odstavci uvedeme na ukázku důkaz věty 1.2 a některé pomocné věty. V dalším odstavci pak zobecníme věty 1.1 a 1.2.

Důkaz věty 1.2. Definujme v G funkci

$$\omega(z) = e^{k' \frac{x}{x^2+y^2}} \cos\left[k'\left(-\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{H_2}{4}\right)\right],$$

kde

$$H_2 = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}, \quad k < k' < \frac{2\pi}{H_1}.$$

$\omega(z)$ je reálná část funkce $e^{k'\left(\frac{1}{z} + \frac{H_2}{4} i\right)}$ a je tedy harmonická v G. Je-li $z \in G$, je

$$-\frac{1}{4}\left|\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right| < \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z} + \frac{H_2}{4} i\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{H_2}{4} < \frac{1}{4}\left|\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right|,$$

tj.

$$\left|k'\left(\frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{H_2}{4}\right)\right| < k' \cdot \frac{H_1}{4} < \frac{2\pi}{H_1} \cdot \frac{H_1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

a tedy

$$\cos\left[k'\left(-\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{H_2}{4}\right)\right] \geqq \eta > 0.$$

Je tedy $\omega(z) > 0$ v G. Označme $F_\sigma(z) = u(z) - \sigma\,\omega(z)$. $F_\sigma(z)$ je subharmonická v G a podle c) pro dostatečně malá r platí

$$F_\sigma(z) < M' e^{k \frac{1}{r}} - \sigma e^{k' \frac{x}{x^2+y^2}} \cos\left[k'\left(\frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{H_2}{4}\right)\right], \quad \text{kde} \quad M' > M.$$

Je však

$$\frac{x}{x^2+y^2} : \frac{1}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} \to 1$$

pro $x \to 0$, $x > 0$, neboť $\frac{y}{x} \to 0$:

Tedy $e^{k' \frac{x}{x^2+y^2}} > e^{k'' \cdot \frac{1}{r}}$, $k < k'' < k'$ pro dostatečně malá r. Je tedy

$$F_\sigma(z) < e^{k \frac{1}{r}} \left(M - \sigma\eta e^{(k''-k) \frac{1}{r}} \right),$$

tj.

$$\limsup_{z \in G,\ \mathrm{Re}\, z > 0,\ z \to 0} F_\sigma(z) = -\infty < C$$

pro každé $\sigma > 0$. Podle principu maxima pro subharmonické funkce ([1], str. 6) tedy platí $F_\sigma(z) \leqq C$ všude v G. Přejdeme-li k limitě pro $\sigma \to 0$, dostáváme $u(z) \leqq C$ všude v G. Je-li v některém bodě $z_0 \in G$ $u(z_0) = C$, je opět podle principu maxima $u(z) = C$ všude v G.

Lemma 1.1. *Budiž $u(z)$ funkce subharmonická v oblasti G. Budiž $\zeta = \chi(z)$ konformní zobrazení oblasti G na oblast H. Potom funkce $\varphi(\zeta) = u(\chi^{-1}(\zeta)) = u(z)$ je subharmonická v oblasti H.*

Důkaz. Máme dokázat, že $\varphi(\zeta)$ splňuje v H podmínky (S_0), (S_1), (S_2). Důkaz podmínek (S_0), (S_1) je zřejmý, dokážeme tedy jen podmínku (S_2). Budiž G' libovolná oblast taková, že $G' + H' \subset H$, kde H' je hranice G'. Budiž $\omega'(\zeta)$ harmonická v G', spojitá v $G' + H'$ a $\omega'(\zeta) \geqq \varphi(\zeta)$ v H'. Potom též $\chi^{-1}(G' + H') \subset G$, $\omega(z) = \omega'(\chi(z))$ je harmonická v $\chi^{-1}(G')$, spojitá v $\chi^{-1}(G' + H')$, $\omega(z) \geqq u(z)$ v $\chi^{-1}(H')$. Zřejmě $\chi^{-1}(H')$ je hranicí oblasti $\chi^{-1}(G')$. Poněvadž $u(z)$ splňuje podmínku (S_2) v G, je $\omega(z) \geqq u(z)$ v $\zeta^{-1}(H' + G')$ a tedy $\omega'(\zeta) \geqq \varphi(\zeta)$ v $G' + H'$.

Lemma 1.2. *Budiž $u(z)$ funkce definovaná v Jordanově oblasti G. Nechť v bodě z_0 hranice G platí $\limsup_{z \in G,\ z \to z_0} u(z) \leqq C < \infty$. Budiž dále $\zeta = \omega(z)$ konformní zobrazení oblasti G na Jordanovu oblast H. Potom v bodě $\zeta_0 = \omega(z_0)$ platí $\limsup_{\zeta \in H,\ \zeta \to \zeta_0} \varphi(\zeta) \leqq C$, kde $\varphi(\zeta) = u(\omega^{-1}(\zeta)) = u(z)$.*

Důkaz. Užije se známého faktu, že konformní zobrazení Jordanových oblastí lze spojitě rozšířit na hranici (viz např. [2], str. 409).

Lemma 1.3. *Budiž dána Jordanova oblast G a budiž γ její hranice. Nechť existuje $r_0 > 0$ tak, že průnik G s každým kruhem K_r, $0 < r < r_0$ je vnitřek „trojúhelníka“ T_r, jehož „strany“ tvoří: oblouk kružnice c_1 se středem v bodě $h_1 i$ a poloměrem $|h_1|$, oblouk kružnice c_2 se středem v bodě $h_2 i$ a poloměrem $|h_2|$, $h_1 \neq h_2$, a konečně ten oblouk kružnice k_r, jež je hranicí kruhu K_r, jehož krajní body jsou* *průsečíky k_r s c_1 a c_2 a který v K_r přísluší menšímu středovému úhlu. Budiž $w = f(z)$ konformní zobrazení oblasti G na oblast G', jejíž hranici tvoří kružnice c_1 a c_2 takové, že $f(0) = 0$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že ve vnitřku T_δ platí $|f(z)| < (1 + \varepsilon)\,|z|$.*

Důkaz. Nejdříve poznamenejme, že konformní zobrazení pásu $a < y < b$ na pravou polorovinu má tvar $\omega = e^{\frac{\pi}{b-a}\left(z - \frac{a+b}{2}i\right)}$ a že funkce $\frac{1}{z}$ zobrazí jednoduše souvislou oblast, jejíž hranici tvoří kružnice c_1, c_2 na pás $-\frac{1}{2h_1} < < y < -\frac{1}{2h_2}$ nebo $-\frac{1}{2h_2} < y < -\frac{1}{2h_1}$. Označíme-li tedy $z = \varphi(\omega)$ konformní zobrazení pravé poloroviny na G takové, že $\varphi(0) = 0$, a dále $H_1 = = \left|\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right|$ (podle předpokladu je $H_1 > 0$), $H_2 = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$, potom funkce $\psi(\omega) = e^{\frac{2\pi}{H_1}\left(\frac{1}{\varphi(\omega)} + \frac{H_2}{4}i\right)}$ zobrazuje konformně část okolí počátku roviny ω na část okolí bodu $z = 0$ ležící v pravé polorovině, při čemž úsečce imaginární osy roviny ω je přiřazena úsečka imaginární osy roviny z. Podle principu symetrie tedy platí $\psi(\omega) = \omega(c_1 + c_2\omega + \ldots)$, $c_1 \neq 0$. To znamená, že pro dostatečně malá $z \in G$ platí

$$e^{\frac{2\pi}{H_1}\left(\frac{1}{z} + \frac{H_2}{4}i\right)} = e^{\frac{2\pi}{H_1}\left(\frac{1}{w} + \frac{H_2}{4}i\right)}(c_1 + \ldots) = e^{\frac{2\pi}{H_1}\left(\frac{1}{w} + \frac{H_2}{4}i\right) + \log(c_1 + \ldots)}$$

(jednoznačná větev logaritmu existuje, neboť pro dostatečně malá z a tedy pro dostatečně malá w je $c_1 + \ldots \neq 0$). Pro dostatečně malá $z \in G$ tedy platí

$$\frac{2\pi}{H_1}\left(\frac{1}{z} + \frac{H_2}{4}i\right) = \frac{2\pi}{H_1}\left(\frac{1}{w} + \frac{H_2}{4}i\right) + \log(c_1 + \ldots)\,,$$

tj.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w}\left[1 + w\frac{H_1}{2\pi}\log(c_1 + \ldots)\right].$$

K $\varepsilon > 0$ existuje tedy $\delta > 0$ tak, že pro $|z| < \delta$, $z \in G$ platí

$$\frac{1}{|z|} \leqq \frac{1}{|w|}(1 + \varepsilon)\,,$$

tj. $|w| \leqq |z|(1 + \varepsilon)$, c. b. d.

2

Definice 2.1. Budiž dána oblast G, jejíž hranici tvoří uzavřená křivka γ. Budiž $z_0 \in G$. Označme M množinu všech úhlů $U_{\alpha,\Theta}$ o vrcholu z_0, jež mají tuto vlastnost: Všechny body oblasti G, jež leží v jistém okolí bodu z_0, leží v $U_{\alpha,\Theta}$.

Označme N množinu všech Θ takových, že $U_{\alpha,\Theta} \in M$. Budiž $N \neq \emptyset$. Budiž $\vartheta = \inf \Theta$, $\vartheta > 0$. Potom říkáme, že γ má v bodě z_0 *úhlový bod řádu* ϑ.

Věta 2.1. *Budiž G omezená oblast, jejíž hranice γ má v počátku úhlový bod řádu Θ. Budiž $u(z)$ funkce subharmonická v G. Nechť jsou dále splněny předpoklady* a), b) *věty* 1.1. *Potom zůstává v platnosti i tvrzení věty* 1.1.

Důkaz. Nechť tedy v počátku platí $\limsup_{z \in G,\, z \to 0} u(z)\, r^k = M < \infty$, $0 < k < \dfrac{1}{\Theta}$. Zvolme číslo k' tak, že $k < k' < \dfrac{1}{\Theta}$. Poněvadž γ má podle předpokladu v počátku úhlový bod řádu Θ, existuje úhel $U_{\alpha, \frac{1}{k'}}$ o vrcholu v počátku tak, že body oblasti G, ležící v jistém okolí počátku, leží v $U_{\alpha, \frac{1}{k'}}$. Bez újmy na obecnosti můžeme zřejmě klást $\alpha = 0$. Předpokládejme nejdříve, že $\dfrac{1}{k'} < 1$. V tom případě můžeme sestrojit tak malé kružnice k_1, k_2 dotýkající se v počátku ramen úhlu $U_{\frac{1}{k'}}$ a protínající se v bodě $a < 0$, že oblast G i $U_{\frac{1}{k'}}$ leží ve vnějšku každé z kružnic k_1, k_2. Transformací $\zeta = \dfrac{z}{z - a}$ přejde oblast bodů ležících vně každé z kružnic k_1, k_2 v úhel $U'_{\frac{1}{k'}}$ v rovině ζ, oblast G v oblast $G' \subset U'_{\frac{1}{k'}}$, funkce $u(z)$ ve funkci $u'(\zeta) = u(z)$ definovanou v G'. Podle lemmatu 1.1 je $u'(\zeta)$ subharmonická v G' a zřejmě platí

$$\limsup_{\zeta \in G',\, \zeta \to \bar{\zeta}} u'(\zeta) \leqq C$$

v každém hraničním bodě $\bar{\zeta} \neq 0$ oblasti G'. Poněvadž funkce $\zeta = \dfrac{z}{z - a}$ má v okolí počátku rozvoj $\zeta = -\dfrac{z}{a}\left(1 + \dfrac{z}{a} + \ldots\right)$, platí v jistém okolí počátku $|\zeta| \leqq K|z|$, $K < \infty$. V bodě $\zeta = 0$ tedy platí

$$\limsup_{\zeta \in G',\, \zeta \to 0} u'(\zeta)\, |\zeta|^{k'} \leqq \limsup_{z \in G,\, z \to 0} u(z)\, |z|^{k'} \,.\, K^{k'} = K^{k'} \,.\, M < \infty \,.$$

$u'(\zeta)$ tedy splňuje předpoklady a), b) věty 1.1. Je tedy $u'(\zeta) \leqq C$ všude v G', a je-li $u'(\zeta_0) = C$, $\zeta_0 \in G'$, je $u'(\zeta) = C$ identicky. Stejné tvrzení platí tedy i v oblasti G pro funkci $u(z) = u'(\zeta)$, c. b. d.

Je-li $1 < \dfrac{1}{k'} < 2$, sestrojíme opět tak malé kružnice k_1, k_2 dotýkající se v počátku ramen úhlu $U_{\frac{1}{k'}}$ a protínající se v bodě $a < 0$, že oblast G i $U_{\frac{1}{k'}}$ leží v oblasti, která je vnějškem průniku vnitřků kružnic k_1, k_2. Další postup je stejný.

Definice 2.2. Budiž dána oblast G, jejíž hranicí je uzavřená křivka γ. Budiž $z_0 \in \gamma$. Označme $V_{\alpha,\beta}$ oblast, jejíž hranici tvoří dvojice parabol $z_0 + (x + ix^\alpha)\, e^{i\beta}$, $z_0 + (x - ix^\alpha)\, e^{i\beta}$, při čemž polopřímka $z_0 + te^{i\beta}$, $t > 0$, leží ve $V_{\alpha,\beta}$. Označme M množinu všech $V_{\alpha,\beta}$, jež mají tuto vlastnost: Všechny body oblasti G, jež leží v jistém okolí bodu z_0, leží ve $V_{\alpha,\beta}$. Označme N množinu všech α takových, že $V_{\alpha,\beta} \in M$. Budiž $N \neq \emptyset$. Budiž $\varrho = \sup_{\alpha \in N} \alpha$, $\varrho \geqq 2$, $\varrho < \infty$. Potom říkáme, že γ má v bodě z_0 *bod vratu řádu* $\varrho - 1$.

Definice 2.3. Budiž dána oblast G, jejíž hranicí je uzavřená křivka γ. Budiž $z_0 \in \gamma$. Nechť γ má v bodě z_0 bod vratu řádu ϱ. Označme $W^\varrho_{h_1,h_2}$, $h_1 > h_2$, oblast, jejíž hranici tvoří dvojice parabol

$$z_0 + (x + ih_1 x^{\varrho+1})\, e^{i\beta}\,, \quad z_0 + (x + ih_2 x^{\varrho+1})\, e^{i\beta}\,,$$

při čemž polopřímka $z_0 + te^{i\beta}$, $t > 0$, leží ve $W^\varrho_{h_1,h_2}$. Označme M množinu všech $W^\varrho_{h_1,h_2}$, jež mají tuto vlastnost: Všechny body oblasti G, jež leží v jistém okolí bodu z_0, leží ve $W^\varrho_{h_1,h_2}$. Označme N_1 množinu h_1 takových, že k nim existují h_2 tak, že $W^\varrho_{h_1,h_2} \in M$, a N_2 množinu h_2 takových, že k nim existují h_1 tak, že $W^\varrho_{h_1,h_2} \in M$. Budiž $N_1 \neq \emptyset$ (pak je zřejmě i $N_2 \neq \emptyset$). Budiž $H_1 = \inf_{h_1 \in N_1} h_1$, $H_2 = \sup_{h_2 \in N_2} h_2$, $H_1 > H_2$. Potom říkáme, že γ má v bodě z_0 *bod vratu řádu* ϱ *typu* $[H_1, H_2]$.

Lemma 2.1. *Budiž G oblast, jejíž hranicí je křivka γ. Nechť γ má v počátku bod vratu řádu ϱ typu $[H_1, H_2]$. Nechť G leží uvnitř úhlu $U_{\frac{2}{\varrho'}}$, $\varrho' > \varrho$. Zobrazení $\zeta = z^\varrho$ převede G v G' a γ v γ'. Potom křivka γ' má v počátku bod vratu řádu* 1 *typu* $[\varrho H_1, \varrho H_2]$.

Důkaz. Budiž $\varrho h_1 > \varrho H_1 > \varrho H_2 > \varrho h_2$. Podle předpokladu existuje oblast $W^\varrho_{h_1',h_2'}$ $(h_1 > h_1' > H_1, H_2 > h_2' > h_2)$ tak, že pro jisté okolí O počátku roviny z platí $G \cap O \subset W^\varrho_{h_1',h_2'}$. Nyní však je

$$(x + iax^{\varrho+1})^\varrho = x^\varrho(1 + iax^\varrho)^\varrho$$

a tedy

$$(x + iax^{\varrho+1})^\varrho = x^\varrho + i\varrho a x^{2\varrho} + O(x^{2\varrho})$$

pro $x \to 0$. Existuje tedy oblast $W^1_{\varrho h_1',\varrho h_2'}$ tak, že v jistém okolí $O' \subset \zeta(O)$platí $G' \cap O' \subset W^1_{\varrho h_1',\varrho h_2'}$. Kdyby nyní γ' měla v počátku bod vratu řádu 1 typu $[\varrho H_1', \varrho H_2']$, $H_1' < H_1$, $H_2' > H_2$, ukázali bychom stejným způsobem existenci oblasti $W^\varrho_{H_1'',H_2''}$ v rovině z, při čemž by v jistém okolí O počátku roviny z platilo $O \cap G \subset W^\varrho_{H_1'',H_2''}$ a $H_1 > H_1'' > H_1'$, $H_2' > H_2'' > H_2$, což podle předpokladu není možné. Stejně se vyloučí možnosti $H_1' = H_1$, $H_2' > H_2$ a $H_1' < H_1$, $H_2' = H_2$. γ' má tedy v počátku bod vratu řádu 1 typu $[\varrho H_1, \varrho H_2]$.

Stejným způsobem se dokáže

Lemma 2.2. *Budiž G oblast, jejíž hranicí je uzavřená křivka γ. Nechť γ má v počátku bod vratu řádu ϱ typu $[H_1, H_2]$. Zobrazme oblast G na oblast G' pomocí* *zobrazení* $\zeta = \frac{-az}{z-a} = z\left(1 + \frac{z}{a} + \ldots\right)$. *Potom G' má v počátku opět bod vratu řádu ϱ typu $[H_1, H_2]$.*

Lemma 2.3. *Budiž dána parabola $p(x) = \frac{1}{2a}x^2$. Potom pro dostatečně malá x leží polokružnice $k(x) = a' - a'\sqrt{1 - \frac{x^2}{a'^2}}$ nad [pod] parabolou $p(x)$, je-li $0 < a' < a$ nebo $0 > a > a'$ [$a' > a > 0$ nebo $0 > a' > a$], tj. pro taková a' platí $k(x) - p(x) > 0$ [$k(x) - p(x) < 0$].*

Důkaz. Pro dostatečně malá x je

$$k(x) = a' - a'\sqrt{1 - \frac{x^2}{a'^2}} = a' - a'\left(1 - \frac{x^2}{2a'^2} - O_1(x^4)\right) = \frac{x^2}{2a'} + O(x^4)$$

a tedy

$$k(x) - p(x) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a}\right) + O(x^4),$$

tj.

$$k(x) - p(x) > 0 \quad \text{pro} \quad a > a' > 0 \quad \text{nebo} \quad 0 > a > a',$$
$$k(x) - p(x) < 0 \quad \text{pro} \quad a' > a > 0 \quad \text{nebo} \quad 0 > a' > a, \quad \text{c. b. d.}$$

Důsledek. Budiž dána oblast G, jejíž hranicí je uzavřená křivka γ. Nechť γ má v počátku bod vratu řádu 1 typu $[H_1, H_2]$. Potom ke každému $\eta > 0$ existuje kružnice k_1 se středem v bodě $\frac{1}{2h_1}i$ a poloměrem $\frac{1}{2|h_1|}$ a kružnice k_2 se středem v bodě $\frac{1}{2h_2}i$ a poloměrem $\frac{1}{2|h_2|}$ tak, že $H_1 + \eta > h_1 > H_1$, $H_2 > h_2 > H_2 - \eta$ a že oblast T, jejíž hranici tvoří k_1, k_2, obsahuje všechny body oblasti G ležící v jistém okolí počátku.

Důkaz. Stačí to dokázat pro η dostatečně malé. Zvolme tedy $\eta > 0$ tak, aby čísla H_1 a $H_1 + \eta$ resp. H_2 a $H_2 - \eta$ měla stejná znamení, je-li $H_1 \neq 0$, resp. $H_2 \neq 0$. Podle definice existují čísla h_1', h_2' tak, že oblast $W^1_{h_1', h_2'}$ obsahuje všechny body jistého okolí počátku ležící v G, při čemž $H_1 + \eta > h_1' > H_1$, $H_2 > h_2' > H_2 - \eta$. Z právě dokázaného lemmatu plyne okamžitě tvrzení.

Věta 2.2. *Budiž G omezená oblast, jejíž hranice γ má v počátku bod vratu řádu ϱ typu $[H_1, H_2]$. Budiž $u(z)$ funkce subharmonická v G.*

a) *Nechť v každém bodě $\bar{z} \in \gamma$, $\bar{z} \neq 0$, platí $\limsup_{z \in G,\, z \to \bar{z}} u(z) \leqq C$.*

b) $\limsup_{z \in G,\, z \to 0} u(z)\, e^{-k\frac{1}{r^\varrho}} = M < \infty$, *kde* $0 < k < \frac{\pi}{\varrho(H_1 - H_2)}$, $r = |z|$.

Potom v každém bodě $z \in G$ platí $u(z) \leqq C$, a je-li v některém bodě $z_0 \in G$ $u(z) = C$, je $u(z) = C$ identicky v G.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve, že $G \subset U_{\frac{\pi}{\varrho'}}$, $\varrho' > \varrho$. Zobrazme oblast G pomocí zobrazení $z' = z^\varrho$ na oblast G'. Její hranice γ' bude mít v počátku podle lemmatu 2.1 bod vratu řádu 1 typu $[\varrho H_1, \varrho H_2]$. Podle důsledku lemmatu 2.3 můžeme tedy sestrojit kružnici k_1 se středem v bodě $\frac{1}{2h_1} i$ a poloměrem $\frac{1}{2|h_1|}$ a kružnici k_2 se středem v bodě $\frac{1}{2h_2} i$ a poloměrem $\frac{1}{2|h_2|}$ tak, že $h_1 > \varrho H_1 > \varrho H_2 > h_2$ a $k < \frac{\pi}{h_1 - h_2} < \frac{\pi}{\varrho(H_1 - H_2)}$ a že body oblasti G', ležící v jistém okolí O' bodu $z' = 0$, leží v jednoduše souvislé oblasti T, jejíž hranici tvoří kružnice k_1 a k_2. Existuje tedy dále kružnice K se středem v počátku tak, že oblast T', jež obsahuje bod ∞ a jejíž hranici tvoří oblouky kružnic k_1 a k_2 a oblouk kružnice K, obsahuje G'. Zobrazme konečně T' na T pomocí funkce $\zeta = f(z')$, $f(0) = 0$. Oblast G' přejde v oblast $H \subset T$. V H máme tedy definovánu funkci $U(\zeta) = u'(z') = u(z)$. Podle lemmatu 1.1 je $U(\zeta)$ subharmonická v H a podle lemmatu 1.2 v každém bodě $\bar{\zeta}$ hranice oblasti H, $\bar{\zeta} \neq 0$, platí

$$\limsup_{\zeta \in H,\, \zeta \to \bar{\zeta}} U(\zeta) \leqq C\,.$$

Funkce $U(\zeta)$ splňuje tedy podmínky a), b) věty 1.2. Zřejmě dále platí

$$\limsup_{z' \in G',\, z' \to 0} u'(z')\, e^{-k\frac{1}{|z'|}} = M\,.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, že $k' = (1 + \varepsilon)\, k < \frac{\pi}{h_1 - h_2}$. Potom podle lemmatu 1.3 existuje množina T_δ tak, že pro $z' \in T_\delta$ platí $|f(z')| < (1 + \varepsilon)\, |z'|$, tj. $\frac{k}{|z'|} < \frac{k'}{|\zeta|}$, $\zeta = f(z')$, a tedy

$$\limsup_{\zeta \in H,\, \zeta \to 0} U(\zeta)\, e^{-\frac{k'}{|\zeta|}} < \infty\,.$$

Poněvadž je $k' < \frac{\pi}{h_1 - h_2}$, splňuje funkce $U(\zeta)$ v oblasti $H \subset T$ i předpoklad c) věty 1.2. V H tedy platí $U(\zeta) \leqq C$, a je-li $U(\zeta_0) = C$, $\zeta_0 \in H$, je $U(\zeta) = C$ všude v H. Totéž platí tedy také o funkci $u(z) = U(\zeta)$ v G.

Zbývá nakonec zbavit se omezení $G \subset U_{\frac{\pi}{\varrho'}}$, $\varrho' > \varrho$.

Poněvadž G má v počátku bod vratu řádu ϱ typu $[H_1, H_2]$, existuje kruh K_r se středem v počátku a poloměrem r tak, že $K_r \cap G \subset S_{r, \frac{\pi}{\varrho'}}$, $\varrho' > \varrho$, tj. $G \subset E$, kde $E = R - (K_r - S_{r, \frac{\pi}{\varrho'}})$, R je rozšířená rovina. Stejně jako v důkazu věty 2.1 sestrojíme dostatečně malé kružnice k_1, k_2 a použijeme zobrazení $z_1 =$