všechny elementy různé. V § 5 je popsán další výběr s nestejnými pravděpodobnostmi, nazvaný permutačním výběrem.

V části B je řešena optimální strategie pro případ, kdy na zjišťované hodnoty y_i můžeme hledět jako na realizace nezávislých náhodných veličin se známými očekávanými hodnotami μ_i a rozptyly d_{ii}. Strategie je přitom určena pravděpodobnostmi $\mathsf{P}(s)$ jednotlivých výběrových souborů a vahami $w_i(s)$ výše zmíněného lineárního odhadu, a její optimalita se rozumí vzhledem k nákladům, o kterých se předpokládá, že jsou tvaru

$$C = \sum_{i=1}^{N} c_i \pi_i \,, \tag{7.1}$$

kde π_i je pravděpodobnost vybrání výběrového souboru s, který obsahuje element i. Jsou odvozeny postačující podmínky (7.11) až (7.13). § 8 je věnován problémům aplikace výsledku.

V části C je řešena optimální strategie pro případ, kdy se o hodnotách y_i předpokládá, že jsou realisací náhodné posloupnosti, která má stacionární a konvexní korelační funkci a stacionární variační koeficienty. Je ukázáno, že těchto předpokladů je optimálním řešením systematický (mechanický) výběr s obecně nestejnými pravděpodobnostmi.

V práci jsou zobecněny výsledky obsažené v pracích [1], [3], [7], [12] a [13].

Резюме

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ И ДРУГИЕ ПРОБЛЕМЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ВЫБОРОК

ЯРОСЛАВ ГАЕК (Jaroslav Hájek), Прага

(Поступило в редакцию 4/VIII 1958 г.)

Работа разделяется на три части.

В части А, носящей вводной характер, даются прежде всего определения основных понятий: Дана совокупность S, состоящая из N элементов произвольной природы, напр. из чисел $1, 2, \ldots, N$. Из совокупности S выберем подмножество s так, что каждое подмножество s имеет заранее известную вероятность $\mathsf{P}(s)$ того, что будет выбрано именно оно. Выбранное подмножество мы называем *выборочной совокупностью*. Пусть $y_1, \ldots, y_N$ — неизвестные значения на элементах $1, \ldots, N$ и пусть желательно дать оценку итога $Y = \sum_{i=1}^{N} y_i$ при помощи значений, установленных в выборочной совокупности s. Оценка вида $\hat{Y} = \sum_{i \in s} y_i w_i(s)$, где $w_i(s)$ ($i \in s$, $s \subset S$) суть произвольные веса, зависящие не только от i, но и от s, называется *линейной оценкой*. Вообще под *оценкой* мы подразумеваем какую-либо

функцию $t = t(s, y)$, где (s, y) есть наблюдение, содержащее сведения о том, какие именно элементы были выбраны и какие значения y_i были на них обнаружены. В § 2 выводится простое выражение для среднего квадратичного отклонения $M(\hat{Y} - Y)^2$ для тех линейных оценок, веса которых $w_i(s)$ удовлетворяют для некоторых известных значений $z_1, \ldots, z_N$ уравнению

$$\sum_{i \in s} z_i w_i(s) = \sum_{i=1}^{N} z_i \tag{2.3}$$

с вероятностью 1. В § 3 предлагается общий метод для улучшения оценок, которые зависят от сведений, не содержащихся в определенном выше наблюдении (s, y). Этот метод — ничто иное, как усользование известной теоремы Рао-Блэквелла об улучшении оценок тем, что берется их условное среднее значение по отношению к какой-либо достаточной статистике. В § 4 выводится оценка итога, (4.5), а также несмещенная оценка его дисперсии, (4.9), для следующего способа выборки: Произведем n независимых выборов одного элемента с вероятностями соответственно $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, далее примем или отбросим все выбранные элементы в зависимости от того, получим-ли при каждых двух выборах различные элементы или нет. Если результат выборки отброшен, повторяем выборку до тех пор, пока не нам не удастся выбрать сплошь различные элементы. В § 5 описывается дальнейшая выборка с неодинаковыми вероятностями, названная пермутационной выборкой.

В части В находится оптимальная стратегия для случая, когда обнаруженные значения y_i можно считать реализациями независимых случайных величин с известными математическими ожиданиями μ_i и дисперсиями d_{ii}. Притом стратегия определяется вероятностями $\mathsf{P}(s)$ отдельных выборочных совокупностей и весами $w_i(s)$ упомянутой выше линейной оценки, а ее оптимальность относится к расходам, которые, как предполагается, имеют вид

$$C = \sum_{i=1}^{N} c_i \pi_i \,, \tag{7.1}$$

где π_i — вероятность выбора выборочной совокупности s, содержащей элемент i. Выводятся достаточные условия (7.11)—(7.13). § 8 посвящается проблемам применения полученного результата.

В части С определяется оптимальная стратегия для случая, когда значения y_i можно считать реализацией случайной последовательности, имеющей стационарную и выпуклую функцию корреляции и стационарные коэффициенты вариации. Показано, что при этих условиях оптимальным решением является систематическая (механическая) выборка с неодинаковыми, вообще говоря, вероятностями.

В работе обобщаются результаты, содержащиеся в работах [1], [3], [7], [12] и [13].