пространствах, а именно имеет место равенство $\varkappa_k = \lim\limits_{s \to s_0+} \frac{\omega_k}{s - s_0}$, где ω_k — угол между k-ым соприкасающимся пространством $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}\}$ в точке s_0 и $(k - 1)$-й нормалью $\mathbf{e}_{k-1}$ в точке s. Угол между векторами в двух различных точках кривой определяется при помощи параллельного переноса вдоль этой кривой.

Zusammenfassung

AUSSERGEWÖHNLICHE PUNKTE AUF KURVEN IN RIEMANNSCHEN RÄUMEN

ČESTMÍR VITNER, Praha

(Eingelangt am 15. Oktober 1958)

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung von aussergewöhnlichen Punkten auf analytischen Kurven $\mathbf{M}(t)$ in Riemannschen Räumen. Aussergewöhnliche Punkte sind solche, in welchen die absoluten Ableitungen $\frac{\mathrm{D}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{D}^2\mathbf{M}}{\mathrm{d}t^2}, \ldots \frac{\mathrm{D}^n\mathbf{M}}{\mathrm{d}t^n}$ linear abhängig sind, also z. B. singuläre Punkte und Wendepunkte der Kurve. Vor allem geht es daraum die Krümmungen und orientierten Normalen in den aussergewöhnlichen Punkten zu definieren und explizit zu berechnen.

In den aussergewöhnlichen Punkten sind Krümmungen und Normalen definiert als rechtsseitiger Grenzwert der gewöhnlichen Krümmungen und Normalen.

Wenn $\mathbf{M}(t)$ eine feste Parameterdarstellung der Kurve bedeutet, so bezeichnen wir mit $\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}$ die erste von Null verschiedene absolute Derivierte im aussergewöhnlichen Punkt $t = 0$. Es sei $\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}$ in der Aufeinanderfolge die erste weitere absolute Derivierte, die von $\mathbf{M}_0^{(\alpha_2)}$ linear unabhängig ist. Auf diese Weise fortschreitend können wir ein System von Vektoren definieren $\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}, \mathbf{M}_0^{(\alpha_2)}, \ldots, \mathbf{M}_0^{(\alpha_n)}$ derart, dass α_i die kleinste Zahl von der Beschaffenheit ist, dass die Vektoren $\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}, \ldots, \mathbf{M}_0^{(\alpha_i)}$, $1 \leqq i \leqq n$ linear unabhängig sind.

Bezeichnen wir mit $\varkappa_k$ die k-te Krümmung und mit $\mathbf{e}_k$ die k-te Normale im aussergewöhnlichen Punkt, so gilt:

$$\varkappa_k = \frac{\sqrt{S_{k-1}S_{k+1}}(\alpha_1 - 1)!(\alpha_k - 1)!(\alpha_{k+1} - \alpha_1) \ldots (\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{S_k\sqrt{S_1}(\alpha_{k+1} - 1)!(\alpha_k - \alpha_1) \ldots (\alpha_k - \alpha_{k-1})} \lim_{t \to 0+} t^{\alpha_{k+1} - \alpha_k - \alpha_1},$$

$$k = 1, \ldots, n - 1,$$

$$\mathbf{e}_{k-1} = \frac{\mathbf{T}_k}{\sqrt{S_{k-1}S_k}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \text{ wo}$$

$$S_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}) \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{T}_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_{k-1})}), \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_{k-1})}), \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)} \end{vmatrix} \quad \text{ist.}$$

Diese Formeln bilden im wesentlichen den Inhalt der Sätze 2,2 und 2,3. Der zweite Abschnitt (Paragraph) enthält noch die Sätze 2,4 und 2,5. Der erste von beiden untersucht die Änderung der Orientierung der Normalen und der begleitenden n-Kante in der Umgebung des aussergewöhnlichen Punktes. Der zweite dagegen untersucht die Änderung der Orientierung der Normalen und der begleitenden n-Kante bei Änderung der Orientierung der Kurve.

Der dritte Abschnitt enthält die verallgemeinerten Frenetschen Formeln für den Fall eines aussergewöhnlichen Punktes und endlicher Krümmungen (Satz 3,1) und die Entwicklung der Kurve in der Umgebung des aussergewöhnlichen Punktes nach Potenzen von $s^{\frac{1}{\alpha}}$, worin s den Bogen bedeutet (Satz 3,3); hier sind auch explizit die ersten zwei von Null verschiedenen Glieder dieser Entwicklung berechnet. Der dritte Abschnitt enthält noch eine neue Interpretation der Krümmungen in Riemannschen Räumen. Es gilt nämlich: $\varkappa_k = \lim\limits_{s \to s_0 +} \dfrac{\omega_k}{{}_k s - s_0}$ worin ω_k den Winkel des k-ten osculierenden Raumes $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}\}$ im Punkte s_0 mit der $k-1$-ten Normalen $\mathbf{e}_{k-1}$ im Punkte s_0 bedeutet. Der Winkel der Vektoren in zwei verschiedenen Punkten der Kurve ist definiert durch Parallelübertragung längs der Kurve.