POZNÁMKA KE GAUSS-OSTROGRADSKÉHO FORMULI

JOSEF KRÁL, Praha

(Došlo dne 7. června 1958) DT: 517.1

Cílem tohoto článku je podat jednoduchý důkaz formule (22) za předpokladů, uvedených v odst. 11.

1. Úvodní poznámka. Podnětem k tomuto článku byla práce [2], kde je m. j. dokázán vztah obdobný se vzorcem (29); od zobrazení φ (srovnej odst. 11) se však požaduje určitá „hladkost". Podobnou větu dokázal jinými methodami S. Łojasiewicz v práci [1]. V této poznámce ukážeme, že metodu, jíž užil J. Mařík v [2] pro „hladká" zobrazení, lze po jisté modifikaci aplikovat i v jiných případech, kombinujeme-li ji s obecnější větou o transformaci vícerozměrných integrálů.

2. Označení. V dalším je E_r r-rozměrný euklidovský prostor. Je-li $a \in E_r$, pak a_k je k-tá souřadnice bodu a. Pro $a, b \in E_r$ položíme $a \,.\, b = \sum_{k=1}^{r} a_k b_k$, $|a| = \sqrt{a \,.\, a}$. Sčítání v E_r a násobení bodů z E_r reálnými čísly definujeme obvyklým způsobem. Pro $\varepsilon > 0$, $a \in E_r$ položíme ještě

$$\Omega(a, \varepsilon) = E[z;\, z \in E_r,\, |z - a| < \varepsilon]\,.$$

Buď nyní G otevřená množina v E_r a buď φ zobrazení množiny G do E_m. Pak φ_k je funkce na množině G, jež je definována vztahem $\varphi_k(t) = (\varphi(t))_k$ $(t \in G)$; píšeme také $\varphi = [\varphi_1, \ldots, \varphi_m]$. Existují-li (vlastní) derivace $\dfrac{\partial \varphi_k(t)}{\partial t_j}$ $(k = 1, \ldots, r)$, definujeme $\dfrac{\partial \varphi(t)}{\partial t_j} = \left[\dfrac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_j}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi_m(t)}{\partial t_j}\right]$. Je-li $m = r$ a mají-li smysl symboly $\dfrac{\partial \varphi(t)}{\partial t_j}$ $(j = 1, \ldots, r)$, pak označíme symbolem $J(t, \varphi)$ determinant matice, jejíž j-tý sloupec tvoří právě vektor $\dfrac{\partial \varphi(t)}{\partial t_j}$.

Pro ten případ, že je $m = r + 1$, položíme $\tilde{\varphi}^k = [\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_m]$ a definujeme $w_k(t, \varphi) = (-1)^{k-1} J(t, \tilde{\varphi}^k)$, pokud má smysl symbol vpravo. Mají-li smysl symboly $w_1(t, \varphi), \ldots, w_m(t, \varphi)$, položíme $w(t, \varphi) = [w_1(t, \varphi), \ldots$ $\ldots, w_m(t, \varphi)]$. (Vektor $w(t, \varphi)$ je t. zv. vnějším součinem vektorů $\dfrac{\partial \varphi(t)}{\partial t_1}, \ldots,$

$\ldots, \dfrac{\partial\varphi(t)}{\partial t_r}$; srovnej [2], odst. 1, 2.) Pro $A \subset E_m$ značí symboly $\overline{A}$, A^0, H_A, $\mathsf{L}A$ po řadě uzávěr, vnitřek, hranici a vnější Lebesgueovu míru množiny A. Je-li $x \in E_r$ $(r = m - 1)$, položíme ještě

$$A_x^k = E[y;\, y \in E_1,\, [x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_k, \ldots, x_r] \in A] .$$

Konečně buď $\pi_k A = E[x;\, x \in E_r,\, A_x^k \neq 0]$.

3. Definice. Buď ψ zobrazení množiny $G \subset E_r$ do E_r. Řekneme, že zobrazení ψ má vlastnost (N) na G, jestliže platí implikace

$$(M \subset G,\, \mathsf{L}M = 0) \Rightarrow \mathsf{L}\psi(M) = 0 .$$

4. Označení. Nechť ψ je zobrazení množiny $G \subset E_r$ do E_r. Je-li $S \subset G$ a $x \in E_r$, označíme symbolem $N(x, \psi, S)$ počet bodů množiny $\psi^{-1}(x) \cap S$ (je-li tato množina nekonečná, klademe $N(x, \psi, S) = +\infty$). Buď dále F konečná funkce na podmnožině G_1 množiny G. Pak pro ta $x \in E_r$, pro něž je $N(x, \psi, G) < \infty$ a současně $\psi^{-1}(x) \subset G_1$, definujeme

$$W(x, \psi, F) = \sum_t F(t), \quad t \in \psi^{-1}(x) .$$

Pro jiná x není symbol $W(x, \psi, F)$ definován.

5. Pomocná věta. Buď ψ spojité zobrazení oblasti $G \subset E_r$ do E_r. Předpokládejme, že zobrazení ψ má vlastnost (N) na G a že funkce ψ_k $(k = 1, \ldots, r)$ mají skoro všude v G totální diferenciál. (Funkce $J(t, \psi) = J(t)$ je tedy definována skoro všude v G.) Dále buď

$$\int_G |J(t)| \,\mathrm{d}t < +\infty . \tag{1}$$

Potom platí následující tvrzení:

a) Je-li R měřitelná podmnožina oblasti G, pak

$$\int_R |J(t)| \,\mathrm{d}t = \int_{E_r} N(x, \psi, R) \,\mathrm{d}x . \tag{2}$$

b) Jestliže $Q \subset G$ a $J(t) = 0$ pro skoro všechna $t \in Q$, pak množina $\psi(Q)$ je nulová.

c) Je-li F omezená měřitelná funkce na G, pak funkce $W(x, \psi, F \,.\, \mathrm{sgn}\, J)$ je definována pro skoro všechna $x \in E_r$, je integrovatelná a platí

$$\int_G F(t)\, J(t) \,\mathrm{d}t = \int_{E_r} W(x, \psi, F \,.\, \mathrm{sgn}\, J) \,\mathrm{d}x . \tag{3}$$

Důkaz. Tuto větu odvodíme snadno z věty 3 z [3], str. 364.

Ad a) Sestrojme omezené oblasti D_n $(n = 1, 2, \ldots)$ tak, aby platilo

$$\overline{D}_n \subset G \ (n = 1, 2, \ldots) , \quad D_n \nearrow G \ (n \to \infty) .^{1})$$

[1]) Jsou-li M_n $(n = 0, 1, \ldots)$ množiny, pak $M_n \nearrow M_0$ $(n \to \infty)$ značí, že $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M_0$. Jsou-li c_n $(n = 0, 1, \ldots)$ reálná čísla (nebo symboly $\pm\infty$), píšeme $c_n \nearrow c_0$ $(n \to \infty)$, jestliže c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ je neklesající posloupnost s limitou c_0.

Potom jsou množiny $\psi(D_n)$ $(n = 1, 2, \dots)$ omezené a platí

$$R \cap D_n \nearrow R\,, \quad N(x, \psi, R \cap D_n) \nearrow N(x, \psi, R)\ (n \to \infty)\,.^{1)}$$

Ze vztahu

$$\int_{R \cap D_n} |J(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{E_r} N(x, \psi, R \cap D_n)\,\mathrm{d}x$$

(viz citovanou větu, kde položíme $\boldsymbol{D} = D_n$, $T(t) = \psi(t)$ pro $t \in D_n$, $S = R \cap D_n$) dostaneme ihned limitním přechodem rovnost (2).

Ad b) Položme $Q_0 = E[t; t \in G, J(t) = 0]$, $R = Q \cup Q_0$. Protože množina Q_0 je měřitelná a množina $R - Q_0$ má míru 0, je také množina R měřitelná. Vzhledem k tomu, že $J(t) = 0$ pro skoro všechna $t \in R$, dostáváme podle a)

$$0 = \int_R |J(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{E_r} N(x, \psi, R)\,\mathrm{d}x\,.$$

Odtud a z inklusí $\psi(Q) \subset \psi(R) \subset E[x; x \in E_r, N(x, \psi, R) \geqq 1]$ je patrno, že $\psi(Q)$ má míru 0.

Ad c) Z (1) a z a) (kam dosadíme G místo R) snadno nahlédneme, že množina $P = E[x; x \in E_r, N(x, \psi, G) < +\infty]$ má nulový komplement.

Buď nyní F^* charakteristická funkce měřitelné množiny $R \subset G$ (oborem funkce F^* je množina G). Potom pro $x \in P$ platí $N(x, \psi, R) = W(x, \psi, F^*)$, takže ze (2) dostáváme

$$\int_G F^*(t)|J(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{E_r} W(x, \psi, F^*)\,\mathrm{d}x\,. \tag{4}$$

Snadno se zjistí, že rovnost (4) platí také v tom případě, že F^* je konečná jednoduchá měřitelná funkce na G. Je-li F^* měřitelná funkce na G, jež je v absolutní hodnotě omezena konstantou $C > 0$, pak existuje posloupnost jednoduchých měřitelných funkcí F^n $(n = 1, 2, \dots)$ taková, že pro $t \in G$ platí

$$|F^n(t)| \leqq C\ (n = 1, 2, \dots)\,, \quad \lim_{n\to\infty} F^n(t) = F^*(t)\,. \tag{5}$$

Potom je též pro $x \in P$

$$|W(x, \psi, F^n)| \leqq CN(x, \psi, G)\ (n = 1, 2, \dots), \lim_{n\to\infty} W(x, \psi, F^n) = W(x, \psi, F^*) \tag{6}$$

a ze vztahu

$$\int_G F^n(t)|J(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{E_r} W(x, \psi, F^n)\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

dostaneme limitním přechodem pro $n \to \infty$ vztah (4). (Poznamenejme, že podle (1) je funkce $J(t)$ integrovatelná na G a podle a) je funkce $N(x, \psi, G)$ integrovatelná na E_r, takže vzhledem k (5), (6) je možno v (7) provést limitní přechod za integračním znamením.)

Označme symbolem Q množinu všech $t \in G$, v nichž není definována funkce $J(t)$. Vzhledem k našim předpokladům má množina Q míru 0, takže také $\psi(Q)$ je nulová množina.

Nechť F je omezená měřitelná funkce na G; položme $F^*(t) = 0$ pro $t \in Q$, $F^*(t) = F(t) \,.\, \operatorname{sgn} J(t)$ pro ostatní $t \in G$. Potom je pro $x \in P - \psi(Q)$ (tj. pro skoro všechna $x \in E_r$)

$$W(x, \psi, F^*) = W(x, \psi, F \,.\, \operatorname{sgn} J)$$

a ze (4) plyne (3).

Důkazy následujících dvou lemmat přenecháváme čtenáři.

6. Lemma. *Nechť $s^1, \ldots, s^r$ jsou lineárně nezávislé vektory v E_{r+1}. Utvořme zobrazení χ prostoru E_r do E_{r+1} předpisem*

$$\chi(t^*) = \sum_{k=1}^{r} t_k^* s^k \quad (t^* \in E_r) \,.$$

Potom existuje kladná konstanta c tak, že $|\chi(t^*)| \geqq c|t^*|$ pro všechna $t^* \in E_r$.

7. Lemma. *Nechť n, w jsou jednotkové vektory v E_{r+1} a nechť γ, δ jsou nezáporná reálná čísla. Potom platí*

$$(\gamma w + \delta n) \,.\, w \geqq |\gamma w + \delta n| \; n \,.\, w \,.$$

8. Definice. Buď φ spojité zobrazení otevřené množiny $G \subset E_r$ do E_{r+1} a buď $A \subset E_{r+1}$. Pak $\Gamma(\varphi, A)$ je množina všech $t \in G$, pro něž jsou splněny následující podmínky:

1. Funkce φ_k $(k = 1, \ldots, r + 1)$ mají totální diferenciál v bodě t.

2. K libovolnému okolí U bodu t $(t \in U \subset G)$ existuje číslo $\varepsilon > 0$ tak, že platí implikace

$$(z \in H_A \cap \Omega(\varphi(t), \varepsilon)) \Rightarrow z \in \varphi(U) \,. \tag{8}$$

3. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existují čísla α_1, α_2 tak, že platí

$$0 < \alpha_1, \alpha_2 < \varepsilon \,, \quad \varphi(t) - \alpha_1 w(t, \varphi) \in A \,, \quad \varphi(t) + \alpha_2 w(t, \varphi) \in E_{r+1} - A \,.$$

9. Lemma. *Nechť φ je spojité zobrazení otevřené množiny $G \subset E_r$ do E_{r+1}. Buď $A \subset E_{r+1}$, $t \in \Gamma(\varphi, A)$*[2]) *a nechť $w_k(t, \varphi) \neq 0$ pro jisté k. Položíme-li $x = \tilde{\varphi}^k(t)$ (viz odst. 2), $y = \varphi_k(t)$, pak pro vhodné $\varepsilon > 0$ platí buď*

$$(y - \varepsilon, y) \subset A_x^k \text{ a současně } (y, y + \varepsilon) \subset (E_{r+1} - A)_x^k \tag{9}$$

nebo

$$(y - \varepsilon, y) \subset (E_{r+1} - A)_x^k \text{ a současně } (y, y + \varepsilon) \subset A_x^k \tag{10}$$

podle toho, zda $w_k(t, \varphi) > 0$ nebo $w_k(t, \varphi) < 0$.

Mimo to je správná implikace

$$(\tau \in G, \varphi(\tau) = \varphi(t)) \Rightarrow \tau = t \,. \tag{11}$$

[2]) Vzhledem k podmínce 1 z definice 8 má tedy smysl symbol $w(t, \varphi)$ (viz odst. 2).

Důkaz. Buď např. $w_k(t, \varphi) > 0$. Položme $w = -\dfrac{w(t, \varphi)}{|w(t, \varphi)|}$ a $n = [n_1, \ldots$ $\ldots, n_{r+1}]$, kde $n_k = -1$ a $n_j = 0$ pro $j \neq k$, $1 \leqq j \leqq r + 1$. Potom je

$$n \cdot w = \frac{w_k(t, \varphi)}{|w(t, \varphi)|} > 0 .$$

Protože funkce φ_i $(i = 1, \ldots, r + 1)$ mají v bodě t totální diferenciál, platí

$$\varphi(\tau) - \varphi(t) = \sum_{j=1}^{r} (\tau_j - t_j) \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_j} + |\tau - t| \, v(\tau) , \tag{12}$$

přičemž

$$v(\tau) \in E_{r+1} , \quad |v(\tau)| \to 0 \quad \text{pro} \quad \tau \to t . \tag{13}$$

Z (12) a z lemmatu 6 (kde položíme $s^j = \dfrac{\partial\varphi(t)}{\partial t_j}$, $t^* = \tau - t$) snadno odvodíme, že pro vhodné $c > 0$ platí

$$|\varphi(\tau) - \varphi(t)| \geqq \left| \sum_{j=1}^{r} (\tau_j - t_j) \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_j} \right| - |\tau - t| \, |v(\tau)| \geqq (c - |v(\tau)|) \, |\tau - t| .$$

Odtud a z (13) je patrno, že existuje okolí U bodu t ($U \subset G$) tak, že

$$\tau \in U \Rightarrow |\varphi(\tau) - \varphi(t)| \geqq \frac{c}{2} |\tau - t| . \tag{14}$$

Vzhledem k relacím $\dfrac{\partial\varphi(t)}{\partial t_j} \cdot w = 0$ $\quad (j = 1, \ldots, r)$ máme

$$(\varphi(\tau) - \varphi(t)) \cdot w = |\tau - t| \, v(\tau) \cdot w . \tag{15}$$

Zvolíme-li tedy okolí U dostatečně malé, můžeme ještě předpokládat, že (viz (13))

$$\tau \in U \Rightarrow (\varphi(\tau) - \varphi(t)) \cdot w \leqq \frac{c}{4} |\tau - t| \, n \cdot w . \tag{16}$$

Určeme číslo $\varepsilon > 0$ tak, aby byla splněna implikace (8). Ukážeme, že pak jsou správné inkluse (9). Kdyby totiž neplatila např. první z těchto inklusí, mohli bychom najít číslo β tak, že $0 < \beta < \varepsilon$, $\varphi(t) + \beta n \in E_{r+1} - A$. Podle podmínky 3 z definice 8 existuje dále číslo $\alpha = \alpha_1$ tak, že $0 < \alpha < \varepsilon$, $\varphi(t) + \alpha w \in A$. Pro vhodné $\xi \in (0, 1)$ je tedy nutně $(1 - \xi)(\varphi(t) + \alpha w) + \xi(\varphi(t) + \beta n) = z \in H_A$. Protože zřejmě $z \in \Omega(\varphi(t), \varepsilon)$, je podle (8) $z = \varphi(\tau)$ pro vhodné $\tau \in U$. Podle lemmatu 7 (kde položíme $\gamma = (1 - \xi)\,\alpha$, $\delta = \xi\beta$) jest $(\varphi(\tau) - \varphi(t)) \cdot w = (\gamma w + \delta n) \cdot w \geqq |\gamma w + \delta n| \, n \cdot w = |\varphi(\tau) - \varphi(t)| \, n \cdot w \geqq$ (viz (14)) $\geqq \dfrac{c}{2} |\tau - t| \, n \cdot w \geqq$ (viz (16)) $\geqq 2(\varphi(\tau) - \varphi(t)) \cdot w$, což je spor, neboť $(\varphi(\tau) - \varphi(t)) \cdot w = (\gamma w + \delta n) \cdot w = \gamma + \delta n \cdot w > 0$.

Podobným způsobem se ověří druhá inkluse (9). Stejně lze vyšetřit případ $w_k(t, \varphi) < 0$. Konečně z (8), (14) je patrno, že platí implikace (11).

10. Úmluva. V odst. 11 bude k pevné přirozené číslo, $1 \leqq k \leqq r + 1$. Pro $x \in E_r$ a $y \in E_1$ položíme $[x, y] = [x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_{r+1}]$; místo A_x^k, $\tilde{\varphi}^k$ píšeme prostě A_x, $\tilde{\varphi}$ a pod. Je-li f funkce na nějaké podmnožině prostoru E_{r+1}, pak $f(x, y)$ je ovšem hodnota funkce f v bodě $[x, y]$. Derivaci funkce f podle k-té proměnné značíme $D_k f$.

11. Věta. *Nechť A je omezená množina v E_{r+1} a buď $\mathfrak{S} = \{\varphi\}$ spočetný systém zobrazení z E_r do $\bar{A}$. Oborem každého zobrazení φ nechť je oblast $G_\varphi = G$ a nechť φ je spojité na G. Předpokládejme, že funkce φ_j ($j \neq k$, $1 \leqq j \leqq$ $\leqq r + 1$) mají skoro všude v G totální diferenciál a že zobrazení $\tilde{\varphi} = [\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_{r+1}]$ má vlastnost (N) na G. Nechť funkce $w_k(t, \varphi)$ je rovna nule pro skoro všechna $t \in G - \Gamma(\varphi, A)$ a buď*

$$\sum_\varphi \int_{G_\varphi} |w_k(t, \varphi)|\, dt < +\infty\,.^{3)} \tag{17}$$

Pro

$$Z = H_A - \bigcup_\varphi \varphi(G_\varphi)\ ^{3)} \tag{18}$$

budiž

$$\mathsf{L}\pi_k Z = 0 \tag{19}$$

a nechť je správná implikace

$$(\varphi, \chi \in \mathfrak{S}, \varphi \neq \chi^{4)}) \Rightarrow \varphi(G_\varphi) \cap \chi(G_\chi) = 0\,. \tag{20}$$

Pak

$$\mathsf{L}H_A = 0 \tag{21}$$

a pro skoro všechna $x \in E_r$ je množina $(\bar{A})_x$ sjednocením konečně mnoha kompaktních intervalů.

Buď dále f spojitá funkce na $\bar{A}$ a nechť pro skoro všechna $x \in E_r$ je $f(x, y)$ absolutně spojitou funkcí proměnné y na množině $(\bar{A})_x$.[5] Potom platí

$$\int_{E_r} \left(\int_{A_x} D_k f(x, y)\, dy\right) dx = \sum_\varphi \int_{G_\varphi} f(\varphi(t))\, w_k(t, \varphi)\, dt \tag{22}$$

s absolutně konvergentní řadou vpravo.

Důkaz. Položme $X = E[x;\ x \in E_r, \sum_\varphi N(x, \tilde{\varphi}, G_\varphi) = +\infty]$. Ze vztahu

$$+\infty > \sum_\varphi \int_{G_\varphi} |w_k(t, \varphi)|\, dt = \sum_\varphi \int_{G_\varphi} |J(t, \tilde{\varphi})|\, dt = \sum_\varphi \int_{E_r} N(x, \tilde{\varphi}, G_\varphi)\, dx =$$
$$= \int_{E_r} \left(\sum_\varphi N(x, \tilde{\varphi}, G_\varphi)\right) dx$$

---

[3]) Píšeme prostě $\sum_\varphi$ místo $\sum_\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{S}$; podobně pro $\bigcup_\varphi$.

[4]) Zobrazení φ, χ pokládáme za různá, je-li buď $G_\varphi \neq G_\chi$ nebo $G_\varphi = G_\chi$ a $\varphi(t) \neq \chi(t)$ aspoň pro jedno $t \in G_\varphi$.

[5]) Podotkněme, že pro skoro všechna $x \in E_r$ je $(\bar{A})_x$ sjednocením konečně mnoha kompaktních intervalů; je-li x tak zvoleno, je jistě zřejmé, jak rozumět výroku „$f(x, y)$ je absolutně spojitou funkcí proměnné y na $(\bar{A})_x$".

je patrno, že $\mathsf{L}X = 0$. Dále buď V_φ množina všech $t \in G_\varphi$, v nichž některá z funkcí φ_j ($j \neq k$, $1 \leqq j \leqq r + 1$) nemá totální diferenciál. Vzhledem k našim předpokladům je $|w_k(t, \varphi)| = |J(t, \tilde{\varphi})| = 0$ pro skoro všechna t z množiny

$$U(\varphi) = V_\varphi \cup (G_\varphi - \Gamma(\varphi, A)) \cup E[t;\, t \in G_\varphi,\, w_k(t, \varphi) = 0]\,, \tag{23}$$

takže podle tvrzení b) z odst. 5 (kam dosadíme $\tilde{\varphi}$ místo ψ) je množina $Y = \bigcup_\varphi \tilde{\varphi}(U(\varphi))$ nulová. Tedy také množina $\Lambda = X \cup Y \cup \pi_k Z$ má míru 0. Pro $x \in E_r - \Lambda$ je

$$(H_A)_x = (\bigcup_\varphi \varphi(G_\varphi))_x \tag{24}$$

a počet prvků množiny $(\bigcup_\varphi \varphi(G_\varphi))_x$ nepřevýší $\sum_\varphi N(x, \tilde{\varphi}, G_\varphi) < +\infty$; tím spíše je množina $(H_A)_x$ konečná. Protože Λ je nulová množina a množina H_A je uzavřená, platí (21).

Zvolme nyní pevně $x \in E_r - \Lambda$ a buď

$$(H_A)_x = \{y^1 < \ldots < y^s\}(0 \leqq s < +\infty)\,;$$

položme ještě $y^0 = -\infty$, $y^{s+1} = +\infty$. Protože intervaly (y^{j-1}, y^j) ($j = 1, \ldots, s + 1$) jsou disjunktní s $(H_A)_x$, je každý z nich obsažen celý v některé z množin $(A^0)_x$, $(E_{r+1} - \bar{A})_x$; ježto množina A je omezená, je ovšem

$$(y^0, y^1) \subset (E_{r+1} - \bar{A})_x\,, \quad (y^s, y^{s+1}) \subset (E_{r+1} - \bar{A})_x\,. \tag{25}$$

Pišme $z^j = [x, y^j]$ ($j = 1, \ldots, s$). Podle (24), (20) existuje ke každému j právě jedno zobrazení $\varphi = \varphi^j \in \mathfrak{S}$ (s oborem $G_{\varphi^j} = G^j$) tak, že $z^j \in \varphi^j(G^j)$ ($j = 1, \ldots, s$).

Vzhledem k implikacím ($\varphi \in \mathfrak{S}$, $t \in G_\varphi$, $\varphi(t) = z^j$) $\Rightarrow \tilde{\varphi}(t)$ non $\in \Lambda \Rightarrow t$ non $\in U(\varphi) \Rightarrow (t \in \Gamma(\varphi, A)$, $w_k(t, \varphi) \neq 0)$ a k lemmatu 9 existuje v G^j právě jeden bod t^j takový, že $\varphi^j(t^j) = z^j$; je ovšem t^j non $\in U(\varphi)$. Z lemmatu 9 a z inklusí (25) plyne především $\operatorname{sgn} w_k(t^1, \varphi^1) = -1$, $\operatorname{sgn} w_k(t^s, \varphi^s) = 1$ a dále $(y^1, y^2) \subset (A^0)_x$, $(y^{s-1}, y^s) \subset (A^0)_x$ (tyto inkluse odpadají v případě $s = 0$). Pokračujíce stejným způsobem zjistíme, že $\operatorname{sgn} w_k(t^j, \varphi^j) = 1$ a $(y^{j-1}, y^j) \subset (A^0)_x$ (resp. $\operatorname{sgn} w_k(t^j, \varphi^j) = -1$ a $(y^{j-1}, y^j) \subset (E_{r+1} - \bar{A})_x$), je-li j sudé (resp. liché), $j = 1, \ldots, s$. Speciálně tedy s je sudé; nechť $s = 2q$ (q celé nezáporné).

Potom je

$$\bigcup_{p=1}^{q} (y^{2p-1}, y^{2p}) \subset A_x \subset \bigcup_{p=1}^{q} \langle y^{2p-1}, y^{2p} \rangle = (\bar{A})_x\,.$$

Píšeme-li

$$J^\varphi(t) = J(t, \tilde{\varphi}) = (-1)^{k-1}\, w_k(t, \varphi),\ F^\varphi(t) = f(\varphi(t))\,,$$

máme

$$\sum_\varphi (-1)^{k-1}\, W(x, \tilde{\varphi}, F^\varphi \,.\, \operatorname{sgn} J^\varphi) = \sum_{j=1}^{s} f(\varphi^j(t^j)) \operatorname{sgn} w_k(t^j, \varphi^j) =$$

$$= \sum_{p=1}^{q} [f(x, y^{2p}) - f(x, y^{2p-1})]\,;$$

je-li mimo to bod $x \in E_r - A$ tak volen, že $f(x, y)$ je absolutně spojitou funkcí proměnné y na množině $(\overline{A})_x$, pak

$$\sum_{p=1}^{q} [f(x, y^{2p}) - f(x, y^{2p-1})] = \int_{A_x} D_k f(x, y) \, dy \, .$$

Celkem

$$(-1)^{k-1} \sum_{\varphi} W(x, \tilde{\varphi}, F^{\varphi} \, . \, \mathrm{sgn}\, J^{\varphi}) = \int_{A_x} D_k f(x, y) \, dy \tag{26}$$

pro skoro všechna $x \in E_r$. Podle (3) (kde položíme $G = G_\varphi$, $\psi = \tilde{\varphi}$, $F = F^\varphi$, $J = J^\varphi$) je

$$\int_{E_r} W(x, \tilde{\varphi}, F^\varphi \, . \, \mathrm{sgn}\, J^\varphi) \, dx = \int_{G_\varphi} F^\varphi(t) \, J^\varphi(t) \, dt = (-1)^{k-1} \, .$$

$$. \int_{G_\varphi} f(\varphi(t)) \, w_k(t, \varphi) \, dt \, . \tag{27}$$

Označíme-li symbolem c maximum funkce f na množině $\overline{A}$, dostáváme

$$\sum_{\varphi} \int_{E_r} |W(x, \tilde{\varphi}, F^\varphi \, . \, \mathrm{sgn}\, J^\varphi)| \, dx \leqq c \sum_{\varphi} \int_{E_r} N(x, \tilde{\varphi}, G_\varphi) \, dx =$$

$$= c \sum_{\varphi} \int_{G_\varphi} |J(t, \tilde{\varphi})| \, dt = c \sum_{\varphi} \int_{G_r} |w_k(t, \varphi)| \, dt < + \infty \, . \tag{28}$$

Integrujme rovnost (26) přes celý prostor E_r. Z (28) je patrno, že vlevo můžeme integrovat za znamením součtu. Užijeme-li ještě vztahu (27), dostaneme (22). Z odhadu $|\int_{G_\varphi} f(\varphi(t)) \, w_k(t, \varphi) \, dt| \leqq c \int_{G_\varphi} |w_k(t, \varphi)| \, dt$ a z (17) je vidět, že zobecněná řada na pravé straně rovnosti (22) je absolutně konvergentní.

Z předchozí věty plyne ještě tento důsledek:

12. Věta. *Nechť symboly A, $\mathfrak{S}$ mají stejný význam jako v předchozím odstavci a nechť platí (20). Pro množinu (18) buďtež splněny vztahy (19) pro $k = 1, \ldots, r + 1$. Je-li $\varphi \in \mathfrak{S}$, pak nechť funkce φ_k mají skoro všude v G_φ totální diferenciál a zobrazení $\tilde{\varphi}^k$ nechť mají vlastnost (N) na G_φ ($k = 1, \ldots, r + 1$). Konečně buď $|w(t, \varphi)| = 0$ pro skoro všechna $t \in G_\varphi - \Gamma(\varphi, A)$ a nechť $\sum_{\varphi} \int_{G_\varphi} |w(t, \varphi)| \, dt < + \infty$.*

Potom platí (21) (takže množina A je měřitelná) a pro skoro všechna $x \in E_r$ jsou množiny $(\overline{A})_x^k$ ($k = 1, \ldots, r + 1$) sjednocením konečně mnoha kompaktních intervalů.

Je-li dále $v = [v_1, \ldots, v_{r+1}]$ spojité zobrazení množiny $\overline{A}$ do E_{r+1} takové, že pro skoro všechna $x \in E_r$ jsou funkce $v_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_k, \ldots, x_r)$ absolutně spojitými funkcemi proměnné y na množině $(\overline{A})_x^k$ ($k = 1, \ldots, r + 1$), pak funkce $\mathrm{div}\, v(z) = \sum_{k=1}^{r+1} D_k v_k(z)$ je definována pro skoro všechna $z \in A$ a platí