Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

REFERÁTY

NĚKTERÉ LOKÁLNÍ VĚTY O APROXIMACI

(Vlastní referát T. FREYE, kandidáta matematických věd Matematické a technické university v Budapešti, o přednášce konané dne 27. dubna 1959 na Matematicko-fysikální fakultě Karlovy university v Praze)

Položme si otázku: *Pro které aproximační procesy platí věta o lokalisaci, podobná větě Riemannově;* dále, *zda platí nějaká věta o tom, jak silně se ovlivní jakost aproximace v nějakém bodě strukturními vlastnostmi aproximované funkce daleko od uvažovaného bodu.*

V tomto směru víme o nejlépe aproximující posloupnosti polynomů např. jen to, že jakost aproximace je charakterisována jakostí aproximace na nejhůře aproximovatelném intervalu. Není tedy bez zajímavosti najíti takovou posloupnost polynomů, která aproximuje uvažovanou funkci na každém intervalu tak dobře, jak nejlépe je vůbec možno (tedy pomocí strukturních vlastností aproximované funkce, uvažovaných jen na tomto intervalu). Musíme tedy nejprve odpověděti na poslední otázku.

Právě tyto problémy se objevují v práci M. BOCHNERA „Localisation of best approximation" ([1]), ale jen ve velmi úzkém pojetí a jsou jen částečně řešeny. Druhá věta této práce, s jejíž pomocí M. Bochner chce dokázat, že jeho výsledky nejsou zlepšitelné, je však chybná, jak se hned ukáže triviálním protipříkladem. (Chyba důkazu spočívá ve špatném použití Poisson-Jensenovy nerovnosti.)

Aby uvažovaná otázka mohla být přesněji formulována, musíme nejprve dokázati následující výroky:

1°. *Existuje právě jeden trigonometrický polynom nejvýše n-tého řádu, který nejlépe aproximuje funkci* $f(x) \in C[a, b]$ *na* $a \leqq x \leqq b$, $b - a < 2\pi$.

Tento polynom má všechny tzv. Čebyševovy vlastnosti. V dalším budeme značit tuto nejlepší aproximaci $E_n^{(T)}(f; a, b)$. (Důkaz nepoužívá žádných nových myšlenek.)

Abychom nyní odhadli tuto veličinu, poznamenejme nejprve, že jakost aproximace funkce třídy $C_{2\pi}$ je jednoznačně charakterisována toliko pomocí druhého modulu spojitosti nejvyšší, ještě spojité derivace. Nyní ukážeme, že také veličina $E_n^{(T)}(f; a, b)$ je charakterisována, a to také jednoznačně, jen pomocí druhého modulu spojitosti nejvyšší, ještě spojité derivace funkce, tedy pomocí

$$\omega_2(\delta; f^{(\nu)}; a, b) = \sup_{0<\vartheta\leqq\delta} \{ \sup_{a+\vartheta\leqq x_0\leqq b-\vartheta} |f^{(\nu)}(x_0 + \vartheta) - 2f^{(\nu)}(x_0) + f^{(\nu)}(x_0 - \vartheta)|\} .$$

2°. *Můžeme funkci, např.* $f^{(\nu)}(x) \in C[a, b]$, *tak rozšířiti ve funkci* $b(x) \in C[-\infty, \infty)$, *že platí*

$$\omega_2(\delta; g; -\infty, \infty) \leqq 5\omega_2(\delta; f^{(\nu)}; a, b) .$$

Toto rozšíření je charakterisováno zrcadlením okolo koncového bodu. Z toho však podle Jacksonových vět plyne, že $E_n^{(T)}(f; a, b)$ je charakterisovatelná pomocí $\omega_2\Big(\frac{1}{n}; f^{(\nu)};$

$a, b)$. Abychom nyní ukázali, že tato charakterisace je jednoznačná, tj. není zlepšitelná, lokalisujeme (a to v málo zjemněném tvaru) Bernsteinovy tzv. obrácené věty:

3°. *Buď* $1 < \gamma < 2$ *pevně zvoleno. Označme* k *největší přirozené číslo alespoň rovné dvěma, pro které platí*

$$\lim n^{k-\gamma} E_n^{(T)}(f; a, b) < \infty, \quad ale \quad \overline{\lim}\, n^{k-\gamma+1} E_n^{(T)}(f; a, b) = \infty$$

(pokud takové existuje; jinak buď $k = 2$*). Potom je ještě* $f^{(k-2)} \in C[\alpha, \beta]$ *a*

$$\omega_2\left(\frac{1}{n}; f^{(k-2)}; \alpha, \beta\right) \leqq C(k) \,.\, \sup \left\{\frac{1}{N^2} \sum_{s=1}^{N} s^{k-1} E_s^{(T)}(f; a, b)\right\},$$

kde $\alpha > a + \frac{k}{n}$ *a* $\beta < b - \frac{k}{n}$ *jsou libovolná.*

(Odhady se mohou dostati lokalisací tzv. první Bernsteinovy nerovnosti, jsou ostatně důsledkem původního od Bernsteina pocházejícího myšlenkového postupu.)

Konstruujme nyní aproximační proces, který lokalisuje nejlepší aproximaci v hořejším smyslu, pomocí myšlenky De la Vallée-Poussinovy ([2]). De la VALLÉE-POUSSIN udal totiž posloupnost trigonometrických polynomů $V_n(t)$, která má následující vlastnosti:

a) $V_n(t)$ je trigonometrický polynom nejvýše $(2n - 1)$-tého řádu (tj. $V_n(t) \in M_{2n-1}^{(T)}$),

b) proces, definovaný pomocí V_n, jakožto jádrem, má tzv. reprodukční vlastnost, tj.

$$v_n(x; f) = \int_{-\pi}^{\pi} V_n(x - t)\, f(t)\, dt \equiv f(x)\,, \quad \text{pokud} \quad f \in M^{(T)}\,,$$

c) proces má stejnoměrně omezenou Lebesgueovu konstantu (normu)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |V_n(t)|\, dt \leqq c_1\,, \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Poznamenejme, že V_n se snadno odvodí pomocí v_n a částečných součtů Fourierovy řady pro $f(x) \in L_{2\pi}$.

Abychom nyní zkonstruovali lokálně nejlépe aproximující posloupnost polynomů, potřebujeme najíti takové jádro $A_n(t)$, které má nejen vlastnosti b) a c), ale ještě také další, a sice takové, které zajišťují, že dále vzaté strukturní vlastnosti uvažované funkce ovlivňují jakost aproximace jen jedním, pokud možno rychle k nule konvergujícím faktorem. Tento faktor je charakterisován tzv. vnější Lebesgueovou konstantou procesu

$$\Lambda_n^{(v)}(\delta) = \{ \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \} |A_n(t)|\, dt\,.$$

Může se snadno ověřiti, že jádro procesu $A_n(t)$, definované vztahem

$$e_n(x; f) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_{n+k}(x; f)$$

(e_n je tedy Eulerův průměr), dále

$$a_n(x; f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e_{n+k}(x; f)\,, \tag{1}$$

tedy

$$a_n(x; f) = \int_{-\pi}^{\pi} A_n(x - t)\, f(t)\, dt\,, \quad f \in L_{2\pi}\,,$$

splňuje všechny požadavky; že tedy

a) $A_n(t) \varepsilon M^{(T)}_{4n-2}$,

b) $a_n(x; f) \equiv f(x)$, pokud $f \epsilon M^{(T)}_n$,

c) $\int_{-\pi}^{\pi} |A_n(t)| \,\mathrm{d}t \leqq C_2$, $(n = 1, 2, \ldots)$,

d) $A^{(v)}_n(\delta) \leqq \frac{1}{n} C(\delta) [q(\delta)]^n$, $(n = 1, 2, \ldots)$,

kde $C(\delta) = C_3 \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}$ a $q(\delta) = \cos \frac{\delta}{2}$.

$\{a_n(x; f)\}$ je nyní posloupnost trigonometrických polynomů aproximující lokálně nejlépe funkci $f(x) \epsilon L_{2\pi}$ v tom smyslu, že jakost aproximace touto posloupností v nějakém libovolném bodě x_0 je právě tak dobrá, jak lze vůbec dosáhnouti trigonometrickým polynomem v nějakém libovolném okolí x_0, totiž v $[x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ $(\delta > 0$ libovolné). Platí tedy odhad

$$|f(x_0) - a_n(x_0; f)| \leqq C_2 \,.\, E^{(T)}_n(f; x_0 - \delta, x_0 + \delta] + C_4(\delta) \,.\, \frac{1}{n} \cos^n \frac{\delta}{2},$$

kde $\delta > 0$ je libovolné a

$$C_4(\delta) \leqq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \,\mathrm{d}t \,.\, \frac{C_5}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Poznamenejme, že v případě $f'(x) \epsilon L_{2\pi}$ také platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_n(x; f) \equiv a_n(x; f'),$$

takže tedy derivovaná posloupnost funkcí a_n poskytuje lokálně nejlepší aproximaci funkce $f' \epsilon L_{2\pi}$.

Poznamenejme ještě dále, že výše udaný proces v případě diferencovatelnosti v rozšířeném smyslu již není nejlepší, avšak může se definovati nekonečná řada takových procesů, a to místo tvořením aritmetických středů podle (1), pomocí středů vždy vyššího řádu, které všecky poskytují lokálně nejlepší aproximaci a dávají v případě diferencovatelnosti v rozšířeném smyslu vždy lepší výsledky.

T. Frey odvodil potom také jeden interpolační proces, poskytující lokálně nejlepší aproximaci. Ukázal, že Lagrangeova a Hermite-Fejérova interpolace mezi normální posloupností uzlových bodů splňují také větu o lokalisaci podobnou větě Riemannově, dále že tato vlastnost nespočívá v normalitě posloupnosti uzlových bodů, ale v tom, že uzlové body a příslušné konjugované body leží uvnitř interpolačního intervalu odděleny od sebe nějakou, na n nezávisící vzdáleností.

Literatura

[1] *Bochner S.*: Localisation of best approximation. Annals of Math. Study, No *25*, 1950, Princeton.

[2] *De la Vallée-Poussin Ch.*: Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable, Paris 1919.

Přeložil *Miroslav Šisler*, Praha

ZOBECNĚNÍ VĚTY J. KOROUSE

(Vlastní referát T. FREYE, kandidáta matematických věd Matematické a technické university v Budapešti, o přednášce konané dne 29. dubna 1959 na Matematicko-fysikální fakultě Karlovy university v Praze)

Uvažujme důležitou větu J. KOROUSE (viz [1]), kterou můžeme takto krátce formulovat:

Buďte $p(x) \in L[-1, 1]$ a $q(x) \in L[-1, 1]$ dvě nezáporné váhové funkce, pro které platí

$$0 < \lambda_1 \leqq \lambda(x) \equiv \frac{q(x)}{p(x)} \leqq \lambda_2, \quad -1 \leqq x \leqq 1, \tag{1}$$

a že pro pevný bod $x_0 \in [-1, 1]$ platí

$$|\lambda(x) - \lambda(x_0)| \leqq C_1|x - x_0|. \tag{2}$$

Potom můžeme odhadnout v bodě x_0 vzhledem k p resp. q ortonormální polynomy $p_n(x)$ resp. $q_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ v následujícím tvaru:

$$|p_n(x_0)| \leqq C_2 \sum_{\nu=0}^{1} |q_{n-\nu}(x_0)|, \quad |q_n(x_0)| \leqq C_3 \sum_{\nu=0}^{1} |p_{n-\nu}(x_0)|. \tag{3}$$

Pomocí této věty se mohou při zkoumání stejnoměrné omezenosti posloupnosti ortonormálních polynomů diskutovati lokální a globální předpoklady vzájemně nezávisle vzhledem k odpovídajícím váhovým funkcím. Může se to ještě lehčeji udělat ve smyslu globálních předpokladů v případě, že platí (1), ve smyslu lokálních předpokladů, pokud se (2) zeslabí.

Uvažujme nyní nejprve požadavek (1). Protože je asymptotické vyjádření $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ortonormálních Jakobiových polynomů s vahou $(1 + x)^\alpha(1 - x)^\beta$ dobře známo, je pomocí tohoto vyjádření a pomocí věty Korousovy hned vidět, že pro ortonormální polynomy s vahou

$$w(x) = (1 + x)^\alpha(1 - x)^\beta \, \psi(x) \tag{4}$$

platí nerovnost

$$\int_{-1}^{1} w_n^2(x) \frac{w(x)\, dx}{(1 + x)^\gamma (1 - x)^\delta} \leqq C_4, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

v případě, že $\psi(x)$ splňuje v $[-1, -1 + \delta]$ a $[1 - \delta, 1]$ Lipschitzovu podmínku s exponentem 1, dále platí

$$\alpha > -1, \beta > -1, \alpha + \gamma > -1, \beta + \vartheta > -1, \gamma < \frac{1}{2}, \delta < \frac{1}{2}.$$

Odtud ale hned plyne, že se může (1) nahradit předpoklady

$$\begin{aligned} C_5(1 + x)^{A_1} (1 - x)^{B_1} &\leqq p(x) \leqq C_6(1 + x)^{a_1}(1 - x)^{b_1}, \\ C_7(1 + x)^{A_2}(1 - x)^{B_2} &\leqq q(x) \leqq C_8(1 + x)^{a_2} (1 - x)^{b_2}, \end{aligned} \tag{1*}$$

kde

$$-1 < a_i \leqq A_i < a_i + \tfrac{1}{2}, \quad -1 < b_i \leqq B_i < b_i + \tfrac{1}{2}, \quad (i = 1, 2).$$

Sumace v (3) jde však potom ne do $\nu = 1$, nýbrž do nějakého celého čísla $\nu = s$ na exponentu v (1*) nezávislého.

Tak se ale umožní, že můžeme na základě transformace $x = \cos \vartheta$ problémy uvažovat na jednotkové kružnici. Protože na jednotkové kružnici je jednoduše umožněno posunutí a odpovídající Jakobiovy polynomy pro řešení okrajového vlivu mají na jednotkové kružnici lepší asymptotiku, můžeme (1*) rozšířit tak, že $p(x)$ a $q(x)$ mají konečný počet nulových bodů a singularit (majorisovatelných a minorisovatelných mocninnými funkcemi), a aby rozdíl odpovídajících exponentů byl nejen menší než $\frac{1}{2}$, nýbrž menší než 1.

Předpokládejme nyní dále, že $\log p \in L[-1, 1]$ a $\log q \in L[-1, 1]$. Potom můžeme (1) také nahradit následujícími podmínkami:

$$\text{buď je} \quad \sqrt[4]{p(x)} \,.\, \sqrt[4]{1 - x^2}|p_n(x)| \leqq C_9, \text{ nebo } \sqrt[4]{q(x)}\sqrt[4]{1 - x^2}|q_n(x)| \leqq C_{10} \qquad (1^{**})$$

a dále $\lambda(x_0) > 0$, $\lambda(x) \in L_{2\pi}$, $\dfrac{1}{\lambda(x)} \in L_{2\pi}$. Důkaz je obdobný důkazu Korousovu aplikovanému na jednotkovou kružnici.

Abychom nyní dále oslabili (1), potřebujeme důležitou nerovnost Szegöho, resp. zobecnění této nerovnosti. G. Szegö nalezl, že (viz [2])

$$\max_{\varrho(z) \in H_n^*(\varphi)} |\lambda\varrho(0) + \mu\varrho(a)|^2 = M_n(\varphi; a; \lambda; \mu)$$

(kde λ, μ a a jsou libovolná komplexní čísla, $H_n^*(\varphi)$ označuje třídu polynomů nejvýše n-tého řádu, pro které platí

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{it})|^2 \varphi(t)\, dt = 1\,, \quad 0 \leqq \varphi(t) \in L_{2\pi}\,, \quad \log\varphi \in L_{2\pi})$$

závisí monotonně na funkci φ, tj. že

$$M_n(\varphi; a; \lambda; \mu) \leqq M_n(\psi; a; \lambda; \mu)\,,$$

pokud $\varphi \geqq \psi$. Odtud ale hned plyne odhad, který používá Szegö vícekrát, tj. odhad

$$\begin{aligned} &|s_n(\psi; 0; a) - s_n(\varphi; 0; a)|^2 \leqq \\ &\leqq [s_n(\psi; 0; 0) - s_n(\varphi; 0; 0)] \,.\, [s_n(\psi; a; a) - s_n(\varphi; a; a)]\,, \end{aligned} \qquad (6)$$

kde $\{\Phi_n(z)\}$ resp. $\{\Psi_n(z)\}$ jsou vzhledem k φ resp. k ψ na jednotkové kružnici posloupnosti ortonormálních polynomů, a dále je

$$s_n(\varphi; t; z) = \sum_{\nu=0}^{n} \Phi_\nu(t)\,\overline{\Phi_\nu(z)}\,.$$

Tato Szegöho nerovnost se může v jistém ohledu oprostit od podmínky monotonie: Označme $\pi_m(t)$ nezáporný trigonometrický polynom, $h_m(z)$ tzv. „normalisovanou representaci" polynomu π_m (viz [2]):

$$h_m(z) \in H_m\,; \quad |h_m(e^{it})|^2 = \pi_m(t)\,, \quad |h_m(re^{it})| > 0\,,$$

pro $0 \leqq r < 1$, $h_m(0) > 0$. Pak platí pro $\varphi(t) \in L_{2\pi}$, $\log\varphi \in L_{2\pi}$ a $\eta(t) = \varphi(t) \,.\, \pi_m(t)$ následující nerovnost:

$$\begin{aligned} &|s_{n+m}(\varphi; 0; a) - h_m(0)\, h_m(a)\, s_n(\eta; 0; a)|^2 \leqq \\ &\leqq |s_{n+m}(\varphi; 0; 0) - h_m^2(0)\, s_n(\eta; 0; 0)| \,.\, |s_{n+m}(\varphi; a; a) - |h_m(a)|^2\, s_n(\eta; a; a)|\,. \end{aligned} \qquad (7)$$

Pomocí (6) a (7) se může snadno dokázat, že (1) může být také nahrazeno následujícím požadavkem:

$$\lambda(x) \equiv \lambda_1(x) \,.\, \lambda_2(x)\,; \quad \lambda(x_0) > 0\,, \qquad (1^{***})$$

$$0 \leqq C_{11} \prod_{j=1}^{N_1} |x - x_j|^{a_j} \leqq \lambda_1(x) \in L_{2\pi} \leqq 2\,; \quad C_{12}/\prod_{j=N+1}^{N+M} |x - x_j|^{b_j} \geqq \lambda_2(x) \in R_{2\pi} \geqq \tfrac{1}{2}\,, \quad (1^{***})$$

kde $x_j \neq x_0$, $(j = 1, 2, \ldots, N + M)$ jsou libovolné body a $0 \leqq a_j$, $(j = 1, 2, \ldots, N)$, $0 \leqq b_j < 1$, $(j = N + 1, N + 2, \ldots, N + M)$ libovolné konstanty. Není také těžké si ověřit, že (1**) a (1***) se mohou též kombinovat na místě požadavku (1).

Tak se velmi rozšíří použitelnost Korousovy věty ve smyslu globálních požadavků na váhu.

Není také těžké nahlédnout, že se (2) může nahradit buď pomocí

$$\sqrt{p(x)}\,\sqrt[4]{1 - x^2}\,|p_n(x)| \leqq C_9\,,$$

nebo

$$\sqrt{q(x)}\,\sqrt[4]{1 - x^2}\,|q_n(x)| \leqq C_{10}\,, \tag{2*}$$

a

$$|k(x) - k(x_0)| \leqq |x - x_0|^{\frac{1}{2}} \,.\, \omega(|x - x_0|)\,,$$

kde $\omega(t)$ značí monotonně k nule se blížící funkci, pro kterou existuje $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{\omega^2(t)}{t}\, dt$.

Dále se může (2) také nahradit tvrzením, že $\lambda(x)$ splňuje na $[x_0 - \delta; x_0 + \delta] \cap [-1; 1]$ Dini-Lipschitzovu podmínku.

Aplikujeme-li nyní Korousovu úvahu a nerovnost (7), dále některé lehké pomocné teoretické věty o aproximaci a nahradíme-li (2) nerovností

$$|\lambda(x) - \lambda(x_0)| \leqq C_{13}|x - x_0|^2\,, \quad \lambda(x_0) > 0\,, \tag{8*}$$

resp. buď $\sqrt{p(x)}\,\sqrt[4]{1 - x^2}\,|p_n(x)| \leqq C_9$, nebo $\sqrt{q(x)}\,\sqrt[4]{1 - x^2}\,|q(x)| \leqq C_{10}$, a kromě toho předpokládáme-li, že

$$|\lambda(x) - \lambda(x_0)| \leqq C_{14}|x - x_0| \,.\, \omega(|x - x_0|)\,,$$

a dále zachováme-li jednu z podmínek (1), (1*), (1**), (1***), pak dostaneme asymptotické analogon Korousovy věty:

Posloupnost $\{q_n(x_0)\}$ má právě tehdy asymptotické vyjádření, jestliže je má $\{p_n(x_0)\}$ a naopak.

Buď ještě konečně poznamenáno, že ve speciálním případě (např. $p(x) \equiv \text{const}$) můžeme (8*) ještě velmi zostřit. Nerovnost (8*) je totiž v tomto speciálním případě také nahraditelná pomocí (2*) nebo pomocí

$$\sqrt{q(x)}\,\sqrt[4]{1 - x^2}\,|q_n(x)| \leqq C_{10}\,, \quad |k(x) - k(x_0)| \leqq \omega(|x - x_0|)\,. \tag{8***}$$

Poznamenejme pak ještě dále, že (8***) není dále už zostřitelné, pokud platí Stěklovova domněnka.

Literatura

[1] *Korous M.*: O rozvoji funkce jedné reálné proměnné v řadu jistých ortogonálních polynomů, Rozpr. České ak. *48*, 1938.

[2] *Szegö G.*: Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Coll, Publ. *23*, New York, 1939.

Přeložil *Miroslav Šisler*, Praha

ŘEŠITELNOST ROVNICE $x + x = a$ V KARTÉZSKÝCH GRUPÁCH

(Referát V. HAVLA o přednášce konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků“ dne 20. dubna 1959)

Kartézská grupa G je množina s binárním sčítáním a násobením, přičemž $(G, +)$ je aditivní grupa, $(G - \{0\}, .)$ je lupa (z angl. loop) a platí podmínky:

(1) $x0 = 0x = 0$ pro každé $x \in G$;
(2$_1$) pro $a, b, c \in G$; $a \neq b$ existuje právě jedno $x \in G$ tak, že $xa - xb = c$;
(2$_2$) pro $a, b, c \in G$; $a \neq b$ existuje právě jedno $y \in G$ tak, že $-ay + by = c$.

Je-li G kartézská grupa, pak množinu $G \times G$ lze geometrisovat tak, že její prvky se prohlásí za „body“ a podmnožiny $((x, y) | y = ax + b)$, $((x, y) | x = c)$ při $a, b, c \in G$ za „přímky“. Množina $G \times G$ je pak $Y - n$ transitivní rovina,[1] kde $OXYJ$ je souřadnicový reper[2]) a n je nevlastní přímka. Naopak lze ke každé $Y - n$ transitivní rovině přiřadit kartézskou grupu G tak, že rovina je isomorfní s $G \times G$.

Vyšetřování byly podrobeny tyto podmínky pro kartézskou grupu G:

(3) je-li $a \in G$, pak existuje právě jedno $x \in G$ tak, že $x + x = a$;
(4$_1$) pro každé $x \in G$ jest $(-1)\,x = -x$;
(4$_2$) pro každé $x \in G$ jest $x(-1) = -x$;
(5) pro každé $x, y \in G$ jest $x + y = y + x$;
(6$_1$) pro každé $x, y, z \in G$ jest $(x + y)\,z = xz + yz$;
(6$_2$) pro každé $x, y, z \in G$ jest $x(y + z) = xy + xz$.

Platí tyto implikace: $(4_i) \Rightarrow (3)$; $(6_i) \Rightarrow (5)$; $(6_i) \Rightarrow (3)$; $i = 1, 2$.

V afinní rovině, splňující Fanovu podmínku o různoběžnosti úhlopříček kteréhokoliv rovnoběžníka, lze formulovat axiom o středu úsečky (tj. uspořádané dvojice bodů $A \neq B$): Je-li P libovolný bod mimo přímku AB, pak existuje bod $Q \neq P$ tak, že $AB \parallel PQ$ a přímka jdoucí bodem P rovnoběžně s BQ protíná přímku jdoucí bodem Q rovnoběžně s AP v bodě S_{AB} přímky AB, který nezávisí na volbě bodu P.

V $Y - n$ transitivní rovině platí axiom o středu pro všecky úsečky na rovnoběžkách s osou x právě tehdy, když příslušná kartézská grupa G splňuje podmínku (3).

V $n - n$ transitivní rovině platí axiom o středu pro všecky úsečky. Platí-li pro všecky úsečky afinní roviny axiom o středu, pak rovina je $n - n$ transitivní.

Použijeme-li tzv. lichoběžníkovou, rovnoběžníkovou, obdélníkovou a čtvercovou Desarguesovu větu,[3]) pak platí tato tvrzení:

V kartézské grupě G platí (4$_1$) *právě tehdy, platí-li v $G \times G$ čtvercová Desarguesova věta podél osy y. V $Y - Y$ transitivní rovině platí podél každé rovnoběžky s osou y lichoběžníková Desarguesova věta a pro všecky úsečky na rovnoběžkách s osou y axiom o středu. Existuje $Y - n$ transitivní rovina a v ní rovnoběžník $ABCD$ s body A, C na ose y tak, že bod $AC \cap BD$ není středem úsečky AC. Platí-li v $Y - n$ transitivní rovině pro všecky kartézské grupy odpovídající reperům $OXYJ$ při pevných $X, Y, n \cap OJ$ podmínka* (4$_1$), *pak všecky tyto kartézské grupy mají komutativní sčítání. Platí-li pro všecky kartézské grupy $n - n$ transitivní roviny podmínka* (7$_1$), *pak rovina je alternativní (tj. $p - p$ transitivní pro každou přímku p).*

Václav Havel, Brno

[1]) *R. Baer*: Am. Journ. Math. *64* (1942) 137–152, § 3.

[2]) O je počátek, X nevlastní bod osy x, Y nevlastní bod osy y a J bod o souřadnicích 1,1.

[3]) *H. G. Zimmer*: Math. Ann. *135* (1958), 274–278, úvod; obdélníková specialisace vznikne z rovnoběžníkové Desarguesovy věty, když PA, PB (viz obr. 1 na str. 274 citovaného článku) jsou souřadnicové osy, kdežto čtvercová specialisace vznikne z obdélníkové, když PC je přímka o rovnici $y = x$.