Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

O JEDNEJ APLIKÁCII REŤAZOVÝCH ZLOMKOV V TEORII NEKONEČNÝCH RADOV

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

DT: 517.52.001, 511.138

(Došlo dne 27. srpna 1958)

V práci [1] vyšetruje J. D. HILL niektoré zaujímavé vlastnosti čiastočných radov. V tomto článku ukážeme, že analogické výsledky možno dostať aj u radov obecnejšej štruktúry, ak použijeme k naším úvahám niektoré základné vlastnosti reťazových zlomkov.

Úvod

Ku štúdiu vlastností čiastočných radov radu $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ používa J. D. HILL dyadické rozvoje reálnych čísel intervalu $(0, 1\rangle$. Každému $x = 0.\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \ldots \alpha_n \ldots$ (vpravo máme dyadický rozvoj čísla x obsahujúci nekonečne mnoho jedničiek), $x \in (0, 1\rangle$, priradí čiastočný rad $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k$ radu $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

V týchto úvahách možno ísť v určitom smere ďalej. Predpokladajme, že pre každé $k = 1, 2, 3, \ldots$ je daná nekonečná postupnosť reálnych čísel

$$M_k = (c_1^k, c_2^k, c_3^k, \ldots, c_n^k, \ldots)$$

a nech $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ je rad s reálnymi členmi. V tomto článku budeme sa zaoberať štúdiom vlastností množiny všetkých radov tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k u_k$, kde ε_k je pre každé $k = 1, 2, 3, \ldots$ členom postupnosti M_k, tj. $\varepsilon_k = c_r^k$ pre vhodné r.

I

V tejto časti práce budeme predpokladať, že je daný rad $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ s reálnymi členmi. Nech je ďalej pre každé $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$M_k = (c_1^k, c_2^k, c_3^k, \ldots, c_n^k, \ldots)$$

nekonečná postupnosť reálnych čísel. Pri pevnom k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) položme $A_k = \sup\limits_{n=1,2,3,\ldots} |c_n^k|$ a nech je splnená podmienka

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k |u_k| < \infty . \tag{1}$$

Táto podmienka je splnená napríklad vtedy, ak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ absolútne konverguje a $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená.

Označme ďalej znakom W množinu všetkých súčtov radov tvaru $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k u_k$, kde ε_k je členom postupnosti M_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$),

Nech x je iracionálne číslo intervalu $(0, 1)$, potom, ako je známe (pozri [2] str. 20) možno x vyjadriť jednoznačne pomocou nekonečného reťazového zlomku s prirodzenými členmi

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots + \cfrac{1}{n_l + \cdots}}}} . \tag{2}$$

Definujme teraz na $\langle 0, 1\rangle$ funkciu φ takto: Pre x iracionálne (2) kladieme: $\varphi(x) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} c_{m_l}^l u_l$. Rad vpravo vzhľadom na (1) absolútne konverguje. Ďalej položme $\varphi(0) = 0$ a pre x racionálne, $x \in (0, 1\rangle$, kladieme

$$\varphi(x) = \sum_{l=1}^{r} c_{m_l}^l u_l, \text{ ak } x = \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cdots + \cfrac{1}{m_r}}} , \tag{3}$$

pri tom vpravo máme (ukončený) rozvoj čísla x v reťazový zlomok (pozri [2] str. 19).

Zrejme je množina všetkých hodnôt funkcie φ na množine všetkých iracionálnych čísel intervalu $\langle 0, 1\rangle$ totožná s množinou W. Ak pre každé k je množina členov postupnosti M_k kompaktná, potom aj W je kompaktná a ak okrem toho je $u_l \neq 0$ ($l = 1, 2, 3, \ldots$) a pre nekonečne mnoho k je množina členov postupnosti M_k aspoň dvojbodová, potom je W dokonca perfektná (pozri [3]).

Veta 1. *Funkcia φ je integrácie schopná v zmysle Riemannovom na intervale $\langle 0, 1\rangle$.*

Dôkaz. Pre pevne zvolené prirodzené k položme $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{k} c_{n_l}^l u_l$ pre x iracionálne (2), ďalej $\varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{k} c_{m_l}^l u_l$ pre x racionálne (3), ak $k \leqq r$, a konečne $\varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{r} c_{m_l}^l u_l$ pre x racionálne (3), ak $k > r$.

Takto definovaná funkcia $\varphi_k(x)$ je zrejme ohraničená na intervale $\langle 0, 1\rangle$, keďže pre každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ máme podľa (1)

$$|\varphi_k(x)| \leqq \sum_{l=1}^{\infty} A_l |u_l| < \infty .$$

Funkcia φ_k je spojitá na každom otvorenom intervale k-teho poradia (pozri [2] str. 50) a teda množina všetkých bodov nespojitosti funkcie φ_k na $\langle 0, 1\rangle$ je spočetná. Teda φ_k je integrácie schopná v zmysle Riemannovom na intervale $\langle 0, 1\rangle$. To platí pre každé $k = 1, 2, 3, \ldots$. Uvážme ďalej, že pre každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$|\varphi(x) - \varphi_k(x)| \leqq \sum_{l=k+1}^{\infty} A_l |u_l| = o(1)$$

a tedy postupnosť $\{\varphi_k\}_1^\infty$ rovnomerne konverguje k funkcii φ na intervale $\langle 0, 1\rangle$. Podľa známych viet o Riemannovom integráli dostávame správnosť tvrdenia vety.

Poznámka 1. Z dôkazu predošlej vety vyplýva, že bodmi nespojitosti funkcie φ na intervale $\langle 0, 1\rangle$ môžu byť len racionálne čísla tohoto intervalu.

Poznámka 2. Dokázaná veta je analogon vety 1 z citovanej Hillovej práce. Integrál $\int_0^1 \varphi \, dx$ možno vzhľadom na definíciu funkcie φ pokladať za akýsi aritmetický priemer množiny W. V práci [1] sa ukazuje, že aritmetický priemer (analogicky definovaný ako v našom prípade) množiny všetkých súčtov všetkých čiastočných radov daného absolútne konvergentného radu $s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ je $\frac{s}{2}$. V našom prípade, ako sa dá očakávať, hodnota aritmetického priemeru množiny W (tj. integrálu $\int_0^1 \varphi \, dx$) už obecne nie je $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k$.*) Výpočet integrálu $\int_0^1 \varphi \, dx$ už aj pri dosť špeciálnych voľbách postupností M_k robí značné ťažkosti.

Príklad. Uvedieme tento jednoduchý príklad. Nech $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ je absolútne konvergentný rad, nech $M_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ a pre $k = 2, 3, 4, \ldots$ nech je $M_k = (1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Potom pre $x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ je $n_1 = k$

*) Všimnime si, že dokonca o konvergencii radu $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ nečiníme žiadne predpoklady.

(pozri [2] str. 49) a tedy $c_{n_1}^1$ je 1 pre nepárne k, 0 pre párne k. Ostatné $c_{n_l}^l$ $(l > 1)$ sú 1. Teda

$$\int_0^1 \varphi_n \mathrm{d}x = \sum_{l=2}^{n} u_l + u_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right).$$

Keďže

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1/n}{k/n};$$

podľa definície integrálu je limita tohoto výrazu pre $n \to \infty$ rovna $\int_1^2 x^{-1} \mathrm{d}x =$ $= \log 2$. Teda

$$\int_0^1 \varphi_n \mathrm{d}x = u_1 \log 2 + \sum_{l=2}^{n} u_l,$$

$$\int_0^1 \varphi \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n \mathrm{d}x = u_1 \log 2 + \sum_{l=2}^{\infty} u_l$$

(pozri dôkaz vety 1.).

Keby sme volili $M_1 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ a pre $k = 2, 3, 4, \ldots$ $M_k =$ $= (1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ dostali by sme podobným postupom

$$\int_0^1 \varphi \mathrm{d}c = (1 - \log 2)\, u_1 + \sum_{l=2}^{\infty} u_l.$$

V oboch prípadoch je splnenie podmienky (1) evidentné.

II

V tejto časti práce budeme sa zaoberať štúdiom vlastností radov už zavedeného typu s tým rozdielom, že podmienku (1) nahradíme inou podmienkou. Budeme teda študovať vlastnosti množiny všetkých radov tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k u_k$, kde ε_k je pre $k = 1, 2, 3, \ldots$ členom danej postupnosti reálnych čísel

$$M_k = (c_1^k, c_2^k, c_3^k, \ldots, c_n^k, \ldots).$$

Zavedieme toto stručné vyjadrovanie:

Budeme hovoriť, že postupnosť $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna vzhľadom na rad $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, ak existuje postupnosť reálnych čísel $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, ε_k je člen postupnosti M_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, s vlastnosťou $\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k = +\infty$ a postupnosť $\{\varepsilon_k'\}_1^{\infty}$, ε_k' je člen postupnosti $M_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$, s vlastnosťou $\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k' u_k = -\infty$.

Podmienku (1) nahradíme v tejto časti práce podmienkou: Postupnosť $\{M_k\}_1^\infty$ je normálna vzhľadom na rad $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (4). Táto podmienka je napríklad splnená vtedy, ak (4) je neabsolútne konvergentný rad a každá z postupností M_k obsahuje čísla 0, 1.

Analogicky, ako v prvej časti práce definujeme pre každé prirodzené k funkciu $\varphi_k(x)$ a každému iracionálnemu číslu $x \in (0, 1)$,

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots + \cfrac{1}{n_l + \cdots}}}$$

priradíme formálne nekonečný rad

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_{n_l}^l u_l \tag{5}$$

V ďalšom ukážeme, že v istom topologickom zmysle majú prevahu tie rady tvaru (5), ktoré oscilujú medzi ∞ a $-\infty$.

Interval $\langle 0, 1 \rangle$ pokládáme v ďalšom za metrický priestor s Euklidovskou metrikou $\varrho = \varrho(x, y) = |x - y|$.

Veta 2. *Nech* (4) *je rad s reálnymi členmi. Nech $\{M_k\}_1^\infty$ je normálna postupnosť vzhľadom na rad* (4) *Potom pre všetky $x \in \langle 0, 1 \rangle$ s výnimkou bodov množiny prvej kategorie platí*

$$\limsup_{k\to\infty} \varphi_k(x) = +\infty\,, \quad \liminf_{k\to\infty} \varphi_k(x) = -\infty\,. \tag{6}$$

D ô k a z. Nech S značí množinu všetkých iracionálnych čísel intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, R množinu všetkých racionálnych čísel tohoto intervalu. Uvažujme metrický priestor (S, ϱ), kde $\varrho = \varrho(x, y) = |x - y|$ (Euklidovská metrika). Priestor (S, ϱ) je zrejme množinou druhej kategorie v sebe. Keďže pri pevnom n všetky body nespojitosti funkcie φ_n ležia v R, je φ_n spojitá na (S, ϱ) (presne rečeno jej parciálna funkcia $(\varphi_n)_S$ je spojitá na (S, ϱ)). Pri m prirodzenom pevnom položme $B_m = \underset{x \in S\; n=1,2,3,\ldots}{E} \varphi_n(x) \leqq m$. B_m je vzhľadom na predošlú vlastnosť funkcie φ_n uzavretou množinou v (S, ϱ). Ukážeme, že B_m je riedka v (S, ϱ). Treba ukázať, že $S - B_m$ je hustá v (S, ϱ), tj. že každá guľa v (S, ϱ) obsahuje body množiny $S - B_m$. Nech teda je $\Omega'(x_0, \delta)$ guľa v (S, ϱ), tj.

$$\Omega'(x_0, \delta) = \Omega(x_0, \delta) \cap S\,,$$

kde

$$x_0 \in S\,, \quad \Omega(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\,.$$

Pre dosť veľké l už $\Omega(x_0, \delta)$ obsahuje nejaký interval l-tého poradia (pozri [2] str. 50). Podržme toto l pevne. Zostrojme teraz postupnosť intervalov $\{J_i\}_{l+1}^{\infty}$ takto:

Označme $K = c^1_{n_1}u_1 + \ldots + c^l_{n_l}u_l$, při čom $J_l = E\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, l \\ n_1, n_2, \ldots, n_l \end{pmatrix}$ (označenie pozri [2] str. 53). Podľa predpokladu vety existuje postupnosť reálnych čísel $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ taká, že

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k = \infty, \tag{7}$$

pri tom je ε_k členom postupnosti M_k. Ak $\varepsilon_{l+1} = c_s^{l+1}$, potom zvolíme

$$J_{l+1} = E\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, l, l+1 \\ n_1, n_2, \ldots, n, s \end{pmatrix}.$$

Ak sme už zvolili $J_{l+k} \subset J_l$, pri čom

$$J_{l+k} = E\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, l+k \\ n_1, n_2, \ldots, n_{l+k} \end{pmatrix},$$

potom $J_{l+k+1} \subset J_{l+k}$ zvolíme takto:

Ak $\varepsilon_{l+k+1} = c_r^{l+k+1}$, potom kladieme:

$$J_{l+k+1} = E\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, l, \ldots, l+k, l+k+1 \\ n_1, n_2, \ldots, n_l, \ldots, n_{l+k}, r \end{pmatrix}.$$

Zvoľme teraz $k \geqq 1$ také, aby

$$\varepsilon_{l+1}u_{l+1} + \varepsilon_{l+2}u_{l+2} + \ldots + \varepsilon_{l+k}u_{l+k} > m - K,$$

to je vzhľadom na (7) možné. Potom pre iracionálne x, $x \in J_{l+k}$ máme

$$\varphi_{l+k}(x) = K + \varepsilon_{l+1}u_{l+1} + \ldots + \varepsilon_{l+k}u_{l+k} > m,$$

takže $x \in S - B_m$. Položme teraz $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$, teda B je množina prvej kategorie v (S, ϱ). Zrejme

$$B = \underset{x \in S}{E} \limsup_{n\to\infty} \varphi_n(x) < \infty .$$

Úplne rovnako by sme ukázali, že aj množina

$$C = \underset{x \in S}{E} \liminf_{n\to\infty} \varphi_n(x) > -\infty$$

je množinou prvej kategorie v (S, ϱ) a tak aj množina $B \cup C$ je prvej kategorie v (S, ϱ) a teda aj prvej kategorie v $(\langle 0, 1\rangle, \varrho)$. Keďže R je spočetná, je aj množina $P = B \cup C \cup R$ prvej kategorie v $\langle 0, 1\rangle$. P je však zrejme množinou všetkých tých $x \in \langle 0, 1\rangle$, pre ktoré neplatia súčasne obe rovnosti (6). Tým je veta dokázaná.