Porovnáním (3,10) a (3,11) dostaneme $\delta = \alpha_2$ a

$$\frac{\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1^2} \boldsymbol{N} \left[\frac{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}{\alpha_1!}\right]^{\frac{\alpha_2 - 2\alpha_1}{\alpha_1}} = \frac{T_2(\alpha_1 - 1)!^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{S_1^2(\alpha_2 - 1)!}, \quad \text{tj.}$$

$$\boldsymbol{N} = \frac{T_2\alpha_1!^2}{S_1^2\alpha_2!}\left[\frac{\alpha_1!}{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}\right]^{\frac{\alpha_2 - 2\alpha_1}{\alpha_2}}. \tag{3,12}$$

Dosažené výsledky můžeme shrnout do věty:

Věta 3,3. *Ve Fermiho souřadném systému platí rozvoj*

$$\boldsymbol{M}(s) = \boldsymbol{M}(0) + \boldsymbol{a}s_1 + \boldsymbol{N}s_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} + \ldots, \tag{3,13}$$

kde $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)}{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}$, $\boldsymbol{N}$ *je dáno vzorcem* (3,12) *a* $s_1^{\frac{1}{\alpha_1}} = \varepsilon^{\alpha_1 - 1}\sqrt{\varepsilon^{\alpha_1 - 1}s}$.

Poznámka. Z věty 3,3 plyne, že *ve výjimečném bodě křivky existují vždy nenulové konečné první derivace podle oblouku zprava i zleva, které v případě lichého* α_1 *splynou, v případě sudého* α_1 *se liší znaménim.*

Dále z ní snadno plyne (viz také (3,11)), že *v případě nenulové a konečné první křivosti má křivka ve výjimečném bodě druhou derivaci podle oblouku při jinak libovolných* α_1, α_2. (*Přesněji řečeno platí* $\lim\limits_{s \to 0+} \boldsymbol{M}''(s) = \lim\limits_{s \to 0-} \boldsymbol{M}''(s) < +\infty$.)

LITERATURA

[1] *W. Blaschke:* Frenets Formeln für den Raum von Riemann. Mathematische Zeitschrift, *6*, B. 1920, 94—99.

[2] *G. Kowalewski:* Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig 1909, 423—426.

[3] *F. Levi:* Die Singularitäten der Kurven in beliebigen affinzusammenhängenden Räumen. Berichte Leipzig, *77*, B. 1925, 80—84.

[4] *R. Lilienthal:* Vorlesungen über Diferentialgeometrie I. Leipzig 1908, 242—272.

Резюме

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ НА КРИВЫХ В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ЧЕСТМИР ВИТНЕР (Čestmír Vitner), Прага

(Поступило в редакцию 15/X 1958 г.)

Работа ставит себе целью исследование исключительных точек на аналитических кривых $\boldsymbol{M}(t)$ в римановых пространствах. Исключительными являются такие точки, в которых абсолютные производные $\dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^2}, \ldots,$

$\dfrac{\mathrm{D}^n \boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^n}$ линейно зависимы, как, напр., особые точки и точки перегиба кривой. Прежде всего определим и вычислим в явном виде кривизны и ориентированные нормали в исключительных точках.

Кривизны и нормали в исключительной точке определяются как правосторонние пределы обычных кривизн и нормалей.

Если $\boldsymbol{M}(t)$ — фиксированная параметризация кривой, то обозначим через $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}$ первую неисчезающую абсолютную производную в исключительной точке $t = 0$. Пусть $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_2)}$ есть первая по порядку из дальнейших абсолютных производных, которая линейно не зависит от $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}$. Таким образом можно последовательно определить систему n векторов $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_2)}, \ldots, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_n)}$ такую, что α_i — наименьшее число с тем свойством, что векторы $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \ldots, \ldots, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_i)}$, $1 \leqq i \leqq n$ линейно независимы.

Если обозначить через $\varkappa_1$ k-ю кривизну и через $\mathbf{e}_k$ k-ю нормаль в исключительной точке, то имеем

$$\varkappa_k = \frac{\sqrt{S_{k-1}S_{k+1}}(\alpha_1 - 1)!(\alpha_k - 1)!(\alpha_{k+1} - \alpha_1)\ldots(\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{S_k\sqrt{S_1}(\alpha_{k+1} - 1)!(\alpha_k - \alpha_1)\ldots(\alpha_k - \alpha_{k-1})} \lim_{t\to 0+} t^{\alpha_{k+1} - \alpha_k - \alpha_1},$$

$$k = 1, \ldots, n-1,$$

$$\mathbf{e}_{k-1} = \frac{\boldsymbol{T}_k}{\sqrt{S_{k-1}S_k}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{где}$$

$$S_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}) \end{vmatrix},$$

$$T_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_{k-1})}), \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_{k-1})}), \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)} \end{vmatrix}.$$

Эти формулы составляют главное содержание теорем 2,2 и 2,3. Второй параграф содержит еще теоремы 2,4 и 2,5. Первая из них исследует изменение ориентации нормалей и сопровождающих n-гранников в окрестности исключительной точки. Вторая же, наоборот, исследует изменение ориентации нормалей и сопровождающего n-гранника при изменении ориентации кривой.

Третий параграф содержит обобщенные формулы Френе для случая исключительной точки и конечных кривизн (теорема 3,1) и разложение уравнения кривой в окрестности исключительной точки по степеням $s^{\frac{1}{\alpha_1}}$, где s — дуга (теорема 3,3); здесь же в явном виде вычисляются первых два ненулевых члена этого разложения. Третий параграф содержит, кроме того, еще новое геометрическое истолкование кривизны в римановых