Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

SLOŽENÁ POISSONOVA ROZLOŽENÍ

JOSEF BÍLÝ, Praha

DT: 519.214.3

(Došlo dne 13. září 1958)

Je odvozeno explicitní vyjádření pro rozložení součtu náhodných veličin majících Poissonovo rozložení, jestliže počet sčítaných náhodných veličin je náhodná veličina mající Poissonovo rozložení, jakožto zvláštní případ větvící se náhodové posloupnosti, v níž počet prvků vznikajících z jednoho prvku určité generace v následující generaci je náhodná veličina mající Poissonovo rozložení. Pro tento případ jsou odvozeny rekurentní vzorce umožňující výpočet rozložení pravděpodobností počtu prvků jednotlivých generací. K vyjádření uvedených pravděpodobností se užívá Steffensenových polynomů a jejich zobecnění pro více proměnných.

Předmětem tohoto článku je níže uvedený zvláštní případ větvících se stochastických posloupností s jedním typem částic. Nechť v počátku sledování větvící se stochastické posloupnosti je jediný prvek, který nazveme prvkem nulté generace a jenž s pravděpodobností $p_k(\alpha_1)$ dává vznik k prvkům, jež označíme jako prvky první generace; α_1 je vektor parametrů, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(\alpha_1) = 1$. Každý prvek první generace dává nezávisle na ostatních prvcích téže generace s pravděpodobností $p_k(\alpha_2)$ vznik k prvkům druhé generace, při čemž rozložení $p_k(\alpha_2)$ je téhož funkcionálního tvaru jako $p_k(\alpha_1)$, avšak s obecně různým parametrem, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Právě popsanou větvící se posloupnost budeme dále značit $VP1$. Tážeme se, jaké je rozložení pravděpodobností $P_k^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r = 1, 2, \ldots$, že v r-té generaci bude celkem k prvků vzešlých z jediného prvku nulté generace, jestliže $p_k(\alpha_i)$ jsou rozložení Poissonova, $i = 1, 2, \ldots, r$. Úlohu lze formulovat jako úlohu najít rozložení absolutních pravděpodobností v nehomogenním Markovově řetězci, který konstruujeme takto:

Časem r, jenž nabývá hodnot $0, 1, 2, \ldots$, rozumíme pořadové číslo generace prvků, systémem rozumíme prvky určité generace, stavem systému v čase r rozumíme počet všech prvků r-té generace, které vzešly z jediného prvku nulté generace; systém může být ve stavu 0, 1, 2, .. Pravděpodobnost přechodu systému ze stavu i v čase r do stavu j v čase $r + 1$ je

$$p_{i,j}^{(r,r+1)} = \sum p_{k_1}(\alpha_{r+1})\, p_{k_2}(\alpha_{r+1}) \ldots p_{k_i}(\alpha_{r+1})\,, \quad 0 \leqq k_l \leqq j\,, \quad \sum_{l=1}^{i} k_l = j\,. \tag{1}$$

Úlohou je určit $P_k^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, tj. pravděpodobnost, že systém je v čase r ve stavu k, jestliže $P_1^{(0)} = 1$ a jestliže

$$p_k(\alpha_r) = \frac{e^{-\alpha_r}\alpha_r^k}{k!}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, r = 1, 2, \ldots\,, \quad \alpha_r > 0\,. \tag{2}$$

Větvící se posloupnosti lze studovat nejlépe pomocí vytvořujících funkcí

$$G^{(r)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\alpha_r)\, s^k\,, \tag{3}$$

$$\Pi^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\, s^k\,, \tag{4}$$

při čemž s je reálná proměnná taková, aby řady v (3) a (4) konvergovaly; to je zaručeno, když $0 < s < 1$. Podrobnosti viz v literatuře, z níž uvádím jen B. A. Sevastjanova [1], M. S. Bartletta [2] a L. Truksu [3], obsahující přehled teorie větvících se procesů. I za předpokladu, že rozložení $p_k(\alpha_i)$ jsou stejná ve všech generacích, který se činí v teorii větvících se procesů, nelze obecně obdržet explicitní vyjádření pro $P_k^{(r)}$. Studují se případy se speciálním tvarem vytvořující funkce $G(s)$, kdy $G(s)$ je kvadratický trojčlen, lineární lomená funkce, hledá se $P_0^{(r)}$, momenty rozložení $P_k^{(r)}$, asymptotické rozložení $P_k^{(r)}$. Viz o tom T. E. Harris [4] a M. S. Bartlett [2], str. 41 a 43.

Z vyjádření pro $p_{i,j}^{(r,r+1)}$ je zřejmé, že podstatně víc lze obdržet pro $P_k^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, jestliže $p_k(\alpha_r)$, $r = 1, 2, \ldots$, jsou rozložení, která se konvolucí reprodukují; t. j. součet náhodných veličin, z nichž každá má totéž rozložení, má rozložení téhož funkcionálního tvaru, ale s jinými parametry. Poissonovo rozložení je rozložení toho druhu. Pro ně obdrželi výsledky R. A. Fisher, J. B. S. Haldane (o nich viz [2], str. 42 a 43).

Cílem této práce je za předpokladu, že $p_k(\alpha_i)$ jsou rozložení Poissonova, odvodit metody výpočtu pro $P_k^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$. Studium uvedeného rozložení má význam nejen z hlediska aplikací v biologii a demografii, jež byly převážně studovány, nýbrž i z hlediska aplikací fysikálních, kdykoli jde o řetěz jevů, z nichž každý vyvolává nahodilý počet dalších jevů, lze-li předpokládat Poissonovo rozložení pro počet dalších jevů vzcházejících z jevu předchozí řady.

K řešení úlohy odvodíme tyto věty.

Věta 1. *Pro vytvořující funkce absolutních pravděpodobností VP 1 platí*

$$\Pi^{(r+1)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}; s) = \Pi^{(r)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; G^{(r+1)}(s)]\,, \tag{5}$$

$$\Pi^{(r+1)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}; s) = G^{(1)}[\Pi^{(r)}(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{r+1}; s)]\,. \tag{6}$$

Důkaz. Ze základního transitního vztahu pro absolutní pravděpodobnosti

$$P_k^{(r+1)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\, p_{i,k}^{(r,r+1)} \tag{7}$$

plyne po dosazení z (1), vynásobení s^k a sečtení podle k

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(r+1)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+s})\, s^k = P_0^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)(G_{(s)}^{(r+1)})^i ,$$

což je (5). Abychom obdrželi (6), vyjdeme ze základního transitního vztahu pro absolutní pravděpodobnosti ve tvaru

$$P_k^{(r+1)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i^{(1)}(\alpha_1)\, p_{i,k}^{(1,r+1)} \tag{7'}$$

a uvážíme, že $P_i^{(1)}(\alpha_1) = p_i(\alpha_1)$ a dále, že

$$p_{i,k}^{(1,r+1)} = \sum \frac{i!}{i_0!\, i_1! \ldots i_\nu!} (P_0^{(r)}(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{r+1}))^{i_0} (P_1^{(r)}(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{r+1}))^{i_1} \ldots$$
$$\ldots (P_\nu^{(r)}(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{r+1}))^{i_\nu} ,$$

při čemž se sečítá přes $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ tak, aby bylo

$$i_0 + i_1 + \ldots i_\nu = i , \quad i_1 + 2i_2 + \ldots + \nu i_\nu = k .$$

Vynásobíme-li (7′) po dosazení členem s^k a sečteme-li podle k, obdržíme

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(r+1)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1})\, s^k = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\alpha_1)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(r)}(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{r+1})\, s^k\Big)^i ,$$

což je již (6).

Důsledek 1. Je-li $\alpha_i = \alpha$, $i = 1, 2, \ldots, r$ (což je případ zpravidla studovaný), je pro $\Pi^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; s) = \Pi^{(r)}(s)$

$$\Pi^{(r+1)}(s) = \Pi^{(r)}(G(s)) = G(\Pi_r(s)) . \tag{8}$$

Důsledek 2. Jestliže $p_k(\alpha_r)$ má tvar (2), je

$$\Pi^{(r+1)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}; s) = e^{\alpha_1 [\Pi^{(r)}(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{s+1}; s) - 1]} \tag{9}$$

K důkazu důsledku 2 stačí si všimnout, že pro Poissonovo rozložení o parametru α je $G(s) = e^{\alpha(s-1)}$.

Pro rekurentní výpočet hodnot $P_n^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ může sloužit

Věta 2. *Jestliže $p_k(\alpha_r)$ má tvar (2), platí pro absolutní pravděpodobnosti VP 1 rekurentní vztah*

$$P_n^{(r+1)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}) =$$
$$= \exp\,[- \alpha_1(1 - P_0^{(r)}(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{r+1}))] \sum_{p=1}^{n} \sum_{\nu} \frac{\alpha_1^p}{\nu_1!\, \nu_2! \ldots, \nu_k!} \, .$$
$$. \, (P_1^{(r)}(\alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}))^{\nu_1} (P_2^{(r)}(\alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}))^{\nu_2} \ldots (P_k^{(r)}(\alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}))^{\nu_k} , \quad r = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

při čemž se sečítá přes $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ tak, aby $\sum_{i=1}^{k} \nu_i = p$, $\sum_{i=1}^{k} i\nu_i = n$.

Důkaz. Hledanou pravděpodobnost obdržíme, jestliže derivujeme (9) n-krát, dělíme $n!$ a položíme $s = 0$. Jde o n-tou derivaci složené funkce. Užijeme-li vzorce Faa de Brunova (viz E. GOURSAT, [5], str. 80), obdržíme ihned (10).

Důsledek 3. Platí

$$P_0^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = E(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\,, \tag{11}$$

při čemž $E(\alpha_r) = e^{-\alpha_r}$, $E(\alpha_k, \ldots, \alpha_r) = e^{-\alpha_k[1 - E(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_r)]}$

Příklad. Vzorce (10) použijeme k výpočtu $P_n^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2)$. Zavedeme-li $\beta_2 = \alpha_1 e^{-\alpha_2}$, obdržíme

$$P_n^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2) = E(\alpha_1, \alpha_2)\,\frac{\alpha_2^n}{n!} \sum_{p=1}^{n} \sum_{\nu} \frac{\beta_2^p}{\nu_1!\,\nu_2! \ldots, \nu_k!}\,\frac{n!}{(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2} \ldots (k!)^{\nu_k}}\,,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_i = p\,, \quad \sum_{i=1}^{k} i\nu_i = n\,,$$

čili

$$P_n^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2) = E(\alpha_1, \alpha_2)\,\frac{\alpha_2^n}{n!}\,S_n(\beta_2)\,, \tag{12}$$

při čemž dosazením obdržíme

$$S_0(\beta_2) = 1\,, \quad S_1(\beta_2) = \beta_2\,, \quad S_2(\beta_2) = \beta_2 + \beta_2^2\,,$$

$$S_3(\beta_2) = \beta_2 + 3\beta_2^2 + \beta_2^3\,, \quad S_4(\beta_2) = \beta_2 + 7\beta_2^2 + 6\beta_2^3 + \beta_2^4\,.$$

Výhodnější metodu výpočtu $S_k(\beta_2)$ dostaneme, všimneme-li si, že $S_k(\beta_2)$ jsou polynomy Steffensenovy $G_k(\zeta, \Theta)$ pro $\zeta = -\beta_2$, $\Theta = 0$. Steffensen v [6] zavedl polynomy $G_n(\zeta, \Theta)$, n-tého stupně v $\zeta = e^z$ a s parametrem Θ tímto vztahem:

$$\Phi^{(n)}(z) = G_n(e^z, \Theta)\,\Phi(z)\,, \tag{13}$$

při čemž

$$\Phi(z) = e^{\Theta z - e^z} \tag{13a}$$

a $\Phi^{(n)}(z)$ je n-tá derivace funkce Φ podle z. V citovaném díle uvedl tyto vlastnosti polynomů $G_n(\zeta, \Theta)$:

$$G_{n+1}(\zeta, \Theta) = \zeta D_\zeta G_n(\zeta, \Theta) + (\Theta - \zeta)\,G_n(\zeta, \Theta)\,, \tag{14}$$

$$G_n(\zeta, \Theta) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \frac{\zeta^s}{s!}\,\Delta^s \Theta^n\,, \tag{15}$$

$$D_\zeta G_n(\zeta, \Theta) = G_n(\zeta, \Theta) - G_n(\zeta, \Theta + 1)\,, \tag{16}$$

$$G_{n+1}(\zeta, \Theta) = \Theta G_n(\zeta, \Theta) - \zeta G_n(\zeta, \Theta + 1)\,, \tag{17}$$

$$|G_n(\zeta, \Theta)| \leqq \left(|\zeta| + |\Theta| + \frac{n-1}{2}\right)^n\,. \tag{18}$$

V uvedených vzorcích, jež se snadno odvodí přímo z definice, značí D_ζ derivaci podle ζ. Zavedeme

$$S_n(\beta_2) = G_n(-\beta_2, 0)\,. \tag{19}$$

Z (15) plyne

$$S_n(\beta_2) = \sum_{s=0}^{n} \frac{\beta_2^s}{s!}\,\Delta^s 0^n\,, \tag{20}$$

při čemž $\Delta^s 0^n$, tzv. „diference mocnin nuly“, jsou obsáhle tabelovány; viz např. Š. Mikeladze [7], J. F. Steffensen [8] aj.

Z (14) plyne užitečný vzorec

$$S_{n+1}(\beta_2) = \beta_2(S_n(\beta_2) + S_n'(\beta_2)) \tag{21}$$

(čárka značí derivaci podle β_2). $S_n(x)$ budeme nazývat základní Steffensenovy polynomy. Platí

Věta 3. *Steffensenův polynom parametru Θ možno vyjádřit pomocí Steffensenových polynomů parametru 0 tímto vztahem*

$$G_n(\zeta, \Theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Theta^k G_{n-k}(\zeta, 0)\,. \tag{22}$$

Důkaz. Z definice Steffensenových polynomů plyne, že

$$e^{\Theta t - \zeta(e^t - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\zeta, \Theta) \frac{t^n}{n!}\,, \tag{23}$$

čili

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Theta^k t^k}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (G_n(\zeta, 0) \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\zeta, \Theta) \frac{t^n}{n!}\,.$$

Srovnáním koeficientů u stejných mocnin t na obou stranách poslední rovnice obdržíme (22). Dosadíme-li do (17) $\Theta = 0$ a použijeme-li pak (22) pro $\Theta = 1$, obdržíme, klademe-li

$$\zeta = -\beta_2\,,$$

$$S_{n+1}(\beta_2) = \beta_2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k}(\beta_2)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, S_0(\beta_2) = 1\,. \tag{24}$$

Vzorec (24) umožňuje snadný rekurentní výpočet, činící tabelaci polynomů téměř zbytečnou.

Že polynomy $S_n(\beta_2)$, zavedené v (12), jsou totožné s polynomy zavedenými v (19) s týmž označením, dokážeme takto:

Z (9) plyne

$$\pi^{(2)}(\alpha_1 \alpha_2; s) = e^{\alpha_1(e^{\alpha_2(s-1)}-1)} = e^{-\alpha_1(1-e^{-\alpha}\ )} e^{\alpha_1(e^{-\alpha_2}s-1)} = E(\alpha_1, \alpha_2)\, e^{\beta_2(e^{\alpha_2 s}-1)}\,.$$

Odtud

$$P_n^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}^n \Pi^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2; s)}{\mathrm{d}s^n}\right)_{s=0} = E(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_2^n}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} e^{\beta_2(e^t-1)}\right)_{t=0} =$$

$$= E(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_2^n}{n!} S_n(\beta_2)\,,$$

při čemž $S_n(\beta_2)$ je $G_n(\zeta, \Theta)$ z (23) pro $\zeta = -\beta_2$, $\Theta = 0$, což je (19).

Zajímavé vyjádření obdržíme pro kumulanty rozložení $P_k^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2)$. Kumulantová vytvořující funkce tohoto rozložení je

$$K^{(2)}(\Theta) = \alpha_1 e^{\alpha_2(e^{\Theta}-1)} - \alpha_1\,, \tag{25}$$

takže

$$\varkappa_\nu^{(2)} = \alpha_1 S_\nu(\alpha_2)\,, \tag{26}$$

při čemž $S_\nu(\alpha_2)$ je ν-tý základní Steffensenův polynom argumentu α_2. Proto

$$\mu_1' = \alpha_1\alpha_2\,, \tag{27}$$

$$\mu_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^2 \quad \text{atd.} \tag{28}$$

Tyto výsledky pro první dva momenty plynou též z výrazů pro momenty součtu náhodných veličin, je-li počet sčítanců náhodná veličina; viz např. A. N. Kolmogorov-J. V. Prochorov, [9].

Pro $r > 2$ je možno k výpočtu $P_n^{(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ zavést polynomy několika proměnných — bylo by možno nazvat je Steffensenovy polynomy několika proměnných — postupem, který bude níže uveden pro $r = 3$. Z (10) plyne

$$P_n^{(3)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\sum_{p=1}^{n}\sum_{\nu}\frac{\alpha_1^p}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots,\nu_k!}\,.$$

$$.\,(P_1^{(2)}(\alpha_2, \alpha_3))^{\nu_1}(P_2^{(2)}(\alpha_2, \alpha_3))^{\nu_2}\ldots(P_k^{(2)}(\alpha_2, \alpha_3))^{\nu_k}\,, \tag{29}$$

při čemž se sečítá přes ν_i tak, aby $\sum_{i=1}^{k}\nu_i = p$, $\sum_{i=1}^{k} i\nu_i = n$. Dosadíme-li do (29) podle (12)

$$P_i^{(2)}(\alpha_2, \alpha_3) = E(\alpha_2, \alpha_3)\frac{\alpha_3^i}{i!} S_i(\beta_3)\,,$$

při čemž $\beta_3 = \alpha_2 e^{-\alpha_3}$, obdržíme

$$P_n^{(3)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\frac{\alpha_3^n}{n!}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\nu}\frac{n!}{(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2}(k!)^{\nu_k}}\gamma_3^p\,.$$

$$.\,\frac{(S_1(\beta_3))^{\nu_1}}{\nu_1!}\frac{(S_2(\beta_3))^{\nu_2}}{\nu_2!}\ldots\frac{(S_k(\beta_3))^{\nu_k}}{\nu_k!}\,, \tag{30}$$

při čemž $\gamma_3 = \alpha_1 E(\alpha_2, \alpha_3)$. Zavedeme-li $S_n(\beta_3, \gamma_3)$ pro součet členů na pravé straně za součtovým znamením, můžeme psát

$$P_n^{(3)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\frac{\alpha_3^n}{n!} S_n(\beta_3, \gamma_3)\,. \tag{31}$$