Werk

Label: Abstract

Jahr: 1958

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0083|log94

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ны двух различных классов соединены ребрами. Пусть m (соотв. n) есть число элементов множества M (соотв. N). Если теперь назвать полным четным графом U такой четный граф, в котором для каждой пары вершин $x \in M$, $y \in N$ существует ребро $xy \in U$, то число основ графа U равно $m^{n-1} \cdot n^{m-1}$.

Zusammenfassung

ÜBER WURZELBASEN VON GERICHTETEN GRAPHEN

MIROSLAV FIEDLER u. JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Eingelangt am 4. Juni 1957)

Als *Quelle* eines endlichen gerichteten Graphen G bezeichnen wir einen solchen Knotenpunkt von G, der für keine Kante von G als ein Endpunkt dient. Jeder zusammenhängende gerichtete Graph mit einer einzigen Quelle heisst ein *Wurzelgraph* (kurz *W-Graph*). Ist ein W-Graph ein Baum, dann sprechen wir von einem *W-Baume* (auch einen Graphen mit nur einem Knotenpunkte halten wir für einen W-Baum). Ist G ein endlicher gerichteter Graph, dann ist es möglich seine *W-Basis* H zu definieren: H sei ein solcher Teilgraph von G, der alle Knotenpunkte von G enthält und dessen jeder zusammenhängende Bestandteil ein W-Baum ist. In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns zuerst mit den W-Basen in azyklischen und wohlgerichteten Graphen. (Ein Graph ist *azyklisch*, wenn kein Teilgraph ein Zyklus ist. Ein Graph ist *wohlgerichtet*, wenn von jedem Knotenpunkt aus zu jedem anderen eine Bahn führt.) Folgende Sätze werden bewiesen:

Sei A ein azyklischer Graph und $w_1, w_2, \ldots, w_r$ ($r \geqq 1$) alle seine Quellen; sei B ein solcher Teilgraph von A, dessen jeder zusammenhängende Bestandteil ein W-Baum ist. Dann existiert eine W-Basis von A, für die die Knotenpunkte $w_1, w_2, \ldots, w_r$ sämtliche Quellen sind und die B als Teilgraphen enthält (Satz 3).

Gibt es zu jedem Knotenpunkt w eines endlichen gerichteten Graphen G eine W-Basis von G mit der einzigen Quelle w, so ist G ein wohlgerichteter Graph (Satz 4).

Es sei G ein wohlgerichteter Graph und B ein (nicht leerer) Teilgraph von G, dessen jeder zusammenhängende Bestandteil ein W-Baum ist. Dann existiert eine W-Basis von G mit denselben Quellen wie B, die B als Teilgraphen enthält (Satz 5).

Aus diesen zwei Sätzen folgt, dass ein gerichteter Graph dann und nur dann wohlgerichtet ist, wenn zu jeder nicht leeren Untermenge P der Knotenpunktmenge von G eine W-Basis von G existiert, deren Quellen genau diejenige Knotenpunkte von P sind.

Der Begriff der W-Basis hat auch eine Anwendung in der Theorie der Determinanten.

Es sei G ein gerichteter Graph, dessen Knotenpunkte wir mit $1, 2, 3, \ldots, n$ ($n \geqq 2$) bezeichnen wollen. Zu jeder Kante $\overrightarrow{ik}$ von G ordnen wir eine reelle Zahl u_{ik} zu. Jetzt sei zu diesem *bewerteten* Graphen eine n-reihige quadratische Matrix $\mathbf{A}_G = \|a_{ik}\|_1^n$ folgendermassen definiert:

I. Ist $i \neq k$, dann sei $a_{ik} = -u_{ik}$ dann und nur dann, falls in G die Kante $\overrightarrow{ik}$ existiert; anderenfalls sei $a_{ik} = 0$.

II. Für $k = 1, 2, \ldots, n$ sei $a_{kk} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} u_{ik}$.

Es sei nun $A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ (mit $1 \leqq r < n$) diejenige Hauptunterdeterminante von $\mathbf{A}_G$, in der genau die Reihen und Spalten $i_1, i_2, \ldots, i_r$ fehlen. Ist ferner H ein bewerteter Graph, so sei mit $\pi\{H\}$ das Produkt von sämtlichen zur Bewertung der Kanten von H benützten Zahlen bezeichnet. Ist noch mit $\sum_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ die Summe von $\pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ über sämtliche W-Basen $K(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ von G mit den festen Quellen $i_1, i_2, \ldots, i_r$ bezeichnet, so gilt (Satz 6):

$$A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r) = \sum_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}\,.$$

Zum Schluss sind noch einige Anwendungen dieses Satzes angeführt. So kann auf diese Weise die Anzahl (zusammenhängender) Gerüste eines nichtgerichteten Graphen bestimmt werden. Es wird gezeigt, dass der sog. *vollständige paare Graph* vom Typus (m, n), der $m + n$ Knotenpunkte von zwei Klassen der Mächtigkeit m bzw. n besitzt, wobei genau Knotenpunkte von verschiedenen Klassen durch Kanten verbunden sind, die Anzahl der Gerüste $m^{n-1} \cdot n^{m-1}$ hat.