Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

VÝJIMEČNÉ BODY NA KŘIVKÁCH V RIEMANNOVÝCH PROSTORECH

ČESTMÍR VITNER, Praha

DT: 513.813

(Došlo dne 15. října 1958)

Práce se zabývá vyšetřováním těch bodů analytických křivek v Riemannových prostorech, ve kterých absolutní derivace $\frac{d\mathbf{M}}{dt}$, $\frac{D^2\mathbf{M}}{dt^2}, \ldots, \frac{D^n\mathbf{M}}{dt^n}$ jsou lineárně závislé. V těchto bodech jsou definovány limitním přechodem normály $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ a křivosti $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$. Pro tyto normály a křivosti jsou nalezeny explicitní vzorce analogické vzorcům, které v případě nevýjimečných bodů nalezl W. Blaschke. Dále je v práci zkoumáno, jak se mění orientace normál při průchodu výjimečným bodem a jak se mění křivosti a orientace normál ve výjimečném bodě při změně orientace křivky. V případě konečných křivostí jsou odvozeny zobecněné Frenetovy formule. Konečně obsahuje práce ještě rozvoj křivky podle lomených mocnin oblouku $s^{\frac{1}{\alpha_1}}$ a jednu novou geometrickou interpretaci křivostí.

1. Úvod

Cílem této úvodní části je formulovat thema této práce a zavést základní pojmy, které budeme v dalším potřebovat.

Budeme se zabývat jednoduchými analytickými křivkami v Riemannově prostoru V_n. *Riemannův prostor* je jak známo n-rozměrná varieta, na které je dána metrika pomocí kvadratické diferenciální formy

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i\, dx^j\,. \tag{1,1}$$

Omezíme se v dalším na *positivně definitní* metriku. O funkcích $g_{ij}(x)$ budeme předpokládat, že jsou *analytické*.

Kvadratický kovariantní symetrický tensor g_{ij} nám umožňuje definovat skalární součin, úhel a délku vektorů v tečném prostoru v pevném bodě Riemannova prostoru. *Skalární součin* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ dvou vektorů $\mathbf{a}(a^1, a^2, \ldots, a^n)$, $\mathbf{b}(b^1, b^2, \ldots, b^n)$ v pevném bodě (x) je dán vzorcem

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, a^i b^j\,. \tag{1,2}$$

Délka $|\boldsymbol{a}|$ vektoru a úhel ω vektorů jsou pak definovány vzorci

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\,, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \omega\,. \tag{1,3}$$

Jednoduchá křivka je homeomorfním obrazem otevřeného intervalu. Je dána v souřadném systému $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ parametrickými rovnicemi

$$x^i = x^i(t)\,, \quad t \in (a, b)\,. \tag{1,4}$$

V dalším budeme předpokládat, že křivka je *analytická*, tzn., že připouští analytickou parametrisaci (1,4).

Metrika (1,1) nám umožňuje, jak známo, definovat délku křivky pomocí vzorce

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau}}\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{1,5}$$

(Vynechali jsme, jak je v tensorovém počtu obvyklé, summační znamení.)

Bod křivky odpovídající parametru t budeme označovat $\boldsymbol{M}(t)$. Vektor, který dostaneme derivací podle parametru t, označíme analogicky $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}$ nebo $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)$. Vzorce (1,5) lze pak přepsati

$$s = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\cdot}}|\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{1,6}$$

Pomocí vztahu (1,5) lze na křivce zavést oblouk s jako parametr. Rovnice (1,6) totiž připouští inversní řešení $t = t(s)$, takže máme pro křivku parametrické vyjádření

$$x^i = x^i(t(s))\,. \tag{1,7}$$

Bod křivky budeme pak stručně označovat $\boldsymbol{M}(s)$. Parametrisace pomocí oblouku nemusí být v případě $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\cdot}} = \boldsymbol{0}$ v bodě t_0 analytická. Bod, ve kterém při nějaké diferencovatelné parametrisaci $\boldsymbol{M}(t)$ platí $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\cdot}} \neq \boldsymbol{0}$, se nazývá *regulární*. Ostatní body se nazývají *singulární*. Z analytičnosti vyjádření (1,4) plyne, že v dostatečně malém okolí singulárního bodu jsou všechny body s výjimkou jeho samého regulární.

Máme-li podél křivky dáno vektorové pole $\boldsymbol{a}(t)$, pak můžeme zřejmě mluvit o *limitě* a *spojitosti* tohoto pole v bodě $\boldsymbol{M}(t_0)$. To můžeme dělat na libovolné diferencovatelné varietě, neboť souhrn vektorů ve všech bodech n-dimensionální diferencovatelné variety X_n tvoří diferencovatelnou varietu T_{2n} dimense $2n$. Jsou-li lokální souřadnice bodu $\boldsymbol{M}$ variety X_n $x^1, x^2, \ldots, x^n$ a souřadnice vektoru $\boldsymbol{a}$ v přirozené lokální basi tečného prostoru v bodě $\boldsymbol{M}$ $a^1, a^2, \ldots, a^n$, jsou souřadnice vektoru $\boldsymbol{a}$ na zmíněné varietě T_{2n} $x^1, x^2, \ldots, x^n; a^1, a^2, \ldots, a^n$.

Podél křivky $\boldsymbol{M}(t)$ mějme dáno vektorové pole $\boldsymbol{a}(t)$. Obyčejná derivace $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}t}\right)$ tohoto vektoru podle t není vektorem. Za tím účelem se zavádí tak zvaná *absolutní* derivace $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$, která má obvyklé vlastnosti derivace a přitom $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$ je opět vektorem. Tato derivace je dána pomocí vzorců

$$\frac{\mathrm{D}a^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{jk} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} a^k \,, \tag{1,8}$$

ve kterých Γ^i_{jk} jsou známé Christoffelovy symboly

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right) \tag{1,9}$$

($g^{i\alpha}$ jsou kontravariantní složky metrického tensoru g_{ij}).

Pomocí Christoffelových symbolů lze definovat pojem *paralelismu* podél křivky: Vektorové pole se nazývá *paralelní* podél křivky $\boldsymbol{M}(t)$, jestliže platí

$$\frac{D\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0} \,. \tag{1.10}$$

Nelze tedy obecně hovořit o tom, že dva vektory ve dvou různých bodech V_n jsou paralelní, ale že vektor se posunuje paralelně podél jisté křivky, anebo také, že dva vektory v různých bodech jsou paralelní vzhledem ke křivce. Vzhledem k této křivce pak můžeme zavést *úhel vektorů* $\boldsymbol{a}(t_0)$, $\boldsymbol{b}(t)$ *ve dvou různých* (dostatečně blízkých) *bodech křivky*. Bude to úhel vektoru $\boldsymbol{a}(t_0)$ s vektorem $\boldsymbol{b}(t_0)$, který dostaneme z vektoru $\boldsymbol{b}(t)$ paralelním posunem podél křivky.

Je známa *Fermiho věta*, že v prostoru V_n lze zavést souřadnou soustavu tak, že $\Gamma^i_{jk} = 0$ podél dané křivky. V této souřadné soustavě, tzv. *Fermiho souřadné soustavě*, pak absolutní derivace splývá podle (1,8) s derivací obvyklou. Vektor paralelně posunovaný podél té křivky má potom ve zmíněné soustavě konstantní souřadnice.

Na jednoduché křivce můžeme definovat dvojím způsobem *orientaci*. Budeme-li mít na mysli orientovanou křivku, budeme brát orientaci pomocí rostoucího parametru t (anebo pomocí oblouku definovaného vzorcem (1,5), což je totéž).

Na orientované křivce můžeme definovat jednotkovou *orientovanou tečnu* $\mathbf{t}$, která v případě $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} \neq \boldsymbol{0}$ je dána vzorcem

$$\mathbf{t} = \frac{\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}}{\left|\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}\right|} \,. \tag{1,11}$$

Předpokládáme-li, že vektory

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s},\ \frac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s^2},\ \ldots,\ \frac{\mathrm{D}^n\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s^n} \tag{1,12}$$

jsou lineárně nezávislé, můžeme známým ortogonalisačním procesem E. Schmidta definovat vedle tečny $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s}$ ještě $n - 1$ jednotkových *normál* $\mathbf{e}_k$, pro něž jsou známy následující explicitní vzorce [1], [2]:

$$\mathbf{e}_{k-1} = \frac{\boldsymbol{U}_k}{\sqrt{D_{k-1}D_k}}, \tag{1,13}$$

kde

$$\boldsymbol{U}_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}') & \dots & (\boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}^{(k-1)}) & \boldsymbol{M}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\boldsymbol{M}^{(k)}, \boldsymbol{M}') & \dots & (\boldsymbol{M}^{(k)}, \boldsymbol{M}^{(k-1)}) & \boldsymbol{M}^{(k)} \end{vmatrix}, \tag{1,14}$$

$$D_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}') & \dots & (\boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}^{(k)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\boldsymbol{M}^{(k)}, \boldsymbol{M}') & \dots & (\boldsymbol{M}^{(k)}, \boldsymbol{M}^{(k)}) \end{vmatrix}, \tag{1,15}$$

kde čárky znamenají absolutní derivace podle oblouku. D_k je známý Gramův determinant, který je > 0. Tyto vzorce platí i v případě $k = 1$, položíme-li $\mathbf{e}_0 = \mathbf{t}$, $D_0 = 1$.

Vektorový prostor vytvořený normálami $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ se nazývá $(k + 1)$-*-rozměrný oskulační prostor* v bodě křivky.

Pro absolutní derivaci normál podle oblouku platí základní *Frenetovy vzorce* [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0' &= \varkappa_1 \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_1' &= -\varkappa_1 \mathbf{e}_0 + \varkappa_2 \mathbf{e}_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_{k-1}' &= -\varkappa_{k-1} \mathbf{e}_{k-2} + \varkappa_k \mathbf{e}_k, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_{n-1}' &= -\varkappa_{n-1} \mathbf{e}_{n-2}. \end{aligned} \tag{1,16}$$

Skaláry $\varkappa_1, \dots, \varkappa_{n-1}$ se nazývají *první* až $(p - 1)$-*tá křivost*. Platí pro ně explicitní vzorce [1]

$$\varkappa_k = \frac{\sqrt{D_{k-1}D_{k+1}}}{D_k}, \tag{1,17}$$

kde D_k jsou dány vzorci (1,15).

V případě, že derivace

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^2}, \dots, \frac{\mathrm{D}^n\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^n} \tag{1,18}$$

jsou lineárně nezávislé, budeme bod $\boldsymbol{M}$ nazývat *obecným* bodem křivky (přesněji obecným bodem parametrisace $\boldsymbol{M}(t)$). V tomto bodě pak existují derivace podle oblouku (1,12) a lze definovat křivosti, normály, oskulační prostory a platí Frenetovy vzorce. V této práci se budu zabývat *výjimečnými* body křivky, které při pevně zvolené analytické parametrisaci nejsou obecné. Přitom budu předpokládat, že ostatní body křivky v dostatečně malém okolí jsou obecné. Mezi výjimečné body zřejmě patří body singulární, inflexní atp.

Cílem této práce bude definovat křivosti, normály a oskulační prostory ve výjimečných bodech a odvodit pro ně vzorce analogické vzorcům (1,13) až (1,17). Z těchto vzorců budou pak odvozeny některé jednoduché důsledky. Vedle toho bude ukázán jeden jednoduchý geometrický význam křivostí.

2. Křivosti a normály

Mějme analytickou orientovanou jednoduchou křivku, která je dána analytickou parametrisací $\boldsymbol{M}(t)$. Budeme předpokládat, že všechny body jsou obecné nejvýše snad s výjimkou bodu $\boldsymbol{M}(0)$. V tomto bodě budeme definovat normály a křivosti limitním přechodem.

$$\mathbf{e}_k(0) = \lim_{t\to 0+} \mathbf{e}_k(t)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1)\,; \tag{2,1}$$

$$\varkappa_k(0) = \lim_{t\to 0+} \varkappa(t)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{2,2}$$

(Připouštíme nekonečně velké křivosti.) Pomocí normál pak již obvyklým způsobem definujeme oskulační prostory.

W. Blaschke odvodil ve své práci [1] vzorce (1,13) až (1,17) s obloukem jako parametrem. Protože ale oblouk nemusí dávat v singulárních bodech analytickou parametrisaci, vyjdeme od analogických vzorců pro obecný parametr t. Platí následující:

Věta 2.1. *Při obecném parametru platí v obecném bodě křivky $\boldsymbol{M}(t)$ vzorce*

$$\mathbf{e}_{k-1} = \frac{{}^t\boldsymbol{U}_k}{\sqrt{{}^tD_{k-1}{}^tD_k}}\,, \tag{2,3}$$

$$\varkappa_k = \frac{\sqrt{{}^tD_{k-1}{}^tD_{k+1}}}{{}^tD_k\sqrt{{}^tD_1}}\,, \tag{2,4}$$

kde ${}^tD_k$, ${}^t\boldsymbol{U}_k$ mají obdobný význam jako D_k, $\boldsymbol{U}_k$ ze vzorců (1,14) a (1,15), *jenomže derivace v nich jsou absolutní derivace podle parametru t.*

Důkaz. Zřejmě platí

$$\frac{\mathrm{D}^k\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s^k} = \frac{\mathrm{D}^k\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^s}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^k + \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\frac{\mathrm{D}^i\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^i}\,.$$

Dosazením do vzorců (1,14) a (1,15) dostaneme po vynechání nulových členů

$$D_k = {}^tD_k\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^{2(1+2+\ldots+k)}\,, \qquad \boldsymbol{U}_k = {}^t\boldsymbol{U}_k\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^{2(1+2+\ldots+(k-1))+k}$$

Dosazením těchto vzorců do vzorců (1,13) a (1,17) dostaneme ihned (2,3), (2,4), uvědomíme-li si ještě, že $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{{}^tD_1}}$.

Pro další vyšetřování budeme potřebovat rozvoj pro křivku $\mathbf{M}(t)$ v okolí bodu $\mathbf{M}(0)$. Budiž $\frac{D^{\alpha_1}M(0)}{dt^{\alpha_1}}$ první nenulová derivace. Budiž $\frac{D^{\alpha_2}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_2}}$ v pořadí první další derivace, která je na $\frac{D^{\alpha_1}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_1}}$ lineárně nezávislá. Takto můžeme postupně definovat soustavu n vektorů [3]

$$\frac{D^{\alpha_1}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_1}}, \quad \frac{D^{\alpha_2}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_2}}, \ldots, \frac{D^{\alpha_n}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_n}} \tag{2,5}$$

takovou, že α_i je nejmenší číslo té vlastnosti, že vektory $\frac{D^{\alpha_1}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{D^{\alpha_i}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_i}}$, $1 \leqq i \leqq n$, jsou lineárně nezávislé. Čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nezávisí na volbě souřadného systému, závisí však na volbě parametru na křivce. Máme-li jinou parametrisaci a k ní odpovídající čísla $\beta_1, \ldots, \beta_n$, platí $\alpha_i = k\beta_i$ pro $i = 1, \ldots, n$, kde k je nějaké racionální číslo. Viz F. Lévi [3].

Existence těchto n lineárně nezávislých vektorů (2,5) plyne z analytičnosti křivky. Dokažme to.

Volme podél křivky Fermiho souřadný systém. Předpokládejme nyní, že z nekonečné posloupnosti vektorů

$$\frac{d\mathbf{M}(0)}{dt}, \quad \frac{d^2\mathbf{M}(0)}{dt^2}, \ldots, \frac{d^k\mathbf{M}(0)}{dt^k}, \ldots$$

nelze vybrat n lineárně nezávislých vektorů. Uvažujme determinant D, jehož sloupci jsou souřadnice vektorů $\mathbf{M}^{\cdot}, \mathbf{M}^{\cdot\cdot}, \ldots, \mathbf{M}^{(n)}$: $D = [\mathbf{M}^{\cdot}, \mathbf{M}^{\cdot\cdot}, \ldots, \mathbf{M}^{(n)}]$. Nyní platí $D^{\cdot} = [\mathbf{M}^{\cdot}, \mathbf{M}^{\cdot\cdot}, \ldots, \mathbf{M}^{(n-1)}, \mathbf{M}^{(n+1)}]$. Podobně všechny ostatní derivace determinantu D se dají vyjádřit jako lineární kombinace determinantů $[\mathbf{M}^{(i_1)}, \mathbf{M}^{(i_2)}, \ldots, \mathbf{M}^{(i_n)}]$. V bodě $t = 0$ jsou všechny tyto determinanty rovny nule. Tedy všechny derivace determinantu D jsou v bodě $t = 0$ rovny nule. Protože determinant D zřejmě je v t analytická funkce, platí identicky $D = 0$. To ale není možné, neboť jsme předpokládali, že $t = 0$ je isolovaný výjimečný bod a že tedy v jeho okolí s výjimkou $t = 0$ platí $D \neq 0$.

Nyní odvodíme lemma, které budeme v dalším často používat. V prostoru V_n volíme přitom Fermiho souřadný systém podél křivky.

Lemma 2.1. *Ve Fermiho souřadném systému platí rozvoje:*

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}(0) + \frac{d^{\alpha_1}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_1}}\left[\frac{t^{\alpha_1}}{\alpha_1!} + o(t^{\alpha_1})\right] + \frac{d^{\alpha_2}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_2}}\left[\frac{t^{\alpha_2}}{\alpha_2!} + o(t^{\alpha_2})\right] + \\ + \ldots + \frac{d^{\alpha_k}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_k}}\left[\frac{t^{\alpha_k}}{\alpha_k!} + o(t^{\alpha_k})\right] + \mathbf{o}(t^{\alpha_k}), \tag{2,6}$$

kde $1 \leqq k \leqq n$. *Přitom* $o(t^{\alpha_i})$, $\mathbf{o}(t^{\alpha_k})$ *jsou známé symboly malé o.*

Pro derivace platí analogické rozvoje:

$$\frac{d^i\mathbf{M}(t)}{dt^i} = \frac{d^{\alpha_1}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_1}}\left[\frac{t^{\alpha_1-i}}{(\alpha_1-i)!} + o(t^{\alpha_1-i})\right] + \frac{d^{\alpha_2}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_2}}\left[\frac{t^{\alpha_2-i}}{(\alpha_2-i)!} + o(t^{\alpha_2-i})\right] +$$
$$+ \ldots + \frac{d^{\alpha_k}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_k}}\left[\frac{t^{\alpha_k-i}}{(\alpha_k-i)!} + o(t^{\alpha_k-i})\right] + \mathbf{o}(t^{\alpha_k-i})\,. \tag{2,7}$$

Přitom je třeba klásti $\frac{1}{(\alpha_r - s)!} = 0$, $o(t^{\alpha_r - s}) = o(1)$ *pro* $\alpha_r - s < 0$ a $0! = 1$.

Důkaz plyne ihned z rozvoje

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}(0) + \frac{d^{\alpha_1}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_1}\alpha_1!}t^{\alpha_1} + \ldots + \frac{d^{\alpha_2}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_2}\alpha_2!}t^{\alpha_2} + \ldots +$$
$$+ \frac{d^{\alpha_k}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_k}\alpha_k!}t^{\alpha_k} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k})\,.$$

Každý z vytečkovaných členů je lineární kombinací předchozích napsaných členů. Dáme-li k sobě členy patřící k téže derivaci, dostaneme rozvoj (2,6). Odtud pak postupným derivováním plynou rozvoje (2,7). Přitom k může nabývat všech přirozených čísel od 1 do n.

Pro další účely je třeba najít hlavní členy rozvojů determinantů ${}^tD_k$ a ${}^t\mathbf{U}_k$. To je předmětem následujících dvou lemmat.

Označme písmenem S_k determinant

$$S_k = \begin{vmatrix} (\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}, \mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}) \ldots (\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}, \mathbf{M}_0^{(\alpha_k)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\mathbf{M}_0^{(\alpha_k)}, \mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}) \ldots (\mathbf{M}_0^{(\alpha_k)}, \mathbf{M}_0^{(\alpha_k)}) \end{vmatrix}, \tag{2,8}$$

kde $\mathbf{M}_0^{(\alpha_i)}$ znamená $\frac{D^{\alpha_i}\mathbf{M}(0)}{dt^{\alpha_i}}$.

V_k budiž Vandermondův determinant $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Lemma 2.2. *Pro* ${}^tD_k$ *platí rozvoj*

$${}^tD_k = S_k \frac{V_k^2}{(\alpha_1 - 1)!^2 \ldots (\alpha_k - 1)!^2} t^{2\varepsilon_k} + o(t^{2\varepsilon_k})\,, \tag{2,9}$$

kde

$$\varepsilon_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k - (1 + 2 + \ldots + k)\,. \tag{2,10}$$

Důkaz stačí provést pro Fermiho souřadný systém. Důkaz v obecné souřadné soustavě plyne pak z toho, že determinant ${}^tD_k$ se při transformaci souřadnic ve V_n nemění.

Pro jednoduchost položme

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{M}_0^{(\alpha_i)}\,, \quad c^{ij} = \frac{t^{\alpha_i - j}}{(\alpha_i - j)!} + o(t^{\alpha_i - j})\,. \tag{2,11}$$

Z (2,7) dostaneme tedy rozvoje

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{M}^{\cdot}(t) &= \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} + \boldsymbol{o}(t^{\alpha_k - 1})\,, \\ \boldsymbol{M}^{\cdot\cdot}(t) &= \sum_{i=1}^{k} a_i c^{i2} + \boldsymbol{o}(t^{\alpha_k - 2})\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{M}^{(k)}(t) &= \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}^i c^{ik} + \boldsymbol{o}(t^{\alpha_k - k})\,. \end{aligned}\right\} \tag{2,12}$$

Dosazením do ${}^tD$ dostaneme

$$ {}^tD_k(t) = \left| \begin{matrix} (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} + \boldsymbol{o}(t^{\alpha_k-1}), \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} + \boldsymbol{o}(t^{\alpha_k-1})) \dots & \dots (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} + \boldsymbol{o}(t^{\alpha_k-1}), \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik} + \boldsymbol{o}(t^{\alpha_k-k})) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik} + \boldsymbol{o}(t^{\alpha_k-k}), \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} + \boldsymbol{o}(t^{\alpha_k-1})) \dots & \dots (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik} + \boldsymbol{o}(t^{\alpha_k-k}), \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik} + \boldsymbol{o}(t^{\alpha_k-k})) \end{matrix} \right| .$$

Tento determinant můžeme psát jako součet 4^k determinantů, při čemž členy nejnižšího řádu budou zřejmě v determinantu

$$A_k = \left| \begin{matrix} (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1}, \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j c^{j1}), \dots, (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1}, \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j c^{jk}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik}, \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j c^{j1}), \dots, (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik}, \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j c^{jk}) \end{matrix} \right| . \tag{2,13}$$

Platí tedy

$$ {}^tD_k = A_k + \dots \tag{2,14}$$

Spočítejme determinant A_k. Zřejmě platí

$$A_k = |(\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i\lambda}, \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j c^{j\mu})| = |\sum_{i,j=1}^{k} (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)\, c^{i\lambda} c^{j\mu}| \,.$$

Podle věty o násobení determinantů máme

$$A_k = S_k C_k^2 \,, \tag{2,15}$$

kde

$$C_k = \left| \begin{matrix} c^{11} \dots c^{k1} \\ \dots\dots\dots \\ c^{1k} \dots c^{kk} \end{matrix} \right| . \tag{2,16}$$

Spočtěme nyní ještě determinant C_k. Platí

$$C_k = \begin{vmatrix} \frac{t^{\alpha_1-1}}{(\alpha_1-1)!} + o(t^{\alpha_1-1}), \ldots, \frac{t^{\alpha_k-1}}{(\alpha_k-1)!} + o(t^{\alpha_k-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{t^{\alpha_1-k}}{(\alpha_1-k)!} + o(t^{\alpha_1-k}), \ldots, \frac{t^{\alpha_k-k}}{(\alpha_k-k)!} + o(t^{\alpha_k-k}) \end{vmatrix}.$$

Tento determinant můžeme psát jako součet 2^k determinantů. Členy nejnižšího řádu budou zřejmě v determinantu

$$B_k = \begin{vmatrix} \frac{t^{\alpha_1-1}}{(\alpha_1-1)!}, \ldots, \frac{t^{\alpha_k-1}}{(\alpha_k-1)!} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{t^{\alpha_1-k}}{(\alpha_1-k)!}, \ldots, \frac{t^{\alpha_k-k}}{(\alpha_k-k)!} \end{vmatrix}. \tag{2,17}$$

Platí tedy

$$C_k = B_k + \ldots. \tag{2,18}$$

Z každého členu determinantu

$$B_k = \sum \pm \frac{t^{\alpha_1-i_1}}{(\alpha_1-i_1)!} \cdots \frac{t^{\alpha_k-i_k}}{(\alpha_k-i_k)!}$$

můžeme vytknout t^{ε_k}, kde

$$\varepsilon_k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k - (1 + \ldots + k). \tag{2,10'}$$

Platí tedy

$$B_k = t^{\varepsilon_k} \begin{vmatrix} \frac{1}{(\alpha_1-1)!}, \ldots, \frac{1}{(\alpha_k-1)!} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{(\alpha_1-k)!}, \ldots, \frac{1}{(\alpha_k-k)!} \end{vmatrix}. \tag{2,19}$$

Vytkneme-li ještě z j-tého sloupce $\frac{1}{(\alpha_j-1)!}$, $1 \leqq j \leqq k$, dostaneme

$$B_k = \frac{t^{\varepsilon_k}}{(\alpha_1-1)! \ldots (\alpha_k-1)!} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & , \ldots, & 1 \\ (\alpha_1-1) & , \ldots, & (\alpha_k-1) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (\alpha_1-1)\ldots(\alpha_1-k+1), & \ldots, & (\alpha_k-1)\ldots(\alpha_k-k+1) \end{vmatrix}.$$

Tento výsledek je zřejmě správný, i když některý z prvků determinantu ve (2,19) je roven nule. Jednoduchou úpravou zjistíme konečně, že platí

$$B_k = \frac{t^{\varepsilon_k}}{(\alpha_1-1)! \ldots (\alpha_k-1)!} V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \tag{2,20}$$

kde $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ je Vandermondův determinant, který je, jak známo, pro vzájemně různá čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ různý od nuly.

Nyní již plyne snadno tvrzení lemmatu ze vztahů (2,14) až (2,20).

Označme nyní ještě $\mathbf{T}_k$ determinant

$$\mathbf{T}_k = \begin{vmatrix} (\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}, \mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}, \mathbf{M}_0^{(\alpha_{k-1})}), \mathbf{M}_0^{(\alpha_1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\mathbf{M}_0^{(\alpha_k)}, \mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\mathbf{M}_0^{(\alpha_k)}, \mathbf{M}_0^{(\alpha_{k-1})}), \mathbf{M}_0^{(\alpha_k)} \end{vmatrix}. \tag{2,21}$$

Lemma 2.3. *Pro* $^t\mathbf{U}_k$ *platí rozvoj*

$$^t\mathbf{U}_k = \frac{V_k V_{k-1} \mathbf{T}_k}{(\alpha_1 - 1)!^2 \ldots (\alpha_{k-1} - 1)!^2 (\alpha_k - 1)!} t^{\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}} + \mathbf{o}(t^{\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}}). \tag{2,22}$$

Důkaz zase stačí provést pro Fermiho souřadný systém. Důkaz v obecné souřadné soustavě pak plyne z transformačního vzorce pro vektory. Použije se přitom vztahu $\dfrac{\partial \bar{x}^i(x(t))}{\partial x^k} = \dfrac{\partial \bar{x}^i(x(0))}{\partial x^k} + o_k^i(1)$.

Pomocí rozvojů (2,12), které pro druhé členy skalárních součinů vezmeme pouze od 1 do $k - 1$, dostaneme

$$^t\mathbf{U}_k = \begin{vmatrix} (\mathbf{M}^{\cdot}, \mathbf{M}^{\cdot}), \ldots, (\mathbf{M}^{\cdot}, \mathbf{M}^{(k-1)}), \mathbf{M}^{\cdot} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\mathbf{M}^{(k)}, \mathbf{M}^{\cdot}), \ldots, (\mathbf{M}^{(k)}, \mathbf{M}^{(k-1)}), \mathbf{M}^{(k)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{i1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k - 1}), \sum\limits_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_{k-1} - 1})), \ldots, \quad \ldots, (\sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{i1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k - 1}), \sum\limits_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j,k-1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_{k-1} - (k-1)})), \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{i1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k - 1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{ik} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k - k}), \sum\limits_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_{k-1} - 1})), \ldots, \quad \ldots, (\sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{ik} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k - k}), \sum\limits_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j,k-1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_{k-1} - (k-1)})), \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{ik} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k - 1}) \end{vmatrix}.$$

To se rovná součtu 2^{2k-1} determinantů, z nichž členy nejnižších řádů budou v determinantu $\mathbf{P}_k$, který dostaneme z $^t\mathbf{U}_k$, když v něm zanedbáme všechny symboly $\mathbf{o}$. Platí tedy

$$^t\mathbf{U}_k = \begin{vmatrix} (\sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{i1}, \sum\limits_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j1}), \ldots, (\sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{i1}, \sum\limits_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j,k-1}), \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{i1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{ik}, \sum\limits_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j1}), \ldots, (\sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{ik}, \sum\limits_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j,k-1}), \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{ik} \end{vmatrix} + \ldots \tag{2,23}$$

Počítejme dále determinant $\boldsymbol{P}_k$. Platí

$$\boldsymbol{P}_k = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j1}) c^{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j,k-1}) c^{i1}, \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j1}) c^{ik}, \ldots, \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j,k-1}) c^{ik}, \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik} \end{vmatrix} .$$

Podle věty o násobení determinantů dostaneme („řádky krát sloupce")

$$\boldsymbol{P}_k = \begin{vmatrix} c^{11}, \ldots, c^{k1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c^{1k}, \ldots, c^{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j1}), \ldots, (\boldsymbol{a}_1, \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j\, c^{j,k-1}), \boldsymbol{a}_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{a}_k, \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j1}), \ldots, (\boldsymbol{a}_k, \sum_{j=2}^{k-1} \boldsymbol{a}_j\, c^{j,k-1}), \boldsymbol{a}_k \end{vmatrix} . \tag{2,24}$$

Vytkneme-li v druhém determinantu sumační znamení před skalární součiny, dostaneme pak opět podle věty o násobení determinantů

$$\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{k-1} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_j)\, c^{j1}, \ldots, \sum_{j=1}^{k-1} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_j)\, c^{j,k-1}, \boldsymbol{a}_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{k-1} (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_j)\, c^{j1}, \ldots, \sum_{j=1}^{k-1} (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_j)\, c^{j,k-1}, \boldsymbol{a}_k \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1), \ldots, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{k-1}), \boldsymbol{a}_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1), \ldots, (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k-1}), \boldsymbol{a}_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c^{11}, \ldots, c^{k-1,1}, & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ c^{1,k-1}, \ldots, c^{k-1,k-1}, & 0 \\ 0, \quad \ldots, 0, & 1 \end{vmatrix} . \tag{2,25}$$

(V posledním vztahu bylo provedeno násobení „po řádcích".)

Platí tedy celkem

$$^t\boldsymbol{U}_k(t) = C_k C_{k-1} \boldsymbol{T}_k + \ldots \tag{2,26}$$

Odtud plyne tvrzení lemmatu podle (2,18) a (2,20).

Pomocí lemmat 2,2 a 2,3 můžeme již odvodit hledané vzorce pro křivosti a pro normály.

Věta 2,2. *Pro křivost $\varkappa_k$, $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$, platí v okolí bodu $t = 0$ rozvoj*

$$\varkappa_k(t) = \frac{\sqrt{S_{k-1}S_{k+1}}(\alpha_1 - 1)!(\alpha_k - 1)!(\alpha_{k+1} - \alpha_1) \ldots (\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{S_k\sqrt{S_1}(\alpha_{k+1} - 1)!(\alpha_k - \alpha_1) \ldots (\alpha_k - \alpha_{k-1})} |t^\beta| + o(t^\beta) , \tag{2,27}$$

kde

$$\beta = \alpha_{k+1} - \alpha_k - \alpha_1 \tag{2,28}$$

a S_k je dáno vzorcem (2,8). Platí tedy

$$\varkappa_k(0) = \frac{\sqrt{S_{k-1}S_{k+1}}(\alpha_1 - 1)!\,(\alpha_k - 1)!(\alpha_{k+1} - \alpha_1) \ldots (\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{S_k\sqrt{S_1}(\alpha_{k+1} - 1)!(\alpha_k - \alpha_1) \ldots (\alpha_k - \alpha_{k-1})} \lim_{t \to 0+} |t^\beta| . \tag{2,29}$$

Důkaz. Ze vzorce (2,4) a z lemmatu 2,2 plyne

$$\varkappa_k(t) = \frac{\sqrt{{}^tD_{k-1}{}^tD_{k+1}}}{{}^tD_k\sqrt{{}^tD_1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{S_{k-1}S_{k+1}}\, V_{k-1}V_{k+1}(\alpha_1 - 1)!^2 \dots (\alpha_{k+1} - 1)!^2(\alpha_k - 1)!^2(\alpha_1 - 1)!}{S_k\sqrt{S_1}V_k^2V_1(\alpha_1 - 1)!^2 \dots (\alpha_{k-1} - 1)!^2(\alpha_k - 1)!(\alpha_{k+1} - 1)!} |t^\beta| + o(t^\beta)\,, \tag{2,30}$$

kde $\beta = \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k+1} - 2\varepsilon_k - \varepsilon_1$. Ze vztahu (2,10) plyne

$$\begin{aligned}\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} - (1 + \dots + (k - 1)) + \\ + \alpha_1 + \dots + \alpha_{k+1} - (1 + \dots + k + 1) - \\ - 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) + 2(1 + \dots + k) - \\ - \alpha_1 + 1 = \alpha_{k+1} - \alpha_k - \alpha_1\,, \quad \text{t. j. (2,28).}\end{aligned}$$

Uvážíme-li ještě, že platí

$$V_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = (\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2) \dots (\alpha_k - \alpha_{k-1})\, V_{k-1}\,(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})\,,$$

dostaneme z (2,30) ihned vztah (2,27). (Při výpočtu jsme použili zřejmého vztahu $V_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k) > 0$ pro $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$.)

Z věty 2,2 plyne, že *k-tá křivost je v bodě $\mathbf{M}(0)$ konečná a různá od nuly v případě, že $\beta = \alpha_{k+1} - \alpha_k - \alpha_1 = 0$. Všechny křivosti konečné dostáváme v případě*

$$\alpha_2 - \alpha_1 \geqq \alpha_1\,, \quad \alpha_3 - \alpha_2 \geqq \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_{n-1} \geqq \alpha_1\,.$$

V případě konečných a nenulových křivostí plyne odtud

$$\alpha_2 = 2\alpha_1\,, \quad \alpha_3 = 3\alpha_1, \dots, \alpha_n = n\alpha_1\,. \tag{3,21}$$

Z věty 2,2 plyne speciálně pro $\varkappa_1, \varkappa_2$:

$$\varkappa_1(0) = \frac{\sqrt{S_2}(\alpha_1 - 1)!^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{S_1^{3/2}(\alpha_2 - 1)!} \lim_{t\to 0+} |t^{\alpha_2 - 2\alpha_1}|\,, \tag{2,32}$$

$$\varkappa_2(0) = \frac{\sqrt{S_3}(\alpha_1 - 1)!(\alpha_2 - 1)!(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)}{S_2(\alpha_3 - 1)!(\alpha_2 - \alpha_1)} \lim_{t\to 0+} |t^{\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1}|\,. \tag{2,33}$$

V případě euklidovského prostoru E_3 dostaneme snadno

$$\varkappa_1(0) = \frac{|\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)} \times \mathbf{M}_0^{(\alpha_2)}|(\alpha_1 - 1)!^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{|\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}|^3(\alpha_2 - 1)!} \lim_{t\to 0+} |t^{\alpha_2 - 2\alpha_1}|\,, \tag{2,32'}$$

$$\varkappa_2(0) = \frac{[\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}, \mathbf{M}_0^{(\alpha_2)}, \mathbf{M}_0^{(\alpha_3)}](\alpha_1 - 1)!(\alpha_2 - 1)!(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)}{|\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)} \times \mathbf{M}_0^{(\alpha_2)}|^2(\alpha_3 - 1)!(\alpha_2 - \alpha_1)} \lim_{t\to 0+} |t^{\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1}|\,. \tag{2,33'}$$

To jsou známé výsledky; viz na př. R. LILIENTHAL [4].

Věta 2,3. *Pro normály $\mathbf{e}_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$, platí v okolí bodu $\mathbf{M}(0)$ rozvoje*

$$\mathbf{e}_{k-1}(t) = \varepsilon^{\alpha_k - k} \frac{\mathbf{T}_k}{\sqrt{S_{k-1}S_k}} + \mathbf{o}(1)\,, \tag{2,34}$$

kde $\mathbf{T}_k$ *je dáno vzorcem* (2,21), S_k *vzorcem* (2,8) *a* $\varepsilon = \left\langle \begin{array}{rl} 1 & \textit{pro} \quad t \geqq 0, \\ -1 & \textit{pro} \quad t < 0. \end{array} \right.$

Odtud plyne, že v bodě $\mathbf{M}(0)$ *existují všechny normály, při čemž platí*

$$\mathbf{e}_{k-1}(0) = \frac{\mathbf{T}_k}{\sqrt{S_{k-1}S_k}}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2,35}$$

Důkaz. Ze vzorce (2,3) a lemmatu 2,2 a 2,3 plyne

$$\mathbf{e}_{k-1} = \frac{{}^t\mathbf{U}_k}{\sqrt{{}^tD_{k-1}{}^tD_k}} =$$

$$= \frac{\dfrac{V_kV_{k-1}\mathbf{T}_k}{(\alpha_1 - 1)!^2 \ldots (\alpha_{k-1} - 1)!^2(\alpha_k - 1)!}\, t^{\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}} + \mathbf{o}(t^{\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}})}{\sqrt{\dfrac{S_{k-1}S_kV_{k-1}^2V_k^2t^{2(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1})}}{(\alpha_1 - 1)!^4 \ldots (\alpha_{k-1} - 1)!^4(\alpha_k - 1)!^2} + o(t^{2(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1})})}}.$$

Odtud plyne ihned dokazované tvrzení, uvědomíme-li si ještě, že platí

$$\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) - (1 + \ldots + k) + (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}) -$$
$$- (1 + \ldots + (k - 1)) = 2((\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}) - (1 + \ldots + (k - 1))) +$$
$$+ \alpha_k - k.$$

Ze vzorce (2,35) plyne, že podobně jako byly v obecném bodě definovány normály ortogonalisačním procesem E. Schmidta z vektorů $\mathbf{M}', \mathbf{M}'', \ldots, \mathbf{M}^{(n)}$ lze definovat normály v bodě vyjímečném obdobným procesem z vektorů $\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}, \mathbf{M}_0^{(\alpha_2)}, \ldots, \mathbf{M}_0^{(\alpha_n)}$. (Explicitní vzorce pro ortogonalisační proces viz G. Kowalewski [2].)

Z věty 2,3 plynou zajímavé důsledky pro orientaci normál a průvodních n-hranů. Zaveďme nejdříve následující definici:

Definice 2.2. *Jestliže normála* $\mathbf{e}_k$ *je v bodě* $t = 0$ *spojitá, říkáme, že nemění v tomto bodě orientaci. Jestliže platí* $\lim\limits_{t\to 0+} \mathbf{e}_k(t) = - \lim\limits_{t\to 0-} \mathbf{e}_k(t)$, *říkáme, že v tomto bodě mění orientaci. Jestliže mění orientaci lichý počet normál, říkáme, že průvodní n-hran mění orientaci. Jestliže mění orientaci sudý počet normál, říkáme, že průvodní n-hran orientaci nemění.*

Nyní platí

Věta 2,4. *K-tá normála* $\mathbf{e}_k$ *mění anebo nemění v bodě* $t = 0$ *orientaci podle toho, je-li číslo* $\alpha_k - k$ *liché anebo sudé. Průvodní n-hran mění anebo nemění v bodě orientaci podle toho, je-li číslo* $\varepsilon_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n - (1 + \ldots + n)$ *liché anebo sudé.*

Důkaz plyne okamžitě z definice 2,2 a z vzorce (2,34) ve větě 2,3.

Důsledek věty 2.4. *Podívejme se ještě na případ, kdy všechny křivosti jsou konečné a nenulové. Protože platí $\alpha_k = k\alpha_1$, platí také*

$$\alpha_k - k = k(\alpha_1 - 1)\,, \quad \varepsilon_n = \binom{n+1}{2}(\alpha_1 - 1)\,. \tag{2,36}$$

Odtud potom plyne: *Jestliže je α_1 liché, nemění žádná z normál orientaci a tedy ani průvodní n-hran. V případě, že α_1 je sudá, mění anebo nemění k-tá normála orientaci podle toho, zda k je liché anebo sudé. Průvodní n-hran pak mění orientaci nebo nemění, podle toho, zda $\binom{n+1}{2}$ je liché anebo sudé, tj. zda n je tvaru $n = 4k + 1$, $4k + 2$ anebo $n = 4k$, $4k + 3$.*

Všimněme si nyní, co se děje s křivostmi a s normálami při změně orientace na křivce dané vztahem $^*t = -t$. Pro nový parametr $^*t$ máme ve Fermiho souřadném systému rozvoj

$$^*\mathbf{M}(^*t) = \frac{^*\mathbf{M}_0^{(\beta_1)}}{\beta_1!}\,^*t^{\beta_1} + \ldots + \frac{^*\mathbf{M}_0^{(\beta_2)}}{\beta_2!}\,^*t^{\beta_2} + \ldots + \frac{^*\mathbf{M}_0^{(\beta_k)}}{\beta_k!}\,^*t^{\beta_k} + \ldots,$$

který dostaneme, dosadíme-li do rozvoje pro $\mathbf{M}(t)$ $t = -\,^*t$, tj.

$$(-1)^{\alpha_1}\frac{\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}}{\alpha_1!}\,^*t^{\alpha_1} + \ldots + (-1)^{\alpha_2}\frac{\mathbf{M}_0^{(\alpha_2)}}{\alpha_2!}\,^*t^{\alpha_2} + \ldots + (-1)^{\alpha_k}\frac{\mathbf{M}_0^{(\alpha_k)}}{\alpha_k!}\,^*t^{\alpha_k} \ldots.$$

Snadno se nahlédne, že čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se při změně parametrů $^*t = -t$ nemění. Pro výpočet křivostí a normál můžeme tedy použít vektorů $^*\mathbf{M}^{(\alpha_1)}, \ldots,$ $^*\mathbf{M}^{(\alpha_n)}$. Z hořejšího však plyne

$$^*\mathbf{M}_0^{(\alpha_k)} = (-1)^{\alpha_k}\mathbf{M}_0^{(\alpha_k)}\,. \tag{2,39}$$

Ze vzorců (2,8) a (2,21) plyne snadno

$$^*S_k = S_k \quad \text{a} \quad ^*\mathbf{T}_k = (-1)^{\alpha_k}\mathbf{T}_k\,. \tag{2,40}$$

Platí tedy

$$^*\varkappa_k(0) = \varkappa_k(0)\,, \quad ^*\mathbf{e}_k(0) = (-1)^{\alpha_k+1}\mathbf{e}_k(0)\,. \tag{2,41}$$

Dosažené výsledky můžeme shrnout ve větu:

Věta 2.5. *Při změně orientace na křivce se křivost v bodě $\mathbf{M}(0)$ nemění. Orientovaná k-normála $\mathbf{e}_k$ změní nebo nezmění orientaci podle toho, zda α_{k+1} je liché anebo sudé. Průvodní n-hran mění nebo nemění orientaci podle toho, zda $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ je liché anebo sudé.*

V případě konečných, nenulových křivostí platí, jak víme, $\alpha_{k+1} = (k + 1)\,\alpha_1$, $\alpha = \alpha_1\binom{n+1}{2}$. Vidíme, že v *případě sudého α_1 nemění ani normály ani průvodní n-hran orientaci. V případě lichého α_1 mění v případě sudého k normály $\mathbf{e}_k$ orientaci, v případě k lichého nikoliv. Průvodní n-hran pak v případě lichého α_1 mění nebo nemění orientaci podle toho, zda $\binom{n+1}{2}$ je liché anebo sudé, tj. v případě čísel n tvaru $n = 4k$, $4k + 3$ nemění, v případě $n = 4k + 1$, $4k + 2$ mění orientaci.*

3. Frenetovy vzorce. Parametrisace pomocí oblouku

Pomocí vět 2,2 a 2,3 jsme ukázali, že i ve výjimečných bodech existují normály a $n - 1$ nezáporných křivostí, z nichž některé mohou být nulové, případně nekonečné. Normály $\mathbf{e}_k$ jsou přitom v bodě $t = 0$ zprava spojité. Křivosti $\varkappa_k$, pokud jsou konečné, jsou dokonce oboustranně spojité. Je zřejmě jedno, máme-li na mysli parametrisaci pomocí obecného parametru anebo pomocí oblouku. Ukážeme nyní, jak lze na výjimečné body rozšířit Frenetovy vzorce.

Věta 3,1. *Ve výjimečném bodě křivky, ve kterém jsou všechny křivosti konečné, platí Frenetovy vzorce*

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{e}'_{0\pm}(0) &= \varkappa_1(0)\,\mathbf{e}_1(0)(\pm 1)^{\alpha_1-2}\,,\\
\mathbf{e}'_{1\pm}(0) &= -\varkappa_1(0)\,\mathbf{e}_0(0)(\pm 1)^{\alpha_1-1} + \varkappa_2(0)(\pm 1)^{\alpha_2-3}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathbf{e}'_{(k-1)\pm}(0) &= -\varkappa_{k-1}(0)\,\mathbf{e}_{k-2}(0)(\pm 1)^{\alpha_{k-1}-k+1} + \varkappa_k(0)\,\mathbf{e}_k(0)(\pm 1)^{\alpha_{k+1}-k-1}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathbf{e}'_{(n-1)\pm}(0) &= -\varkappa_{n-1}(0)\,\mathbf{e}_{n-2}(0)(\pm 1)^{\alpha_{n-1}-n+1}\,.
\end{aligned}\right\}\quad (3,1)$$

Přitom $\mathbf{e}'_{(k-1)+}(0)$ *znamenají absolutní derivace podle oblouku v bodě* $s = 0$ *zprava,* $\mathbf{e}'_{(k-1)-}(0)$ *znamenají limity absolutních derivací v bodě* $s = 0$ *zleva.*

Důkaz provedeme ve Fermiho souřadném systému, kdy absolutní derivace přejdou v obyčejné. Vzorce (3,1) pak plynou limitním přechodem z oboustranné spojitosti křivostí, pravostranné spojitosti normál, ze vzorců (1,16) a ze vztahů

$$\lim_{t\to 0-} \mathbf{e}_{k-1} = (-1)^{\alpha_k-k} \lim_{t\to 0+} \mathbf{e}_{k-1} = (-1)^{\alpha_k-k}\,\mathbf{e}_{k-1}(0)\,,$$

které jsou důsledkem vzorce (2,34).

Důsledek věty 3,1. *V případě, že všechny křivosti jsou konečné, od nuly různé a* α_1 *je liché, existují oboustranné derivace normál a platí obvyklé Frenetovy vzorce.*

Důkaz tohoto tvrzení plyne okamžitě z věty 3,1, uvážíme-li, že v tomto případě jsou všechna čísla $\alpha_k - k = (\alpha_1 - 1)\,k$ sudá.

Uveďme nyní jednu zajímavou geometrickou interpretaci křivostí:

Věta 3,2. *Nechť všechny křivosti jsou konečné. Potom platí*

$$\varkappa_k = \lim_{s\to s_0} \frac{\omega_k}{s - s_0}\,, \qquad (3,2)$$

kde ω_k *je ostrý úhel, který svírá k-tý oskulační prostor* $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}\}$ *v bodě* s_0 *s* $(k-1)$*-tou normálou* $\mathbf{e}_{k-1}$ *v bodě s. (Za* s_0 *připouštíme i výjimečný bod.)*

Důkaz. Úhel ω_k zmíněný ve znění věty je patrně úhel, který svírá k-tý oskulační prostor v bodě s_0 s vektorem $\mathbf{e}^*_{k-1}(s_0)$ v témže bodě, který vznikne paralelním posunutím vektoru $\mathbf{e}_{k-1}(s)$ do bodu s_0. Úhel ω_k je zřejmě doplňkovým úhlem k úhlu vektoru $\mathbf{e}^*_{k-1}(s)$ s k-tou normálou v bodě s_0. Platí tedy $\sin \omega_k = (\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}^*_{k-1}(s_0))$. Místo podílu $\dfrac{\omega_k}{s - s_0}$ můžeme zřejmě vyšetřovat podíl $\dfrac{\sin \omega_k}{s - s_0}$. Zvolme v prostoru V_n Fermiho souřadný systém. V něm platí $\mathbf{e}^*_{k-1}(s_0) = \mathbf{e}_{k-1}(s)$, neboť paralelně posunovaný vektor nemění v použitém systému souřadném souřadnice. Máme tedy $\sin \omega_k = (\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}_{k-1}(s))$. Podle věty o střední hodnotě platí

$$\mathbf{e}_{k-1}(s) = \mathbf{e}_{k-1}(s_0) + (s - s_0)\, \mathbf{e}'_{k-1}(\sigma)\,, \quad s_0 < \sigma < s\,.$$

(Předpoklady věty o střední hodnotě jsou zřejmě i v případě výjimečného bodu splněny. Spojitost $\mathbf{e}_{k-1}$ zprava v bodě s_0 je zaručena, jak již bylo výše podotknuto. Existenci $\mathbf{e}_{k-1}$ v bodě s_0 věta o střední hodnotě, jak známo, nepředpokladá.)

Platí tedy

$$\sin \omega_k = (\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}'_{k-1}(\sigma))(s - s_0)\,.$$

Z Frenetových vzorců (1,16) plyne

$$\mathbf{e}'_{k-1}(\sigma) = -\varkappa_{k-1}(\sigma)\, \mathbf{e}_{k-2}(\sigma) + \varkappa_k(\sigma)\, \mathbf{e}_k(\sigma)\,.$$

(V případě $k = 1$ je nutno položit $\varkappa_0 = 0$.) Odtud

$$\frac{\sin \omega_k}{s - s_0} = -(\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}_{k-2}(\sigma))\, \varkappa_{k-1}(\sigma) + (\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}_k(\sigma))\, \varkappa_k(\sigma)\,.$$

Odtud plyne limitním přechodem $s \to s_0 +$ vzhledem k spojitosti všech funkcí zprava v bodě s_0 a vztahům $(\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}_{k-2}(s_0)) = 0$, $(\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}_k(s_0)) = 1$ dokazované tvrzení.

Obraťme se nyní ještě k parametrisaci křivky pomocí oblouku s. Zabývejme se přitom pouze Fermiho souřadnými systémy ve V_n. Platí

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}t\sqrt{(\mathbf{M}^\cdot, \mathbf{M}^\cdot)} = \mathrm{d}t\varepsilon^{\alpha_1 - 1} t^{\alpha_1 - 1} \sqrt{\frac{(\mathbf{M}^{(\alpha_1)}(0), \mathbf{M}^{(\alpha_1)}(0)}{(\alpha_1 - 1)!^2} + \ldots}\,,$$

kde $\varepsilon = \operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geqq 0, \\ -1 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$ Odtud plyne rozvedením odmocniny v mocninnou řadu a integrací rozvoj pro oblouk

$$s = \varepsilon^{\alpha_1 - 1} t^{\alpha_1} \frac{|\mathbf{M}^{(\alpha_1)}(0)|}{\alpha_1!} (1 + \ldots)\,. \tag{3,3}$$

Označíme-li

$$s_1 = \varepsilon^{\alpha_1 - 1} s \quad \text{a} \quad s_1^{\frac{1}{\alpha_1}} = \varepsilon^{\alpha_1 - 1} \sqrt[\alpha_1]{s_1} \tag{3,4}$$

(sudou odmocninu bereme vždy kladně; platí tedy $\operatorname{sgn} s = \operatorname{sgn} t = \operatorname{sgn} s_1^{\frac{1}{\alpha_1}}$), dostaneme

$$s_1 = \frac{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}{\alpha_1!} t^{\alpha_1}(1 + \dots) . \tag{3,5}$$

Odtud dostaneme

$$s_1^{\frac{1}{\alpha_1}} = \sqrt[\alpha_1]{\frac{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}{\alpha_1!}}\, t \sqrt[\alpha_1]{1 + \dots} = \sqrt[\alpha_1]{\frac{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}{\alpha_1!}}\, t(1 + \dots) .$$

Přechodem k inversní funkci dostaneme, jak známo, rozvoj podle lomených mocnin $s_1^{\frac{1}{\alpha_1}}$

$$t = \sqrt[\alpha_1]{\frac{\alpha_1!}{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}}\, s_1^{\frac{1}{\alpha_1}} + \dots . \tag{3,6}$$

Dosazením tohoto rozvoje do rozvoje

$$\boldsymbol{M}(t) = \boldsymbol{M}(0) + \frac{\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)}{\alpha_1!} t^{\alpha_1} + \dots$$

dostaneme rozvoj

$$\boldsymbol{M}(s) = \boldsymbol{M}(0) + \frac{\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)}{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|} s_1 + \boldsymbol{N}_1 s_1^{\frac{\alpha_1+1}{\alpha_1}} + \dots . \tag{3,7}$$

Najděme ještě první další nenulový člen v tomto rozvoji, který následuje po $\frac{\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)}{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|} s_1$. Nechť je to člen $\boldsymbol{N} s_1^{\frac{\delta}{\alpha_1}}$. Máme tedy

$$\boldsymbol{M}(s) = \boldsymbol{M}(0) + \frac{\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)}{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|} s_1 + \boldsymbol{N} s_1^{\frac{\delta}{\alpha_1}} + \dots , \tag{3,8}$$

kde $\boldsymbol{N} \neq \mathbf{o}$. Derivujeme-li rozvoj (3,8) dvakrát podle oblouku, dostaneme

$$\boldsymbol{M}''(s) = \frac{\delta(\delta - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_1} \boldsymbol{N} s_1^{\frac{\delta - 2\alpha_1}{\alpha_1}} + \dots . \tag{3,9}$$

Dosazením do tohoto rozvoje za s_1 z (3,5) dostaneme

$$\boldsymbol{M}''(s) = \frac{\delta(\delta - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_1} \boldsymbol{N} \left[\frac{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}{\alpha_1!}\right]^{\frac{\delta - 2\alpha_1}{\alpha_1}} t^{\delta - 2\alpha_1} + \dots . \tag{3,10}$$

Abychom našli $\boldsymbol{N}$ a δ, najděme rozvoj pro $\boldsymbol{M}''(s)$ podle mocnin t jiným způsobem: Z prvního Frenetova vzorce (1,16) a ze vzorců (2,32) a (2,34) plyne

$$\boldsymbol{M}''(s) = \mathbf{e}_0' = \varkappa_1 \mathbf{e}_1 = \frac{\sqrt{S_2}(\alpha_1 - 1)!^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{S_1^{3/2}(\alpha_2 - 1)!} \varepsilon^{\alpha_2 - 2\alpha_1} \varepsilon^{\alpha_2 - 2} \frac{\boldsymbol{T}_2 t^{\alpha_2 - 2\alpha_1}}{\sqrt{S_1 S_2}} + \dots , \text{ tj.}$$

$$\boldsymbol{M}''(s) = \frac{\boldsymbol{T}_2(\alpha_1 - 1)!^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{s_1^2(\alpha_1 - 1)!} t^{\alpha_2 - 2\alpha_1} + \dots . \tag{3,11}$$