ственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ кратностей $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Пусть $\boldsymbol{u}$ — собственный вектор (столбец) матрицы $\boldsymbol{A}$, соответствующий λ_1, $\boldsymbol{h}$ — произвольный комплексный вектор. Тогда матрица $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{h}'$ (где штрих обозначает транспозицию) имеет собственные числа $\lambda_1 + \boldsymbol{h}'\boldsymbol{u}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ кратностей 1, $m_1 - 1$, $m_2, \ldots, m_s$.

Статья посвящена некоторым дополнениям к этой теореме.

В параграфе 2 доказываются некоторые вспомогательные теоремы о жордановых базисах, касающиеся главным образом скалярных произведений векторов этих базисов и вектора $\boldsymbol{u}$.

Параграф 3 дополняет приведенную теорему Брауэра пояснением, каким образом изменяются элементарные делители матрицы $\boldsymbol{A}$ при переходе к матрице $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{h}'$. Между прочим видно, что не изменяется более двух элементарных делителей. Метод доказательства отличается от [2] и [3]; он основан по существу на идее, употребленной, например, Гельфандом в [4] для конструкции жорданова базиса.

Далее приводятся некоторые простые применения теоремы. Если мы знаем у матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка n одно собственное число λ_1 и соответствующий вектор $\boldsymbol{u}$, то можем легко получить матрицу порядка $n - 1$, которая имеет те же собственные числа за исключением λ_1, кратность которого меньше на единицу. Эта идея и ее дополнение относительно элементарных делителей разбираются в параграфе 4. Наконец, в параграфе 5 приводятся применения к обобщенным стохастическим матрицам.

Summary

ON SOME RELATIONS OF THE ELEMENTARY DIVISORS OF A MATRIX TO ITS CHARACTERISTIC VECTOR

ZBYNĚK ŠIDÁK, Praha

(Received July 11, 1958)

A. Brauer has proved in [2] the following theorem which we quote in a more precise formulation according to [3]:

Let $\boldsymbol{A}$ be a matrix with complex elements which has the characteristic roots $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ of multiplicities $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Let $\boldsymbol{u}$ be a characteristic column vector of the matrix $\boldsymbol{A}$ belonging to λ_1, $\boldsymbol{h}$ an arbitrary complex vector. Then the matrix $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{h}'$ (where the dash denotes transposition) has characteristic roots $\lambda_1 + \boldsymbol{h}'\boldsymbol{u}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ of multiplicities $1, m_1 - 1, m_2, \ldots, m_s$.

This paper is devoted to some supplements to this theorem.

In § 2 some auxiliary theorems on Jordan bases are proved, mainly concerning the scalar products of the vectors of these bases with the vector $\boldsymbol{u}$.

In § 3 Brauer's theorem is supplemented with the determination of the manner in which the elementary divisors of the matrix $\boldsymbol{A}$ are changed by the transition to the matrix $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{uh}'$. Particularly, it is seen that no more than two elementary divisors can change. The method of proof is different from that of [2] as well as [3]; it is based on the idea used e. g. by I. M. GELFAND [4] for the construction of a Jordan basis.

Further some simple applications of the theorem are discussed. Knowing one characteristic root λ_1 and an associated characteristic vector $\boldsymbol{u}$ of the matrix $\boldsymbol{A}$ of degree n, we can easily obtain a matrix of degree $n - 1$ which has the same characteristic roots except λ_1, the multiplicity of which is smaller by one. This idea and its supplement concerning the elementary divisors are dealt with in § 4. Finally, in § 5 the theorems are applied to generalized stochastic matrices.