do v_i ($1 \leqq i \leqq s$). Podle poznámky 2 dokážeme, že počet W-basí grafu A, které mají prameny $w_1, w_2, \ldots, w_r$, je $d_1 d_2 \ldots d_s$.[15])

Ohodnoťme opět každou hranu grafu A číslem 1. Volbou číslování uzlů lze vždy dosáhnout toho, že matice $\|a_{ik}\|_1^n$ je trojúhelníková. V její hlavní diagonále jsou jednak čísla d_i, jednak r nul. Z věty 6 už plyne žádaný výsledek.

LITERATURA

[1] *D. König;* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[2] *A. Kotzig;* Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov, Bratislava 1956 (skriptum).

[3] *G. Pólya;* Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Math. *68* (1937), 145—254.

[4] *J. Sedláček;* O konečných orientovaných grafech, Časopis pro pěstování matematiky *82* (1957), 195—215.

[5] *H. M. Trent;* A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph, Proc. mat. Acad. Sci USA, *40*, 1004—1007 (1954).

Резюме

О W-БАЗАХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler) и ИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага

(Поступило в редакцию 4/VI 1957 г.)

Источником конечного ориентированного графа G мы называем такую его вершину, которая не является концевой ни для какого ребра графа G. Связный ориентированный граф с одним единственным источником назовем *W-графом*; в случае, если W-граф является деревом, мы говорим о *W-дереве* (граф с одной вершиной мы считаем также W-деревом). Если G — конечный ориентированный граф, то под его *W-базой* мы подразумеваем подграф графа G, каждая составляющая которого является W-деревом и который содержит все вершины графа G. В статье мы прежде всего рассматриваем W-базы в ациклических и хорошо ориентированных графах. (Ориентированный граф является *ациклическим*, если он не содержит в качестве своего подграфа ни одного цикла. Граф является *хорошо ориентированным*, если в нем из каждой вершины ведет путь к любой дальнейшей.) Доказываются следующие теоремы:

[15]) Tento výsledek tedy doplňuje větu 3.

Пусть A — ациклический граф, и $w_1, w_2, \ldots, w_r$ ($r \geqq 1$) — все его источники; пусть, далее, B — подграф графа A, каждая составляющая которого является W-деревом. Тогда существует W-база графа A с источниками $w_1, w_2, \ldots, w_r$, подграфом которой является B (теорема 3).

Если для каждой вершины w конечного ориентированного графа G существует W-база графа G с одним единственным источником w, то G является хорошо ориентированным графом (теорема 4).

Пусть G — хорошо ориентированный граф и пусть B — (непустой) подграф графа G, каждая составляющая которого является W-деревом. Тогда существует W-база графа G, содержащая B в качестве подграфа и имеющая те же источники, как и B (теорема 5).

Из двух последних теорем вытекает такое следствие: Граф G является хорошо ориентированным тогда и только тогда, если для любого непустого подмножества P множества вершин графа G существует W-база графа G, источниками которой являются в точности вершины P.

Понятие W-базы графа находит применение также в теории определителей. Пусть G — ориентированный граф; обозначим его вершины через $1, 2, 3, \ldots, n$ ($n \geqq 2$). Каждому ребру $\overrightarrow{ik}$ поставим в соответствие действительное число u_{ik} и составим для помеченного таким образом графа G матрицу $\mathbf{A}_G = \|a_{ik}\|_1^n$, определенную следующим образом:

I. Если $i \neq k$, то положим $a_{ik} = -u_{ik}$ тогда и только тогда, если в G существует ребро $\overrightarrow{ik}$; если же такого ребра не существует, то положим $a_{ik} = 0$.

II. Для $k = 1, 2, \ldots, n$ положим $a_{kk} = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} u_{ik}$. Пусть $A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ — минор матрицы $\mathbf{A}_G$, полученный из $\mathbf{A}_G$ путем вычеркивания строк и столбцов, обозначенных числами $i_1, i_2, \ldots, i_r$ (где $1 \leqq r < n$). Для помеченного графа H обозначим через $\pi(H)$ произведение всех чисел, использованных для пометок ребер графа H. Пусть $K(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ есть W-база графа G с источниками $i_1, i_2, \ldots, i_r$; обозначим через $\sum\limits_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ сумму всех $\pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$, взятую по всем W-базам графа G, имеющим фиксированные источники $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Тогда (теорема 6):

$$A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r) = \sum_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}\,.$$

В заключении работы иллюстрируются применения указанной теоремы об определителях. Показано, что эта теорема может быть использована, напр., и для определения числа (связных) основ неориентированного графа. В частности, разобран случай т. наз. *полного четного графа.* Четный граф можно — как известно — охарактеризовать тем, что в нем существует разложение множества вершин на два класса M, N так, что только верши-