Diferenciální rovnice (1) *je oscilatorická právě tehdy, když existuje funkce* $g(x) \in C^1$, $g(x) > 0$ *pro* $x \in J$ *taková, že*

$$\lim_{x \to \infty} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p(x_1)} \exp\left\{2 \int_{x_0}^{x_1} \left\langle \frac{1}{p(s)\, g^2(s)} \int_{x_0}^{s} [q(t)\, g^2(t) - p(t)\, g'^2(t)]\, \mathrm{d}t - a \right\rangle \mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}x_1 = \infty$$

pro každou konstantu a.

Tato věta umožňuje podat přehled dosud známých postačujících podmínek pro oscilaci řešení diferenciální rovnice (1) s výjimkou těch, v nichž se nepředpokládá existence vlastní nebo nevlastní limity $\lim_{x \to \infty} \int_{x_0}^{x} q(t)\, \mathrm{d}t$. Tomuto případu je věnována pozornost hlavně v druhé části článku, jejíž podkladem je práce autorů C. Olech, Z. Opial, T. Ważewski [29] a která je zpracována metodou transformace diferenciální rovnice (1) do zobecněných polárních souřadnic. Stěžejním pojmem je pojem „aproximační limity" definovaný v úvodní kapitole. Také v této části práce byla metoda volena tak, aby uvedené výsledky obsahovaly dosud známé postačující podmínky pro oscilaci řešení diferenciální rovnice (1) odvozené transformací do polárních souřadnic.

K posouzení struktury a působnosti jednotlivých kriterií, jakož i k odvození souvislostí mezi nimi, se ukázalo v obou kapitolách namnoze výhodné, uvažovat současně s diferenciální rovnicí (1) diferenciální rovnici $[P(x)\, z']' + Q(x)\, z = 0$, $P = pf^2$, $Q = f[pf']' + qf^2$, která vznikne z (1) substitucí $y = f(x)\, z$, $f \in C^2$, $f > 0$ v J.

V práci jsou zpracovány výsledky celkem 43 dosud publikovaných pojednání zabývajících se touto problematikou.

Резюме

КРИТЕРИИ ДЛЯ КОЛЕБАНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $[p(x)\, y']' + q(x)\, y = 0$

МИЛОШ РАБ (Miloš Ráb), Брно

(Поступило в редакцию 24/IX 1958 г.)

В работе исследуются колебательные свойства решений линейного дифференциального уравнения второго порядка в каноническом виде

$$[p(x)\, y']' + q(x)\, y = 0\,, \tag{1}$$

$p'(x)$, $q(x)$ непрерывны в интервале $J = \langle x_0, \infty)$.

В первой части исследование производится при помощи преобразования дифференциального уравнения (1) в уравнение Риккати $u' + \frac{u^2}{p(x)} + q(x) = 0$. Доказывается теорема:

Дифференциальное уравнение (1) *является колебательным тогда и только тогда, если существует функция* $g(x) \in C^1$, $g(x) > 0$ *для* $x \in J$ *такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p(x_1)} \exp\left\{2 \int_{x_0}^{x_1} \left\langle \frac{1}{p(s)\, g^2(s)} \int_{x_0}^{s} [q(t)\, g^2(t) - p(t)\, g'^2(t)]\, \mathrm{d}t - a \right\rangle \mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}x_1 = \infty$$

для любой постоянной a.

Эта теорема позволяет дать сводку известных до сего времени достаточных условий для колебания решений дифференциального уравнения (1) за исключением тех, в которых не предполагается существование собственного или несобственного предела $\lim\limits_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} q(t)\, \mathrm{d}t$. На этот случай обращено внимание главным образом во второй части статьи, которая примыкает к работам авторов Ц. Олех, З. Опиал, Т. Важевский [29]; эта вторая часть использует метод преобразования дифференциального уравнения (1) в уравнение, выраженное в обобщенных полярных координатах. Основным понятием является понятие „аппроксимационного предела", определенное в введении. И в этой части работы метод был выбран так, чтобы приведенные результаты содержали известные до сих пор достаточные условия для колебания решений дифференциального уравнения (1), выведенные при помощи преобразования к полярным координатам.

Для оценки структуры и эффективности отдельных критериев, а также для вывода связи между ними, оказалось в обеих главах часто выгодным рассматривать одновременно с дифференциальным уравнением (1) дифференциальное уравнение $[P(x)\, z']' + Q(x)\, z = 0$, $P = pf^2$, $Q = f[pf']' + qf^2$, в которое переходит (1) при помощи подстановки $y = f(x)\, z$, $f \in C^2$, $f > 0$ в J.

В статье обработаны в общем результаты 43 опубликованных до сего времени работ, посвященных этой проблематике.