Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

KRITERIEN FÜR DIE OSZILLATION DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $[p(x)\,y']' + q(x)\,y = 0$

MILOŠ RÁB, Brno

DT: 517.941

(Eingelangt am 24. September 1958)

Gewidmet dem Prof. Otakar Borůvka zu seinem 60. Geburtstag.

In der vorliegenden Abhandlung werden die Sätze abgeleitet, welche die bißher bekannten Kriterien für die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung $[p(x)\,y']' + q(x)\,y = 0$ zu vereinigen ermöglichen.

Einleitung

Es sei die Differentialgleichung

$$[p(x)\,y']' + q(x)\,y = 0 \tag{1}$$

gegeben. Wir setzen weiterhin stets voraus, daß die Koeffizienten $p'(x)$ und $q(x)$ im Intervall $J = \langle x_0, \infty)$ stetige Funktionen sind und $p(x) > 0$ gilt. Eine Lösung der Differentialgleichung (1) heißt oszillatorisch, wenn sie in J unendlich viele Nullstellen hat. Die Lösung $y(x) \equiv 0$ schließen wir aus den Betrachtungen aus. Wenn alle Lösungen der Differentialgleichung (1) in J oszillatorisch sind, so sagt man kurz, daß die Differentialgleichung (1) oszillatorisch ist.

In der vorliegenden Abhandlung werden einige Sätze eingeführt, welche die bißher bekannten hinreichenden Bedingungen für die Oszillation der Lösungen von (1) zu vereinigen ermöglichen. In der Literatur wurden bißher zur Herleitung dieser Bedingungen folgende Methoden benützt:

a) Die Umformung der Differentialgleichung (1) in die Riccatische Differentialgleichung. (Diese Methode benützt man am häufigsten.)

b) Die Reduktion der Differentialgleichung (1) auf ein System und seine Umformung in die Polarkoordinaten.

c) Die Methode der Eigenwerte [27], [33]. Mit den Ergebnissen dieser Behandlungen werden wir uns nicht beschäftigen.

Man kann auch eine Reihe allgemeiner Ergebnisse durch die Kombination der Methode a) oder b) mit der Transformation $y = f(x)\, z$ ableiten. Dabei bedeutet $f(x)$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, $f(x) > 0$ für $x \in J$ [8], [26].

Erwähnen wir, daß die in der Abhandlung abgeleiteten Ergebnisse auch die Betrachtung der Differentialgleichung

$$y'' + r(x)\, y' + s(x)\, y = 0\,, \tag{2}$$

$r(x)$, $s(x)$ stetig in J, ermöglichen. Man kann nämlich die Differentialgleichung (2) auf die selbstadjungierte Form $[\exp\{\int_{x_0}^{x} r(t)\, dt\}\, y']' + \exp\{\int_{x_0}^{x} r(t)\, dt\}\, s(x)\, y = 0$ bringen, oder man kann sie durch die Substitution $y = \exp\{-\tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} r(t)\, dt\}\, u$ in die Differentialgleichung

$$u'' + S(x)\, u = 0\,, \tag{3}$$

$S(x) = s(x) - \tfrac{1}{4}r^2(x) - \tfrac{1}{2}r'(x)$ umformen.

Eine besondere Aufmerksamkeit wurde in der Literatur gerade der Differentialgleichung (3), also der Differentialgleichung (1) im Falle $p(x) \equiv 1$, gewidmet.

Vorläufige Betrachtungen

1. Bezeichnen wir $E\{v(x)\}$ die Menge von reellen Zahlen x, welche die Eigenschaft $v(x)$ haben, $m(M)$ das Lebesguesche Maß der Menge M. Wir führen den Begriff des approximativen Grenzwerts einer Funktion $f(x)$ an, den die Herren C. Olech, Z. Opial und T. Ważewski in der Abhandlung [29] eingeführt haben.

Definition 1. *Man sagt, die Funktion $f(x)$ habe den approximativen unteren Grenzwert l für $x \to \infty$, geschrieben* $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{apr\,inf} f(x) = l$, *wenn* $m(E\{f(x) \leqq l_1\}) < \infty$ *für jedes $l_1 < l$* und $m(E\{f(x) \leqq l_2\}) = \infty$ für jedes $l_2 > l$ *gilt.*

Definition 2. *Man sagt, die Funktion $f(x)$ habe den approximativen oberen Grenzvert L für $x \to \infty$, geschrieben* $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{apr\,sup} f(x) = L$, *wenn $m(E\{f(x) \geqq L_1\}) = \infty$ für jedes $L_1 < L$ und $m(E\{f(x) \geqq L_2\}) < \infty$ für jedes $L_2 > L$ gilt.*

Zu jeder Funktion $f(x)$ gibt es offensichtlich nur einen approximativen oberen und einen approximativen unteren Grenzwert. Wenn $l = L = \lambda$ ist, so schreibt man $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{apr} f(x) = \lambda$. Bezeichnen weiter $\lim\limits_{x\to\infty} \inf f(x) = l^*$, $\lim\limits_{x\to\infty} \sup f(x) = L^*$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lambda^*$, so gilt offenbar $l^* \leqq l \leqq L \leqq L^*$.

Die Gleichheiten $l^* = l$, $L^* = L$ gelten damals, wenn $f(x)$ irgendeiner der folgenden vier Bedingungen genügt:

A. *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$ *derart, daß für alle* $x^* \geqq \delta + x_0$ *und alle* x *die in* $\langle x^* - \delta, x^* \rangle$ *oder in* $\langle x^*, x^* + \delta \rangle$ *liegen, die Ungleichungen* $f(x) \leqq$ $\leqq f(x^*) + \varepsilon$, $f(x) \geqq f(x^*) - \varepsilon$ *gelten.*

B. $f(x)$ *ist eine gleichmäßig stetige Funktion in* J.

C. $f'(x) \leqq k < \infty$ *für* $x \in J$.

D. $f'(x) \geqq k > -\infty$ *für* $x \in J$.

Beweis. Die Bedingung **A** umfaßt jede der Bedingungen **B**, **C** und **D**. Es gelte also **A** und nehmen wir an, daß $l^* < l$ ist. Man kann $\varepsilon > 0$ so wählen, daß $l^* < l^* + 2\varepsilon < l$ ist. Es gibt eine Folge $\{x_n\}$, $x_n \to \infty$ derart, daß $f(x_n) <$ $< l^* + \varepsilon$ gilt. In einem von den Intervallen $\langle x_n - \delta, x_n \rangle$, $\langle x_n, x_n + \delta \rangle$, das wir Θ_n bezeichnen, gelten die Ungleichungen $f(x) \leqq f(x_n) + \varepsilon < l^* + 2\varepsilon < l$. Setzt man $\Theta = \sum_{1}^{\infty} \Theta_n$, so gilt $m(\Theta) = \infty$ und $f(x) < l$ für $x \in \Theta$, was der Definition der Zahl l widerspricht. Es ist also $l^* = l$. Ähnlich kann man $L^* = L$ beweisen.

2. Man kann sich leicht überzeugen, daß folgende Behauptungen gelten:

a) *Wenn* $y_1(x)$ *und* $y_2(x)$ *zwei beliebige unabhängige Lösungen der Differentialgleichung* (1) *sind, so genügt die Funktion* $\varrho(x) = \sqrt{y_1^2(x) + y_2^2(x)}$ *der Beziehung*

$$[p(x)\,\varrho']' + q(x)\,\varrho = \frac{M^2}{p(x)\,\varrho^3}\,, \tag{4}$$

wobei $M = p(x)\,W(x)$ *und* $W(x)$ *die Wronskische Determinante der Lösungen* $y_1(x)$ *und* $y_2(x)$ *bezeichnen.*

b) *Genügt die Funktion* $f(x)$ *der Gleichung*

$$[p(x)\,f']' + q(x)\,f = \frac{c^2}{p(x)\,f^3}\,,$$

$c = \text{Konst} \neq 0$, *dann ist*

$$y = C_1 \sin\left\{\int_{x_0}^{x} \frac{c\,dt}{p(t)\,f^2(t)} + C_2\right\}^{1)} \tag{5}$$

eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1).

Daraus folgt unmittelbar, daß man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) stets in der Form (5) schreiben kann, wenn man $f(x) \equiv \varrho(x)$ wählt. Durch passende Wahl der Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ kann man $c = 1$ erreichen.

c) *Die Funktion* $f(x)$ *sei in* J *zweimal stetig differenzierbar. Die Differentialgleichung* (1) *geht für* $y = f(x)\,z$ *in die Differentialgleichung*

$$[P(x)\,z']' + Q(x)\,z = 0 \tag{6}$$

[1]) Ähnliche Formeln kann man schon bei P. Bohl [2] finden, der sie zur Betrachtung der Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung benützte.

über, wobei

$$P(x) = p(x)\, f^2(x)\,, \quad Q(x) = f(x)[p(x)\, f'(x)]' + q(x)\, f^2(x)\,.^{2)} \tag{7}$$

Die Differentialgleichungen (1) und (6) sind gleichzeitig oszillatorisch oder nichtoszillatorisch. Dieser Umstand ermöglicht aus jeder hinreichenden Bedingung für die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung (6) eine hinreichende Bedingung für die Oszillation der Lösungen von (1) unmittelbar ableiten, die von einer beliebigen Funktion $f(x)$ abhängt. Hieraus folgt besonders:

Die Differentialgleichung (1) *ist dann und nur dann oszillatorisch in* J, *wenn*

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{p(t)\, \varrho^2(t)} = \int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{p(t)[y_1^2(t) + y_2^2(t)]} = \infty\ ^{3)} \tag{8}$$

gilt; $\varrho(x)$ *genügt dabei der Gleichung* (4).

Aus (4) und (8) folgt unmittelbar folgender

Hilfsatz. *Wenn die Differentialgleichung* (1) *oszillatorisch ist, dann gibt es eine Funktion* $\varrho(x) \in C^2$, $\varrho(x) > 0$ *für* $x \in J$, *so daß* $\int\limits_{x_0}^{\infty} \{\varrho(x)[p(x)\, \varrho'(x)]' + q(x)\, \varrho^2(x)\}\, \mathrm{d}x = \infty$ *gilt.*

Eine andere unmittelbare Folgerung der Beziehung zwischen den Differentialgleichungen (1) und (6), also auch (3) und (6), ist der Satz [er folgt aus (8) und (4)]:

Die Differentialgleichung (3) *ist dann und nur dann oszillatorisch, wenn es eine solche Funktion* $f(x) \in C^2$, $f(x) > 0$ *für* $x \in J$ *gibt, welche die Bedingungen*

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f^2(t)} = \infty \quad \textit{und} \quad S(x) = \frac{1}{f^4(x)} - \frac{f''(x)}{f(x)} \quad \textit{erfüllt.}$$

Diesen Satz hat Prof. O. Borůvka [5] bewiesen, der die Funktion $f(x)$ in der Form $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{X'(x)}}$ gewählt hat. Durch spezielle Wahl der Funktionen $X(x)$ und mit Hilfe des Vergleichssatzes hat M. Laitoch [20] die bekannte logarithmische Skala der Vergleichskriterien abgeleitet. Die Vergleichskriterien werden wir später betrachten.

Ist endlich die Differentialgleichung (1) der Form $\left[\dfrac{1}{\omega(x)}\, y'\right]' + \omega(x)\, y = 0$, das heißt $y'' - \dfrac{\omega'}{\omega}\, y' + \omega^2 y = 0$, so hat sie die allgemeine Lösung $y =$

---

²) Diese Umformung hat schon W. Leighton [24] und später R. Moore [26] benützt.

³) Das Symbol $\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$ bezeichnet in der ganzen Abhandlung den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t$.

$= C_1 \sin \{ \int\limits_{x_0}^{x} \omega(t)\, dt + C_2 \}$ und der Koeffizient $S(x)$ in der Differentialgleichung (3) hat die Form $S(x) = \omega^2(x) - \frac{3}{4}\left[\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{\omega''(x)}{\omega(x)}$. Wählt man $\omega(x) = k \exp \{-2\int\int \varphi(x)\, dx\, dx\}$, wobei k eine positive Konstante und $\varphi(x) \in C^0$ in J eine beliebige Funktion bezeichnen und benutzt man den Vergleichssatz, so folgt hieraus:

Gibt es eine stetige Funktion $\varphi(x)$, *die den Bedingungen* $\int\limits_{x_0}^{\infty} \exp \{-2\int\int \varphi(x)\, .\, dx\, dx\}\, dx = \infty$, $S(x) \geqq k^2 \exp \{-4\int\int \varphi(x)\, dx\, dx\} - \{\int \varphi(x)\, dx\}^2 - \varphi(x)$ *genügt, so ist die Differentialgleichung* (3) *oszillatorisch.*

Diesen Satz hat M. Ielchin [15] abgeleitet. Speziell für $\varphi(x) = -1/2x^2$ folgt hieraus das Kriterium von A. Kneser [18].

Bemerkung. Aus der Form (5) der allgemeinen Lösung von (1) folgt auch unmittelbar: *Wenn eine Lösung der Differentialgleichung* (1) *in* J *oszillatorisch ist, dann sind alle Lösungen oszillatorisch. Bezeichnen* y_1 *und* y_2 *zwei beliebige unabhängige Lösungen von* (1), *so liegt zwischen je zwei aufeinander folgenden Nullstellen von* y_1 *genau eine Nullstelle von* y_2.

Kriterien für die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung (1)

I

In diesem Absatz werden einige hinreichende (und auch notwendige) Bedingungen für die Oszillation der Lösungen von (1) abgeleitet. Für die Untersuchung der Oszillationsfragen wird eine Riccatische Differentialgleichung aufgestellt, die zu der Differentialgleichung (1) gehört.

Hauptsatz. *Die Differentialgleichung* (1) *ist dann und nur dann oszillatorisch, wenn es eine Funktion* $g(x) \in C^1$, $g(x) > 0$ *in* J *gibt, welche die Bedingung*

$$\lim_{x\to\infty} H(x) = \lim_{x\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{p(x_1)} \exp\left\{2\int\limits_{x_0}^{x_1}\left\langle\frac{1}{p(s)\, g^2(s)}\int\limits_{x_0}^{s} [q(t)\, g^2(t) - p(t)\, g'^2(t)]\, dt - a\right\rangle .\, ds\right\} dx_1 = \infty$$

für jede Konstante a *erfüllt.*

Beweis. a) Die Differentialgleichung (1) sei nichtoszillatorisch. Nehmen wir an, $y(x)$ sei eine Lösung der Differentialgleichung (1), die in J keine Nullstelle hat, was offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Für $u = \frac{p(x)\, y'}{y}$ geht die Differentialgleichung (1) in die Riccatische Gleichung $u' = -\dfrac{u^2}{p(x)} - q(x)$ über. Multipliziert man diese Gleichung mit $g^2(x)$ und integriert sie zwischen den Grenzen x_0 und x, so ergibt sich $\int\limits_{x_0}^{x} g^2(t)\,.$ $.\, u'(t)\,\mathrm{d}t = -\int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{u^2(t)\,g^2(t)}{p(t)}\,\mathrm{d}t - \int\limits_{x_0}^{x} q(t)\,g^2(t)\,\mathrm{d}t$. Durch partielle Integration auf der linken Seite bekommt man

$$g^2(x)\,u(x) = a + 2\int\limits_{x_0}^{x} g(t)\,g'(t)\,u(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{u^2(t)\,g^2(t)}{p(t)}\,\mathrm{d}t - \int\limits_{x_0}^{x} q(t)\,g^2(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= a - \int\limits_{x_0}^{x}\left[\frac{g(t)\,u(t)}{\sqrt{p(t)}} - \sqrt{p(t)}\,g'(t)\right]^2 \mathrm{d}t + \int\limits_{x_0}^{x}[p(t)\,g'^2(t) - q(t)\,g^2(t)]\,\mathrm{d}t, \tag{9}$$

wobei $a = g^2(x_0)\,u(x_0)$ ist. Hieraus folgt die Ungleichung

$$\frac{p(x)\,y'(x)}{y(x)} = u(x) \leqq \frac{1}{g^2(x)}\left\{a + \int\limits_{x_0}^{x}[p(t)\,g'^2(t) - q(t)\,g^2(t)]\,\mathrm{d}t\right\}$$

und durch Integration zwischen den Grenzen x_0 und x

$$\lg\left|\frac{y(x)}{y(x_0)}\right| \leqq \int\limits_{x_0}^{x}\frac{1}{p(s)\,g^2(s)}\left\{a + \int\limits_{x_0}^{s}[p(t)\,g'^2(t) - q(t)\,g^2(t)]\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}s\,,$$

$$|y(x)| \leqq C\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x}\frac{1}{p(s)\,g^2(s)}\left\langle a + \int\limits_{x_0}^{s}[p(t)\,g'^2(t) - q(t)\,g^2(t)]\,\mathrm{d}t\right\rangle\mathrm{d}s\right\}.$$

Bezeichnen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei beliebige unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (1), die in J keine Nullstelle haben, so kann man leicht aus der obigen Ungleichung ableiten, daß $\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\mathrm{d}t}{p(t)[y_1^2(t) + y_2^2(t)]} \geqq KH(x)$ gilt, wobei K eine passende positive Konstante bezeichnet. Die rechte Seite divergiert aber gegen ∞ für $x \to \infty$, so daß $\int\limits_{x_0}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{p(t)[y_1^2(t) + y_2^2(t)]} = \infty$, was der Voraussetzung, daß (1) in J nichtoszillatorisch ist, widerspricht.

b) Die Differentialgleichung sei oszillatorisch. Aus dem Hilfsatz folgt die Existenz einer solchen Funktion $g(x) \in C^1$, $g(x) > 0$, die der Bedingung

$\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{M^2}{p(x)\, g^2(x)}\, dx = \int\limits_{x_0}^{\infty} [q(x)\, g^2(x) + g(x)\{p(x)\, g'(x)\}']\, dx = \infty$ genügt. Wir werden zeigen, daß diese Funktion der Forderung $H(\infty) = \infty$ genügt.

Aus der Beziehung $\int g(x)\{p(x)\, g'(x)\}'\, dx = p(x)\, g(x)\, g'(x) - \int p(x)\, g'^2(x)\, dx +$ $+$ Konst folgt nähmlich, daß man den Ausdruck $H(x)$ auf folgende Form bringen kann

$$H(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{p(x_1)} \exp\left\{2 \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{1}{p(s)\, g^2(s)} \left\langle \int\limits_{x_0}^{s} [q(t)\, g^2(t) + g(t)\{p(t)\, g'(t)\}']\, dt - \right.\right.$$

$$\left.\left. - g(s)\, g'(s)\, p(s) + \text{Konst} \right\rangle ds \right\} dx_1 =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{p(x_1)} \exp\left\{2 \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{1}{p(s)\, g^2(s)} \left\langle \int\limits_{x_0}^{s} [q(t)\, g^2(t) + g(t)\{p(t)\, g'(t)\}']\, dt + \text{Konst} \right\rangle ds - \right.$$

$$\left. - 2 \lg |g(x_1)| \right\} dx_1 =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{p(x_1)\, g^2(x_1)} \exp\left\{2 \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{1}{p(s)\, g^2(s)} \left\langle \int\limits_{x_0}^{s} [q(t)\, g^2(t) + g(t)\{p(t)\, g'(t)\}']\, dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \text{Konst} \right\rangle ds \right\} dx_1 ,$$

so daß $H(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Hiermit ist die Behauptung voll bewiesen.

Satz 1. *Es sei* $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty$. *Gibt es eine Funktion* $g(x) > 0$, $g(x) \in C^1$ *für* $x \in J$, *so daß*

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} [q(x)\, g^2(x) - p(x)\, g'^2(x)]\, dx = \infty \tag{10}$$

gilt, dann ist die Differentialgleichung (1) *oszillatorisch.*

Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Hauptsatz.

Diesen Satz hat für $p(x) \equiv 1$ В. А. Кондратьев [19] abgeleitet $\{r(x) = g^2(x)\}$.[4]) Der Satz verallgemeinert den Erfolg von M. Zlámal [42], wo die Bedingung (10) durch die Bedingungen $\int\limits_{x_0}^{\infty} g^2(x)\, q(x)\, dx = \infty$, $\int\limits_{x_0}^{\infty} p(x)\, g'^2(x)\, dx < \infty$ ersetzt wird. (M. Zlámal hat diese Voraussetzungen in einer anderen

[4]) Der in [19] auf Seite 743 angeführte Satz 4 ergibt sich aus unserem Satz durch die Wahl $g(x) = r(x)\sqrt{x}$.

Form angeführt; um sie beizubehalten, soll man $g(x) = \sqrt{\omega(x)}$ setzen.) Ist besonders $p(x) \equiv 1$, so kann man fortschreitend $g(x) = x^{\frac{1}{2}\sigma}$, $\sigma > 1$; $x^{\frac{1}{2}} \lg^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} x$, $x^{\frac{1}{2}} \lg^{\frac{1}{2}} x \lg \lg^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} x, \ldots, \alpha > 0$ wählen. Es ist offenbar $\int\limits_{x_0}^{\infty} g'^2(x) \,.$ $. \, \mathrm{d}x < \infty$, so daß eine jede der folgenden Bedingungen die Oszillation der Lösungen von $y'' + q(x)\, y = 0$ garantiert:

$\int\limits_{x_0}^{\infty} x^{\sigma} q(x) \,\mathrm{d}x = \infty, \sigma < 1$ (M. Zlámal [42], J. G. Mikusiňski [25] für $q(x) \geqq 0$) ,

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} x \lg^{-1-\alpha} x \, q(x) \,\mathrm{d}x = \infty \,, \quad \alpha > 0 \,,$$

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} x \lg x \lg \lg^{-1-\alpha} x \, q(x) \,\mathrm{d}x = \infty \,, \quad \alpha > 0 \quad \text{usw.}$$

Diese Kriterien hat schon E. Hille unter der Voraussetzung $q(x) \geqq 0$ bewiesen [14, S. 242].

Satz 2. *Die Differentialgleichung* (1) *ist dann und nur dann oszillatorisch, wenn es eine Funktion* $f(x) > 0$, $f(x) \in C^2$ *für* $x \in J$ *gibt, die der Bedingung*

$$\lim_{x \to \infty} K(x) = \lim_{x \to \infty} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{p(x_1) f^2(x_1)} \exp \left\{ 2 \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{1}{p(s)\, f^2(s)} \left\langle \int\limits_{x_0}^{s} [f(t)\{p(t)\, f'(t)\}' + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \, q(t)\, f^2(t)] \,\mathrm{d}t - a \right\rangle \mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}x_1 = \infty$$

für jede Konstante a genügt.

Beweis. Die Tatsache, daß die Bedingung hinreichend ist, ergibt sich aus dem Hauptsatz, wenn man $H(x)$ auf die Form (9) bringt. Die Notwendigkeit der Bedingung ergibt sich aus dem Hilfsatz.

Satz 3. (R. Moore [26]). *Die Differentialgleichung* (1) *ist dann und nur dann oszillatorisch, wenn es eine Funktion* $f(x) > 0$, $f(x) \in C^2$ *für* $x \in J$ *von solcher Beschaffenheit gibt, daß* $\displaystyle\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{p(x)\, f^2(x)} = \infty \,,$

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} [f(x)\{p(x)\, f'(x)\}' + q(x)\, f^2(x)] \,\mathrm{d}x = \infty \tag{11}$$

gilt.

Beweis. Die Tatsache, daß die Bedingung hinreichend ist, ergibt sich aus Satz 2, die Notwendigkeit folgt aus dem Hilfsatz.

Im Falle $p(x) \equiv 1$ hat schon E. Gagliardo [8] bewiesen, daß die Bedingungen (11) zur Oszillation der Lösungen von (1) hinreichend sind. Durch die Wahl $f(x) \equiv 1$ ergibt sich hieraus folgende hinreichende Bedingung:

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty\,, \quad \int_{x_0}^{\infty} q(x)\,dx = \infty \Rightarrow (1) \textit{ ist oszillatorisch.} \tag{12}$$

Diesen Satz hat schon W. B. Fite [7] in Falle $p(x) \equiv 1$ und $q(x) > 0$ bewiesen. A. Winter [39] hat gezeigt, daß die Voraussetzung $q(x) > 0$ weggelassen werden kann. Für die selbstandjungierte Differentialgleichung (1) hat diesen Satz zuerst W. Leighton, wieder mit der Voraussetzung $q(x) > 0$, in den Abhandlungen [23] und [24], später in der Form (12) in [21] und [22] bewiesen.

Eine andere notwendige und hinreichende Bedingung für die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung (3) ist von M. И. Ельшин [6] abgeleitet worden:

Die Differentialgleichung (3) *ist dann und nur dann oszillatorisch, wenn es eine solche Funktion $\Theta(x) \in C^1$ für $x \in J$ gibt, welche folgende Bedingungen erfüllt:*

1. $\Theta'(x) + \Theta^2(x) + S(x) \geqq 0$, 2. $\int_{x_0}^{\infty} \exp\{-2\int_{x_0}^{x} \Theta(t)\,dt\}\,dx = \infty$,

3. $\int_{x_0}^{\infty} \exp\{2\int_{x_0}^{x} \Theta(t)\,dt\}[\Theta'(x) + \Theta^2(x) + S(x)]\,dx = \infty$.

Wählt man $\Theta(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, so kann man diese drei Voraussetzungen auf eine einfachere Form bringen:

1'. $f''(x) + f(x)\,S(x) \geqq 0$, 2'. $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{f^2(x)} = \infty$,

3'. $\int_{x_0}^{\infty} [f(x)\,f''(x) + f^2(x)\,S(x)]\,dx = \infty.$

Hieraus ergibt sich leicht der Zusammenhang zwischen Satz 3 und dem Satz von M. И. Ельшин.

Wir werden jetzt zeigen, daß durch Anwendung des Hauptsatzes auf die Differentialgleichung (6) keine allgemeinere hinreichende Bedingung für die Oszillation der Lösungen von (1) hervorgeht.

Wählt man im Hauptsatze $g(x) = f(x)\,h(x)$, $f(x) \in C^2$, $h(x) \in C^1$, $f(x) > 0$, $h(x) > 0$, so bekommt man mit Rücksicht auf die Beziehung $\int h^2(x)\,f(x)\,.\,[p(x)\,f'(x)]'\,dx = h^2(x)\,f(x)\,p(x)\,f'(x) - \int p(x)\,f'(x)[2h(x)\,h'(x)\,f(x) + h^2(x)\,.\,f'(x)]\,dx$ folgendes: $\int[q(x)\,g^2(x) - p(x)\,g'^2(x)]\,dx = \int[q(x)\,f^2(x)\,h^2(x) - p(x)\,.\,\{f'^2(x)\,h^2(x) + 2f(x)\,f'(x)\,h(x)\,h'(x) + f^2(x)\,h'^2(x)\}]\,dx = \int[q(x)\,f^2(x)\,h^2(x) + h^2(x)\,f(x)\{p(x)\,f'(x)\}' - p(x)\,f^2(x)\,h'^2(x)]\,dx - h^2(x)\,f(x)\,f'(x)\,p(x)$, so daß

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{P(x_1)} \exp\left\{2\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{P(s)\,h^2(s)}\left(\int_{x_0}^{s} [Q(t)\,h^2(t) - P(t)\,h'^2(t)]\,\mathrm{d}t - a\right)\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}x_1 .$$

Es gilt also

Satz 4. *Die Differentialgleichung* (1) *ist dann und nur dann oszillatorisch, wenn es die Funktionen* $f(x)$ *und* $g(x)$, $f(x) \in C^2$, $g(x) \in C^1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ *für* $x \in J$ *gibt, welche die Bedingung*

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{P(x)} \exp\left\{2\int_{x_0}^{x} \frac{1}{P(s)\,g^2(s)}\left(\int_{x_0}^{s} [Q(t)\,g^2(t) - P(t)\,g'^2(t)]\,\mathrm{d}t - a\right)\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}x = \infty$$

für jede Konstante a *erfüllen. (Die Funktionen* P *und* Q *sind durch* (7) *erklärt.)*

Bemerkung 1. Dieses Ergebnis kann man auch durch Anwendung des Hauptsatzes auf die Differentialgleichung (6) ableiten.

Bemerkung 2. Aus dem Beweise des Hauptsatzes folgt unter der Voraussetzung $g(x) \in C^2$, daß $H(x) = K(x)$ gilt, so daß der Hauptsatz und der Satz 2 „fast äquivalent" sind.

Den Satz 2 kann man folgenderweise leichter beweisen: analog, wie bei dem Beweise des Hauptsatzes, kann man herleiten, daß die Differentialgleichung (6) oszillatorisch ist, wenn

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{P(x_1)} \exp\left\{2\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{P(t)}\left(\int_{x_0}^{t} Q(s)\,\mathrm{d}s - a\right)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x_1 = \infty$$

gilt (man setzt $g(x) \equiv 1$). Hieraus folgt leicht der Satz 2 und auch die Antwort auf die Frage, ob man durch wiederholte Anwendung des Satzes 2 auf die Differentialgleichung (6) irgendeine allgemeinere hinreichende Bedingung für die Oszillation der Lösungen von (1) ableiten kann, liegt auf der Hand.

Wir werden jetzt die sogenannten *Vergleichskriterien* betrachten, die ihren Ursprung in der klassischen Abhandlung von C. Sturm [38] haben. Die wichtigste Rolle spielte da der Vergleichssatz, der auch später in manchen Abänderungen von anderen Verfassern abgeleitet wurde und zwar nicht nur für die Differentialgleichung (1) sondern auch (2) und Systeme von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung. Zum Beispiel: M. Bôcher [3], [4], M. И. Ельшин [6], G. Landolino [9], E. Kamke [16], [17], C. O. Oakley [28], W. T. Reid [36]. Für die Differentialgleichung (1) ergibt sich der Vergleichssatz aus dem Hauptsatze:

Die Differentialgleichung (1) *sei oszillatorisch.*

Ist

$$p_1(x) \leqq p(x)\,, \quad q_1(x) \geqq q(x)\,, \quad p_1', q_1 \text{ stetig in } J\,, \tag{13}$$

so ist auch die Differentialgleichung

$$[p_1(x)\, y']' + q_1(x)\, y = 0 \tag{14}$$

oszillatorisch.

In der Tat, weil (1) oszillatorisch ist, so gibt es nach dem Hauptsatz eine Funktion $g(x) \in C^1$, $g(x) > 0$ derart, daß $\lim\limits_{x\to\infty} H(x) = \infty$ gilt. Mit Rücksicht auf (13) ist $q(t)\, g^2(t) - p(t)\, g'^2(t) \leqq q_1(t)\, g^2(t) - p_1(t)\, g'^2(t)$, so daß wieder $\lim\limits_{x\to\infty} H(x) = \infty$ gilt, wenn man die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ durch $p_1(x)$ und $q_1(x)$ ersetzt. Die Differentialgleichung (14) ist also oszillatorisch.

Es entsteht das Problem, ob solche Funktionen $r(x)$ und $s(x)$ existieren, daß die Differentialgleichung (1) für $p(x) \leqq r(x)$, $q(x) \geqq s(x)$ in J oszillatorisch und für $p(x) > r(x)$, $q(x) < s(x)$ nichtoszillatorisch ist. Die Antwort auf diese Frage ist negativ. Es gilt nämlich

Satz 5. *Die Lösungen der Differentialgleichung* (1) *seien in J oszillatorisch.*

Dann gibt es eine solche Funktion $s(x) \in C^0$, daß $s(x) < q(x)$ für $x \in J$ gilt und daß die Differentialgleichung

$$[p(x)\, y']' + s(x)\, y = 0 \tag{15}$$

oszillatorisch ist.

Beweis. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) hat die Form $y = C_1 \varrho(x) \sin \left[\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{p(t)\, \varrho^2(t)} + C_2\right]$ und weil (1) oszillatorisch ist, so gilt

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{p(x)\, \varrho^2(x)} = \infty\,. \tag{16}$$

Die Funktion $\varrho(x)$ befriedigt die Differentialgleichung (4) $\{M = 1\}$. Man kann also $q(x)$ in der Form $q(x) = \frac{1}{p(x)\, \varrho^4(x)} - \frac{[p(x)\, \varrho'(x)]'}{\varrho(x)}$ schreiben. Wählt man jetzt eine Konstante c, $0 < c < 1$ und bezeichnet $s(x) = \frac{c^2}{p(x)\, \varrho^4(x)} - \frac{[p(x)\, \varrho'(x)]'}{\varrho(x)}$, so ist offenbar $s(x) < q(x)$ im ganzen Intervall J und die Differentialgleichung (15) hat die allgemeine Lösung

$$y = C_1 \varrho(x) \sin \left[c \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{p(t)\, \varrho^2(t)} + C_2\right],$$ so daß sie wegen (16) oszillatorisch ist.

Bemerkung. В. А. Кондратьев [19] und A. Wintner [41] haben folgendes Vergleichskriterium abgeleitet:

Es seien $r(x)$ und $q(x)$ in J stetige Funktionen, welche die Ungleichungen $0 \leqq \int\limits_x^\infty r(t)\,\mathrm{d}t \leqq \int\limits_x^\infty q(t)\,\mathrm{d}t < \infty$ erfüllen. Wenn die Differentialgleichung $y'' + r(x)\,y = 0$ oszillatorisch ist, dann ist auch $y'' + q(x)\,y = 0$ oszillatorisch.

E. Hille [14, S. 145] hat diesen Satz unter der Voraussetzung $r(x) \geqq 0$ abgeleitet.

Die oszillatorischen Vergleichskriterien,[5]) die sogenannte logaritmische Skala, ergibt sich wie ein spezieller Fall folgenden Satzes. Bezeichnen wir

$$u(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{p(t)}; \quad \lg_{-1} u = 1,\ \lg_0 u = u, \ldots, \lg_k u = \lg \lg_{k-1} u; \quad L_n(u) = \prod_{k=0}^{n} \lg_k u$$

$$S_{-1}(u) = 0,\ S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{L_k^2(u)}\,.$$

Satz 6. *Es sei*

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{p(x)} = \infty\,. \tag{17}$$

Ist für irgendein $\varepsilon > 0$

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{L_{n+1}(u)}{\lg_{n+2}^{1+\varepsilon} u} \left[q(x) - \frac{1}{4p(x)}\, S_n(u)\right] \mathrm{d}x = \infty\,, \tag{18}$$

so ist die Differentialgleichung (1) *oszillatorisch.*

Beweis. Wir werden zeigen, daß die Behauptung aus Satz 4 durch die Wahl

$$f(x) = \sqrt{L_n(u)}\,, \quad g(x) = \lg_{n+1}^{\frac{1}{2}} u \lg_{n+2}^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} u \quad \text{folgt}\,.$$

Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_n(u) = [\lg u \lg_2 u \ldots \lg_n u + \lg_2 u \lg_3 u \ldots \lg_n u + \ldots + \lg_n u + 1] \frac{1}{p(x)} =$$

$$= \left[\frac{L_n(u)}{u} + \frac{L_n(u)}{u \lg u} + \ldots + \frac{L_n(u)}{L_n(u)}\right] \frac{1}{p(x)} =$$

$$= L_n(u) \left[\frac{1}{L_0(u)} + \frac{1}{L_1(u)} + \ldots + \frac{1}{L_n(u)}\right] \frac{1}{p(x)}\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$f'(x) = \{\sqrt{L_n(u)}\}' = \frac{L_n'(u)}{2\sqrt{L_n(u)}} \frac{1}{p(x)} = \frac{\sqrt{L_n(u)}}{2p(x)} \left[\frac{1}{L_0(u)} + \frac{1}{L_1(u)} + \ldots + \frac{1}{L_n(u)}\right],$$

[5]) Das auf passende Form gebrachte Vergleichskriterium, das manche hinreichende Bedingungen für die Oszillation der Lösungen von (1) herzuleiten ermöglicht, führt auch A. Ф. Зубова [43] an. Es ist aber nicht genau formuliert.

$$[p(x)\,f'(x)]' = \left[\frac{L_n'(u)}{4\sqrt{L_n(u)}}\left\{\frac{1}{L_0(u)} + \dots + \frac{1}{L_n(u)}\right\} + \frac{\sqrt{L_n(u)}}{2}\left\{-\frac{L_0'(u)}{L_0^2(u)} - \dots\right.\right.$$

$$\left.\left.\dots - \frac{L_n'(u)}{L_n^2(u)}\right\}\right]\frac{1}{p(x)} = \frac{\sqrt{L_n(u)}}{4}\left\{\frac{1}{L_0(u)} + \dots + \frac{1}{L_n(u)}\right\}^2\frac{1}{p(x)} -$$

$$-\frac{\sqrt{L_n(u)}}{2}\left\{\frac{1}{L_0(u)}\frac{1}{L_0(u)} + \frac{1}{L_1(u)}\left[\frac{1}{L_0(u)} + \frac{1}{L_1(u)}\right] + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{1}{L_n(u)}\left[\frac{1}{L_0(u)} + \dots + \frac{1}{L_n(u)}\right]\right\}\frac{1}{p(x)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{L_n(u)}}{4p(x)}\left\{\frac{1}{L_0^2(u)} + \dots + \frac{1}{L_n^2(u)}\right\} = -\frac{\sqrt{L_n(u)}}{4p(x)}\,S_n(u)\,.$$

Endlich bekommt man

$$Q(x) = f(x)[p(x)\,f'(x)]' + q(x)\,f^2(x) = -\frac{L_n(u)}{4p(x)}\,S_n(u) + q(x)\,L_n(u)$$

und weiter

$$g'(x) = [\tfrac{1}{2}\,\lg_{n+1}^{-\frac{1}{2}} uL_n^{-1}(u)\,\lg_{n+2}^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} u - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon)\,\lg_{n+1}^{\frac{1}{2}} u\,\lg_{n+2}^{-\frac{3}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} u\,L_{n+1}^{-1}(u)]\,\frac{1}{p(x)} =$$

$$= \lg_{n+1}^{-\frac{1}{2}} uL_n^{-1}(u)\,[\tfrac{1}{2}\lg_{n+2}^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} u - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon)\,\lg_{n+2}^{-\frac{3}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} u]\,\frac{1}{p(x)}\,.$$

$$g'^2(x) = \lg_{n+1}^{-1} uL_n^{-2}(u)[\cdot/\cdot]^2\,\frac{1}{p^2(x)} \leqq C\,\lg_{n+1}^{-1} uL_n^{-2}(u)\,\lg_{n+2}^{-1-\varepsilon} u\,\frac{1}{p^2(x)}$$

für genug große x, wobei C eine passende Konstante bezeichnet. Es ist also

$$\int^\infty P(x)\,g'^2(x)\,\mathrm{d}x = \int^\infty p(x)\,f^2(x)\,g'^2(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int^\infty \frac{C\,\mathrm{d}x}{L_{n+1}(u)\,\lg_{n+2}^{1+\varepsilon} u\,p(x)} =$$

$$= C\int^\infty \frac{\mathrm{d}u}{L_{n+1}(u)\,\lg_{n+2}^{1+\varepsilon} u} = [\lg_{n+2}^{-\varepsilon} u]^\infty < \infty\,,$$

$$\int^\infty Q(x)\,g^2(x)\,\mathrm{d}x = \int^\infty \frac{L_{n+1}(u)}{\lg_{n+2}^{1+\varepsilon} u}\left[q(x) - \frac{1}{4p(x)}\,S_n(u)\right]\mathrm{d}x = \infty$$

wegen (18), so daß die Differentialgleichung (1) nach Satz 4 oszillatorisch ist.

Aus Satz 6 folgt eine Reihe von Folgerungen.

Bemerken wir vor allem, daß die Bedingung (18) für $n = -1, 0$ folgende Form hat:

$$n = -1: \int^\infty \frac{u}{\lg^{1+\varepsilon} u}\,q(x)\,\mathrm{d}x = \infty\,,$$

$$n = 0 : \int^{\infty} \frac{u \lg u}{\lg \lg^{1+\varepsilon} u} \left[q(x) - \frac{1}{4p(x)} \frac{1}{u^2} \right] dx = \infty .$$

Durch die Wahl $g(x) = \lg_{n+1}^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}} u$ oder $g(x) \equiv 1$ ergibt sich statt (18)

$$\int^{\infty} L_n(u) \lg_{n+1}^{1-\delta} u \left[q(x) - \frac{1}{4p(x)} S_n(u) \right] dx = \infty , \quad \delta > 0 , \tag{19}$$

oder

$$\int^{\infty} L_n(u) \left[q(x) - \frac{1}{4p(x)} S_n(u) \right] dx = \infty . \tag{20}$$

Man kann leicht erkennen, daß die Bedingungen (19) und (20) schärfer als (18) in dem Falle sind, wenn $q(x) - \frac{1}{4p(x)} S_n(u) \geqq 0$ ist, denn es gilt $\frac{\lg_{n+1}^{\delta} u}{\lg_{n+2}^{1+\varepsilon} u} \to \infty$ für jedes $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$.

Für $n = -1$ ergibt sich aus (19) $\int^{\infty} u^{1-\delta} q(x)\, dx = \infty$, was mit (17) eine hinreichende Bedingung von R. Moore liefert [26].[6])

Die Bedingung (20) hat für $n = -1, 0$ die Form:

$$n = -1 : \int^{\infty} q(x)\, dx = \infty ,$$

$$n = 0 \quad : \int^{\infty} u \left[q(x) - \frac{1}{4p(x)} \frac{1}{u^2} \right] dx = \infty .$$

Die Bedingungen (18), (19) und (20) kann man auch so befriedigen, daß man verlangt, der Integrand wäre größer oder gleich $\frac{\varepsilon}{L_n(u)\, p(x)}$, denn es gilt $\int^{\infty} \frac{dx}{L_n(u)\, p(x)} = [\lg_{n+1} u]^{\infty} = \infty$. Die auf diese Art erhaltenen Bedingungen aus (19) und (20) sind schärfer als die Bedingung, welche wir aus (18) bekommen:

---

[6]) R. Moore betrachtete auch den Fall $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} < \infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} < \infty \ \textit{und für irgendein}\ m < 1 \\ \int_{x_0}^{\infty} q(x)\, h^m(x)\, dx = \infty, \ \textit{wobei}\ h(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{dt}{p(t)} \end{array} \right\} \Rightarrow (1)\ \textit{ist oszillatorisch.}$$

Die Behauptung folgt aus dem Satz 3 durch die Wahl $f(x) = h^{\frac{m}{2}}(x)$.

$$\frac{L_{n+1}(u)}{\lg_{n+2}^{1+\varepsilon} u}\left[q(x) - \frac{1}{4p(x)} S_n(u)\right] \geqq \frac{\varepsilon}{L_n(u)\, p(x)}\,,$$

oder

$$L_n^2(u)\,[p(x)\,q(x) - \tfrac{1}{4}S_n(u)]\,\frac{\lg_{n+1} u}{\lg_{n+2}^{1+\varepsilon} u} \geqq \varepsilon\,. \tag{21}$$

Diese Bedingung wird sicher erfüllt, wenn

$$L_n^2(u)[p(x)\,q(x) - \tfrac{1}{4}S_n(u)] \geqq \varepsilon \tag{22}$$

gilt. Führen wir folgende Fälle an:

$$\left.\begin{aligned} n &= -1: \ p(x)\,q(x) \geqq \varepsilon\,,\\ n &= 0 \quad : \ p(x)\,q(x) \geqq \frac{1+\varepsilon}{4u^2}\,,\\ n &= 1 \quad : \ p(x)\,q(x) \geqq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1+\varepsilon}{u^2 \lg^2 u}\right). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Die Beziehung (22) kann man auch in der Form

$$\liminf_{x\to\infty} L_n^2(u)[p(x)\,q(x) - \tfrac{1}{4}S_n(u)] > 0\,,$$

oder

$$\liminf_{x\to\infty} L_n^2(u)[p(x)\,q(x) - \tfrac{1}{4}S_{n-1}(u)] > \tfrac{1}{4}$$

schreiben. Für $n = 0$ ist

$$\liminf_{x\to\infty} p(x)\,q(x)\,u^2 > \tfrac{1}{4}\,.$$

In einem engen Zusammenhang mit den oben angeführten Bedingungen ist die Bedingung von R. L. Potter [31]:

$$\int^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{p(x)} = \infty\,,\quad \lim_{x\to\infty} p(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{p(x)\,q(x)\}^{-\frac{1}{2}} = l' < 2 \Rightarrow (1)\ \textit{ist oszillatorisch.} \tag{24}$$

Aus der zweiten Voraussetznug folgt nähmlich $[p(x)\,q(x)]^{-\frac{1}{2}} < \int^{x} \frac{l}{p(x)}\,\mathrm{d}x + {}$ $+ C = lu(x)$, $l' < l < 2$ von einem gewissen x, also $p(x)\,q(x) > \frac{1}{l^2}\,\frac{1}{u^2} = \frac{1+\varepsilon}{4u^2}$, so daß die Bedingung von R. L. Potter schärfer als (23) ist.

R. Moore hat in [26] folgenden Satz bewiesen:

$$\int_{x_0}^{\infty} q(t)\,\mathrm{d}t < \infty\,,\ \tfrac{1}{4} < c \leqq u(x)\int_{x}^{\infty} q(t)\,\mathrm{d}t \leqq d < \infty \Rightarrow (1)\ \textit{ist oszillatorisch.} \tag{25}$$

(*Ist* $q(x) \geqq 0$, *so kann* $d = \infty$ *sein.*)

Dieser Satz ergibt sich aus Satz 3 durch die Wahl $f(x) = \sqrt{u(x)}$.

In der Tat folgt aus der Ungleichung (25) $u(x) \to \infty$, so daß $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{P(x)} =$

$= \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)\,u(x)} = [\lg |u(x)|]_{x_0}^{\infty} = \infty$ gilt. Es ist weiter $\int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x} q(t)\,u(t)\,dt -$

$- \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{4p(t)\,u(t)}$ und hieraus folgt durch partielle Integration

$$\int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\,dt = u(x) \int\limits_{x_0}^{x} q(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\int\limits_{x_0}^{t} q(s)\,ds}{p(t)}\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{4p(t)\,u(t)} =$$

$$= \left[\int\limits_{x_0}^{\infty} q(t)\,dt - \int\limits_{x}^{\infty} q(t)\,dt\right] u(x) - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\int\limits_{x_0}^{\infty} q(s)\,ds - \int\limits_{t}^{\infty} q(s)\,ds}{p(t)}\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{4p(t)\,u(t)} =$$

$$= - \int\limits_{x}^{\infty} q(t)\,dt\,u(x) + \int^{x} \frac{\int\limits_{t}^{\infty} q(s)\,ds\,u(t)}{p(t)\,u(t)}\,dt - \int^{x} \frac{dt}{4p(t)\,u(t)} + K \geqq$$

$$\geqq - u(x) \int\limits_{x}^{\infty} q(t)\,dt + \left(c - \frac{1}{4}\right) \int^{x} \frac{dt}{p(t)\,u(t)} + K \to \infty\,,$$

wobei K eine passende Konstante bedeutet.

Der letztere Teil der Behauptung (für $q(x) \geqq 0$) folgt durch einfache Modifikation des Beweises von E. Hille [14, S. 245], der die Differentialgleichung (1) im Falle $p(x) \equiv 1$ betrifft.

Satz 6 und alle Folgerungen wurden bißher nur für den Fall $p(x) \equiv 1$ bewiesen. Die Voraussetzung $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty$ ist offenbar erfüllt, so daß eine jede der weiter angeführten Bedingungen I—X zur Oszillation der Lösungen von

$$y'' + q(x)\,y = 0 \tag{26}$$

hinreichend ist:

I. $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{L_{n+1}(x)}{\lg_{n+2}^{1+\varepsilon} x} \left[q(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right] dx = \infty$ *für irgendein* $\varepsilon > 0$, M. Ráb [34].

II. $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{x}{\lg^{1+\varepsilon} x}\, q(x)\,dx = \infty\,.$

$$\text{III.} \quad \int_{x_0}^{\infty} \frac{x \lg x}{\lg \lg^{1+\varepsilon} x} \left[q(x) - \frac{1}{4\,x^2} \right] \mathrm{d}x = \infty\,.$$

$$\text{IV.} \quad \int_{x_0}^{\infty} L_n(x) \lg_{n+2}^{-1-\varepsilon} x \left[q(x) - \frac{1}{4}\, S_n(x) \right] \mathrm{d}x = \infty\,.$$

$$\text{V.} \quad \int_{x_0}^{\infty} x^{1-\varepsilon} q(x)\, \mathrm{d}x = \infty\,, \quad \text{M. Zlámal [42].}$$

$$\text{VI.} \quad \int_{x_0}^{\infty} L_n(x) \left[q(x) - \frac{1}{4}\, S_n(x) \right] \mathrm{d}x = \infty, \quad \text{M. Zlámal [42].}$$

$$\text{VII.} \quad L_n^2(x) \left[q(x) - \frac{1}{4} S_n(x) \right] \geqq \varepsilon\,, \quad \text{oder} \quad \liminf_{x \to \infty} L_n^2(x) \left[q(x) - \frac{1}{4} S_{n-1}(x) \right] > \frac{1}{4}\,,$$

P. Hartman [12], E. Hille [14], M. Laitoch [20].

$$\text{VIII.} \quad \liminf_{x \to \infty} x^2 q(x) > \frac{1}{4}\,, \quad \text{A. Kneser [18].}$$

$$\text{IX.} \quad \liminf_{x \to \infty} q(x) > 0, \quad \text{oder} \quad q(x) \geqq \varepsilon, \quad \text{C. Sturm [38],}$$

$$\lim_{x \to \infty} q(x) > 0, \quad \text{A. Kneser [18].}$$

$$\text{X.} \quad a) \quad \liminf_{x \to \infty} x \int_x^{\infty} q(t)\, \mathrm{d}t > \frac{1}{4}\,, \quad \limsup_{x \to \infty} x \int_x^{\infty} q(t)\, \mathrm{d}t < \infty \quad \text{(folgt aus (25));}$$

$$b) \quad q(x) \geqq 0, \ \liminf_{x \to \infty} x \int_x^{\infty} q(t)\, \mathrm{d}t > \frac{1}{4}\,, \quad \text{E. Hille [14, S. 245].}$$

Wir sollen noch die Tatsache erwähnen, daß die Differentialgleichung (1) für $z = p(x)\, y'$ in die Differentialgleichung

$$\left[\frac{1}{q(x)}\, z' \right]' + \frac{1}{p(x)}\, z = 0 \tag{27}$$

übergeht, wenn nur $p(x) > 0$, $q(x) > 0$ in J ist. Offensichtlich ist diese Differentialgleichung gleichzeitig mit der Differentialgleichung (1) oszillatorisch oder nichtoszillatorisch. Durch Anwendung der früher angeführten Sätze auf diese Differentialgleichung kann man neue hinreichende Bedingungen für die Oszillation der Lösungen von (1) ableiten. Zum Beispiel:

Satz 7. *Es sei* $p(x) > 0$, $q(x) > 0$ *für* $x \in J$.

Gibt es eine Funktion $g(x) \in C^1$, $g(x) > 0$ für $x \in J$ derart, daß

$$\int_{x_0}^{\infty} q(x)\,\mathrm{d}x = \infty\,, \quad \int_{x_0}^{\infty}\left[\frac{g^2(x)}{p(x)} - \frac{g'^2(x)}{q(x)}\right]\mathrm{d}x = \infty$$

gilt, so ist die Differentialgleichung (1) *oszillatorisch.*

Der Satz folgt unmittelbar durch Anwendung des Satzes 1 auf die Differentialgleichung (27).

Zur Betrachtung der oszillatorischen Eigenschaften der Lösungen von (1) benutzte die Differentialgleichung (27) schon R. L. Potter [31]. Auf diese Art hat sie folgenden Satz abgeleitet:

$$\left.\begin{array}{l} p(x) > 0\,, \quad q(x) > 0 \ \text{für}\ x \in J\,, \\ \int_{x_0}^{\infty} q(x)\,\mathrm{d}x = \infty\,, \\ \lim\limits_{x\to\infty} p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[p(x)\,q(x)]^{-\frac{1}{2}} > -2 \end{array}\right\} \Rightarrow (1)\ \textit{ist oszillatorisch.}$$

Die Behauptung folgt unmittelbar durch Anwendung des Satzes (24) auf die Differentialgleichung (27).

Wir führen noch die Ergebnisse von R. L. Potter [31] an, welche die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{h^2(x)}\,y = 0 \tag{28}$$

betreffen und welche aus den oben angeführten Sätzen folgen.

Wählt man in Satz 3 $f(x) = h^{\frac{1}{2}}(x)$, so bekommt man

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \infty\,, \\ \displaystyle\int_{x_0}^{\infty}\left[\frac{1}{h(x)} - \frac{h'^2(x)}{4h(x)} + \frac{h''(x)}{2}\right]\mathrm{d}x = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow (1)\ \textit{ist oszillatorisch.} \tag{29}$$

Die Voraussetzung (29) ist gewiß erfüllt, wenn $h'^2(x) \leqq k^2 < 4$ gilt.

Eine andere hinreichende Bedingung für die Oszillation der Lösungen von (28) ist $\lim\limits_{x\to\infty} h'(x) < 2$, die unmittelbar aus (29) folgt.

Die bißher angeführten hinreichenden Bedingungen für die Oszillation der Lösungen folgten aus dem Hauptsatz und zwar so, daß die Voraussetzung

(21) erfüllt wurde. Wir zeigen nunmehr, wie diese Voraussetzung verallgemeinert werden kann.

Wählt man im Hauptsatz $g(x) = [p(x)]^{\frac{1}{2}}$, so bekommt man: *Ist*

$$\lim_{x\to\infty} K(x) = \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{1}{p(x)} \exp\left\{2\int\limits_{x_0}^{x}\left[\int\limits_{x_0}^{t}\left\langle\frac{q(s)}{p(s)} - \frac{1}{4}\frac{p'^2(s)}{p^2(s)}\right\rangle ds - a\right] dt\right\} dx = \infty$$

für jede Konstante a, so ist (1) *oszillatorisch.*

$$\text{Bezeichnen } F(x) = \int\limits_{x_0}^{x}\left[\frac{q(t)}{p(t)} - \frac{1}{4}\frac{p'^2(t)}{4p^2(t)}\right] dt\,, \quad G(x) = \frac{1}{x}\int\limits_{x_0}^{x} F(t)\, dt\,,$$

$M[C_n, X_n] = E\{x: x \geqq X_n, G(x) \geqq C_n\}$, so ist

$$K(\infty) = \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{1}{p(x)} \exp\left\{2x\left[G(x) - a + a\,\frac{x_0}{x}\right]\right\} dx = \exp\{2ax_0\}\int\limits_{x_0}^{\infty}\frac{1}{p(x)}\,.$$

$$.\ \exp\{2x[G(x) - a]\}\, dx \geqq \exp\{2ax_0\}\int\limits_{X_n}^{\infty}\frac{1}{p(x)}\exp\{2x[G(x) - a]\}\, dx.\ \text{Ist}$$

$\inf\limits_{x\in J} \dfrac{1}{p(x)} \geqq \varepsilon > 0$ für $x \in J$, so ist offensichtlich $K(\infty) \geqq$

$\geqq \exp\{2ax_0\}\, \varepsilon \int\limits_{X_n}^{\infty} \exp\{2x[G(x) - a]\}\, dx \geqq \varepsilon \exp\{2ax_0\} \exp\{NX_n\}\, m(M[N, X_n])$ für $N > 2a$. Daraus ergibt sich

Satz 8. *Es sei* $p(x) \in C^1$, $\liminf\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{p(x)} > 0$. *Gibt es zwei Folgen von reellen Zahlen* $X_n \to \infty$, $C_n \to \infty$ *derart, daß*

$$\exp\{C_n X_n\}\, m(M[C_n, X_n]) \to \infty \quad \text{gilt}\,, \tag{30}$$

so ist die Differentialgleichung (1) *oszillatorisch.*

Diesen Satz hat C. R. Putnam [34] für den Fall $p(x) \equiv 1$ mit folgender Folgerung abgeleitet:

Wenn $\limsup\limits_{x\to\infty} G(x) = \infty$ *und* $\int\limits_{x_0}^{x} q(t)\, dt > -\exp\{Cx\}$ *für irgendeine Konstante C gilt, dann ist die Differentialgleichung* $y'' + q(x)y = 0$ *oszillatorisch.*

Es sei bemerkt, daß die Bedingung (30) gewiß erfüllt ist, wenn $m(M[C_n, X_0]) = \infty$ für jedes C_n gilt, besonders wenn $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{apr} G(x) = \infty$ oder $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = \infty$ ist. *Für* $p(x) \equiv 1$ ergibt sich hieraus:

Ist $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{apr} \frac{1}{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t} q(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \infty$, *so ist die Differentialgleichung* (26) *oszillatorisch.*[7])

A. WINTNER hat diesen Satz unter der Voraussetzung

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t} q(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \infty$ bewiesen [39].[8])

Es entsteht die Frage, ob zur Oszillation der Lösungen von (26) nicht die Bedingung $\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t} q(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \infty$, oder sogar $\limsup\limits_{x\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} q(t)\,\mathrm{d}t = \infty$ hinreichend ist. Man kann leicht zeigen, daß es nicht der Fall ist. Ein Gegenbeispiel hat schon P. Hartman [11] angegeben:

Es sei eine Riccatische Differentialgleichung $x' + x^2 + q(t) = 0$ gegeben, $q(t)$ stetig in $\langle t_0, \infty)$. Durch zweifache Integration über $t_0 \ldots t$ bekommt man

$$\frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} x(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} x^2(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s = \frac{1}{t}\,x(t_0)(t - t_0) - \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} q(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s\,. \tag{31}$$

Um das Gegenbeispiel zusammenzustellen, genügt es die Existenz einer

---

7) Den Fall, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} q(t)\,\mathrm{d}t$ nicht vorhanden ist, betrachtete auch P. Hartman. Eine interessante hinreichende Bedingung für die Oszillation der Lösungen von (26) folgt zum Beispiel aus Satz [11]:

Eine notwendige Bedingung für die Nichtoszillation der Lösungen von (26) *ist entweder* $\liminf\limits_{T\to 8} T^{-1}\int\limits_0^T\{\int\limits_0^t q(s)\,\mathrm{d}s\}\,\mathrm{d}t = -\infty$ *oder* $\lim\limits_{t\to\infty} T^{-1}\int\limits_0^T\{\int\limits_0^t q(s)\,\mathrm{d}s\}\,\mathrm{d}t = M < \infty$.

8) E. Gagliardo betrachtete den allgemeineren Fall und hat folgende Behauptung eingeführt:

Gibt es eine Funktion $f(x) > 0$, $f(x) \in C^2$ so, daß

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f^2(x)} = \infty\,,$$

$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t} Q(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \infty\,, \tag{*}$$

so ist die Differentialgleichung (26) *oszillatorisch.*

Der Beweis ist aber unrichtig, die Voraussetzung (*) soll die Form

$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{f^2(t)}} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{f^2(t)} \int\limits_{x_0}^{t} Q(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \infty$$

haben.

solchen Funktion mit der stetigen Ableitung zu beweisen, daß $\liminf\limits_{x\to\infty} X(t) = -\infty$ gilt, wobei $X(t)$ die linke Seite von (31) bezeichnet. Dann gilt nämlich wegen (31) $\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} q(u)\,du\,ds = \infty$ und die Differentialgleichung (26), wobei $q(t) = -x'(t) - x^2(t)$ ist, besitzt die nichtoszillatorische Lösung $y = \exp\{\int\limits_{t_0}^{t} x(s)\,ds\}$.

Es sei also $\{\varepsilon_n\}$ eine Nullfolge von positiven Zahlen, $\alpha = \frac{1}{e} > \varepsilon_n > 0$. Die Funktion $x(t)$ sei im Intervall $t_0 = 1 - \alpha \leqq t < \infty$ folgendermaßen definiert:

$$x(t) = \frac{1}{(n-t)\lg(n-t)} \quad \text{für} \quad n - \alpha \leqq t \leqq n - \varepsilon_n\,,$$

$$x(t) = 0 \quad \text{für} \quad n - \varepsilon_n \leqq t \leqq n + 1 - \alpha\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dann ist für $n - \varepsilon_n \leqq T < n + 1 - \alpha$

$$T^{-1}\int\limits_{t_0}^{T} x(t)\,dt = T^{-1}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{k-\alpha}^{k-\varepsilon_n}\frac{dt}{(k-t)\lg(k-t)} =$$

$$= -T^{-1}\sum_{k=1}^{n}\lg|\lg(k-t)|_{k-\alpha}^{k-\varepsilon_n} = -T^{-1}\sum_{k=1}^{n}\lg\lg\frac{1}{\varepsilon_k}\,.$$

Aus der Beziehung $\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{t_0}^{t} x(s)\,ds\,dt = \int\limits_{t_0}^{T}(T-s)\,x^2(s)\,ds$ folgt

$$J(T) = T^{-1}\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{t_0}^{t} x^2(s)\,ds\,dt = \int\limits_{t_0}^{T} x^2(s)\,ds - T^{-1}\int\limits_{t_0}^{T} s x^2(s)\,ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{k-\alpha}^{k-\varepsilon_n}\frac{dt}{(k-t)^2\lg^2(k-t)} - T^{-1}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{k-\alpha}^{k-\varepsilon_n}\frac{t\,dt}{(k-t)^2\lg^2(k-t)}\,.$$

Durch Substitution $k - t = s$ ergibt sich hieraus

$$J(t) = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\varepsilon_n}^{\alpha}\frac{ds}{s^2\lg^2 s} - T^{-1}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\varepsilon_k}^{\alpha}\frac{k-s}{s^2\lg^2 s}\,ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{T}\right)\int\limits_{\varepsilon_k}^{\alpha}\frac{ds}{s^2\lg^2 s} - T^{-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\lg s}\right]_{\varepsilon_k}^{\alpha} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{T}\right)\int\limits_{\varepsilon_k}^{\alpha}\frac{ds}{s^2\lg^2 s} + T^{-1}\sum_{k=1}^{n}(1 + \lg^{-1}\varepsilon_k)\,.$$

Es sei jetzt $T = n$; der Beitrag des Intervalles $n - \alpha \leqq t \leqq n - \varepsilon_n$ zu $X(t)$ ist gleich $\frac{1}{n}\left(1 + \lg^{-1} \varepsilon_n - \lg\lg \frac{1}{\varepsilon_n}\right)$. Durch die Wahl von ε_n kann man bei festem n leicht erreichen, daß dieser Ausdruck kleiner als eine vorgegebene Zahl ist. Der Beitrag des Intervalles $t_0 \leqq t < n - \alpha$ zu $X(t)$ hängt nur von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ ab und hat den Wert

$$- n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \lg\lg \frac{1}{\varepsilon_k} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \int_{\varepsilon_k}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}s}{s^2 \lg^2 s} + n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} (1 + \lg^{-1} \varepsilon_k).$$

Der letztere Ausdruck ist aber größer als $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \int_{\varepsilon_k}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}s}{s^2 \lg^2 s} - \lg\lg \frac{1}{\varepsilon_k} \right\}$, so daß er gegen ∞ strebt, weil $\int_{\varepsilon_k}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}s}{s^2 \lg^2 s} \sim \frac{1}{\varepsilon_k \lg^2 \varepsilon_k}$ und $\frac{1}{\varepsilon_k \lg^2 \varepsilon_k} - \lg\lg \frac{1}{\varepsilon_k} \to \infty$ für $\varepsilon_k \to 0$ gilt.

Zu jeder Folge $\{C_n\}$ von reellen Zahlen gibt es eine Nullfolge $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0$, so daß $X(t) \sim C_n$, für $T = n$ gilt. Wählt man $C_n = - n$, so gibt es eine Nullfolge $\{\varepsilon_n\}$, so daß $\liminf_{t\to\infty} X(t) = - \infty$ ist.

Bemerkung. Die Funktion $x(t)$ hat zwar abzählbar viele Unstetigkeiten, es liegt aber auf der Hand, wie man sie vermeiden kann um die Gültigkeit der Beziehung $\liminf_{t\to\infty} X(t) = - \infty$ beizubehalten.

Die Ergebnisse, die in den vorhergehenden Absätzen niedergelegt sind, wurden unter der Voraussetzung (10) oder (11) abgeleitet. Das ist eine natürliche Forderung dafür, daß $\lim_{x\to\infty} H(x)$ oder $\lim_{x\to\infty} K(x)$ bei beliebiger Konstante a unendlich groß ist. Es ist sogleich offenbar, daß man bei der Kenntnis der Konstante a die Voraussetzung (10) oder (11) durch eine allgemeinere ersetzen kann. Besonders einfach ist der Fall, wenn $a = 0$ ist.

Zur Betrachtung wird uns wieder der Zusammenhang zwischen den Differentialgleichungen (1) und (6) zum Nutzen.

Hilfsatz 1. *Ist die Differentialgleichung* (1) *nichtoszillatorisch und* $\int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{p(x)} = \infty$ *dann gibt es mindestens eine Lösung von* (1), *die in* J *unbeschränkt ist.*

Beweis. Weil die Differentialgleichung (1) nichtoszillatorisch ist, so gilt wegen (8) $\int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\varrho^2(t)\, p(t)} = \int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{p(t)[y_1^2(t) + y_2^2(t)]} < \infty$. Wäre jede Lösung von (1) beschränkt in J, zum Beispiel $y_i^2(t) \leqq M$, $i = 1, 2$, so müßte

$\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dt}{p(t)[y_1^2(t) + y_2^2(t)]} > \frac{1}{2} \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dt}{Mp(t)} = \infty$ sein, was wegen der Voraussetznug unmöglich ist.[9])

Hilfsatz 2. *Es sei* $\int\limits_{x_0}^{\infty} q(x)\,dx < \infty$, $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty$. *Ist die Differentialgleichung* (1) *nichtoszillatorisch und bedeutet* $y(x)$ *eine unbeschränkte Lösung von* (1), *die in* J *keine Nullstelle hat, so strebt die Funktion*

$$u(x) = p(x)\frac{y'(x)}{y(x)} \tag{32}$$

mit wachsendem x *gegen Null.*

Beweis. Die Funktion $u(x)$ genügt der Riccatischen Differentialgleichung $u' + \frac{u^2}{p(x)} + q(x) = 0$. Hieraus ergibt sich durch Integration zwischen den Grenzen x_0 und x

$$u(x) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{u^2(t)}{p(t)}\,dt = u(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} q(t)\,dt\,, \tag{33}$$

so daß der Grenzwert der linken Seite für $x \to \infty$ vorhanden ist. Weil $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{u^2(t)}{p(t)}\,dt$ eine wachsende Funktion ist, gilt entweder $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = c$ oder $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = -\infty$. Es kann aber nicht $u(x) < 0$ sein, denn es müßte wegen (32) $y'(x) < 0$ gelten, was der Voraussetzung widerspricht, daß $y(x)$ von oben unbeschränkt ist. Wäre $c > 0$, so würde die linke Seite von (33) gegen ∞ streben, also $\int\limits_{x_0}^{\infty} q(t)\,dt = -\infty$ im Widerspruch zu der Voraussetzung sein. Es gilt also $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$.

Satz 8. *Gibt es eine Funktion* $f(x) \in C^2$, $f(x) > 0$ *in* J *derart, daß*

$-\infty < \int\limits_{x_0}^{\infty} Q(x)\,dx < \infty$,

$$\lg^{-1} x \leqq P(x) \leqq \lg x\,, \tag{34}$$

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \exp\left\{-4\int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{P(t)} \int\limits_{t}^{\infty} Q(s)\,ds\,dt\right\} dx < \infty \tag{35}$$

gilt, dann ist die Differentialgleichung (1) *oszillatorisch.*

---

[9]) Aus dem Beweis folgt: *Ist für jede Punktmenge* $M \in J$, $m(M) < \infty$, *das Integral* $\int\limits_{J-M} \frac{dx}{p(x)}$ *divergent, dann gibt es mindestens eine Lösung von* (1), *so daß* $\lim\limits_{x\to\infty}$ apr sup $y(x) = \infty$. Besonders: *Ist* (26) *nichtoszillatorisch, dann gibt es mindestens eine Lösung* $y(x)$ *von* (26) *so, daß* $\lim\limits_{x\to\infty}$ apr sup $y(x) = \infty$.

Beweis. Die Differentialgleichung (1) sei nichtoszillatorisch. Dann ist auch die Differentialgleichung (6) nichtoszillatorisch. Bezeichnen wir $z(x)$ eine unbeschränkte Lösung von (6), die in J keine Nullstelle hat und setzen $u = P(x)\,\frac{z'}{z}$. Die Funktion $u(x)$ genügt der Differentialgleichung $u' + \frac{u^2}{P(x)} + Q(x) = 0$. Aus der Ungleichung (34) folgt $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{P(x)} = \infty$; durch Integration der vorangehenden Differentialgleichung über (x, ∞) ergibt sich nach Hilfsatz 2: $u(x) = \int\limits_x^{\infty} \frac{u^2(t)}{P(t)}\,\mathrm{d}t + \int\limits_x^{\infty} Q(t)\,\mathrm{d}t$. Bezeichnen $U(x) = \int\limits_x^{\infty} \frac{u^2(t)}{P(t)}\,\mathrm{d}t$ und $V(x) = \int\limits_x^{\infty} Q(t)\,\mathrm{d}t$, so ist $U'(x) + \frac{1}{P(x)}\,[U(x) + V(x)]^2 = 0$ und hieraus $U'(x) \leqq -\frac{4}{P(x)}\,U(x)\,V(x)$, so daß $0 \leqq U(x) \leqq C \exp\left\{-4\int\limits_{x_0}^{x} \frac{V(t)}{P(t)}\,\mathrm{d}t\right\}$ gilt, wobei $C = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{u^2(t)}{P(t)}\,\mathrm{d}t$. Daraus ergibt sich durch Integration $\int\limits_{x_0}^{x} U(t)\,\mathrm{d}t \leqq C \int\limits_{x_0}^{x} \exp \cdot \left\{-4\int\limits_{x_0}^{t} \frac{V(s)}{P(s)}\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t$. Es gilt also wegen (35) $\int\limits_{x_0}^{\infty} U(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, was mit der Bedingung $\int\limits_{x_0}^{\infty} x\,\frac{u^2(x)}{P(x)}\,\mathrm{d}x = D^2 < \infty$ äquivalent ist, wie man sich leicht durch partielle Integration überzeugen kann. Wählen wir x_0 derart, daß $D \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ist. Aus der Schwarzschen Ungleichung und aus (34) folgt

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{u(t)}{P(t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{t}\,u(t)}{\sqrt{P(t)}}\,\frac{1}{\sqrt{t}\,\sqrt{P(t)}}\,\mathrm{d}t \leqq \sqrt{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{tu^2(t)}{P(t)}\,\mathrm{d}t \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{tP(t)}} \leqq D\sqrt{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\lg t}{t}\,\mathrm{d}t} =$$

$$= \frac{D}{\sqrt{2}}\sqrt{[\lg^2 t]_{x_0}^{x}} \leqq \frac{1}{2}\lg\frac{x}{x_0}. \text{ Also } \int\limits_{x_0}^{x} \frac{u(t)}{P(t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{z'(t)}{z(t)}\,\mathrm{d}t = \lg\frac{z(x)}{z(x_0)} \leqq \frac{1}{2}\lg\frac{x}{x_0},$$

$$\text{so daß } z(x) \leqq \frac{z(x_0)}{\sqrt{x_0}}\sqrt{x} \text{ und endlich } \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{P(t)\,z^2(t)} \geqq \frac{x_0}{z^2(x_0)}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t \lg t} =$$

$= \frac{x_0}{z^2(x_0)}\,[\lg\lg t]_{x_0}^{x} \to \infty$. Das ist aber unmöglich, denn es kann nicht für alle Lösungen der Differentialgleichung (6) im nichtoszillatorischen Fall $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dt}{P(t)\, z^2(t)} = \infty$ gelten.

In der Tat, bezeichnet $z(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (6), die für $x < x_0$ keine Nullstelle hat, sagen wir $z(x) > 0$, so liefert $Z(x) = z(x) \cdot \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{P(t)\, z^2(t)}$ eine auf $z(x)$ unabhängige Lösung von (6). Nun ist notwendig $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dt}{P(t)\, z^2(t)} < \infty$; in der Tat, die Wronskische Determinante ist $Z(x)\, z'(x) - Z'(x)\, z(x) = -\frac{1}{P(x)}$, also $\left[\frac{z(x)}{Z(x)}\right]' = -\frac{1}{P(x)\, Z^2(x)}$ und durch Integration $\frac{z(x)}{Z(x)} = \text{Konst} - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{P(t)\, Z^2(t)}$. Wäre $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dt}{P(t)\, Z^2(t)} = \infty$, so würde die linke Seite gegen $-\infty$ streben, was unmöglich ist wegen $z(x) > 0$, $Z(x) > 0$ für $x \in J$. Damit ist der Satz bewiesen.

Für $p(x) \equiv 1, f(x) \equiv 1$ hat diesen Satz P. Hartman [10] bewiesen. A. Wintner [40] hatte ihn unter der Voraussetzung $\int\limits_{x_0}^{\infty} \exp\{-2 \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{s}^{\infty} q(t)\, dt\, ds\}\, dx < \infty$ bewiesen.

In diese Gruppe von Bedingungen, die zur Oszillation der Lösungen von (1) hinreichen, gehört auch die von B. A. Кондратьев [19], die ein Sonderfall von folgendem Satz ist.

Satz 9.. *Es sei* $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty$. *Gibt es eine Funktion* $g(x) \in C^1$, $g(x) > 0$ *für* $x \in J$, *so daß*

$$\int\limits_{x_0}^{x} [q(x)\, g^2(x) - p(x)\, g'^2(x)]\, dx \geqq M > -\infty\,, \tag{36}$$

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{G_+^2(x)}{p(x)\, g^2(x)}\, dx = \infty\,, \qquad \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{G_-^2(x)}{p(x)\, g^2(x)}\, dx = \infty\,, \quad \textit{wobei}$$

$$G(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \{g'^2(t)\, p(t) - g^2(t)\, q(t)\}\, dt + C - p(x)\, g'(x)\, g(x)\,,$$

$G_+ = \max(0, G)$, $G_- = \min(0, G)$, *dann ist die Differentialgleichung* (1) *oszillatorisch.*

Beweis. Nehmen wir an, daß die Differentialgleichung (1) nichtoszillatorisch ist. Man kann sich ähnlich, wie im Beweise des Hauptsatzes überzeugen, daß wieder die Gleichung (9) gilt. Wäre für jede Funktion $u(x) = p(x)\,\dfrac{y'(x)}{y(x)}$, wobei $y(x)$ eine Lösung von (1) ist, $y(x) > 0$, $\limsup\limits_{x\to\infty} y(x) = \infty$, das Integral $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty}\left[\frac{g(t)\,u(t)}{\sqrt{p(t)}} - \sqrt{p(t)}\,g'(t)\right]^2 dt$ divergent, so müßte wegen (36) und (9) $u(x) < 0$ sein, also $y'(x) < 0$, was unmöglich ist. Es gibt also $u(x)$ so, daß die Funktion

$$J(x) = \int_{x_0}^{x}\left[\frac{g(t)\,u(t)}{\sqrt{p(t)}} - \sqrt{p(t)}\,g'(t)\right]^2 dt$$

in J beschränkt ist. Nach (9) ist

$$J(x) = \int_{x_0}^{x}\left\{\frac{1}{\sqrt{p(t)}\,g(t)}\,[a + G(t) - J(t)]\right\}^2 dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x}\left\{\frac{1}{g(t)\sqrt{p(t)}}\left\langle b + \int_{t}^{\infty}\left[\frac{g(s)\,u(s)}{\sqrt{p(s)}} - \sqrt{p(s)}\,g'(s)\right]^2 ds + G(t)\right\rangle\right\}^2 dt\,,$$

wobei

$$b = a - \int_{x_0}^{\infty}\left[\frac{g(x)\,u(x)}{\sqrt{p(x)}} - \sqrt{p(x)}\,g'(x)\right]^2 dx \quad \text{ist.}$$

Es sei $b \geqq 0$. Dann ist $J(x) \geqq \displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{G_+^2(t)}{g^2(t)\,p(t)}\,dt \to \infty$, bei $b < 0$ $J(x) \geqq \displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{G_-^2(t)}{g^2(t)\,p(t)}\,dt \to \infty$. Das ist aber unmöglich, weil $J(x)$ in J beschränkt ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Durch die Wahl $g(x) = x^{\frac{1}{2}\alpha}$ folgt aus diesem Satz eine hinreichende Bedingung von B. A. Кондратьев [19]:

Ist für irgendein $\alpha < 1$ $\displaystyle\int_{x_0}^{x} q(x)\,x^{\alpha}\,dx \geqq M > -\infty$, $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty}\frac{g_+^2(x)}{x^{\alpha}}\,dx = \infty$, $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty}\frac{g_-^2(x)}{x^{\alpha}}\,dx = \infty$, *wobei* $g(x) = -\displaystyle\int_{x_0}^{x} q(x)\,x^{\alpha}\,dx + \left[\frac{\alpha^2}{4(\alpha-1)} - \frac{\alpha}{2}\right]x^{\alpha-1}$, *dann ist die Differentialgleichung* (26) *oszillatorisch.*

II

In dem letzten Absatz zeigen wir noch, wie man zur Herleitung der zur Oszillation der Lösungen von (1) hinreichenden Bedingungen die Umformung in die Polarkoordinaten benutzen kann. Zum erstenmal findet man diese Umformung bei H. PRÜFER [32].

Wegen der Einfachheit werden wir in diesem Absatz die hinreichenden Bedingungen für die Differentialgleichung (6) formulieren. Aus der Bemerkung auf Seite 338 folgt unmittelbar, wie man aus ihnen leicht die Sätze ableiten kann, welche die Differentialgleichung (1) betreffen.

Ersetzen wir die Differentialgleichung (6) durch das System

$$P(x)\, z' = u\,, \quad u' = -\,Q(x)\, z\,. \tag{37}$$

Durch $z = \varrho \cos \varphi$, $u = \varrho[v \sin \varphi + w \cos \varphi]$ geht (37) in das System

$$v\varphi' + \frac{v^2}{P} \sin^2 \varphi + \left(\frac{2vw}{P} + v'\right) \sin \varphi \cos \varphi + \left(w' + \frac{w^2}{P} + Q\right) \cos^2 \varphi = 0\,, \tag{38}$$

$$v\varrho' + \varrho \left[\left(\frac{vw}{P} + v'\right) \sin^2 \varphi + \left(w' + \frac{w^2}{P} + Q - \frac{v^2}{P}\right) \sin \varphi \cos \varphi - \frac{vw}{P} \cos^2 \varphi\right] = 0$$

über.

Ist $v(x) \neq 0$ für $x \in J$, so kann man die Differentialgleichung (38) auf

$$\varphi' = -\frac{v}{P}\left[\sin \varphi + \left(\frac{Pv'}{2v} + w\right) \cos \varphi\right]^2 + \left[\frac{P}{4v^2}\left(v' + \frac{2vw}{P}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{v}\left(w' + \frac{w^2}{P} + Q\right)\right] \cos^2 \varphi \tag{39}$$

bringen.

Setzt man $\psi(x) = \operatorname{arc\,tg}\left[w(x) + \frac{1}{2}\frac{P(x)\, v'(x)}{v(x)}\right]$, $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$, so geht die Differentialgleichung (39) in

$$\varphi' = -\left[\frac{v}{P} + \frac{P}{4v}\left(v' + \frac{2vw}{P}\right)^2\right] \sin^2 (\varphi + \psi) +$$
$$+ \left[\frac{P}{4v^2}\left(v' + \frac{2vw}{P}\right)^2 - \frac{1}{v}\left(w' + \frac{w^2}{P} + Q\right)\right] \cos^2 \varphi \quad \text{über.} \tag{40}$$

Bezeichnen wir die rechte Seite von (40) $\delta(x, \varphi)$ und nehmen wir

$$\frac{P}{4v}\left(v' + \frac{2vw}{P}\right)^2 - \left(w' + \frac{w^2}{P} + Q\right) \geqq 0 \tag{41}$$

an. Dann ist $\delta(x, \varphi) \leqq 0$, so daß der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = m$ (es kann $m = -\infty$ sein) für jede Lösung $\varphi(x)$ von (40) vorhanden ist. Folglich gilt $\delta(x, \varphi) = \delta(x, \varphi + n\pi)$, $n = 1, 2, \ldots$ und es genügt, die Differentialgleichung (40) nur im Intervall $-\frac{1}{2}\pi \leqq \varphi < \frac{1}{2}\pi$, $x_0 \leqq x < \infty$ zu betrachten. Gleichzeitig sieht man, daß entweder $m = -\infty$ für jede Lösung φ von (40) ist, oder es gibt mindestens eine Lösung $\varphi(x)$ derart, daß $-\frac{1}{2}\pi \leqq \lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) < \frac{1}{2}\pi$ gilt. Hieraus ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

a) Die Differentialgleichung (6) ist dann und nur dann oszillatorisch, wenn es mindestens eine Lösung $\varphi(x)$ der Differentialgleichung (40) gibt, für welche $m = -\infty$ gilt.

b) Die Differentialgleichung (6) ist dann und nur dann oszillatorisch, wenn es keine Lösung $\varphi(x)$ der Differentialgleichung (40) gibt, für welche $\frac{1}{2}\pi \leqq m < \frac{1}{2}\pi$ gilt.

Satz 10. *Gibt es zwei Funktionen $v(x)$, $w(x) \in C^1$, $v(x) > 0$ für $x \in J$ derart, daß* (40) *und*

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{v(x)}{P(x)} \, dx = \infty \,, \quad w(x) + \frac{P(x)\, v'(x)}{2v(x)} \to -\infty \tag{42}$$

gilt, so ist die Differentialgleichung (6) *oszillatorisch.*

Beweis. Es sei $\varphi(x)$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung (39). Ist $\varphi(\infty) = -\infty$, so ist (6) oszillatorisch. Es sei also $\varphi(\infty) = m (\neq -\infty)$. Dann gibt es $\bar{\varphi}(x)$ derart, daß $-\frac{1}{2}\pi \leqq \bar{\varphi}(\infty) < \frac{1}{2}\pi$. Ist $\cos \bar{\varphi}(\infty) \neq 0$, so ist wegen (42) und (39) $\bar{\varphi}(\infty) = -\infty$. Ist $\cos \bar{\varphi}(\infty) = 0$, so ist $\sin \bar{\varphi}(\infty) = -1$ und wegen (39) ist wieder $\bar{\varphi}(\infty) = -\infty$. Die Differentialgleichung (6) ist also oszillatorisch.

Bemerkung. Die Bedingungen (42) kann man ersichtlich durch

$$\liminf_{x \to \infty} \operatorname{apr} \frac{v(x)}{P(x)} > 0, \quad \lim_{x \to \infty} \operatorname{apr} \left[w(x) + \frac{P(x)\, v'(x)}{2v(x)} \right] = -\infty \text{ ersetzen.}$$

Satz 11. *Gibt es zwei Funktionen $v(x)$ und $w(x)$ mit stetigen Ableitungen, $v(x) > 0$ derart, daß*

$$\liminf_{x \to \infty} \operatorname{apr} \left[\frac{v(x)}{P(x)} + \frac{P(x)}{4v(x)} \left\{ v'(x) + \frac{2v(x) w(x)}{P(x)} \right\}^2 \right] = l > 0 \tag{43}$$

gilt und

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{apr} \left[w(x) + \frac{P(x)\, v'(x)}{2v(x)} \right] \text{ nicht vorhanden ist}\,, \tag{44}$$

dann ist die Differentialgleichung (6) *oszillatorisch.*

In der Tat gebe es $\varphi(x)$ derart, daß $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = m$ gilt. Nach (44) ist $\lim\limits_{x\to\infty}$ apr . . $\psi(x)$ nicht vorhanden, so daß bei passender Konstante C die Ungleichung $\sin^2(\varphi + \psi) \geqq C > 0$ auf irgendeiner Menge $M_1 \in J$, $m(M_1) = \infty$ gilt. Wegen (43) ist $\frac{v}{P} + \frac{P}{4v}\left(v' + \frac{2vw}{P}\right)^2 > l$ auf einer Menge M_2, die von der Form $J - N$, $m(N) < \infty$ ist. Es gilt also $\varphi' > -K^2$ bei passender Konstante K auf der Punktmenge $M_2 \cap M_1$, $m(M_2 \cap M_1) = \infty$, was unmöglich ist, denn es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = m$.

Die Bedingung (41) kann man dadurch befriedigen, daß man $v(x) \equiv 1$, $w(x) = -\int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\,dt$ ersetzt. Die Differentialgleichung (39) liefert

$$\varphi' = -\frac{1}{P(x)}\left[\sin\varphi - \int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\,dt \cos\varphi\right]^2 \quad (45)$$
[10])

und die Differentialgleichung (40)

$$\varphi' = -\frac{1}{P(x)}\left[1 + \left\{\int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\,dt\right\}^2\right]\sin^2(\varphi + \psi), \quad (46)$$

wobei $\psi = \psi(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(-\int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\,dt\right)$ ist.

Hieraus ergibt sich unmittelbar die in Satz 3 enthaltene hinreichende Bedingung mit allen Folgerungen, wie gezeigt worden ist.

Folgerung. *Ist* $\lim\limits_{x\to\infty}$ apr inf $\frac{1}{P(x)} > 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty}$ apr $\int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\,dt = \infty$, *oder nicht vorhanden, dann ist die Differentialgleichung* (6) *oszillatorisch.*

Aus der in der Einleitung angeführten Bemerkung über den Zusammenhang zwischen den Grenzwerten und approximativen Grenzwerten folgt unmittelbar:

Wenn $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\,dt$ *nicht vorhanden ist,* $\lim\limits_{x\to\infty}$ apr inf $\frac{1}{P(x)} > 0$ *gilt und die Funktion* $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\,dt$ *irgendeine der Bedingungen* **A, B, C** oder **D** *erfüllt (es handelt sich um die in der Einleitung angeführten Bedingungen), so ist die Differentialgleichung* (6) *oszillatorisch.*

Mit diesen Untersuchungen beschäftigten sich für $p(x) \equiv 1$ die Verfasser C. Olech, Z. Opial, T. Ważewski [29].

[10]) Die Umformung der Differentialgleichung (1) für $p(x) \equiv 1$ in (45) findet man schon in der Abhandlung [37] von И. М. Собол.

Den angeführten Satz mit der Bedingung C hat P. B. Петропавловская [30] bewiesen mit der Folgerung:

Ist

$$q(x) \geqq M > -\infty \tag{47}$$

$q(x) \equiv$ Konst *und* $\int\limits_{x_0}^{x} q(t)\, dt$ *eine fastperiodische Funktion, dann ist die Differentialgleichung* (1) *oszillatorisch.*

Die Gültigkeit dieser Behauptung hat И. М. Собол [37] ohne der Voraussetzung (47) bewiesen.

Für den Fall $p(x) \neq$ Konst. hat M. Zlámal [42] bewiesen:

Es sei $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty$, $p(x)\, q(x) \geqq M > -\infty$, $\limsup\limits_{x\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} q(t)\, dt = \infty$. *Dann ist die Differentialgleichung* (1) *oszillatorisch.*

R. Moore [26]: *Es sei*

$$p(x)\, q(x) \leqq M < \infty\,. \tag{48}$$

Dann ist die Bedingung $\limsup\limits_{x\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} q(t)\, dt = \infty$ *hinreichend und* $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty$ *notwendig dafür, daß die Differentialgleichung* (1) *oszillatorisch ist.*

Satz 12. *Es sei*

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \text{apr inf} \int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\, dt = l_0\,, \quad \lim_{x\to\infty} \text{apr inf} \frac{1}{P(x)} > 0\,, \\ &\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{1}{P(x)} \left[l_0 - \int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\, dt \right]_+^2 dx = \infty\,, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

dann ist die Differentialgleichung (6) *oszillatorisch.*

Beweis. Es gebe eine Lösung der Differentialgleichung (46) derart, daß $\varphi(\infty) = m \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ gilt. Setzt man $\operatorname{arc\,tg} l_0 = m_0 = \lim\limits_{x\to\infty} \text{apr inf}\, [-\psi(x)]$, so ist für $m \in \langle -\frac{1}{2}\pi, m_0)$ wegen (46) $\varphi(x) \to -\infty$, so daß die Voraussetzung falsch ist.

Für $m \in \langle m_0, \frac{1}{2}\pi)$ ergibt sich durch Integration von (45)

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{P(t)} \left[\sin\varphi - \int\limits_{x_0}^{t} Q(s)\, ds \cos\varphi \right]^2 dt =$$

$$= \varphi(x_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{\cos^2 \varphi}{P(t)} \left[\operatorname{tg} \varphi - \int_{x_0}^{t} Q(s)\, ds \right]^2 dt \leqq$$

$$\leqq \varphi(x_0) - K \int_{x_0}^{x} \frac{1}{P(t)} \left[\operatorname{tg} m + o(1) - \int_{x_0}^{t} Q(s)\, ds \right]^2 dt ,$$

wobei K eine passende positive Konstante, $o(1) > 0$ ist.

Der letztere Ausdruck ist aber von oben durch $\varphi(x_0) - K \int_{x_0}^{x} \frac{1}{P(x)} \Big[\operatorname{tg} m - \int_{x_0}^{t} Q(s)\, ds \Big]_+^2 dt \to -\infty$ beschränkt, so daß $\varphi(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$ gilt. Die Differentialgleichung (6) ist also oszillatorisch, was zu beweisen war.

Bemerkung. Die Voraussetzungen (49) sind gewiß erfüllt, wenn $\liminf\limits_{x\to\infty} \frac{1}{P(x)} > 0, \liminf\limits_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} Q(t)\, dt = l_0^*$,

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{P(x)} \left[l_0^* - \int_{x_0}^{x} Q(t)\, dt \right]_+^2 dx = \infty \quad \text{gilt.}$$

Diese Ergebnisse sind für den Fall $f(x) \equiv 1$, $p(x) \equiv 1$ in der Abhandlung [29] eingeführt worden.

Wählt man in der Differentialgleichung (38) $w(x) = -\frac{P(x)\, v'(x)}{2v(x)}$, so kann man sie in der Form

$$\varphi' = -\frac{v(x)}{P(x)} \sin^2 \varphi - \frac{1}{v(x)} \left[Q(x) + \frac{1}{P(x)} \left\{ \frac{P(x)\, v'(x)}{2v(x)} \right\}^2 - \left\{ \frac{P(x)\, v'(x)}{2v(x)} \right\}' \right] \cos^2 \varphi ,$$

oder

$$\varphi' = -\frac{1}{v(x)} \left[Q(x) + \frac{P(x)\, v'^2(x)}{4v^2(x)} - \left\{ \frac{P(x)\, v'(x)}{2v(x)} \right\}' \right] -$$
$$- \left[\frac{v(x)}{P(x)} - \frac{1}{v(x)} \left\{ \frac{P(x)\, v'^2(x)}{4v^2(x)} - \left(\frac{P(x)\, v'(x)}{2v(x)} \right)' + Q(x) \right\} \right] \sin^2 \varphi$$

schreiben.

Hieraus ergibt sich leicht

Satz 13. *Gibt es eine Funktion $v(x) \in C^2$, $v(x) > 0$ für $x \in J$ derart, daß*

$$\frac{v(x)}{P(x)} - \frac{1}{v(x)} \left[\frac{P(x)\, v'^2(x)}{4v^2(x)} - \left\{ \frac{P(x)\, v'(x)}{2v(x)} \right\}' + Q(x) \right] \geqq 0 ,$$