Zusammenfassung

ZUSAMMENGESETZTE POISSONSCHE VERTEILUNGEN

JOSEF BÍLÝ, Praha

(Eingelangt am 13. September 1958)

Es wird die Anzahl von Elementen desselben Typus im Verlaufe von Generationen (eine verzweigende stochastische Folge) unter der Annahme studiert, dass aus jedem Element der r-ten Generation unabhängig von den übrigen Elementen mit der Wahrscheinlichkeit $p_k(\alpha_{r+1})$, $k = 0, 1, \ldots, k$ Elemente der $(r + 1)$-sten Generation entstehen und dass die nullte Generation aus einem einzigen Element besteht. Es wird die Wahrscheinlichkeit $P_k^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ gesucht, dass die r-te Generation aus k Elementen besteht. Es handelt sich hier um eine nicht homogene Markoffsche Kette, der Parameter (Schritt) bedeutet die Ordnungszahl der Generation, der Zustand des Systems ist die Anzahl der Elemente der betreffenden Generation. Für die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,j}^{(r,r+1)}$, dass das System im $(r + 1)$-sten Schritt aus dem Zustand i in den Zustand j übergeht, gilt (1). Es soll $P_k^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ unter der Voraussetzung ermittelt werden, dass $p_k(\alpha_r)$ eine Poissonsche Verteilung (2) ist. Zu den Wahrscheinlichkeitsverteilungen $p_k(\alpha_r)$ und $P_k^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ werden durch (3) und (4) erzeugende Funktionen definiert, für (4) werden in (5) und (6) rekurrente Beziehungen abgeleitet. Falls $p_k(\alpha_r)$ eine Poissonsche Verteilung (2) ist, nimmt (5) die Form von (9) an. Aus (9) wird in (10) eine rekurrente Beziehung für $P_k^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ abgeleitet, wobei für den Wert dieser Wahrscheinlichkeit für $k = 0$ die Bezeichnung (11) eingeführt wird.

Für $r = 2$ können $P_n^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2)$ mit Hilfe von Polynomen $S_n(\beta_2)$, $\beta_2 = \alpha_1 e^{-\alpha_2}$ berechnet werden. Diese Polynome stellen einen speziellen Fall der Polynome dar, die von J. F. Steffensen eingeführt wurden. Der unter [6] zitierten Arbeit werden die erzeugende Funktion (13), (13a) dieser Polynome und für sie geltende Beziehungen (14) bis (18) entnommen. Der Zusammenhang zwischen den Polynomen $S_n(\beta_2)$ und den allgemeinen Steffensenschen Polynomen wird durch (19) hergestellt; für die letzteren wird in (22) eine neue Beziehung abgeleitet, die für $S_n(\beta_2)$ die Form von (24) annimmt. Die ersten zwei Momente der Verteilung $P_n^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2)$ werden in (27) und (28) angegeben. Für $P_n^{(3)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ wird in (30) bis (32) die Möglichkeit der Berechnung mit Hilfe von Steffenschen Polynomen zweier Veränderlichen erwähnt.

Im Artikel werden einige Resultate von B. A. Sevastjanov, T. E. Harris für die verzweigenden stochastischen Folgen und die in der zitierten Literatur angeführten demographischen Anwendungen erwähnt.