REFERÁTY

CHARAKTERISACE BRANDTOVÝCH GRUPOIDŮ POMOCÍ PŘÍMÝCH SOUČINŮ

(Vlastní referát K. ČULÍKA o přednášce proslovené v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků“ dne 20. 10. 1958 v Brně)

V teorii relací se rozumí součinem binárních relací ϱ, σ definovaných na téže množině M (tj. $\varrho, \sigma \subset M \times M$) binární relace $\tau = \underset{[x,y]}{\mathsf{E}}$ {existuje takový $z \in M$, že $[x, z] \in \varrho$, $[z, y] \in \sigma$}. Definujme na libovolné binární relaci $\omega \subset M \times M$ tzv. *neúplnou operaci* (tj. funkci, jež některým uspořádaným dvojicím prvků z ω přiřazuje zase prvek z ω), kterou zapisujeme multiplikativně: Pro $[a, b], [c, d] \in \omega$

$$\text{součin } [a, b][c, d] \text{ (v tomto pořadí) existuje} \Leftrightarrow b = c \tag{1}$$

$$\text{a} \quad [a, b][b, d] = [a, d]\,. \tag{2}$$

V analogii k součinu komplexů grupy je pak relace τ množinou všech součinů $[a, b][c, d]$, kde $[a, b] \in \varrho$, $[c, d] \in \sigma$ v neúplné operaci definované na vhodné binární relaci. Zřejmě platí

Věta 1. *Na binární relaci lze definovat neúplnou operaci splňující* (1) *a* (2) *právě tehdy, když daná relace je transitivní. Každá neúplná operace splňující* (1) *a* (2) *splňuje první dva axiomy Brandtova grupoidu a zbývající dva splňuje právě tehdy, když je definována na plné relaci* (*tj. na relaci tvaru $M \times M$*).

Množina všech prvků Brandtova grupoidu, jejichž levá i pravá jednotka je rovna pevně zvolené jednotce, tvoří grupu a každé dvě takovéto grupy (odpovídající různým zvoleným jednotkám) jsou isomorfní (srv. [1], 362). Grupu, která je isomorfní s těmito grupami, nazvěme *jádrem* daného Brandtova grupoidu, neboť jde o jádro jisté *smíšené grupy* (Mischgruppe) obsažené v daném grupoidu (srv. [2], 254). Potom *řádem* (Ordnung) Brandtova grupoidu je mohutnost jeho jádra.

Přímý součin Brandtových grupoidů se definuje formálně stejně jako v teorii grup s příslušným dovětkem o existenci součinů. Pak platí

Věta 2. *Přímý součin Brandtových grupoidů, jejichž hodnosti* (*Rang*) *jsou* $\mathfrak{m}$ *příp.* $\mathfrak{m}'$ ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ *jsou libovolné mohutnosti*) *a jejichž jádra jsou* $\mathfrak{G}$ *příp.* $\mathfrak{G}'$, *je Brandtovým grupoidem hodnosti* $\mathfrak{m} \,.\, \mathfrak{m}'$ *s jádrem* $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}'$.

Existují Brandtovy grupoidy, které mají stejnou hodnost i stejný řád a přesto nejsou isomorfní. Platí však

Věta 3. *Brandtův grupoid hodnosti* $\mathfrak{m}$ *s jádrem* $\mathfrak{G}$ *je isomorfní přímému součinu plné relace $M \times M$, kard $M = \mathfrak{m}$, na níž je definována neúplná operace splňující* (1) *a* (2), *s grupou* $\mathfrak{G}$, *příp. obecněji: je isomorfní přímému součinu Brandtova grupoidu hodnosti* $\mathfrak{m}$ *a řádu* 1 *s Brandtovým grupoidem hodnosti* 1 *s jádrem* $\mathfrak{G}$.

Tato věta byla dokázána např. v [3], 11.

Z věty 3 plyne

Důsledek. *Brandtův grupoid je (až na isomorfismus) jednoznačně určen svojí hodností a svým jádrem.*

K jiné realisaci Brandtových grupoidů slouží pojem *transmutace* (srv. [2]), tj. prostého zobrazení množiny na ekvivalentní množinu.

Nechť je předepsána grupa $\mathfrak{G}$ a mohutnost $\mathfrak{m}$. Pak lze zvolit systém navzájem ekvivalentních množin B_i, kard $B_i = \mathfrak{n} \geqq$ kard $\mathfrak{G}$, $i \in I$, kard $I = \mathfrak{m}$, $B_i \cap B_j = 0$ pro $i \neq j$. Dále lze zvolit permutace množiny B_1 a označit je symbolem $\varphi_{11}^{(x)}$, kde $x \in \mathfrak{G}$ tak, že $\varphi_{11}^{(x)} \to x$ je isomorfismus (vzhledem k běžnému skládání permutací). Zvolíme-li konečně libovolně transmutaci zobrazující B_1 na B_i pro každé $i \neq 1$, $i \in I$ a označíme-li ji, příp. její inversní transmutaci, symbolem $\varphi_{1i}^{(e)}$, příp. $\varphi_{i1}^{(e)}$, kde $e \in \mathfrak{G}$ je jednotkový prvek, potom množina všech transmutací systému množin B_i, které jsou tvaru

$$\varphi_{ij}^{(x)} = \varphi_{i1}^{(e)}\varphi_{11}^{(x)}\varphi_{1j}^{(e)} \quad \text{pro} \quad i, j \in I, x \in \mathfrak{G}\,, \tag{3}$$

tvoří *transmutační Brandtův grupoid* hodnosti $\mathfrak{m}$ s jádrem $\mathfrak{G}$, když jeho neúplnou operací je běžné skládání transmutací. Při tom zřejmě platí

$$\varphi_{ij}^{(x)}\varphi_{jk}^{(y)} = \varphi_{ik}^{(xy)}\,. \tag{4}$$

Existuje-li k předepsané grupě $\mathfrak{G}$ grupa $\mathfrak{B}_1$, jejíž grupa automorfismů je isomorfní s $\mathfrak{G}$, zvolme systém navzájem isomorfních a disjunktních grup $\mathfrak{B}_i$, $i \in I$, kard $I = \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{B}_i$ je isomorfní s $\mathfrak{B}_1$). Potom množina všech automorfismů nebo isomorfismů mezi grupami $\mathfrak{B}_i$, tj. jistých transmutací zvoleného systému množin, tvoří transmutační Brandtův grupoid hodnosti $\mathfrak{m}$ s jádrem $\mathfrak{G}$. Jiné příklady transmutačních Brandtových grupoidů dostaneme, když vyjdeme od systému isomorfních algeber nebo n-rozměrných projektivních prostorů nebo homeomorfních topologických prostorů a uvažujeme množiny všech automorfismů či isomorfismů nebo všech projektivních zobrazení nebo všech homeomorfismů apod. (srv. [3]).

V předešlých příkladech šlo vesměs o jisté transmutační Brandtovy grupoidy daných systémů ekvivalentních množin B_i. Při tom zřejmě nebylo nutné žádat, aby pro množiny uvažovaného systému platilo $B_i \cap B_j = 0$ pro $i \neq j$. Stačilo totiž žádat $B_i \neq B_j$ pro $i \neq j$. Potom se lze tázat, kdy existuje transmutační Brandtův grupoid hodnosti $\mathfrak{m}$ systému množin B_i, kard $B_i = \mathfrak{n}$ pro každý $i \in I$, kard $I = \mathfrak{m}$, který je vytvořen transmutacemi splňujícími podmínku

$$\varphi_{ij}(x) = x \quad \text{pro} \quad x \in B_i \cap B_j\,. \tag{5}$$

Z (5) ovšem plyne, že každý takovýto grupoid má řád 1. Zvolíme-li např. $\mathfrak{n} = 2$ a $B_i = \{a_i, a_{i+1}\}$ pro $i = 1, 2, 3, 4$, $B_5 = \{a_5, a_1\}$, pak podmínkou (5) jsou již jednoznačně určeny transmutace $\varphi_{i,i+1}$, $i = 1, 2, 3, 4$ i $\varphi_{1,5}$, ale zřejmě $\varphi_{12}\varphi_{23}\varphi_{34}\varphi_{45} \neq \varphi_{15}$, takže hledaný Brandtův grupoid neexistuje. Platí však

Věta 4. *Nechť existuje transmutační Brandtův grupoid systému množin B_i,* kard $B_i = \mathfrak{n}$ *pro $i \in I$,* kard $I = \mathfrak{m}$, *$B_i \neq B_j$ pro $i \neq j$, který má řád 1 a který je vytvořen transmutacemi splňujícími* (5). *Pak neexistuje taková množina $B \subset \bigcup_{i \in I} B_i$, pro kterou platí*

$$\text{kard}\, B > \mathfrak{n} \tag{6}$$

a

$$x, y \in B \Rightarrow \text{existuje taková } B_i \text{, že } x, y \in B_i\,. \tag{7}$$

Z předešlého příkladu vyplývá, že podmínka neexistence množiny B splňující (6) a (7) není postačující k existenci příslušného Brandtova grupoidu.

Vzhledem k větě 1 a 3 se nabízí vyšetřovat přímé součiny množiny, na níž je definována neúplná operace (splňující první dva Brandtovy axiomy případně ještě vhodně doplněné) s útvarem obecnějším než je grupa, např. s kvasigrupou, semigrupou, pologrupou atd.

LITERATURA

[1] *H. Brandt:* Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, Math. Annalen *96* (1927), 360—366.

[2] *A. Loewy:* Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen. Jour. f. d. reine und angew. Math. *157* (1927), 239—254.

[3] *A. Nijenhuis:* Theory of geometric object, Amsterdam 1952.

Karel Čulík, Brno

O PARALELNÍM PRŮMĚTU ORTONORMÁLNÍ BASE

(Referát V. Havla o přednášce konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 3. února 1958 v Brně)

V referátu byly dokázány tyto tři věty:

1. *Soustava vektorů* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$, *vytvářejících v* E_n *m-rovinu, kde* $n \geqq 2m - 1$, *je v* E_n *vždy paralelním průmětem ortonormální base.*

2. *Soustava vektorů* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$, *vytvářejících v* E_n *m-rovinu, kde* $n \leqq 2m - 1$, *je v* E_n *paralelním průmětem ortonormální base právě tehdy, když charakteristická čísla matice* $(\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j)_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}$ *splňují při vhodném uspořádání relace* $g_1 \geqq \ldots \geqq g_{n-m} \geqq g_{n-m+1} = \ldots = g_m > g_{m+1} = \ldots = g_n = 0$.

3. *Soustava vektorů* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *vytvářejících v* E_n *m-rovinu je v* E_n *kolmým průmětem ortonormální base právě tehdy, když pro charakteristická čísla matice* $(\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j)_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}$ *platí relace* $g_1 = \ldots = g_m > g_{m+1} = \ldots = g_n = 0$.

Tyto tři věty zobecňují předchozí výsledky E. Stiefela (1937), H. Hadwigera (1940) a H. Naumanna (1957). Důkaz těchto vět byl proveden metodami lineární algebry užitím transformací symetrických matic na diagonální tvar. První dvě věty jsou přirozeným zobecněním klasické věty Pohlkeovy, věta 3 je analogií klasické věty Gaussovy-Weissbachovy.

Václav Havel, Brno

O ROZKLADU NEAFINNÍ SINGULÁRNÍ KOLINEACE VE SHODNOST A PROJEKCI

(Referát V. Havla o přednášce původně nazvané „Sdružené desarguesovské konfigurace" konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 10. března 1958 v Brně)

V rozšířeném referátu byl formulován problém, za jakých podmínek lze danou neafinní singulární kolineaci $\varkappa$ rozšířeného prostoru E_n na vlastní m-rovinu A rozložit ve shodnost a centrální projekci. Formulace je volena tak, aby neužívala souřadnicového systému.

Nutno rozlišovat případy $n = m + 1$, $n > m + 1$, které vedou ke zcela odlišnému řešení:

1. Je-li $n = m + 1$, pak označme S singulární bod kolineace $\varkappa$ a N nadrovinu, která je úplným vzorem nevlastního útvaru nadroviny A v kolineaci $\varkappa$. Rozklad kolineace $\varkappa$ ve shodnost a projekci existuje právě tehdy, když kolineace $\varkappa$ převádí aspoň jednu nadrovinu $R \parallel N$ v nadrovinu podobnou.

Tuto podmínku lze vyjádřit konstruktivně užitím podobných simplexů anebo užitím ortogonální polarity.

Pro $n = 3$ provedl toto první konstruktivní vyjádření E. A. Mčedlišvili (1949), kdežto druhé E. Kruppa (1923), avšak závisle na souřadnicovém systému.

2. Je-li $n > m + 1$, pak označme S $(n - m - 1)$-rovinu singulárních bodů a N úplný vzor nevlastního útvaru m-roviny A v kolineaci $\varkappa$; dále volme kteroukoliv nadrovinu $R \parallel N$ a položme $\tilde{S} = R \cap S$. Rozklad dané kolineace $\varkappa$ ve shodnost a projekci existuje právě tehdy, jestliže v R lze nalézt m-rovinu B tak, že kolineace převádí B v m-rovinu podobnou.

Tuto podmínku lze převést na jinou, konstruktivně výhodnější, použijeme-li m-rovinu B' kolmou v R k $\tilde{S}$. Podrobná formulace této podmínky vyžaduje však řady dalších pojmů a přesahuje rámec stručného résumé. Speciálně pro $n \geqq 2m$ lze kolineaci $\varkappa$ vždy rozložit ve shodnost a projekci. Výsledky ad 2 zdají se být nové.

Václav Havel, Brno

O GEOMETRICKÉM VÝZNAMU NEASOCIATIVNÍCH TĚLES

(Referát V. Havla o přednášce konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 6. října 1958 v Brně)

Kvasitěleso je algebraická struktura[1]) s binárním sečítáním a násobením, přičemž aditivní systém[2]) je abelovskou grupou, multiplikativní systém[2]) je kvasigrupou s jednotkou, platí identity $a0 = 0$, $a(b + c) = ab + ac$ a rovnice $ax = bx + c$ je při $a \neq b$ jednoznačně řešitelná. V distributivním kvasitělese platí navíc identita $(b + c)\, a = ba + ca$.

Geometrický význam distributivních kvasitěles s asociativním násobením, tj. komutativních a nekomutativních těles, je od dob Hilbertových dobře znám: Souřadnicemi z takovýchto těles lze opatřit právě ty geometrie, v nichž platí Desarguesova věta; při dimensi větší než 2 je předpoklad o Desarguesově větě nadbytečný.

Větu o geometrickém významu distributivních kvasitěles objevil v r. 1945 H. F. Gingenrich a uveřejnil ji bez důkazu ve výtahu své disertační práce.[3]) Důkaz uveřejnili v r. 1954 1954 H. Lenz,[4]) v r. 1955 G. Pickert[5]) a v r. 1957 R. Lingenberg.[6])

V tomto referátu je podán **nový důkaz** Gingenrichovy věty, jímž má být problém osvětlen z dalšího hlediska.

Nejprve budiž upozorněno na některé pojmy, jichž bude v dalším užito.

Projektivní rovina je bodová množina s význačnými podmnožinami, tzv. přímkami, přičemž dva různé body jsou obsaženy vždy v jediné přímce, dvě různé přímky mají vždy jediný společný bod a existují čtyři body, z nichž žádné tři nejsou obsaženy v téže přímce.

Vybereme-li v projektivní rovině pevnou přímku, tzv. nevlastní přímku, jejíž všecky body prohlásíme opět za nevlastní, dostáváme se k afinní rovině.

V afinní rovině zvolme vlastní body O, E a nevlastní body U, V tak, aby žádné tři z nich neležely na téže přímce. Body O, E, U, V tvoří tzv. souřadnicový reper, přímky OU, OV jsou souřadnicovými osami x, y. Souřadnicový obor $\mathfrak{S}$ je potom množina vlastních bodů přímky OE.[7]) Bod O prohlásíme za nulu, bod E za jednotku. Každému vlastnímu bodu A přísluší x-ová souřadnice $VA \cap OE$ a y-ová souřadnice $UA \cap OE$. Naopak, uspořádanému páru prvků a, b z $\mathfrak{S}$ přísluší vlastní bod $Ub \cap Va$. Vlastní body identifikujeme s uspořádanými dvojicemi jejich souřadnic. Je-li $k \in \mathfrak{S}$, pak přímce $p = 0\,(1, k)$ přiřadíme „směrnici“ k. Tutéž „směrnici“ přiřadíme i všem přímkám rovnoběžným[8]) s přímkou p. Rovnoběžkám s osou y žádnou směrnici nepřiřazujeme.

Ternární operaci T nad $\mathfrak{S}$ definujeme takto: Rovnice $\eta = T(k, \xi, q)$ je ekvivalentní s tím, že bod (ξ, η) leží na přímce, která má směrnici k a prochází bodem $(0, q)$. Souřadnicový obor $\mathfrak{S}$ spolu s ternární operací T nazývá se ternárním tělesem. Binární sčítání a násobení nad $\mathfrak{S}$ je pak odvozeno z rovnic: $T(1, x, q) = x + q$, $T(k, x, 0) = kx$.

Zákonem rozložitelnosti rozumíme identickou rovnici $T(k, x, q) = kx + q$. V roce 1943 dokázal M. Hall, že ne každé ternární těleso splňuje zákon rozložitelnosti.[9])

Desarguesova věta zní v Pickertově formulaci takto: *Nechť* $A_i, B_i, C_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i$ *jsou proměnné body a přímky, přičemž*

$$C, A_i, B_i \in \gamma_i\,; \quad C_{ij}, A_i, C_j \in \alpha_{ij}\,; \quad C_{ij}, B_i, B_j \in \beta_{ij}\,;$$
$$C \neq A_i \neq B_i \neq C\,, \quad \gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3 \neq \gamma_1\,, \quad \alpha_{12} \neq \alpha_{13}\,, \quad \beta_{12} \neq \beta_{13}\,; \quad C_{12}, C_{13} \in \gamma\,.$$

Potom $C_{23} \in \gamma$.

Dodatky. Bod C nazveme středem, přímku γ osou obou bodových trojic A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3. Je-li $C \in \gamma$, jde o malou Desarguesovu větu. Je-li osa γ nevlastní, jde o afinní Desarguesovu větu. Afinní rovina, v níž platí malá Desarguesova věta, nazývá se translační rovinou.

V r. 1943 odvodil M. Hall tuto větu:[9]) Každý souřadnicový obor translační roviny je kvasitělesem. Existuje-li souřadnicový obor afinní roviny, který je kvasitělesem,[10]) pak rovina je translační.

Hlavní teorém tohoto referátu pak zní:

V translační rovině platí malá Desarguesova věta pro pevný nevlastní střed nezávisle na poloze osy právě tehdy, když existuje souřadnicový obor, který je distributivním kvasitělesem.

Jak bylo již poznamenáno v úvodu, uvádí tento teorém jako prvý Gingenrich, Lenz a Lingenberg a dokazují jej užitím vhodných translací,[11]) Pickert užitím duality.[12]) V referátu byl pak podán nový důkaz teorému.

Bylo sestrojeno mnoho příkladů distributivních kvasitěles s neasociativním násobením (L. E. Dickson, A. A. Albert, R. H. Bruck), avšak většinou tato tělesa splňovala některou multiplikativní identitu, např. komutativní zákon $ab = ba$ nebo levý alternativní zákon $a \,.\, (ab) = a^2 \,.\, b$.

Obtížný problém vypracovat teorii volných distributivních kvasitěles rozřešil v nedávné době. L. A. Skornjakov.[13]) Jak se dá očekávat, umožní Skornjakovovy výsledky další propracování teorie nedesarguesovských rovin.[14])

Poznámky. [1]) N. Bourbaki, Algèbre, kap. II, str. 42. [2]) Aditivní systém je tvořen všemi prvky struktury, kdežto multiplikativní systém obsahuje všecky prvky struktury vyjma nuly. [3]) H. F. Gingenrich, Generalized fields and Desargues configurations, Abstr. of a Thesis, Urbana, *Ill*, 1945. [4]) Jahresbericht der deutsch. Math.-Ver. *57* (1954), str. 23. [5]) G. Pickert, Projektive Ebenen, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955. [6]) Math. Zeitschr. *67* (1957), str. 350—351, věta 40, str. 101. [7]) Symbol AB značí přímku, na níž leží body $A \neq B$. [8]) Dvě vlastní přímky pokládáme za rovnoběžné, mají-li společný nevlastní bod. [9]) Trans. Am. Math. Soc. *54* (1943), str. 229—277. [10]) Mlčky zde předpokládáme též platnost zákona rozložitelnosti. [11]) Translace je perspektivní kolineace s nevlastním středem i osou; viz Pickert, Projektive Ebenen, str. 66. [12]) Je zde míněna dualita mezi dvěma projektivními rovinami ve smyslu Pickertově; viz jeho Projektive Ebenen, str. 39—42. [13]) Podle sdělení o práci moskevského algebraického semináře. [14]) Poznámka o Skornjakovových výsledcích byla pořízena až po proslovení referátu.

Václav Havel, Brno

UŽITÍ KADEŘÁVKOVY VĚTY V TEORII PŘÍMKOVÝCH KVADRIK

(Referát V. HAVLA o přednášce konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 10. listopadu 1958 v Brně)

Jako obsah klasické Dandelinovy věty bývá uváděno, že kuželosečka, jež je rovinným průnikem rotační kuželové plochy, má ohnisko v dotykovém bodě Dandelinovy kulové plochy. Jak uvádí L. HOFMANN,[1]) je přitom podstatné toto tvrzení:

Dotýkají-li se v projektivním prostoru plochy Φ, Ψ podél křivky k a je-li ϱ některá rovina, pak průniky $\Phi \cap \varrho$, $\Psi \cap \varrho$ jsou v obecném případě křivky, dotýkající se v průsečících $k \cap \varrho$.

Při eukleidovské i neeukleidovské metrice odvodil pak Hofmann vhodnou specialisací ploch Φ, Ψ jednak klasickou Dandelinovu větu, jednak její analogie pro neeukleidovské prostory.

Za obsah klasické Dandelinovy věty lze však pokládat též tvrzení, že rovinným průnikem rotační kuželové plochy je křivka speciálního metrického vytvoření (křivka, jejíž body mají konstantní poměr vzdáleností od ohniska a přímky řídicí). V tomto smyslu pojatá Dandelinova věta byla v referátě zobecněna ve dvou směrech: Jednak zobecněním metrického vytvoření průnikové křivky a za druhé přejitím od rotační kuželové plochy k rotační kvadrice. Takovýmto zobecněním zabývali se již J. KOUNOVSKÝ[2]) a F. KADEŘÁVEK,[3]) avšak nedospěli k závěrečným výsledkům.

V reálné, resp. komplexní rovině definujme „vzdálenost" bodu od kružnice jako číslo $\sqrt{c^2 - r^2}$, kde c je vzdálenost daného bodu od středu kružnice a r je (kladný, nulový anebo ryze imaginární) poloměr.

Je-li dána reálná přímka p, kružnice k o středu S a poloměru r a kladné či ryze imaginární číslo ε, pak definujme f-křivku[4]) jako množinu bodů, pro něž „vzdálenost" od k je rovna součinu vzdálenosti od p s konstantou ε. Dále označme o přímku, jdoucí bodem S kolmo k p a δ vzdálenost bodu S od přímky p.

Věta 1. *f-křivka a křivka 2. stupně jsou identické pojmy.*[5]) Kružnice k je pro f-křivku bitangenciální a přímka p spojuje příslušné body dotyku.

Nechť jsou dány kružnice ^1k, ^2k a číslo $\varkappa$, které je kladné anebo ryze imaginární. Za F-křivku[6]) prohlásíme množinu bodů, pro něž absolutní hodnota součtu nebo rozdílu vzdáleností od ^1k, ^2k rovná se číslu $\varkappa$. Předpokládejme ještě dále, že středy obou kružnic mají vzdálenost $\mu > 0$; spojnici středů označíme o.

Věta 2. *F-křivka a křivka 2. stupně jsou identické pojmy.*[5]) Kružnice ^1k, ^2k jsou bitangenciálními kružnicemi příslušné F-křivky.

Důkaz věty 1—2 provedl jsem elementárními prostředky analytické geometrie. Nezávisle na tom dokázal jsem prostředky syntetické geometrie prostorové další větu:

Věta 3. *Rovinný průnik rotační přímkové plochy Φ je f-křivka (a sice reálná, s kladnou hodnotou pro konstantu ε), resp. F-křivka (a to opět reálná, s kladnou hodnotou pro $\varkappa$).*[7]) Bitangenciální kružnice pro průnikovou křivku leží na libovolných dvou různých kulových plochách, vepsaných do Φ.

Prof. F. KADEŘÁVEK objevil tu část věty 3, která se týká případu, kdy plocha Φ je kuželová,[8]) a vyslovil domněnku, že věta platí obecněji; budu tedy větu 3 nazývat *Kadeřávkovou větou*. Za důležité pokládám, že kolmý průmět osy rotace do roviny řezu může být pro průnikovou hyperbolu též vedlejší osou. Takový případ se totiž v případě, kdy Φ je kuželová plocha, nemůže vyskytnout.

Věta 4. *Neplatí-li současně $\delta = 0$, $\varepsilon = 1$, potom f-křivka protíná reálně osu o právě tehdy, když $r^2 : \varepsilon^2 \geqq r^2 - \delta^2$.*

Důsledek. Nechť α je ostrý úhel, pro nějž platí $\cos \alpha = \delta : r$ a nechť $\varepsilon_0 = (r - \delta) : \left(r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)$. Pak právě pro $r > \delta$, $1 : \varepsilon < \varepsilon_0$ je f-křivka hyperbolou s vedlejší osou o.

Nahradíme-li v definici f-křivky, resp. F-křivky kružnice k, ${}^1k$, ${}^2k$ kulovými plochami Φ, ${}^1\Phi$, ${}^2\Phi$ a přímku p rovinou ϱ reálného resp. komplexního prostoru, dospíváme k definici f-plochy, resp. F-plochy. Platí pak tyto dvě věty:

Věta 5. *Pojmy f-plocha, F-plocha a rotační kvadrika jsou identické.*[9]) *Kulové plochy* Φ, ${}^1\Phi$, ${}^2\Phi$ *jsou dané ploše vepsány a* ϱ *je rovinou dotykové kružnice.*

Věta 6. *Rovinným průnikem rotační kvadriky je f-křivka, resp. F-křivka.* Určující údaje pro tuto f-křivku, resp. F-křivku vyplývají z určujících údajů pro danou rotační kvadriku jakožto f-plochu, resp. F-plochu.

Věta 6 je naším nejzazším zobecněním klasické Dandelinovy věty ve smyslu podaném v úvodu referátu.

Jednoduché kvadriky pouze s eliptickými body lze odvodit užitím dvou perspektivních kolineací z plochy kulové a touto elementární cestou lze vybudovat geometrii kvadrik pouze s eliptickými body. Při budování geometrie přímkových kvadrik lze vyjít od rotačního přímkového hyperboloidu a od něho přejít perspektivní kolineací k nerotačnímu přímkovému hyperboloidu a k hyperbolickému paraboloidu. Vtipně užívá tohoto postupu F. Hohenberg,[10]) avšak užívá pojmu algebraická plocha. Věta 3 dovoluje však obejít pojem algebraické plochy při důkazu, že rovinné průniky plochy jsou kuželosečky.

Poznámky. [1]) Monatshefte f. Math. *62* (1958), 1—15. [2]) Čas. pro pěst. mat. *44* (1915), 257—268. [3]) Čas. pro pěst. mat. *46* (1917), 65—71. [4]) Písmenem f zdůrazňujeme, že jde o zobecnění fokálních vlastností. [5]) Vyjímáme přitom kružnice. [6]) Písmenem F opět zdůrazňujeme zobecnění fokálních vlastností. [7]) Vyjímáme průnik kuželové plochy vrcholovou nesečnou rovinou a rovinou kolmou k ose rotace. [8]) Viz práci, citovanou v třetí poznámce. [9]) Vyjímáme plochu kulovou. [10]) F. Hohenberg, Konstruktive Geometrie für Techniker, Wien 1956, str. 141—142.

Václav Havel, Brno

SUR L'EXISTENCE DES PETITES OSCILLATIONS RELATIVES D'UN SYSTÈME DE PENDULES INVARIABLEMENT RELIÉ À UNE SPHÈRE EN ROTATION UNIFORME

(Conférence de M. S. Manolov (Sofia, Bulgarie) faite le 4 novembre 1958 à l'Ecole Polytechnique de Prague)

Dans le travail [1] nous avons considéré le problème des petites oscillations d'un système de pendules dans le cas où le plan de leur mouvement effectue un mouvement d'entraînement supplémentaire qui est une rotation uniforme autour d'un axe. Nous avons supposé nul l'angle α entre le plan des oscillations relatives et l'axe de rotation.

Ici nous donnerons un résultat dans le cas de deux pendules quand l'angle α est arbitraire. Plus exactement le nouveau problème peut se formuler de la façon suivante:

Une sphère tourne autour d'un axe fixe l avec une vitesse angulaire ω constante (fig. 1). Soit Q un point fixe sur la sphère. Soit G le centre de la sphère. Par suite de la rotation de la droite GQ autour de l'axe l l'angle α ne change pas. Au point A_1 sur GQ en dehors de la sphère est suspendu le pendule A_1A_2 qui représente une tige matérielle homogène de masse m et de longueur $2a$. Au point A_2 est suspendu un second pendule A_2A_3 de al même espèce de masse m et de longueur $2a$. Soit G_i le centre de gravité du pendule A_iA_{1+i}, $i = 1, 2$. En chacun des points G_1 est appliquée une force dirigée vers la sphère. Soit mq la grandeur de cette force. Les articulations en A_1 et A_2 sont telles que le plan de mouvement μ du système de pendules fait un angle de 90° avec le plan tournant, celui-ci étant déterminé par GQ et l. Désignons par α l'angle entre l'axe de rotation l et la droite GQ. Sur la figure 1 on voit le système de référence relatif $OXYZ$. Soit R la distance OA_1. Le mouvement relatif du système est déterminé par les angles Θ_i, $i = 1, 2$.

Nous avons établi le résultat suivant:

Soit

$$\omega^2 < 6q \frac{9R \sin 2\alpha + 4a(7 - 13 \sin^2 \alpha) - 8a \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha + 7}}{27R^2 \sin^2 2\alpha + 24Ra \sin 2\alpha(7 - 13 \sin^2 \alpha) + 16a^2(55 \sin^4 \alpha - 62 \sin^2 \alpha + 7)}$$

où le rapport $\frac{R}{a}$ *n'annule pas le dénominateur, et*

$$\omega^2 < \frac{9q}{8a \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha + 7}}$$

lorsque ce dénominateur est nul;[1]) *soit enfin* ω^2 *un nombre positif quelconque lorsque* $\alpha = 90°$. *Dans ces conditions la position* $\Theta_i = 0$, $i = 1, 2$ *est une position stable et le système dynamique considéré possède, au voisinage de cette position, un petit mouvement périodique de période* $2\frac{\pi + \delta}{K_1}$, *où* δ *est suffisamment petit. Une première approximation de cette oscillation périodique est le mouvement défini par les formules*

$$\Theta_\nu = \lambda \frac{\lambda_{1\nu}}{K_1} \sin K_1 t,\ \dot\Theta_\nu = \lambda \lambda_{1\nu} \cos K_1 t;\ \nu = 1, 2$$

où λ *est suffisamment petit en valeur absolue. Les quantités* λ_{i1} *et* λ_{i2} *se déterminent par les rapports*

$$\frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1}} = \frac{18q - 32aK_i^2 - \omega^2(32a - 44a \sin^2 \alpha + 9R \sin \alpha 2)}{12a(K_i^2 + \omega^2)},$$

$i = 1, 2$.

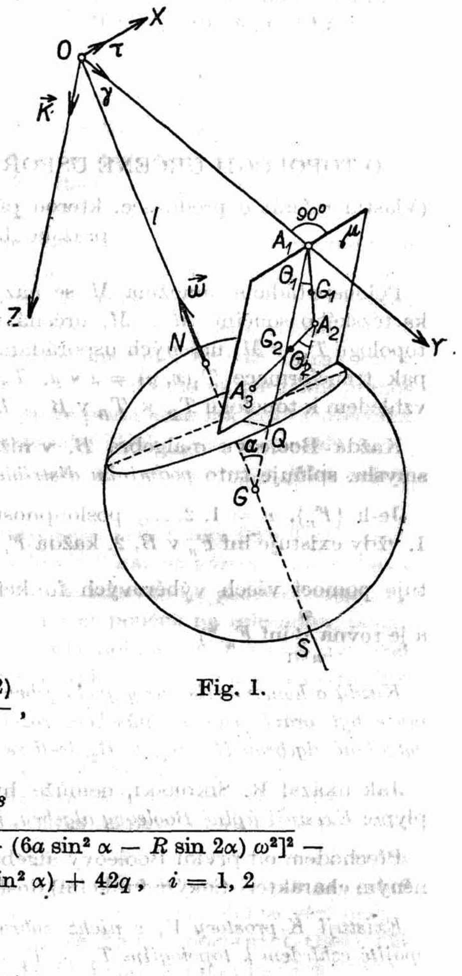

Fig. 1.

Enfin les nombres K_i *sont définis par les relations*

$$28aK_i^2 = \pm 4\sqrt{4a^2 \sin^4 \alpha \,.\, \omega^4 + 7[2q + (6a \sin^2 \alpha - R \sin 2\alpha)\, \omega^2]^2} - \omega^2(28a + 21R \sin 2\alpha - 124 \sin^2 \alpha) + 42q,\quad i = 1, 2$$

ayant en vue que $K_i > 0$ *et* $K_1 > K_2$.

[1]) Ceci n'est possible que si $\sqrt{\frac{7}{55}} < \sin \alpha < 1$ et

$$\frac{R}{a} = \frac{4(13 \sin^2 \alpha - 7 + 2\sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha + 7})}{9 \sin 2\alpha}.$$

La démonstration se fait en divisant convenablement l'intervalle [0, 1] de variation de sin α et en considérant séparément chacun des sousintervalles.

Remarquons que pour $\alpha \approx 0$ et $q = g$ on obtient $\omega^2 < \frac{3g(\sqrt{7}-2)}{2\sqrt{7}a}$. C'est un résultat qui se trouve dans notre travail [1].

Remarque. Sur la fig. 1, les vecteurs unitaires partant du point O doivent être dénotés par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ au lieu de τ et γ.

LITTÉRATURE

[1] *Манолов С.*: О существовании малых периодических движений вокруг положения относительного устойчивого равновесия одной механической системы. П. М. М., том *XIX*, в. 4, 1955. СССР.

S. Manolov, Sofia

O TOPOLOGII URČENÉ USPOŘÁDÁNÍM V BOOLEOVÝCH ALGEBRÁCH

(Vlastní referát o přednášce, kterou přednesl dr. Klaus Matthes v matematické obci pražské dne 1. prosince 1958)

Polouspořádaná množina M se nazývá *topologická*, shoduje-li se topologie $T_{M\times M}$ kartézského součinu $M \times M$, určená uspořádáním, s kartézským součinem $T_M \times T_M$ topologií T_M v M, určených uspořádáním. V každé topologické Booleově algebře B jsou pak transformace $T_1(x, y) = x \vee y$, $T_2(x, y) = x \wedge y$, $T_3(x) = \bar{x}$ spojitými zobrazeními vzhledem k topologii $T_B \times T_B$ v $B \times B$ a vzhledem k topologii T_B v B.

Každá Booleova σ-algebra B, v níž jsou booleovské operátory spojité v uvedeném smyslu, splňuje tuto *podmínku distributivnosti*:

Je-li $\{F_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, posloupnost neprázdných podmnožin množiny B, pro niž 1. vždy existuje inf F_n v B, 2. každá F_n obsahuje s a a b také nějaké $c \leqq a \wedge b$, pak existuje pomocí všech výběrových funkcí $\Phi \in \mathop{\mathsf{X}}\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ vytvořená dolní hranice $\bigwedge\limits_{\Phi} (\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \Phi(n))$ a je rovna $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \inf F_n$.*)

Každý σ-homomorfismus φ podalgebry H Booleovy σ-algebry B_1 do Booleovy σ-algebry B_2 může být právě jedním způsobem rozšířen na σ-homomorfismus Booleovy σ-algebry H', vytvořené algebrou H v B_1, do B_2, jestliže B_2 splňuje uvedenou podmínku distributivnosti.

Jak ukázal R. Sikorski, nemůže být požadavek distributivnosti vypuštěn. Z toho plyne: *Existují úplné Booleovy algebry, které nejsou topologické.*

Přechodem od prvků Booleovy algebry k odpovídajícímu rozkladu jednotky (k zobecněným charakteristickým funkcím) dostaneme:

Existují K-prostory V, v nichž zobrazení $T_1(x, y) = x \vee y$ množiny $V \times V$ do V není spojité vzhledem k topologiím $T_V \times T_V$ a T_V.

Klaus Matthes, Berlín

*) $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ označuje kartézský součin množin F_n.