

Werk

Label: Article

Jahr: 1959

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0084|log134

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

O NĚKTERÝCH VZTAZÍCH ELEMENTÁRNÍCH DĚLITELŮ
MATICE K JEJÍMU VLASTNÍMU VEKTORU

ZBYNĚK ŠIDÁK, Praha

DT: 513.831

(Došlo dne 11. července 1958)

A. BRAUER v [2] ukázal, jaký vliv má jistá změna matice (souvisící s jejím vlastním vektorem) na změnu jejích vlastních čísel. Článek je věnován doplňkům k této větě. Zjišťuje se, jak se změny elementární dělitelů při řečené změně a uvádí se některé aplikace na zmenšení řádu matice a na zobecněné stochastické matice.

1. Úvod

Budeme se zabývat čtvercovými maticemi n -tého řádu (v odstavci 4 též $(n - 1)$ -ého řádu) s komplexními prvky a budeme je značit velkými tučnými písmeny, např. $\mathbf{X} = (x_{ij})$. \mathbf{E} jest jednotková matice. Malá tučná písmena, např. \mathbf{x} , budou značit sloupcové vektory. Transponovanou matici budeme označovat čárkou, např. \mathbf{X}' . Co se týče dalších definic a poznatků, odkazujeme na GANT-MACHEROVU knihu [1], jejíž terminologie budeme užívat.

Důkazy jsou většinou prováděny v podstatě geometrickými metodami. Ve shodě s tím považujeme vlastně matici za určitý lineární operátor, zobrazující n -rozměrný komplexní eukleidovský prostor do sebe, vyjádřený v nějaké basi.

Článek je věnován doplňkům k této větě Brauerově:

Budiž $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matice s komplexními prvky, která má vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ násobností m_1, m_2, \dots, m_s . Budiž \mathbf{u} vlastní vektor \mathbf{A} příslušný k λ_1 , \mathbf{h} libovolný komplexní vektor. Pak matice $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{h}' = (a_{ij} + u_i h_j)$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \mathbf{h}'\mathbf{u}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ násobností $1, m_1 - 1, m_2, \dots, m_s$.

Tato věta v podstatě pochází od A. Brauera [2], později ji zpřesnila H. PERFECTOVÁ [3] a podala jiný její důkaz. Zde jsme ji uvedli ve zpřesněné formulaci Perfectové.

V tomto článku nejprve předešleme v odstavci 2 některé věty o Jordano-vých basích, které jsou pro nás větami pomocnými, ale mohou býti zajímavé i samy o sobě. Potom v odstavci 3 doplníme citovanou větu Brauerovu zjištěním elementárních dělitelů matice \mathbf{B} (což samozřejmě obsahuje v sobě i uvedené

tvzení o vlastních číslech); metoda důkazu je přitom podstatně jiná než metody použité Brauerem a Perfectovou. Posléze si všimneme některých důsledků věty: v odstavci 4 promluvíme o zmenšení řádu matice, v odstavci 5 o zobecněných stochastických maticích.

2. Pomocné věty o Jordanových řetězcích

Věta 1. *Budiž A matice, $Au = \lambda_1 u$, $u \neq 0$. Budiž $g_1, (A' - \lambda_1 E)g_1, \dots, (A' - \lambda_1 E)^{p_1-1}g_1, \dots, g_t, (A' - \lambda_t E)g_t, \dots, (A' - \lambda_t E)^{p_t-1}g_t$ dolní Jordanova base k matici A' . Pak $u'(A' - \lambda_k E)^q g_k$ může být nenulový jen tehdy, když $\lambda_k = \lambda_1$, $q = 0$.*

Důkaz. V určitém Jordanově řetězci označme pro stručnost $h_q = (A' - \lambda_k E)^{q-1} g_k$. Pro tento řetězec máme tedy rovnosti

$$A'h_1 = \lambda_k h_1 + h_2, A'h_2 = \lambda_k h_2 + h_3, \dots, A'h_{p_k} = \lambda_k h_{p_k}.$$

Násobením u' zleva dostaneme

$$\begin{aligned} u'A'h_1 &= \lambda_1 u'h_1 = \lambda_k u'h_1 + u'h_2, \\ u'A'h_2 &= \lambda_1 u'h_2 = \lambda_k u'h_2 + u'h_3, \\ &\dots \\ u'A'h_{p_k} &= \lambda_1 u'h_{p_k} = \lambda_k u'h_{p_k}. \end{aligned}$$

Jestliže $\lambda_k \neq \lambda_1$, musí tedy být $u'h_1 = u'h_2 = \dots = u'h_{p_k} = 0$. Jestliže $\lambda_k = \lambda_1$, musí být $u'h_2 = \dots = u'h_{p_k} = 0$ a jedině $u'h_1$ může být nenulový.

Poznamenejme, že tato věta 1 zobecňuje větu 26 v [2], jelikož se týká nejen vlastních vektorů matice A' , nýbrž celých cyklických invariantních podprostorů.

Zavedeme stručný termín „ u -nenulový řetězec“ pro dolní Jordanův řetězec $g_k, (A' - \lambda_k E)g_k, \dots, (A' - \lambda_k E)^{p_k-1}g_k$, pro nějž $u'g_k \neq 0$. Podle věty 1 pro u -nenulový řetězec jest $\lambda_k = \lambda_1$. Poněvadž vektory v Jordanově basi jsou nezávislé, zřejmě vždy v této basi existuje aspoň jeden u -nenulový řetězec.

Věta 2. *Budiž A matice, $Au = \lambda_1 u$, $u \neq 0$. Pak k matici A' existuje dolní Jordanova base $e_1, (A' - \lambda_1 E)e_1, \dots, (A' - \lambda_1 E)^{p_1-1}e_1, \dots, e_t, (A' - \lambda_t E)e_t, \dots, \dots, (A' - \lambda_t E)^{p_t-1}e_t$ taková, že $u'e_1 = 1$, $u'(A' - \lambda_1 E)e_1 = \dots = u'(A' - \lambda_t E)^{p_t-1}e_t = 0$.*

Důkaz. Necht $g_1, (A' - \lambda_1 E)g_1, \dots$ je nějaká dolní Jordanova base k matici A' . Můžeme předpokládat, že vektory jsou očíslovány tak, že $g_1, \dots, (A' - \lambda_1 E)^{p_1-1}g_1$ je Jordanův řetězec, který má z u -nenulových řetězců nejmenší dimenzi. Necht nyní $g_k, \dots, (A' - \lambda_1 E)^{p_k-1}g_k$ je nějaký jiný u -nenulový Jordanův řetězec; podle předpokladu $p_k \geq p_1$. Definujme $e_k = g_k - \frac{u'g_k}{u'g_1}g_1$. Poněvadž $(A' - \lambda_1 E)^{p_k}e_k = (A' - \lambda_1 E)^{p_k}g_k - \frac{u'g_k}{u'g_1}(A' - \lambda_1 E)^{p_k}g_1 = 0$, dosta-

neme nyní Jordanův řetězec $\mathbf{e}_k, \dots, (\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_k-1} \mathbf{e}_k$. Přitom $\mathbf{u}' \mathbf{e}_k = \mathbf{u}' \mathbf{g}_k - \frac{\mathbf{u}' \mathbf{g}_k}{\mathbf{u}' \mathbf{g}_1} \mathbf{u}' \mathbf{g}_1 = 0$, $\mathbf{u}'(\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{e}_k = \dots = \mathbf{u}'(\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_k-1} \mathbf{e}_k = 0$ podle věty 1. Podobnou změnu provedeme se všemi \mathbf{u} -nenulovými řetězci kromě prvního. U prvního řetězce definujeme $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\mathbf{u}' \mathbf{g}_1} \mathbf{g}_1$, máme tedy $\mathbf{u}' \mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{u}'(\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{e}_1 = \dots = \mathbf{u}'(\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_1-1} \mathbf{e}_1 = 0$. Rozepsáním vzorců bychom se snadno přesvědčili, že vektory v takto konstruovaných Jordanových řetězcích jsou lineárně nezávislé, a věta je tedy dokázána.

Věta 3. *Budiž dán vektor $\mathbf{v} \neq 0$ a matice \mathbf{C} , k níž dolní Jordanova base budiž $\mathbf{e}_1, (\mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{e}_1, \dots, (\mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_1-1} \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i, (\mathbf{C} - \lambda_i \mathbf{E}) \mathbf{e}_i, \dots, (\mathbf{C} - \lambda_i \mathbf{E})^{p_i-1} \mathbf{e}_i$. Minimální polynom vektoru \mathbf{e}_1 je určen jednoznačně pro libovolnou Jordanovu basi splňující $\mathbf{v}' \mathbf{e}_1 \neq 0$, $\mathbf{v}'(\mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{e}_1 = \dots = \mathbf{v}' \mathbf{e}_i = \dots = \mathbf{v}'(\mathbf{C} - \lambda_i \mathbf{E})^{p_i-1} \mathbf{e}_i = 0$.*

Důkaz. Basi ve znění věty označme stručně jako \mathbf{e} -basi. Vektor \mathbf{e}_1 má zřejmě minimální polynom $(\lambda - \lambda_1)^{p_1}$. Mějme ještě jinou basi $\mathbf{f}_1, \dots, (\mathbf{C} - \mu_1 \mathbf{E})^{q_1-1} \mathbf{f}_1, \dots$, splňující řečenou podmínku. Minimální polynom \mathbf{f}_1 jest $(\lambda - \mu_1)^{q_1}$; máme nyní dokázat $\mu_1 = \lambda_1$, $q_1 = p_1$. Předpokládejme naopak, že by bylo např. $q_1 < p_1$. Vyjádřeme \mathbf{f}_1 jako lineární kombinaci vektorů \mathbf{e} -base. V této rovnosti převedme na levou stranu všechny vektory, jejichž minimální polynom je nějaká mocnina $(\lambda - \mu_1)$. Na pravé straně rovnosti tedy dostaneme celkem vektor, jehož minimální polynom už neobsahuje činitele $(\lambda - \mu_1)$, což je možné jedině tehdy, když lineární kombinace na obou stranách rovnosti jsou rovny 0. Tedy \mathbf{f}_1 se rovná lineární kombinaci pouze těch vektorů \mathbf{e} -base, jejichž minimální polynom je nějaká mocnina $(\lambda - \mu_1)$. Kdyby nyní v této kombinaci nebyl vektor \mathbf{e}_1 , z předpokladu by plynulo $\mathbf{v}' \mathbf{f}_1 = 0$, což není pravda. To dokazuje, že v řečené lineární kombinaci musí být vektor \mathbf{e}_1 s nenulovým koeficientem, z čehož speciálně plyne $\mu_1 = \lambda_1$. Máme tedy rovnost

$$\mathbf{f}_1 = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 (\mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{e}_1 + \dots + c_{p_1} (\mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_1-1} \mathbf{e}_1 + \dots,$$

kde $c_1 \neq 0$ a všechny vektory vpravo mají jako minimální polynom nějakou mocninu $(\lambda - \lambda_1)$. Na obě strany této rovnosti nyní aplikujeme operaci $(\mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{E})^{q_1}$. Poněvadž $q_1 < p_1$, dostaneme, že 0 se rovná jakési lineární kombinaci vektorů \mathbf{e} -base, z čehož by plynulo $c_1 = 0$ a to je spor.

Dostáváme nyní toto tvrzení: *Minimální polynom, odpovídající \mathbf{u} -nenulovému řetězci nejmenší dimenze, je určen jednoznačně, ať je Jordanova base jakákoliv.* Máme-li totiž dvě Jordanovy base, můžeme je předně pozměnit jako v důkazu věty 2, přičemž \mathbf{u} -nenulový řetězec nejmenší dimenze se dostane na první místo v basi. Jeho minimální polynom je pak určen jednoznačně podle věty 3.

Následující větu budeme v dalším potřebovat pouze pro $j = 1$. Formulujme ji však pro zajímavost obecněji, neboť její důkaz se tím téměř nezmění.

Věta 4. Budiž dán k matici \mathbf{C} nějaký dolní Jordanův řetězec $\mathbf{e}_k, (\mathbf{C} - \lambda_k \mathbf{E}) \mathbf{e}_k, \dots, \dots, (\mathbf{C} - \lambda_k \mathbf{E})^{p-1} \mathbf{e}_k$ a označme l cyklický invariantní podprostor, vytvořený tímto řetězcem. Pak pro libovolné číslo $\lambda_0 \neq \lambda_k$ a pro $j \geq 1$ vektory $(\mathbf{C} - \lambda_0 \mathbf{E})^j \mathbf{e}_k, (\mathbf{C} - \lambda_0 \mathbf{E})^{j+1} \mathbf{e}_k, \dots, (\mathbf{C} - \lambda_0 \mathbf{E})^{j+p-1} \mathbf{e}_k$ tvoří bási pro l .

Důkaz. Pro libovolné přirozené i máme $(\mathbf{C} - \lambda_0 \mathbf{E})^i \mathbf{e}_k = (\mathbf{C} - \lambda_k \mathbf{E} + \lambda_k \mathbf{E} - \lambda_0 \mathbf{E})^i \mathbf{e}_k = (\mathbf{C} - \lambda_k \mathbf{E})^i \mathbf{e}_k + \binom{i}{1} (\lambda_k - \lambda_0) (\mathbf{C} - \lambda_k \mathbf{E})^{i-1} \mathbf{e}_k + \dots + (\lambda_k - \lambda_0)^i \mathbf{e}_k$. Tedy vektory $(\mathbf{C} - \lambda_0 \mathbf{E})^i \mathbf{e}_k, i = j, j+1, \dots, j+p-1$, patří do l . Poněvadž těchto vektorů je právě p , zbývá pouze dokázat, že jsou lineárně nezávislé. Předpokládejme, že naopak by bylo $d_1 (\mathbf{C} - \lambda_0 \mathbf{E})^j \mathbf{e}_k + d_2 (\mathbf{C} - \lambda_0 \mathbf{E})^{j+1} \mathbf{e}_k + \dots + d_p (\mathbf{C} - \lambda_0 \mathbf{E})^{j+p-1} \mathbf{e}_k = 0$, přičemž aspoň jedno d_i by bylo nenulové. Polynom $d_1 (\lambda - \lambda_0)^j + d_2 (\lambda - \lambda_0)^{j+1} + \dots + d_p (\lambda - \lambda_0)^{j+p-1}$ je tedy anulujícím polynomem vektoru \mathbf{e}_k a musí být dělitelný minimálním polynomem $(\lambda - \lambda_k)^p$. Pro jakýsi polynom $\varphi(\lambda)$ máme tedy

$$d_1 (\lambda - \lambda_0)^j + d_2 (\lambda - \lambda_0)^{j+1} + \dots + d_p (\lambda - \lambda_0)^{j+p-1} = (\lambda - \lambda_k)^p \varphi(\lambda).$$

Na levé straně jest možno vytknouti alespoň $(\lambda - \lambda_0)^j$, čímž dostaneme

$$(\lambda - \lambda_0)^j [d_1 + d_2 (\lambda - \lambda_0) + \dots + d_p (\lambda - \lambda_0)^{p-1}] = (\lambda - \lambda_k)^p \varphi(\lambda).$$

Nyní $\varphi(\lambda)$ musí být dělitelné $(\lambda - \lambda_0)^j$, čili $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^j \psi(\lambda)$, kde $\psi(\lambda)$ je nějaký polynom. Kdyby $\psi(\lambda)$ byl nenulový, měla by pravá strana rovnosti stupeň nejméně $p+j$, zatím co levá strana rovnosti má stupeň nejvýše $p+j-1$. Tedy $\psi(\lambda)$ je nulový polynom, z čehož ihned již vidíme, že $d_p = \dots = d_2 = d_1 = 0$, což bylo dokázati.

3. Elementární dělitelé matice $\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{h}'$

Tento odstavec doplňuje větu Brauerovu, citovanou v úvodu, zjištěním elementárních dělitelů matice $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{h}' = (a_{ij} + u_i h_j)$.

Věta 5. Budiž \mathbf{A} matice, $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}, \mathbf{u} \neq 0$. Necht \mathbf{h} je libovolný vektor a označme $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{h}'$. Při přechodu od \mathbf{A} k \mathbf{B} elementární dělitelé \mathbf{A} se změni takto: 1. Od elementárního dělitele $(\lambda - \lambda_1)^p$, odpovídajícího \mathbf{u} -nenulovému řetězci nejmenší dimenze, se odtrhne činitel $(\lambda - \lambda_1)$, takže vznikne $(\lambda - \lambda_1)^{p-1}$. 2. Tento činitel se změni na $(\lambda - \lambda_1 - \mathbf{h}'\mathbf{u})$. 3. Buď se vytvoří nový elementární dělitel $(\lambda - \lambda_1 - \mathbf{h}'\mathbf{u})$ nebo v případě, že $\lambda_1 + \mathbf{h}'\mathbf{u}$ je rovno některému vlastnímu číslu λ_0 matice \mathbf{A} , může se uvedený činitel připojit k jistému elementárnímu děliteli $(\lambda - \lambda_0)^q$, takže vznikne $(\lambda - \lambda_0)^{q+1}$. 4. Kromě těchto nejvýše dvou všichni ostatní elementární dělitelé zůstanou beze změny.

Předně připojme několik drobných poznámek. Myšlenka, na jejímž základě je proveden důkaz věty 5, je podobná konstrukci Jordanovy base, které se užívá např. v knize I. M. GELFANDA [4]. Poněvadž důkaz je konstruktivní,

lze z něho též zjistit, kdy se vytvoří nový dělitel $(\lambda - \lambda_1 - \mathbf{h}'\mathbf{u})$ nebo kam se tento činitel připojí; do znění věty jsme to neuvedli, aby se příliš nekomplikovalo. Poznamenejme také, že ovšem může nastat případ (pro $\mathbf{h}'\mathbf{u} = 0$), kdy $(\lambda - \lambda_1)$ se od jistého dělitele odtrhne, ale k těmto dělitelům se připojí, tj. vlastně všichni elementární dělitelé zůstanou beze změny. Dále dělitel, od něhož se odtrhne $(\lambda - \lambda_1)$, samozřejmě nezávisí na zvolené Jordanově basi; v tvrzení za větou 3 jsme ukázali, že elementární dělitel, odpovídající \mathbf{u} -nenulovému řetězci nejmenší dimenze, je určen jednoznačně. Že výslední elementární dělitelé nezávisí na zvolené Jordanově basi, to je známo.

Ve větě nelze vynechat podmínku „ \mathbf{u} -nenulovosti řetězce“. Snadno lze totiž konstruovat příklady, v nichž dělitel $(\lambda - \lambda_1)^p$, odpovídající \mathbf{u} -nenulovému řetězci nejmenší dimenze, je různý od nejmenšího elementárního dělitele s vlastním číslem λ_1 .

Důkaz věty 5. Můžeme se zabývat transponovanými maticemi, neboť elementární dělitelé \mathbf{A} , resp. \mathbf{B} jsou stejní jako \mathbf{A}' , resp. \mathbf{B}' . Pro stručnost označme $\lambda_0 = \lambda_1 + \mathbf{h}'\mathbf{u}$; dále označme \mathbf{N} množinu vektorů \mathbf{x} , pro něž $\mathbf{u}'\mathbf{x} = 0$; \mathbf{N} je zřejmě lineární podprostor dimenze $n - 1$.

Všimněme si nyní dolní Jordanovy base $\mathbf{e}_1, (\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{e}_1, \dots, (\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})^{p_1-1}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_t, (\mathbf{A}' - \lambda_t\mathbf{E})\mathbf{e}_t, \dots, (\mathbf{A}' - \lambda_t\mathbf{E})^{p_t-1}\mathbf{e}_t$ k matici \mathbf{A}' , která je konstruována ve větě 2. Pro vektory $(\mathbf{A}' - \lambda_k\mathbf{E})^i\mathbf{e}_k$ z této base ($k = 1, \dots, t; i = 0, 1, \dots, p_k - 1$) kromě prvního vektoru \mathbf{e}_1 , dostáváme

$$(\mathbf{B}' - \lambda_k\mathbf{E})(\mathbf{A}' - \lambda_k\mathbf{E})^i\mathbf{e}_k = (\mathbf{A}' + \mathbf{h}\mathbf{u}' - \lambda_k\mathbf{E})(\mathbf{A}' - \lambda_k\mathbf{E})^i\mathbf{e}_k = (\mathbf{A}' - \lambda_k\mathbf{E})^{i+1}\mathbf{e}_k.$$

Těchto $n - 1$ vektorů tedy tvoří „neúplnou“ Jordanovu basi pro matici \mathbf{B}' ; je to base v podprostoru \mathbf{N} . Přitom též $(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{e}_1, (\mathbf{B}' - \lambda_1\mathbf{E})(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{e}_1, \dots, (\mathbf{B}' - \lambda_1\mathbf{E})^{p_1-2}(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{e}_1$ tvoří Jordanův řetězec k \mathbf{B}' . Naším úkolem nyní bude najít ještě nějaký vektor v komplementu \mathbf{N} , který by doplnil uvedených $n - 1$ vektorů. Máme $\mathbf{u}'(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}'(\mathbf{A}' + \mathbf{h}\mathbf{u}' - \lambda_1\mathbf{E} - \mathbf{h}'\mathbf{u}\mathbf{E})\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}'(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{e}_1 + \mathbf{u}'\mathbf{h}\mathbf{u}'\mathbf{e}_1 - (\mathbf{h}'\mathbf{u})\mathbf{u}'\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}'\mathbf{h} - \mathbf{h}'\mathbf{u} = 0$, a proto $(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{e}_1$ patří do \mathbf{N} .

Utvořme nyní tuto pomocnou basi v \mathbf{N} . U cyklických podprostorů v \mathbf{N} s vlastním číslem λ_0 (existují-li takové), ponechme původní basi $\mathbf{e}_1, (\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{e}_1, \dots, (\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^{p_1-1}\mathbf{e}_1$; u cyklických podprostorů s jiným vlastním číslem $\lambda_k \neq \lambda_0$ vezměme podle věty 4 basi $(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{e}_k, (\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^2\mathbf{e}_k, \dots, (\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^{p_k}\mathbf{e}_k$. Vektor $(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{e}_1$ lze vyjádřit jako určitou lineární kombinaci vektorů této pomocné base. Napišme ji např. pro případ $\lambda_0 \neq \lambda_1$ (jiné případy by se řešily obdobně).

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{e}_1 &= c_0^{(1)}\mathbf{e}_1 + c_1^{(1)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{e}_1 + \dots + c_{p_1-1}^{(1)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^{p_1-1}\mathbf{e}_1 + \dots + \\ &+ c_1^{(k)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{e}_k + c_2^{(k)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^2\mathbf{e}_k + \dots + c_{p_k}^{(k)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^{p_k}\mathbf{e}_k + \\ &+ \dots + c_1^{(1)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{e}_1 + c_2^{(1)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^2(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{e}_1 \\ &+ \dots + c_{p_1-1}^{(1)}(\mathbf{B}' - \lambda_0\mathbf{E})^{p_1-1}(\mathbf{A}' - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Místo vektoru \mathbf{e}_1 vezměme nyní

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 = & \mathbf{e}_1 - c_1^{(l)} \mathbf{e}_l - \dots - c_{p_l-1}^{(l)} (\mathbf{B}' - \lambda_0 \mathbf{E})^{p_l-2} \mathbf{e}_l - \dots - \\ & - c_1^{(k)} \mathbf{e}_k - c_2^{(k)} (\mathbf{B}' - \lambda_0 \mathbf{E}) \mathbf{e}_k - \dots - c_{p_k}^{(k)} (\mathbf{B}' - \lambda_0 \mathbf{E})^{p_k-1} \mathbf{e}_k - \dots - \\ & - c_1^{(1)} (\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{e}_1 - c_2^{(1)} (\mathbf{B}' - \lambda_0 \mathbf{E}) (\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{e}_1 - \dots - \\ & - c_{p_1-1}^{(1)} (\mathbf{B}' - \lambda_0 \mathbf{E})^{p_1-2} (\mathbf{A}' - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Zřejmě \mathbf{f}_1 patří do komplementu N a jest

$$(\mathbf{B}' - \lambda_0 \mathbf{E}) \mathbf{f}_1 = c_0^{(l)} \mathbf{e}_l + c_0^{(m)} \mathbf{e}_m + \dots,$$

kde v této lineární kombinaci se vyskytují už pouze první vektory z Jordano-
vých řetězců s vlastním číslem λ_0 . Jestliže v této rovnosti určitý koeficient
 $c_0^{(l)} \neq 0$, pak odpovídající řetězec nazveme pro stručnost třeba podstatným.
Když žádný podstatný řetězec neexistuje (což nastane speciálně také, když
 λ_0 je různé od všech vlastních čísel matice \mathbf{A}), zřejmě \mathbf{f}_1 je vlastní vektor
matice \mathbf{B}' a Jordanova base pro \mathbf{B}' je tím konstruována.

Necht tedy existují podstatné řetězce, např. budiž $c_0^{(l)} \neq 0$, $c_0^{(m)} \neq 0$. (Kdyby
byl pouze jeden podstatný řetězec, dokončil by se důkaz zřejmým jednodušším
způsobem.) Předpokládejme, že označení je voleno tak, že index l označuje
řetězec, který má z podstatných řetězců největší dimenzi. Místo vektoru
 \mathbf{e}_l nyní volíme vektor $\mathbf{f}_l = c_0^{(l)} \mathbf{e}_l + c_0^{(m)} \mathbf{e}_m + \dots$ a příslušným způsobem změ-
níme též Jordanův řetězec na \mathbf{f}_l , $(\mathbf{B}' - \lambda_0 \mathbf{E}) \mathbf{f}_l, \dots$. Ostatní Jordanovy řetězce
ponecháme beze změny. Podobně jako v důkazu věty 2 se nyní přesvědčíme,
že po uvedené změně dostaneme skutečně Jordanův řetězec stejné dimense
a že všechny vektory jsou lineárně nezávislé, tedy tvoří basi v N . Konečně
však $(\mathbf{B}' - \lambda_0 \mathbf{E}) \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1$, tedy podstatný řetězec největší dimense zvětší svou
dimenzi o jedničku. Tím je konstruována Jordanova base pro \mathbf{B}' a důkaz
věty 5 je tím dokončen.

4. Aplikace na zmenšení řádu matice

V dalším budeme stále užívat označení a poznatků z věty 5 a jejího důkazu.

Věta 6. *Budiž $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matice n -tého řádu, $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}$ a necht l -tá souřadnice
 $u_l \neq 0$. Definujme matici $(n-1)$ -tého řádu $\tilde{\mathbf{B}} = \left(a_{ij} - \frac{1}{u_l} u_i a_{lj} \right)$, $i, j = 1, \dots,$
 $\dots, l-1, l+1, \dots, n$. Při přechodu od matice \mathbf{A} k $\tilde{\mathbf{B}}$ elementární dělitel $(\lambda - \lambda_1)^p$,
odpovídající \mathbf{u} -nenulovému řetězci nejmenší dimense, se změní na $(\lambda - \lambda_1)^{p-1}$,
ostatní elementární dělitelé zůstanou beze změny.*

Důkaz. Položíme ve větě 5 $h_j = -\frac{1}{u_l} a_{lj}$. Matice $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{h}'$ má pak
 l -tý řádek nulový. Přechodujeme nyní souřadnice tak, že z l -té souřadnice se
stane první; to odpovídá v maticích přeražení l -tého řádku do prvního řádku

a l -tého sloupce do prvního sloupce. Takto pozměněné vektory a matice označme indexem 1. Matice $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 + \mathbf{u}_1 \mathbf{h}_1'$ má tedy první řádek nulový. Konstruuje nyní k matici \mathbf{A}'_1 dolní Jordanovu basi $\mathbf{e}_1, (\mathbf{A}'_1 - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{e}_1, \dots, (\mathbf{A}'_1 - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_1-1} \mathbf{e}_1$ podle věty 2. Z důkazu věty 5 vidíme, že $(\mathbf{A}'_1 - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{e}_1, \dots, (\mathbf{A}'_1 - \lambda_1 \mathbf{E})^{p_1-1} \mathbf{e}_1$ tvoří „neúplnou“ Jordanovu basi dimenze $n - 1$ pro matici \mathbf{B}'_1 . Vynecháme nyní ve vektorech této base první souřadnici, v matici \mathbf{B}'_1 vynecháme první řádek a první sloupec, čímž dostaneme zřejmě matici $\tilde{\mathbf{B}}'$. Poněvadž \mathbf{B}'_1 má první sloupec nulový a takto upravené vektory o $n - 1$ souřadnicích jsou lineárně nezávislé, jak bychom snadno nahlédli, proto zmíněných $n - 1$ vektorů tvoří Jordanovu basi pro $\tilde{\mathbf{B}}'$. Důkaz věty 6 je tím dokončen.

Věty 6 lze výhodně užít při některých zkoumáních spektrálních vlastností matic. Známe-li jeden vlastní vektor \mathbf{u} k vlastnímu číslu λ_1 matice \mathbf{A} řádu n , můžeme utvořit ihned matici $\tilde{\mathbf{B}}$ řádu $n - 1$, která má stejná vlastní čísla se stejnými násobnostmi jako \mathbf{A} , s výjimkou čísla λ_1 , které má násobnost o jedničku nižší. Věta 6 nám dokonce umožňuje činit určitá tvrzení o elementárních dělitelech.

5. Aplikace na zobecněné stochastické matice

Podle Brauera [2] definujeme:

Čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ s komplexními prvky nazveme zobecněnou stochastickou maticí se součty s , jestliže všechny její řádkové součty jsou rovny komplexnímu číslu s , tj. $\sum_{j=1}^n a_{ij} = s$. Dále matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ nazveme zobecněnou dvakrát stochastickou maticí se součty s , jestliže všechny její řádkové i sloupcové součty jsou rovny s , tj. $\sum_{j=1}^n a_{ij} = s, \sum_{i=1}^n a_{ij} = s$.

Zobecněné stochastické matice, které zahrnují obvyklé stochastické matice, jsou důležitou ukázkou pro aplikaci předcházejících vět. U těchto matic totiž triviálně známe vlastní číslo s a odpovídající vlastní vektor $\mathbf{u} = (1, 1, \dots, 1)$. Speciálně zde může nalézt dobré uplatnění věta 6. Pro každé l zde je $u_l = 1 \neq 0$ a matice $\tilde{\mathbf{B}}$ je rovna $(a_{ij} - a_{lj})$. To usnadňuje hledání ostatních netriviálních vlastních čísel.

Leckdy se též pracuje dobře s dvakrát stochastickými maticemi. Dokažme pro obdobné zobecněné matice dvě drobné věty.

Věta 7. *Zobecněná dvakrát stochastická matice \mathbf{A} se součty s má aspoň jednoho elementárního dělitele $(\lambda - s)$.*

Důkaz. Kdyby všichni elementární dělitele s číslem s byli stupně vyššího než prvního, podle věty 1 by pro každý vlastní vektor \mathbf{y} matice \mathbf{A}' bylo $\mathbf{u}'\mathbf{y} = 0$,