Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

RŮZNÉ

O PRAVIDELNÉM 257-ÚHELNÍKU

OTAKAR LEMINGER, Ústí nad Labem

(Došlo dne 8. ledna 1959)

DT: 513.19

V této práci je stručně naznačena metoda, kterou lze vyjádřit velikost strany pravidelného 257-úhelníka výrazem eukleidovsky sestrojitelným.

Úloha sestrojit stranu pravidelného 257-úhelníka vepsaného do dané kružnice kružítkem a pravítkem znamená vyjádřit $\frac{2\pi}{257}$ pomocí racionálních operací a druhých odmocnin z celých čísel. Zvolíme-li $\varphi = \frac{2\pi}{257}$, pak platí $\cos k\varphi = \cos (257 - k)\varphi$ a pomocí vzorce $\cos A\varphi \cos B\varphi = \frac{1}{2} [\cos (A + B) \varphi + \cos (A - B) \varphi]$ dostáváme osm skupin identit po osmi identitách tvaru

$$\begin{aligned}
\cos p\varphi \cos 16p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos 17p\varphi + \cos 15p\varphi]\,, \\
\cos 17p\varphi \cos 15p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos 2p\varphi + \cos 32p\varphi]\,, \\
\cos 2p\varphi \cos 32p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos 34p\varphi + \cos 30p\varphi]\,, \\
\cos 34p\varphi \cos 30p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos 4p\varphi + \cos 64p\varphi]\,, \\
\cos 4p\varphi \cos 64p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos 68p\varphi + \cos 60p\varphi]\,, \\
\cos 68p\varphi \cos 60p\varphi &= \tfrac{1}{2} [(\cos 8p\varphi + \cos 128p\varphi]\,, \\
\cos 8p\varphi \cos 128p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos 121p\varphi + \cos 120p\varphi]\,, \\
\cos 121p\varphi \cos 120p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos p\varphi + \cos 16p\varphi]\,,
\end{aligned}$$

kde za p postupně dosazujeme čísla 1, 3, 5, 7, 11, 13, 29, 37, při čemž argument se pohybuje od φ do 128φ. Šestnáctičlenné skupiny kosinů argumentů $p\varphi$, $16p\varphi$, $17p\varphi$, $15p\varphi$, $2p\varphi$, $32p\varphi$, $34p\varphi$, $30p\varphi$, $4p\varphi$, $64p\varphi$, $68p\varphi$, $60p\varphi$, $8p\varphi$, $128p\varphi$, $121p\varphi$, $120p\varphi$ mají tu vlastnost, že jakýkoliv argument od φ do 128φ se vyskytuje v právě jedné šestnáctičlenné skupině. Každou takovouto šestnáctičlennou skupinu kosinů rozdělíme na dvě osmičlenné, každou osmičlennou na dvě čtyřčlenné a každou čtyřčlennou na dvě dvojčlenné, jak je patrno z následujícího schematu (ve schematu píšeme pouze argumenty):

$$\begin{gathered}
p\varphi,\ 16p\varphi,\ \ 2p\varphi,\ 32p\varphi,\ \ 4p\varphi,\ 64p\varphi,\ \ 8p\varphi,\ 128p\varphi\ ; \\
17p\varphi,\ 15p\varphi,\ 34p\varphi,\ 30p\varphi,\ 68p\varphi,\ 60p\varphi,\ 121p\varphi,\ 120\ p\varphi\ ;
\end{gathered}$$

$$\begin{array}{llll} p\varphi, 16p\varphi, 4p\varphi, & 64p\varphi\,; & 17p\varphi, 15p\varphi, & 68p\varphi, \ 60p\varphi\,; \\ 2p\varphi, 32p\varphi, 8p\varphi, & 128p\varphi\,; & 34p\varphi, 30p\varphi, & 121p\varphi, \ 120p\varphi\,; \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} p\varphi, 16p\varphi\,; & 2p\varphi, \ 32p\varphi\,; & 17p\varphi, 15p\varphi\,; & 34p\varphi, \ 30p\varphi\,; \\ 4p\varphi, 64p\varphi\,; & 8p\varphi, 128p\varphi\,; & 68p\varphi, 60p\varphi\,; & 121p\varphi, \ 120p\varphi\,. \end{array}$$

Jak je ze schematu patrno, sdružují se jednotlivé skupiny kosinů do dvojic, které mají tuto vlastnost: Součet i součin součtů kosinů jednotlivých sdružených skupin je roven opět součtu součtů kosinů větších skupin (např.

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + \cos 16\varphi)(\cos 4\varphi + \cos 64\varphi) &= \\ = \tfrac{1}{2}[(\cos 3\varphi + \cos 48\varphi + \cos 12\varphi + \cos 65\varphi) &+ \\ + (\cos 5\varphi + \cos 80\varphi + \cos 20\varphi + \cos 63\varphi)]\,,&\end{aligned}$$

takže vzniknou součty dvou čtveřic apod.).

Označíme-li nyní součet kosinů šestnáctičlenné skupiny pro $p = 1, 11, 13, 29, 7, 3, 5, 37$ postupně A, B, C, D, E, F, G, H, platí

$$(A + B + C + D) + (E + F + G + H) = -\tfrac{1}{2}$$

a

$$(A + B + C + D)\,.\,(E + F + G + H) = -16\,,[1]$$

neboť vynásobením závorek vznikne, jak lze ukázat, součet všech kosinů argumentů od φ do 128φ, při čemž každý argument se vyskytne právě 32krát. To však znamená, že $Y_1 = A + B + C + D$, $Y_2 = E + F + G + H$ jsou kořeny kvadratické rovnice $Y^2 + \frac{1}{2}Y - 16 = 0$, takže

$$Y_1 = \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{257})\,, \quad Y_2 = \tfrac{1}{4}(-1 - \sqrt{257})$$

(o znaménku odmocniny lze rozhodnouti např. přibližným numerickým výpočtem hodnot Y_1 a Y_2).

Označíme-li dále $Z_1 = A + B$, $Z_2 = C + D$, $Z_1' = E + F$, $Z_2' = G + H$, je, jak se dá zjistit, $Z_1Z_2 = Z_1'Z_2'$, při čemž v součinu se vyskytnou kosiny všech argumentů od φ do 128φ; protože je tam každý právě osmkrát, je $Z_1Z_2 = Z_1'Z_2' = -4$. Jelikož $Z_1 + Z_2 = Y_1$, $Z_1' + Z_2' = Y_2$, je Z_1, Z_2 kořenem kvadratické rovnice $Z^2 - Y_1 Z - 4 = 0$ a Z_1', Z_2' kořenem kvadratické rovnice $Z'^2 - Y_2Z' - 4 = 0$, takže lze vypočíst, že

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \tfrac{1}{2}Y_1 + \sqrt{\tfrac{1}{4}Y_1^2 + 4} = \tfrac{1}{8}(-1 + \sqrt{257}) + \sqrt{[\tfrac{1}{8}(-1 + \sqrt{257})]^2 + 4}\,,\\
Z_2 &= \tfrac{1}{2}Y_1 - \sqrt{\tfrac{1}{4}Y_1^2 + 4} = \tfrac{1}{8}(-1 + \sqrt{257}) - \sqrt{[\tfrac{1}{8}(-1 + \sqrt{257})]^2 + 4}\,,\\
Z_1' &= \tfrac{1}{2}Y_2 + \sqrt{\tfrac{1}{4}Y_2^2 + 4} = \tfrac{1}{8}(-1 - \sqrt{257}) + \sqrt{[\tfrac{1}{8}(-1 - \sqrt{257})]^2 + 4}\,,\\
Z_2' &= \tfrac{1}{2}Y_2 - \sqrt{\tfrac{1}{4}Y_2^2 + 4} = \tfrac{1}{8}(-1 - \sqrt{257}) - \sqrt{[\tfrac{1}{8}(-1 - \sqrt{257})]^2 + 4}\,.
\end{aligned}$$

[1]) Platí totiž obecně, že $\sum_{s=1}^{r} \cos s\,\frac{2\pi}{2r+1} = -\frac{1}{2}$.