Для того, чтобы многообразия ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ $(\mathrm{I})_a$, $(\mathrm{I})_b$ претерпевали — при указанных выше условиях (а), (б), (в) — в точке $\underset{0}{P}$ касание по крайней мере k-го порядка ($k \geqq 1$), необходимо и достаточно следующее:

Существуют функции

$$ {}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b) \tag{IV} $$

со следующими свойствами:

(А) соотношения (IV) определяют локально одно-однозначное соответствие между параметрами ${}^{(1)}\eta^a$, ${}^{(2)}\eta^a$ многообразий ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ в некоторой окрестности точки $({}^{(1)}\underset{0}{\eta^a})$;

(Б) ${}^{(2)}\underset{0}{\eta^a} = {}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta^a})$;

(В) если уравнения

$$ x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \,, $$
$$ x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b)) $$

представляют локальное параметрическое описание многообразий ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, отнесенных к одной и той же системе ${}^{(1)}\eta^a$ параметров, то выполняются условия

$$ \left(\frac{\partial^{l\,(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1}\ldots\partial^{(1)}\eta^{a_l}}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta^a}} = \left(\frac{\partial^{l\,(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1}\ldots\partial^{(1)}\eta^{a_l}}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta^a}} $$

для $l = 1, \ldots, k$; $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$ (теоремы 3, 4 чешского текста).

Оказывается, что известное метрическое определение касания двух кривых в E_n равносильно приведенному выше определению касания для случая $p = 1$. Для случая касания двух гиперповерхностей в E_n приводится другое, метрическое определение касания, равносильное указанному выше аффинному определению касания многообразий при $p = n - 1$.

Résumé

SUR LE CONTACT DES VARIÉTÉS DANS UN ESPACE AFFINE LINÉAIRE

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha

(Reçu le 25 Mars 1957)

Considérons dans un espace affino-euclidien E_n ($n \geqq 2$) deux variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ ($1 \leqq p \leqq n - 1$) aux équations paramétriques suivantes

$$ {}^{(1)}X_p\colon\ x^\alpha = {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,,\quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p\,, \tag{I$_a$} $$
$$ {}^{(2)}X_p\colon\ x^\alpha = {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a)\,,\quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p\,, \tag{I$_b$} $$

où x^α sont les coordonnées dans E_n. Nous supposerons que

(a) les variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ aient en commun le point $\underset{0}{P}$ dont les coordonnées $\underset{0}{x}^\alpha$ dans E_n correspondent aux valeurs ${}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a$ des paramètres ${}^{(1)}\eta^a$ de la variété ${}^{(1)}X_p$ et aux valeurs ${}^{(2)}\underset{0}{\eta}^a$ des paramètres ${}^{(2)}\eta^a$ de la variété ${}^{(2)}X_p$;

(b) les fonctions ${}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)({}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a))$ aient des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $k \geqq 1$ par rapport aux variables ${}^{(1)}\eta^a$ $({}^{(2)}\eta^a)$ dans un entourage du point $\underset{0}{P}$ de la variété ${}^{(1)}X_p$ $({}^{(2)}X_p)$;

(c) le point $\underset{0}{P}$ soit un point régulier des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$.

Soient $\underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ des vecteurs constants dans E_n possédant la propriété suivante:

le déterminant

$$[{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0 ,$$

le déterminant (II)

$$[{}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_2, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0 ,$$

où

$${}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a \equiv \left(\frac{\partial^{(1)}x^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^a}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a} , \qquad {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a \equiv \left(\frac{\partial^{(2)}x^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^a}\right)_{{}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\underset{0}{\eta}^a} .$$

Ces suppositions étant faites le système des équations

$${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}\, \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha \tag{III}$$

définit une certaine correspondance entre les points des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, qui est localement biunivoque dans un entourage assez petit du point $\underset{0}{P}$ (théorème 1 du texte tchèque). Les scalaires $\underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ sont bien définis par les équations (III) dans un entourage assez petit du point $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a)$ en y possédant des dérivées partielles continues par rapport aux variables ${}^{(1)}\eta^a$ jusqu'à l'ordre k.

En désignant par $(\mathrm{d}^l \underset{s}{\lambda})_0$ la différentielle d'ordre l $(l = 1, \ldots, k)$ de la fonction $\underset{s}{\lambda}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$, dans le point $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a)$ on définit le contact d'ordre k (au moins) des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ en $\underset{0}{P}$ de la manière suivante:

Nous dirons que les variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *ont en* $\underset{0}{P}$ *un contact d'ordre* k *au moins, si les conditions suivantes sont valables*: $(\underset{s}{\lambda})_0 = (\mathrm{d}\underset{s}{\lambda})_0 = \ldots = (\mathrm{d}^k \underset{s}{\lambda})_0 = 0$ *pour* $s = 1, \ldots, n - p$.

C'est une certaine définition du contact de deux variétés au point de l'espace affine linéaire E_n.

Le fait que les variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ ont un contact d'ordre k au moins (dans leur point $\underset{0}{P}$ commun) dans le sens de la définition énoncée, est indépendant (théorème 2 du texte tchèque)

1. du choix des vecteurs $\overset{(s)}{\underset{0}{v^\alpha}}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ constants dans E_n, qui satisfont aux conditions (II);

2. du choix du système paramètrique des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$;

3. du choix de coordonnées dans E_n.

Pour que les variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ aient un contact d'ordre k (au moins) au point $\underset{0}{P}$ commun, il faut et il suffit qu'il èxiste des fonctions

$$ {}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b) \tag{IV} $$

aux propriétés suivantes:

(A) les relations (IV) déterminent une correspondance locale biunivoque entre les points des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ dans un entourage du point $(\underset{0}{{}^{(1)}\eta^b})$;

(B) $\underset{0}{{}^{(2)}\eta^a} = {}^{(2)}\eta^a(\underset{0}{{}^{(1)}\eta^b})$;

(C) les équations

$$ x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\ , $$
$$ x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b)) $$

étant la description paramétrique des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ douées d'un même système de paramètres ${}^{(1)}\eta^a$, les conditions

$$ \left(\frac{\partial^{l\,(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{a_l}}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = \underset{0}{{}^{(1)}\eta^a}} = \left(\frac{\partial^{l\,(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{a_l}}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = \underset{0}{{}^{(1)}\eta^a}} $$

sont satisfaites pour $l = 1, \ldots, k$; $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$ (les théorèmes 3 et 4 du texte tchèque).

La définition du contact de deux courbes bien connue en géométrie métrique euclidienne et la définition du contact des variétés énoncée plus haut pour le cas $p = 1$ sont équivalentes. Dans le cas du contact de deux hypersurfaces dans l'espace métrique euclidien on peut introduire une nouvelle définition du contact équivalente avec la définition bien connue du contact en géométrie métrique et avec notre définition affinne du contact (énoncée plus haut) en y posant $p = n - 1$.