На каждом разложении $\overline{M}$ на част. упор. множестве M (если каждый элемент разложения является част. упор. подмножеством, вложенным в M) можно определить частичное упорядочение следующим образом:

$$P, Q \in \overline{M}, P \neq Q \Rightarrow \{P < Q \Leftrightarrow x < y, \quad \text{если} \quad x \in P, y \in Q\}.$$

Соответствующее част. упор. множество $\overline{M}$ мы называем *факторным* част. упор. множеством част. упор. множества M.

Тогда можно утверждать, что част. упор. множество M является *лексикографической суммой* системы част. упор. множеств $M_u \neq \emptyset$, $u \in N$ по част. упор. множеству $N \neq \emptyset$, т. е. $M \equiv \sum_N M_u$ тогда и только тогда, если M_u вложено в M для любого $u \in N$, и N изоморфно факторному част. упор. множеству, определенному на разложении на вложенные подмножества M_u.

Мы скажем, что част. упор. множество M *лексикографически неразложимо*, соотв. *почти неразложимо*, если оно удовлетворяет условию

$$M \equiv \sum_N M_x \Rightarrow \quad \text{или} \quad \operatorname{kard} M_x = 1 \quad \text{для любого} \quad x \in N \quad \text{или} \quad \operatorname{kard} N = 1,$$

соотв.

$$M \equiv \sum M_x \Rightarrow \quad \text{или существует} \quad M_x, \text{ изоморфное } M, \text{ или } N \text{ изоморфно } M.$$

Далеко не всякое част. упор. множество можно представить в виде $M \equiv \sum_N M_x$ так, чтобы все N и M_x были для любого $x \in N$ лексикографически неразложимыми или лишь почти неразложимыми част. упор. множествами.

Далее исследуются свойства вложенных част. упор. подмножеств, свойства разложений на вложенные и лексикографически неразложимые част. упор. подмножества и факторные част. упор. множества, являющиеся лексикографически неразложимыми, на данном част. упор. множестве. При этом част. упор. подмножество P, вложенное в M, называется *максимальным вложенным*, если имеет место

$$P \neq M \text{ и } Q \text{ вложено в } M, \; Q \neq P \subset Q \Rightarrow Q \equiv M.$$

Zusammenfassung

ÜBER DIE LEXIKOGRAPHISCHE SUMME DER TEILWEISE GEORDNETEN MENGEN

KAREL ČULÍK, Brno

(Eingegangen am 11. November 1957)

Eine teilweise geordnete (t. g.) Teilmenge $P \neq \emptyset$ der t. g. Menge M heisst *eingelegte* t. g. Menge in M, wenn folgende Bedingung

$$x, y \in P, \; z \in M - P \Rightarrow \{x < z \Leftrightarrow y < z\} \text{ und } \{z < x \Leftrightarrow z < y\}$$

erfüllt ist. Auf jeder Zerlegung $\overline{M}$ in die eingelegten t. g. Teilmengen in der t. g. Menge M ist es möglich eine teilweise Anordnung folgendermassen zu definieren:

$$P, Q \in \overline{M},\ P \neq Q \Rightarrow \{P < Q \Leftrightarrow x < y, \text{ wo } x \in P,\ y \in Q\}.$$

Die betreffende t. g. Menge $\overline{M}$ heisst *t. g. Faktormenge* der t. g. Menge M.

Satz 1. *Eine t. g. Menge M ist dann und nur dann die lexikographische Summe eines Systems der t. g. Mengen $M_u \neq \emptyset$ über eine t. g. Menge $N \neq \emptyset$, d. h. $M \equiv \equiv \sum_N M_u$, wenn M_u eine eingelegte t. g. Teilmenge in M für jedes $u \in N$ ist und wenn N zu einer auf der Zerlegung in die eingelegten Teilmengen M_u definierten t. g. Faktormenge isomorph ist.*

Wir sagen, dass eine t. g. Menge M *lexikographisch unzerlegbar* bzw. *fastunzerlegbar* ist, wenn sie folgende Bedingung

$$M \equiv \sum_N M_u \Rightarrow \textit{entweder } \operatorname{kard} M_u = 1 \textit{ für alle } u \in N \textit{ oder } \operatorname{kard} N = 1\,,$$

bzw.

$$M \equiv \sum_N M_u \Rightarrow \textit{entweder gibt es } M_u\textit{, die isomorph zu } M \textit{ oder } N \textit{ isomorph zu } M \textit{ ist,}$$

erfüllt.

Satz 2. *Eine t. g. Menge M ist dann und nur dann lexikographisch unzerlegbar, wenn auf M höchstens zwei t. g. Faktormengen existieren.*

Nicht jede t. g. Menge M lässt sich in der Form $M \equiv \sum_N M_u$ in solcher Weise ausdrücken, dass N und auch M_u für jedes $u \in N$ lexikographisch unzerlegbare oder nur fastunzerlegbare t. g. Mengen sind.

Weiter werden die Grundeigenschaften der eingelegten t. g. Teilmengen untersucht. Es gelten z. B.:

Lemma 3. *Der nichtleere Durchschnitt der eingelegten t. g. Teilmengen ist wieder eine eingelegte t. g. Teilmenge.*

Lemma 4. *Sind P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ die eingelegten t. g. Teilmengen und gilt $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ für $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, so ist auch $\bigcup_{i=1}^{n} P_i$ eine eingelegte t. g. Teilmenge.*

Lemma 5. *Sind P, Q eingelegte t. g. Teilmengen und gilt $P \cap Q \neq \emptyset, P - Q \neq \neq \emptyset \neq Q - P$, so sind auch $P - Q$, $Q - P$ eingelegte t. g. Teilmengen und für $x \in P - Q$, $y \in P \cap Q$, $z \in Q - P$ gilt $x \varrho y$, $y \varrho z$, $x \varrho z$, wo ϱ eines der folgenden Symbole bedeutet: $\langle, \rangle, \|$ (Unvergleichbarkeit).*

Über die Zerlegungen in eingelegte und lexikographisch unzerlegbaren t. g. Teilmengen gilt

Satz 5. *Die kleinste Überdeckung des Systems von allen Zerlegungen in eingelegten t. g. Teilmengen ist dann und nur dann eine Zerlegung von derselben Art, wenn jede eingelegte t. g. Teilmenge, in der jede zwei Elemente unvergleichbar sind, höchstens zwei Elemente enthält und wenn keine eingelegte Kette drei Elementen enthält, für die* $x > y > z$ *und* $x > a \geqq y \geqq b > z \Rightarrow a = y = b$ *gilt.*

Eine eingelegte t. g. Teilmenge P in t. g. Menge M heisst *maximal,* wenn

$$P \not\equiv M \text{ und } Q \textit{ eine eingelegte t. g. Teilmenge in } M \textit{ ist },$$
$$Q \not\equiv P \subset Q \Rightarrow Q \equiv M .$$

Satz 6. *Gibt es auf einer t. g. Menge* M *mindestens zwei maximale eingelegte t. g. Teilmengen, so sind folgende Bedingungen äquivalent:*

a) *Es existieren maximale eingelegte t. g. Teilmengen* $P \not\equiv Q$, *für die* $P \cap Q \neq \emptyset$ *gilt.*

b) *Es existiert eine t. g. Faktormenge auf* M, *die entweder eine Kette bildet oder nur aus Elementen, die paarweise unvergleichbar sind, besteht und die nicht lexikographisch unzerlegbar ist.*

Endlich ist klar, dass

$$\sum_{\substack{\Sigma N_v \\ N}} M_u \equiv \sum_N (\sum_{N_v} M_u)$$

gelten muss.