Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O NĚKTERÝCH VLASTNOSTECH HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE ČTVRTÉHO ŘÁDU

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

DT: 517.941

(Došlo dne 29. března 1957)

V práci jsou odvozeny dva kanonické tvary homogenní lineární diferenciální rovnice 4. řádu, které mohou být užitečné při studiu oscilačních a asymptotických vlastností. Při odvození obou kanonických tvarů hrají podstatnou úlohu funkce ω, ω_1, ω_2, z nichž první je diferenciálním invariantem a ostatní jsou diferenciálními semiinvarianty.

1

Nechť je dána diferenciální rovnice

$$y'''' + 4a_3y''' + 6a_2y'' + 4a_1y' + a_0y = 0\,. \tag{1,1}$$

Poznámka 1,1. O každé lineární diferenciální rovnici a tedy i o rovnici (1,1) budeme vždy předpokládat, že její koeficienty jsou spojitými funkcemi proměnné x v jistém intervalu $\langle a, b\rangle \equiv J$, při čemž v případě $b = \infty$ je interval J zprava otevřený.

G. Sansone, viz [8], odvozuje za předpokladu, že funkce a_3'', a_2' jsou v J spojité, typický tvar rovnice (1,1)

$$[\vartheta_2 y'']'' - [\vartheta_1 y']' - \Omega y' + \vartheta_0 y = 0\,, \tag{1,2}$$

kde

$$\vartheta_2 = e^{2\int a_3 dx}\,, \quad \vartheta_1 = -2S\vartheta_2\,, \quad \Omega = -2\vartheta_2 I\,, \quad \vartheta_0 = a_0\vartheta_2\,,$$
$$S = 3a_2 - a_3' - 2a_3^2\,,$$
$$I = 4a_3^3 + 6a_3a_3' - 6a_3a_2 + a_3'' - 3a_2' + 2a_1\,, \tag{1,3}$$

kterého používá při studiu některých oscilačních a asymptotických vlastností.

Poznámka 1,2. Funkce (1,3) je Halphenův invariant diferenciální rovnice (1,1), viz Halphen [2], Sansone l. c.

Poznámka 1,3. V této práci odvodíme jiné tvary rovnice (1,1), jež nazveme kanonickými. Těchto tvarů jsme použili v práci [4] {[3]} ke studiu oscilačních {asymptotických} vlastností diferenciální rovnice (1,1).

Poznámka 1,4. V celé této práci vyloučíme ze svých úvah triviální řešení.

2

Iterací homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

$$L[y] = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^{(\nu)} = 0 \tag{2,1}$$

obdržíme homogenní lineární diferenciální rovnici $2n$-tého řádu

$$L^2[y] = L[L[y]] = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \{L[y]\}^{(\nu)} = 0\,. \tag{2,2}$$

Poznámka 2,1. O koeficientech a_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) předpokládáme, že mají v J spojité derivace, které se v rovnici (2,2) vyskytují.

Platí tyto jednoduché pomocné věty:

Lemma 1. *Každé řešení rovnice* (2,1) *je řešením rovnice* (2,2).

Lemma 2. *Nechť* $Y(x)$ $[\eta(x)]$ *je řešení rovnice* (2,1) $[L[y] = Y(x)]$. *Potom* $\eta(x)$ *je řešení rovnice* (2,2).

Poznámka 2,2. Platnost pomocných vět 1 a 2 se snadno rozšíří na diferenciální rovnici $L^k[y] = 0$, $k > 2$ přirozené.

Definice 1. Iterovanou rovnicí nazveme každou homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu, která vznikne n-násobnou iterací homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu

$$P[y] = A_1 y' + A_0 y = 0\,, \quad A_1 \neq 0\,. \tag{2,3}$$

Jestliže $y_1(x)$ je řešení rovnice (2,3), pak podle pomocných vět 1, 2 funkce

$$y_i(x) = y_1(x)\,.\left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{2,4}$$

$$\left(\text{kde} \left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^0 = 1\,, \left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^1 = \int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x,\right.$$

$$\left.\left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^2 = \int \frac{1}{A_1}\left(\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x, \text{ atd.}\right),$$

vyhovují iterované rovnici n-tého řádu

$$P^n[y] = 0\,. \tag{2,5}$$

Integrály (2,4) jsou lineárně nezávislé. Neboť v opačném případě by platila pro všechna $x \in J$ identita

$$y_1(x)\left(c_1 + c_2 \int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x + c_3\left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^2 + \ldots + c_n\left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^{n-1}\right) = 0\,,$$

kde aspoň jedno z čísel c_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) je různé od nuly. Avšak tato identita je nemožná, neboť $y_1(x)$ je netriviální integrál rovnice (2,3) a wronskien funkcí, které se vyskytují uvnitř kulaté závorky, se rovná

$$A_1^{\frac{1}{2}n(1-n)} \neq 0\,.$$

3

Předpokládejme, že v rovnici (1,1) jsou koeficienty a_3''', a_2'' spojitými funkcemi v intervalu J.

Věta 1. *Diferenciální rovnice (1,1) vznikne iterací diferenciální rovnice (2,3), když a jen když platí pro všechna $x \in J$ identity*

$$I = 4a_3^3 + 6a_3a_3' - 6a_3a_2 + a_3'' - 3a_2' + 2a_1 = 0\,, \tag{3,1}$$

$$\begin{aligned} I_2 = 44a_3^4 + 288a_3^2a_3' + 140a_3a_3'' + 84a_3'^2 + 20a_3''' + 12a_3^2a_2 - \\ - 150a_3a_2' + 12a_3'a_2 - 81a_2^2 - 45a_2'' + 25a_0 = 0\,. \end{aligned} \tag{3,2}$$

Důkaz této věty není obtížný, ale je pracný. Uvedeme pouze jeho hlavní myšlenky.

$$\begin{aligned} \text{Je } P^4(y) = {} & A_1^4y'''' + A_1^3(6A_1' + 4A_0)\,y''' + A_1^2(7A_1'^2 + 4A_1A_1'' + 12A_1'A_0 + \\ & + 6A_1A_0' + 6A_0^2)\,y'' + A_1(4A_1A_1'A_1'' + A_1^2A_1''' + A_1'^3 + 4A_1'^2A_0 + \\ & + 4A_1A_1''A_0 + 10A_1A_1'A_0' + 4A_1^2A_0'' + 6A_1'A_0^2 + 12A_1A_0A_0' + 4A_0^3)\,y' + \\ & + (A_1A_1'^2A_0' + A_1^2A_1''A_0' + 3A_1^2A_1'A_0'' + 4A_1A_1'A_0A_0' + 3A_1^2A_0'^2 + \\ & + 4A_1^2A_0A_0'' + A_1^3A_0''' + 6A_1A_0^2A_0' + A_0^4)\,y. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do (3,1), (3,2)

$$\left.\begin{aligned} 6\,\frac{A_1'}{A_1} + 4\,\frac{A_0}{A_1} = 4a_3\,, \\ 7\,\frac{A_1'^2}{A_1^2} + 4\,\frac{A_1''}{A_1} + 12\,\frac{A_1'A_0}{A_1^2} + 6\,\frac{A_0'}{A_1} + 6\,\frac{A_0^2}{A_1^2} = 6a_2\,, \\ 4\,\frac{A_1'A_1''}{A_1^2} + \frac{A_1'''}{A_1} + \frac{A_1'^3}{A_1^3} + 4\,\frac{A_1'^2A_0}{A_1^3} + 4\,\frac{A_1''A_0}{A_1^2} + 10\,\frac{A_1'A_0'}{A_1^2} + \\ + 4\,\frac{A_0''}{A_1} + 6\,\frac{A_1'A_0^2}{A_1^3} + 12\,\frac{A_0A_0'}{A_1^2} + 4\,\frac{A_0^3}{A_1^3} = 4a_1\,, \\ \frac{A_1'^2A_0'}{A_1^3} + \frac{A_1''A_0'}{A_1^2} + 3\,\frac{A_1'A_0''}{A_1^2} + 4\,\frac{A_1'A_0A_0'}{A_1^3} + 3\,\frac{A_0'^2}{A_1^2} + \\ + 4\,\frac{A_0A_0''}{A_1^2} + \frac{A_0'''}{A_1} + 6\,\frac{A_0^2A_0'}{A_1^3} + \frac{A_0^4}{A_1^4} = a_0\,, \end{aligned}\right\} \tag{3,3}$$

pak zjistíme, že $I = I_2 = 0$. Je tedy podmínka (3,1), (3,2) nutná.

Nechť naopak platí (3,1), (3,2). Má-li rovnice (1,1) vzniknout iterací rovnice (2,3), pak musí funkce A_1, A_0 vyhovovat systému diferenciálních rovnic (3,3). Ukážeme, že při splnění našeho předpokladu existuje vždy řešení systému (3,3).

Z první rovnice (3,3) vychází

$$A_0 = a_3 A_1 - \tfrac{3}{2} A_1' . \tag{3,4}$$

Dosadíme-li (3,4) do druhé, třetí a čtvrté rovnice (3,3), obdržíme po úpravě diferenciální rovnice

$$2\frac{A_1''}{A_1} - \frac{A_1'^2}{A_1^2} = \frac{12}{5}(a_3^2 + a_3' - a_2) , \tag{3,5}$$

$$\frac{A_1'''}{A_1} - 2\frac{A_1''A_1'}{A_1^2} + \frac{A_1'^3}{A_1^3} + a_3\left(2\frac{A_1''}{A_1} - \frac{A_1'^2}{A_1^2}\right) = \frac{4}{5}[a_3^3 + 3a_3a_3' + a_3'' - a_1] , \tag{3,6}$$

$$\begin{aligned}\frac{A_1''''}{A_1} &- 3\frac{A_1'''A_1'}{A_1^2} + \frac{17}{2}\frac{A_1''A_1'^2}{A_1^3} - \frac{7}{2}\left(\frac{A_1''}{A_1}\right)^2 - \frac{27}{8}\frac{A_1'^4}{A_1^4} + \frac{5}{3}\Bigg[2a_3\left(\frac{A_1'''}{A_1} - \right.\\ &\left.- 2\frac{A_1''A_1'}{A_1^2} + \frac{A_1'^3}{A_1^3}\right) + (a_3^2 + a_3')\left(2\frac{A_1''}{A_1} - \frac{A_1'^2}{A_1^2}\right)\Bigg] = \frac{2}{3}[a_3^4 + 6a_3^2a_3' + \\ &+ 4a_3a_3'' + 3a_3'^2 + a_3''' - a_0] .\end{aligned} \tag{3,7}$$

Systém (3,3) má řešení tehdy, když diferenciální rovnice (3,5), (3,6), (3,7) mají společné řešení. Tato otázka souvisí s pojmem reducibility diferenciálních rovnic (3,6), (3,7) — viz KÖNIGSBERGER [5] —, takže nám stačí najít podmínku, kdy rovnice (3,5) je integrálem diferenciálních rovnic (3,6), (3,7). Tato podmínka je $I = 0$, $I_2 = 0$.

V poznámkách 3,1—3,4 předpokládáme, že rovnice (1,1) je iterovaná.

Poznámka 3,1. Jestliže rovnice (1,1) vznikla iterací (2,3), pak můžeme psát její obecný integrál ve tvaru

$$y(x) = e^{-\int \frac{A_0}{A_1} dx}\left[c_1 + \int\left(c_2 + \int\left(c_3 + c_4\int \frac{1}{A_1} dx\right)\frac{1}{A_1} dx\right)\frac{1}{A_1} dx\right] , \tag{3,8}$$

viz lemma 1, 2.

Poznámka 3,2. Nechť u_1 je partikulární integrál rovnice

$$u'' = \tfrac{3}{5}(a_3^2 + a_3' - a_2)\, u , \tag{3,9}$$

pak funkce u_1^2 je integrálem rovnice (3,5). Klademe-li v (3,8) s ohledem na (3,4) $A_1 = u_1^2$, $A_0 = a_3u_1^2 - 3u_1u_1'$, dostáváme vzorec

$$y(x) = u_1^3 e^{-\int a_3 dx}\left[c_1 + \int\left(c_2 + \int\left(c_3 + c_4\int \frac{1}{u_1^2} dx\right)\frac{1}{u_1^2} dx\right)\frac{1}{u_1^2} dx\right] . \tag{3,10}$$

Poznámka 3,3. Nechť w_1 je partikulární integrál rovnice

$$2w' + w^2 = \tfrac{12}{5}(a_3^2 + a_3' - a_2) ,$$

pak funkce $e^{\int w_1 dx}$ je integrálem rovnice (3,5). Klademe-li v (3,8) s ohledem na (3,4)

$$A_1 = e^{\int w_1 dx}, \quad A_0 = a_3 e^{\int w_1 dx} - \tfrac{3}{2} w_1 e^{\int w_1 dx},$$

obdržíme vzorec

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}\int (w_1 - 2a_3) dx} [c_1 + \int (c_2 + \int (c_3 + c_4 \int e^{-\int w_1 dx} dx) e^{-\int w_1 dx} dx) e^{-\int w_1 dx} dx].$$

Poznámka 3,4. Nechť u_1, u_2 jsou nezávislé integrály rovnice (3,9). Podle (3,10) jsou funkce

$$u_1^3 e^{-\int a_3 dx}, \quad u_2^3 e^{-\int a_3 dx}, \tag{3,11}$$

$$(u_1 \pm u_2)^3 e^{-\int a_3 dx} \tag{3,12}$$

řešeními diferenciální rovnice (1,1). Z (3,12) vyplývá, že i funkce

$$u_1^2 u_2 e^{-\int a_3 dx}, \quad u_1 u_2^2 e^{-\int a_3 dx} \tag{3,13}$$

jsou řešeními diferenciální rovnice (1,1). Funkce (3,11), (3,13) jsou lineárně nezávislé, neboť

$$W[u_1^3, u_2^3, u_1^2 u_2, u_1 u_2^2] = -12 W[u_1, u_2]^6 \neq 0.$$

4

Nechť je dána diferenciální rovnice

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu y^{(\nu)} = 0, \quad n \geqq 3 \text{ přirozené}, \; a_n = 1. \tag{4,1}$$

O koeficientech a_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n - 1$) předpokládáme, že mají v intervalu J všechny derivace, které budeme potřebovat.

Je známo (viz Sansone [10], str. 81), že nejobecnější bodová transformace, která převádí rovnici (4,1) řádu $n > 3$ v rovnici téhož typu, je tvaru

$$y = t(x) u, \tag{4,2}$$

$$\xi = \xi(x). \tag{4,3}$$

Označme symbolem

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \tag{4,4}$$

libovolnou funkci koeficientů rovnice (4,1) a jejich derivací.

Poznámka 4,1. Říkáme, že funkce (4,4) je absolutně, resp. relativně invariantní vzhledem k transformaci (4,2), jestliže platí rovnice

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = I(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$$

resp.

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = f(x) I(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}),$$

kde b_i ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$) jsou koeficienty rovnice (4,12) a $f(x)$ je nějaká funkce proměnné x.

Říkáme, že funkce (4,4) je absolutně resp. relativně invariantní vzhledem k transformaci (4,3), jestliže platí rovnice

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = I(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1})$$

resp.

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = f(x)\, I(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1}) ,$$

kde $\bar{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ jsou koeficienty rovnice (4,14) a $f(x)$ je nějaká funkce proměnné x.

Nazveme funkci (4,4) prvním [druhým] absolutním semiinvariantem rovnice (4,1), jestliže je absolutně invariantní vzhledem k transformaci (4,2) [(4,3)].

Nazveme funkci (4,4) prvním [druhým] relativním semiinvariantem — kratčeji semiinvariantem — rovnice (4,1), jestliže je relativně invariantní vzhledem k transformaci (4,2) [(4,3)].

Nazveme funkci (4,4) absolutním invariantem [relativním invariantem — kratčeji invariantem] rovnice (4,1),jestliže je absolutně [relativně] invariantní vzhledem k oběma transformacím (4,2), (4,3).

Podle této definice je např. funkce (4,4) invariantem rovnice (4,1), jestliže vzhledem k jedné z transformací (4,2), (4,3) je absolutně invariantní a vzhledem k druhé je relativně invariantní.

Transformace

$$T \sim y = e^{-\int a_{n-1} \mathrm{d}x}\, u \qquad (4,5)$$

převádí (4,1) na polokanonický tvar

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} A_\nu u^{(\nu)} , \quad A_n = 1 , \quad A_{n-1} = 0 . \qquad (4,6)$$

Koeficienty A_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n - 2)$ jsou prvními absolutními semiinvarianty rovnice (4,6), neboť platí následující věta:

Jestliže použijeme v rovnici (4,1) *transformace* (4,2) *a transformovanou rovnici převedeme pomocí transformace* $T \sim h(x)v$ *na polokanonický tvar*

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu v^{(\nu)} = 0 , \quad B_n = 1 , \quad B_{n-1} = 0 , \qquad (4,7)$$

pak

$$A_\nu = B_\nu , \quad \nu = 1, 2, \ldots, n - 2 . \qquad (4,8)$$

Viz Sansone [10], str. 81.

Poznámka 4,2. Písmenem T budeme značit každou transformaci tvaru (4,2) která převádí danou lineární diferenciální rovnici na polokanonický tvar.

Poznámka 4,3. Mezi koeficienty rovnic (4,1), (4,6) platí vztahy:

$$A_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-1}^2 - a'_{n-1}\,, \tag{4,9}$$

$$A_{n-3} = a_{n-3} - 3a_{n-1}a_{n-2} + 2a_{n-1}^3 - a''_{n-1}\,, \tag{4,10}$$

$$\begin{aligned} A_{n-4} = a_{n-4} - 4a_{n-1}a_{n-3} - 6a'_{n-1}a_{n-2} + 6a_{n-1}^2a_{n-2} - 3a_{n-1}^4 + \\ + 6a_{n-1}^2a'_{n-1} + 3a'^2_{n-1} - a'''_{n-1}\,. \end{aligned} \tag{4,11}$$

Lemma 3. *Jestliže funkce (4,4) je absolutně invariantní vzhledem k transformaci T, pak je také absolutně invariantní vzhledem k libovolné transformaci tvaru (4,2).*

Důkaz. Jestliže použijeme v (4,1) transformace (4,2), obdržíme rovnici

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} b_\nu u^{(\nu)} = 0\,, \quad b_n = 1\,, \tag{4,12}$$

kterou můžeme pomocí transformace

$$T \sim u = e^{-\int b_{n-1}\,dx}\, v$$

převést na (4,7). Vzhledem k předpokladu a (4,8) platí

$$\begin{aligned} I(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) = I(B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}) = I(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}) = \\ = I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Poznámka 4,4. Mezi koeficienty rovnic (4,12), (4,1) platí vztahy

$$b_\nu = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{n-\nu} \binom{n-\nu}{k} a_{n-k}\, t^{(n-\nu-k)}\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{4,13}$$

Transformací (4,3) přejde (4,1) v rovnici

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \bar{a}_\nu \frac{d^\nu y}{d\xi^\nu}\,, \quad \bar{a}_0 = \frac{a_0}{(\xi')^n}\,, \quad \bar{a}_n = 1\,, \tag{4,14}$$

kde

$$\binom{n}{\nu} (\xi')^n\, \bar{a}_\nu = \sum_{i=0}^{n-\nu} \binom{n}{i} a_{n-i} \frac{K_{n-i,\nu}}{\nu!}\,, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n\,. \tag{4,15}$$

Pomocí známých hodnot

$$K_{m,m} = m!(\xi')^m\,, \quad K_{m,1} = \xi^{(m)}\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,,$$

$$\frac{K_{m,m-1}}{(m-1)!} = \binom{m}{3} \xi''(\xi')^{m-2}\,, \quad m = 2, 3, \ldots\,,$$

$$\frac{K_{m,m-2}}{(m-2)!} = \binom{m}{3} \xi'''(\xi')^{m-3} + 3\binom{m}{4} (\xi'')^2(\xi')^{m-4}\,, \quad m = 4, 5, \ldots$$

jsou vyčísleny v Sansonově knize [10], str. 84 koeficienty

$$\bar{a}_{n-1} = \frac{1}{\xi'}\left[\frac{n-1}{2}\frac{\xi''}{\xi'} + a_{n-1}\right], \tag{4,16}$$

$$\bar{a}_{n-2} = \frac{1}{(\xi')^2}\left[a_{n-2} + (n-2)\,a_{n-1}\frac{\xi''}{\xi'} + \frac{n-2}{3}\frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{(n-2)(n-3)}{4}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2\right]. \tag{4,17}$$

Jestliže vypočteme ještě

$$\frac{K_{m,m-3}}{(m-3)!} = \binom{m}{4}\xi^{(\mathrm{IV})}(\xi')^{m-4} + 10\binom{m}{5}\xi'''\xi''(\xi')^{m-5} + 15\binom{m}{6}(\xi'')^3(\xi')^{m-6},$$

obdržíme podle (4,15)

$$\bar{a}_{n-3} = \frac{1}{(\xi')^3}\left\{\frac{n-3}{4}\frac{\xi^{(\mathrm{IV})}}{\xi'} + \frac{(n-3)(n-4)}{2}\frac{\xi'''\xi''}{(\xi')^2} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{8}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + a_{n-1}\left[(n-3)\frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{3}{4}(n-3)(n-4)\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2\right] + a_{n-2}\cdot\frac{3}{2}(n-3)\frac{\xi''}{\xi'} + a_{n-3}\right\}. \tag{4,18}$$

Jestliže

$$\alpha_\nu = \sum_{i=1}^{n-\nu}(-1)^i\binom{n-\nu}{i}a_{n-\nu}^{(n-\nu-i)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{4,19}$$

pak rovnice

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\alpha_\nu y^{(\nu)} = 0, \quad \alpha_n = 1$$

je adjungovaná s rovnicí (4,1).

5

Věta 2. *Funkce*

$$I = I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}) = 4a_{n-1}^3 + 6a_{n-1}a'_{n-1} - 6a_{n-1}a_{n-2} + a''_{n-1} - 3a'_{n-2} + 2a_{n-3} \tag{5,1}$$

je invariantem rovnice (4,1) *a má tyto vlastnosti:*

1. $I(b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}) = I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3})$,
2. $I(\bar{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-3}) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right)^3 I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3})$,
3. $I(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-3}) = -I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3})$.

Důkaz je velmi snadný a spočívá v podstatě ve verifikaci vlastností 1, 2, 3, kterou zde vzhledem k její zdlouhavosti nebudeme provádět. Poznamenejme pouze, že k verifikaci vlastnosti 1 můžeme použít lemmy 3 a vzorců (4,9), (4,10), k verifikaci vlastnosti 2 vzorců (4,16), (4,17), (4,18), k verifikaci vlastnosti 3 vztahu (4,19).

Poznámka 5,1. Podle vlastnosti 3 soudíme, že

$$I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}) = 0 \tag{5,2}$$

je nutnou podmínkou pro to, aby rovnice (4,1) byla samoadjungovaná. Jestliže $n = 3, 4$, pak podmínka (5,2) je i postačující.

Poznámka 5,2. Pro $n = 3, 4$ jsou vlastnosti funkce (5,1) v literatuře známé. Pro $n = 3$ je funkce (5,1) nazývána Laguerrovým invariantem — viz na př. Sansone [9], Laguerre [6] —, pro $n = 4$ obdržíme Halphenův invariant — viz (1,3).

Věta 3. *Funkce $I_2 = I_2(a_3, a_2, a_1, a_0)$ — viz (3,2) — je druhým semiinvariantem rovnice (1,1) a má tyto vlastnosti:*

1. $I_2(\bar{a}_3, \bar{a}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_0) = \left(\dfrac{dx}{d\xi}\right)^4 I_2(a_3, a_2, a_1, a_0)$,

2. $I_2(b_3, b_2, b_1, b_0) = 50 \dfrac{t'}{t} I(a_3, a_2, a_1) + I_2(a_3, a_2, a_1, a_0)$,

3. $I_2(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0) = I_2(a_3, a_2, a_1, a_0) - 50I'(a_3, a_2, a_1)$.

Důkaz lze snadno provést verifikací. Je

$$\begin{aligned} I_2(A_3, A_2, A_1, A_0) = &- 156a_3^4 - 12a_3^3a_3' + 90a_3a_3'' + 84a_3'^2 + 20a_3''' + \\ &+ 312a_3^2a_2 + 12a_3'a_2 - 100a_3a_1 - 81a_2^2 - 45a_2'' + 25a_0 = \\ &= I_1(a_3, a_2, a_1, a_0) = I_1 \,. \end{aligned} \tag{5,3}$$

Srovnáme-li funkce (3,2) a (5,3), tj. I_1 a I_2, snadno podle lemmy 3 dojdeme k závěru, že *funkce $I_1(a_3, a_2, a_1, a_0)$ je prvním absolutním semiinvariantem rovnice* (1,1). Funkce I, I_1, I_2 pro $n = 4$ jsou vázány vztahem

$$I_2(a_3, a_2, a_1, a_0) = 50a_3I(a_3, a_2, a_1) + I_1(a_3, a_2, a_1, a_0) \,,$$

odkud (vzhledem k vlastnostem funkcí I, I_2) odvodíme, že

$$I_1(\bar{a}_3, \bar{a}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_0) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^4 \left[I_1(a_3, a_2, a_1, a_0) - 75 \frac{\xi''}{\xi'} I(a_3, a_2, a_1)\right].$$

Píšeme-li v (5,3) $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4}$ místo a_3, a_2, a_1, a_0, můžeme se opět verifikací přesvědčit [pomocí lemmy 3 a vzorců (4,9), (4,10), (4,11)], že *funkce $I_1(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4})$ je prvním absolutním semiinvariantem rovnice* (4,1) pro $n \geqq 4$ a má tyto vlastnosti:

1. $I_1(b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, b_{n-4}) = I_1(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4})$,

2. $I_1(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-4}) = I_1(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4}) - 50I'(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3})$.

6

Použijeme vlastností funkcí I, I_1, I_2 k odvození dvou kanonických tvarů homogenní lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu.

Nechť v rovnici

$$Y'''' + 4a_3Y''' + 6a_2Y'' + 4a_1Y' + a_0Y = 0 \tag{6,1}$$

jsou funkce a_2''', a_3'' spojité v intervalu J a nechť I, I_1, I_2 jsou funkce koeficientů rovnice (6,1), definované vzorci (5,1), (5,3), (3,2).

Transformací $T \sim Y = e^{-\int a_3 \mathrm{d}x} y$ můžeme (6,1) převést na tvar

$$y'''' + 6A_2y'' + 4A_1y' + A_0y = 0\,, \tag{6,2}$$

kde $A_2 = a_2 - a_3^2 - a_3'$, $4A_1 = 6A_2' + 2I$, $A_0 = \frac{81}{25}A_2^2 + \frac{9}{5}A_2'' + \frac{1}{25}I_1$.

Zavedením nových označení

$$A = \tfrac{3}{5}A_2\,, \quad \omega = 2I\,, \quad \omega_1 = \tfrac{1}{25}I_1 \tag{6,3}$$

obdržíme první kanonický tvar rovnice (6,1)

$$y'''' + 10Ay'' + (10A' + \omega)\,y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\,y = 0\,, \tag{6,4}$$

kde vzhledem k předpokladu jsou funkce A, ω, ω_1 spojité v intervalu J.

V případě $\omega = 0$ pro všechna $x \in J$ je

$$y'''' + (10Ay')' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\,y = 0 \tag{6,5}$$

samoadjungovaná rovnice.

Rovnice

$$y'''' + (10Ay')' + 3(3A^2 + A'')\,y = 0 \tag{6,6}$$

je podle věty 1 iterovanou rovnicí a podle poznámky 3,4 tvoří její fundamentální systém funkce u^3, u^2v, uv^2, v^3, jestliže u, v jsou lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice

$$u'' + Au = 0. \tag{6,7}$$

Jestliže použijeme v (6,2) postupně transformací $y = tv$, $\xi = \xi(x)$, dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}\xi^4} + 4p_3\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}\xi^3} + 6p_2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\xi^2} + 4p_1\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + p_0y = 0\,, \tag{6,8}$$

kde $p_3 = \dfrac{1}{\xi'}\left[\dfrac{3}{2}\dfrac{\xi''}{\xi'} + \dfrac{t'}{t}\right]$, $\quad p_2 = \dfrac{1}{\xi'^2}\left[\dfrac{t''}{t} + A_2 + 2\dfrac{t'}{t}\dfrac{\xi''}{\xi'} + \dfrac{2}{3}\dfrac{\xi'''}{\xi'} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\xi''}{\xi'}\right)^2\right]$.