Werk

Label: Article

Jahr: 1958

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0083|log80

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA K CHARAKTERISTICKÉ VLASTNOSTI LAPLACEOVA OBRAZU FUNKCE A K PŘEVRÁCENÍ JISTÝCH PODMNOŽIN LAPLACEOVÝCH OBRAZŮ DISTRIBUCÍ V HILBERTOVY PROSTORY

JINDŘICH NEČAS, Praha DT: 517.63

(Došlo dne 25. února 1957)

V tomto pojednání je definována Laplaceova transformace jisté třídy distribucí, v níž jsou zahrnuty laplaceovsky transformovatelné funkce. Je podána nutná a postačující podmínka pro to, aby daný obraz byl obrazem funkce. Množina Laplaceových obrazů distribucí se dá psát jako $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \bar{H}_{kl}$, kde $\bar{H}_{kl}$ jsou Hilbertovy prostory.

1. Základní definice a vztahy

Nejdříve podáme definici distribuce řádu nejvýše $k = 0, 1, 2, \ldots$, růstu nejvýše $l = 0, 1, 2, \ldots$. Ostatní běžné definice z teorie Laplaceovy transformace, pokud je neuvedeme, jsou obsaženy v knize G. Doetsche [1] v tom znění, jak jich budeme užívat.

Definice 1. *Množina D se skládá z funkcí φ, definovaných v E_1, nekonečněkrát derivovatelných, rovných nule vně konečného intervalu.*

Definice 2. *Množina h_{kl} se skládá z funkcionálů h, definovaných na D (distribucí), které mají tyto vlastnosti: h je v h_{kl}, jestliže existuje funkce definovaná v $\langle 0, \infty)$, absolutně spojitá v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$ a taková, že $|f(t)| \leqq Me^{lt}$ (M je konstanta), $f(0) = 0$, $\int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-2lt}\, dt < \infty$, $h(\varphi) = (-1)^{k+1} \cdot \int_0^\infty f(t)\, \varphi^{(k+1)}(t)\, dt$.*

Dokážeme nyní tuto jednoduchou větu:

Věta 1. *Buď $h \in h_{k_1 l}$ a $h \in h_{k_2 l}$. Předpokládejme, že $k_1 \leqq k_2$. Buď $f_1(t)$ resp. $f_2(t)$ funkce určující distribuci h podle definice 2. Potom $f_1^{(k_1 - k_2)}(t) = f_2(t)$. Zde $f_1^{(0)}(t) = f_1(t)$, $f_1^{(-1)}(t) = \int_0^t f_1(s)\, ds$, $f_1^{(-2)}(t) = \int_0^t f_1^{(-1)}(s)\, ds$ atd.*

Důkaz. $h(\varphi) = (-1)^{k_1+1} \int_0^\infty f_1(t)\, \varphi^{(k_1+1)}(t)\, dt$, $h(\varphi) = (-1)^{k_2+1} \int_0^\infty f_2(t)\, \varphi^{(k_2+1)}(t)\, .\, dt$. Integrujeme-li v prvém integrálu per partes, dostaneme: $h(\varphi) = (-1)^{k_2+1} \cdot$ $\cdot \int_0^\infty f^{(k_1-k_2)}(t)\, \varphi^{(k_2+1)}(t)\, dt$, a tedy $\int_0^\infty [f_1^{(k_1-k_2)}(t) - f_2(t)]\, \varphi^{k_2+1}(t)\, dt = 0$ pro $\varphi \in D$. Položme $f(t) = f_1^{(k_1-k_2)}(t) - f_2(t)$; $f(t)$ je spojitá v $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$. Předpokládejme, že pro nějaké $t_1 > 0$ je $f(t_1) \neq 0$. Najděme $\Psi \in D$ takovou, že $\int_0^\infty f(t)\, \Psi(t)\, dt > 0$. Taková funkce vždy existuje. Snadno se dá ukázat, že existuje funkce $X(t) \in D$ taková, že pro $t \geqq 0$ je $X^{(k_2+1)}(t) = \Psi(t)$. Vskutku, položme

$$\Psi_1(t) = \int_{-\infty}^{t} [\Psi(t) - \Psi(t + A_0)]\, dt\,,$$

kde A_0 je tak veliké, že $\Psi(t) = 0$, je-li t non $\in \langle -\frac{1}{2}A_0, \frac{1}{2}A_0\rangle$. Jestliže již budeme mít zkonstruovánu funkci $\Psi_k(t)$, potom

$$\Psi_{k+1}(t) = \int_{-\infty}^{t} [\Psi_k(t) - \Psi_k(t + A_k)]\, dt\,,$$

kde A_k je tak veliké, že $\Psi_k(t) = 0$, je-li t non $\in \langle -\frac{1}{2}A_k, \frac{1}{2}A_k\rangle$. Zřejmě $\Psi_{k_2+1}(t) \in D$ a $\Psi_{k_2+1}^{(k_2+1)}(t) = \Psi(t)$. To vede ovšem ke sporu.

Definice 3. *Funkce $h(t)$ definovaná skoro všude v $\langle 0, \infty)$ se nazývá laplaceovsky transformovatelná nebo originálem, jestliže platí:*

1. *v každém konečném intervalu $0 \leqq a \leqq b < \infty$ je integrabilní podle Lebesguea,*

2. *existuje komplexní číslo p tak, že $\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-pt}h(t)\, dt$ je konečné číslo. Laplaceovým obrazem funkce $h(t)$ nazýváme potom $H(p) = \int_0^\infty e^{-pt}h(t)\, dt$. Množinu laplaceovsky transformovatelných funkcí budeme značit m.*

Definice 4. *Laplaceův obraz $H(p)$ distribuce $h \in h_{kl}$ je $H(p) = p^{k+1} \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\, dt$ a je definován pro p, pro něž* $\operatorname{Re} p > l$.

Poznamenejme nejdříve, že obraz distribuce nezávisí na funkci f definující ji jako funkcionál v D. To plyne snadno z věty 1 a známého faktu, že Laplaceův obraz funkce $\int_0^t f(s)\, ds$ je $\frac{F(p)}{p}$, kde $f(s)$ je originál a $F(p)$ je jeho obraz.

Ukažme nyní, že množina všech originálů ve smyslu definice 3 je algebraicky isomorfní s množinou všech distribucí řádu nula a růstu $l \geqq 0$. To umožní psát $m = \sum_{l=0}^{\infty} h_{0l}$. Navíc ukažme, že definice 4 je zobecněním definice 3. Na tyto otázky odpovídá

věta 2. *Funkce h patří do m a integrál $\int_0^{\infty} e^{-pt}h(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje pro $\operatorname{Re} p > \sigma \geqq \geqq 0$ tehdy a jenom tehdy, existuje-li funkce $h_1(t)$ definovaná v $\langle 0, \infty)$, absolutně spojitá v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$ a pro niž platí: $h_1(0) = 0$, $|h_1(t)| \leqq M(\tau)\, e^{\tau t}$, kde $M(\tau)$ závisí pouze na τ a $\tau > \sigma \geqq 0$. Přitom $h_1'(t) = h(t)$. Je-li $h \in m$, potom $H(p) = pH_1(p)$.*

Důkaz. *Nutnost.* Položme $h_1(t) = \int_0^t h(u)\,\mathrm{d}u$. Buď $x > \sigma$. Je $h_1(t) = \int_0^t h(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t h(u)\, e^{-xu}e^{xu}\,\mathrm{d}u = e^{xu} \int_0^u h(s)\, e^{-xs}\,\mathrm{d}s]_0^t - x \int_0^t (\int_0^u h(s)\, e^{-xs}\,\mathrm{d}s)\, e^{xu}\,\mathrm{d}u$. Vzhledem k tomu, že $\lim_{u\to\infty} \int_0^u h(s)\, e^{-xs}\,\mathrm{d}s$ je konečné číslo, dostáváme

$$|h_1(t)| \leqq M(x)\, e^{xt}. \tag{1}$$

Postačitelnost. Buď $h(t) = h_1'(t)$ a $h_1(t)$ nechť splňuje předpoklady věty 1. Buď $\operatorname{Re} p > \sigma$. Zvolme $\sigma < x < \operatorname{Re} p$.

$$\int_0^A h(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t = h_1(A)\, e^{-pA} + p \int_0^A h_1(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t\,.$$

Protože $|h_1(A)| \leqq M(x)\, e^{xA}$, dostáváme odtud, že integrál $\int_0^{\infty} h(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ konverguje pro $\operatorname{Re} p > \sigma$ a navíc $H(p) = pH_1(p)$. Tím je důkaz věty 2 hotov.

Jestliže tedy funkci $h \in m$ přiřadíme distribuci

$$h(\varphi) = -\int_0^{\infty} (\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s)\, \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \in \sum_{l=0}^{\infty} h_{0l}$$

a naopak distribuci z $\sum_{l=0}^{\infty} h_{0l}$, $h(\varphi) = -\int_0^{\infty} f(t)\, \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ přiřadíme funkci $f'(t)$, dostáváme výše zmíněný algebraický isomorfismus. Z věty 2 bezprostředně plyne, že definice 4 je zobecněním definice 3.

2. Zavedení prostorů $\bar{H}_{-1l}$

Definice 5. *h_{-1l} je množina funkcí $h(t)$ absolutně spojitých v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$, pro které dále platí $h(0) = 0$, $|h(t)| \leqq Me^{lt}$, $\int_0^{\infty} |h(t)|^2\, e^{-2lt}\,\mathrm{d}t < \infty$. H_{-1l} je množina Laplaceových obrazů funkcí z h_{-1l}.*

H_{-1l} je zřejmě lineární prostor. Při zavedení skalárního součinu v H_{-1l} a doplnění na úplný prostor se budeme opírat o známou větu z teorie Laplaceovy transformace.

Věta 3. *Podmínka*

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau < \infty \tag{2}$$

je nutná a stačí k tomu, aby funkce $F(p)$, regulární v polorovině $\mathrm{Re}\, p > \gamma$, *byla Laplaceovým obrazem funkce $f(t)$, pro kterou platí* $\int_0^\infty |f(t)|^2 \, e^{-2\gamma t} \, dt < \infty$. *Je-li podmínka* (2) *splněna, potom*

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\gamma + i\tau)|^2 \, d\tau = 2\pi \int_0^\infty |f(t)|^2 \, e^{-2\gamma t} \, dt \, . \tag{3}$$

$F(\gamma + i\tau)$ je funkce, pro niž

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\gamma + i\tau)|^2 \, d\tau < \infty \, , \quad \lim_{\substack{\sigma\to\gamma \\ \sigma>\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau) - F(\gamma + i\tau)|^2 \, d\tau = 0 \, .$$

Tato limita funkcí $F(\sigma + i\tau)$ v uvedeném smyslu vždy existuje.

Důkaz viz [1], str. 422.

Jestliže $h \in h_{-1l}$, potom $\int_0^\infty |h(t)|^2 \, e^{-2lt} \, dt < \infty$, a tedy $\sup_{\sigma>l} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau < \infty$.

Zaveďme skalární součin a normu v lineárním prostoru H_{-1l} takto:

Definice 6. *Je-li $F(p)$ a $G(p)$ v H_{-1l}, potom skalární součin funkcí $F(p)$ a $G(p)$ je* $(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} F(l + i\tau) \, \overline{G(l + i\tau)} \, d\tau$. *Normu pro funkci $F(p)$ definujeme takto:* $\|F\| = [\int_{-\infty}^{\infty} |F(l + i\tau)|^2 \, d\tau]^{\frac{1}{2}}$.

Zaveďme nyní do našich úvah množiny funkcí P_l, $l = 0, 1, \ldots$, s těmito vlastnostmi:

Definice 7. *Buď P_l ($l = 0, 1, \ldots$) množina funkcí $F(p)$, pro niž platí:*

1. *$F(p)$ je regulární v polorovině* $\mathrm{Re}\, p > l$,
2. $\sup_{\sigma>l} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau < \infty$.

V P_l definujeme skalární součin funkcí $F(p)$ a $G(p)$ rovnicí

$$(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} F(l + i\tau) \, \overline{G(l + i\tau)} \, d\tau \, .$$

Z věty 3 plyne téměř bezprostředně:

Věta 4. *P_l je Hilbertův prostor a* $P_l = \overline{H}_{-1l}$.

Důkaz. Jde v podstatě o to, dokázat, že a) P_l je úplný, b) $\|F\| = 0 \Rightarrow F = 0$. Důkaz platnosti ostatních axiomů Hilbertova prostoru je zcela jednoduchý.

a) Buď tedy F_n cauchyovská posloupnost funkcí z P_l. Z úplnosti prostoru $L_2(0, \infty)$ plyne existence $f(t)$ takové, že

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty |f_n(t) - f(t)|^2 e^{-2lt} \, dt = 0 .$$

$F(p)$ však leží v P_l a je opět podle (3) nutně

$$\lim_{n \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(l + i\tau) - F(l + i\tau)|^2 \, d\tau = 0 .$$

b) Nechť tedy $\|F\| = 0$. Podle (3) však $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau = 0$ pro $\sigma > l$, což vzhledem k regulárnosti $F(p)$ má za následek, že $F(p) = 0$. Rovnost $P_l = \overline{H}_{1l}$ plyne bezprostředně z (3).

V dalším budeme potřebovat následující větu z teorie Laplaceovy transformace:

Věta 5. *Nechť $F \in \overline{H}_{-1l}$. Potom pro $\sigma > l$ je* $f(t) = e^{\sigma t} \operatorname*{l.i.m}_{\omega = \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{i\tau t} \, .$ $. F(\sigma + i\tau) \, d\tau$, *což znamená*

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_{-\infty}^{0} |f_\omega(t)|^2 e^{-2\sigma t} \, dt + \int_0^\infty |f(t) - f_\omega(t)|^2 e^{-2\sigma t} \, dt = 0 .$$

Zde klademe $f_\omega(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{i\tau t} F(\sigma + i\tau) \, d\tau$.

Důkaz viz [1], str. 423.

Uveďme nyní charakteristiku těch $F(p)$, které jsou v H_{-1l}.

Věta 6. *Nechť $F \in \overline{H}_{-1l}$. Nutná a postačující podnínka pro to, aby $F \in H_{-1l}$, je:*

1. *integrál* $\frac{1}{2\pi i} \int_{x - i\infty}^{x + i\infty} F(p) \, e^{pt} \, dp$ *je nezávislý na x (zde se integruje po přímce* $\operatorname{Re} p = x > l$ *ve smyslu hlavní hodnoty),*

2. $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x - i\infty}^{x + i\infty} F(p) \, e^{+pt} \, dp$ *je absolutně spojitá funkce v každém omezeném intervalu z* $\langle 0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$,

3. $|\varphi(t)| \leqq M e^{lt}$, *kde M je nějaká konstanta.*

D ů k a z. *Nutnost.* Je-li $F \in \bar{H}_{-1l}$, potom $\int\limits_0^\infty |f(t)|\, e^{-xt}\, dt < \infty$ pro $x > l$, jak plyne z odhadu $|f(t)| \leqq Me^{lt}$. Ze známé věty o inversním integrálu (viz [1], str. 212) plynou podmínky 1, 2, 3.

Postačitelnost. Nechť platí podmínky 1, 2, 3. Podle věty 5 je

$$f(t) = e^{\sigma t} \operatorname*{l.i.m}_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\omega}^{\omega} e^{i\tau t} F(\sigma + i\tau)\, d\tau.$$

Z množiny funkcí $f_\omega(t)$ vybereme posloupnost konvergující skoro všude k $f(t)$. Tato limita se však vzhledem k podmínce 1 věty 6 skoro všude rovná $\varphi(t)$. Tím je důkaz proveden.

Z konvergence v prostoru $\bar{H}_{-1l}$ plynou některé téměř samozřejmé výsledky.

Věta 7. *Nechť F_n je v $\bar{H}_{-1l}$ a $F_n \to 0$ v prostoru $\bar{H}_{-1l}$. Potom na každé omezené oblasti Ω, jejíž uzávěr leží napravo od přímky* $\operatorname{Re} p = l$, $F_n^{(k)} \to 0$ *stejnoměrně bodově* ($k = 0, 1, 2, \ldots$, $F_n^{(k)}$ *jsou derivace*).

D ů k a z plyne bezprostředně z faktu, že existuje obdélník Ω', jenž leží napravo od přímky $\operatorname{Re} p = l$ a přitom $\Omega' \supset \bar{\Omega}$. Zřejmě platí $\int\limits_{\Omega'} |F_n(p)|^2\, d\Omega \to 0$, což je podmínka postačující pro platnost naší věty. (Viz [3], str. 431.)

3. Užití prostorů $\bar{H}_{-1l}$

Hilbertův prostor $\bar{H}_{-1l}$ nám může prokázat velmi platné služby při důkaze existence a unicity řešení parciálních diferenciálních rovnic. Ukážeme to na jednoduchém, ale typickém p ř í k l a d ě:

Hledejme rozdělení teploty v konečné tyči délky 2, je-li počáteční teplota rovna nule a jsou-li oba její konce udržovány na konstantní teplotě 1.

Na řešení budeme klást tyto podmínky:

1. $u(t, x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ jsou spojité funkce v oblasti Ω $(0 < t < \infty,\ -1 < x < 1)$,

2. existuje M tak, že $u(t, x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ jsou v absolutní hodnotě $\leqq M(\varepsilon)\, e^t$ pro $t > 0$ a $-1 + \varepsilon \leqq x \leqq 1 - \varepsilon$,

3. $u(t, x)$ je spojitě prodlužitelná k nule, když $t \to 0$ a $-1 < x < 1$,

4. $\lim\limits_{x \to \pm 1} \int\limits_0^\infty |1 - u(t, x)|^2\, e^{-2t}\, dt = 0,$ (4)

5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ uvnitř Ω.

Jestliže budeme postupovat obvyklým způsobem (viz např. [4]), potom pro obraz $U(p, x) = \int_0^\infty u(t, x)\, e^{-pt}\, dt$ definovaný pro $\operatorname{Re} p > 1$ dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{d^2U(p,x)}{dx^2} - pU(p,x) = 0\,. \tag{6}$$

Její obecné řešení je

$$U(p, x) = A(p) \operatorname{ch} \sqrt{p}\,.\,x + B(p) \operatorname{sh} \sqrt{p}x\,.$$

Z podmínky $\lim\limits_{x\to\pm 1} \sup\limits_{\sigma>1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| U(\sigma + i\tau, x) - \frac{1}{\sigma + i\tau}\right|^2 d\tau = 0$, která je ekvivalentní podmínce (4), a z věty 7 plyne, že pro $\operatorname{Re} p > 1$ je $A(p) \operatorname{ch} \sqrt{p} \pm \pm B(p) \operatorname{sh} \sqrt{p} = \frac{1}{p}$. Odtud plyne, že $Ap = \frac{1}{p}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{p}}$, $B(p) = 0$. Je tedy

$$U(p, x) = \frac{1}{p}\,\frac{\operatorname{ch}\sqrt{p}\,.\,x}{\operatorname{ch}\sqrt{p}}\,. \tag{7}$$

Jestliže $U(p, x)$ je obrazem s požadovanými vlastnostmi, potom

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{p}\,\frac{\operatorname{ch}\sqrt{p}\,.\,x}{\operatorname{ch}\sqrt{p}}\, e^{pt}\, dp\,. \tag{8}$$

Tento integrál bereme ve smyslu hlavní hodnoty ($\sigma > 1$). Funkce $u(t, x)$ definovaná v (8) nyní splňuje zřejmě vlastnost 1, a vzhledem k tomu, že platí $\left|\frac{\operatorname{ch}\sqrt{p}\,.\,x}{\operatorname{ch}\sqrt{p}}\right| \leq M e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\tau}(1-|x|)}$, dostáváme 2. Dále platí zřejmě 4 a 5. Obraz $u(t, x)$ je 7. Protože $u(t, x)$ je spojitě prodložitelná pro $t \to 0$, musí toto spojité prodloužení být rovno nule, jak plyne z rovnice (6). Tím jsme dokázali existenci řešení. Unicitu ve třídě funkcí splňujících podmínky 1, 2, 3, 4, 5 bychom dokázali úplně stejným způsobem.

4. Vyšetřování prostorů $\bar{H}_{kl}$

Nyní budeme vyšetřovat lineární prostor H_{0l} a obecně lineární prostory H_{kl}.

Definice 8. *H_{kl} je množina Laplaceových obrazů distribucí z h_{kl} ($k = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 0, 1, 2, \ldots$). Je-li $F(p)$ a $G(p)$ v H_{kl}, potom definujeme skalární součin rovností*

$$(F, G) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(l + i\tau)\, \overline{G(l + i\tau)}}{(l + i\tau)^{k+1}\, (l - i\tau)^{k+1}}\, d\tau\,.$$

Zcela analogicky, jako jsme to učinili v oddíle 3, se dá ukázat, že $\overline{H}_{kl}$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem zavedeném v definici 8.

Snadno se též nahlédne, že $\overline{H}_{kl}$ se skládá ze všech funkcí s vlastností

$$\sup_{\sigma > l} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(\sigma + i\tau)}{(\sigma + i\tau)^{k+1}} \right|^2 d\tau < \infty ; \tag{9}$$

$$F(p) \text{ je regulární v polorovině } \operatorname{Re} p > l . \tag{10}$$

Zobrazme nyní prostor $\overline{H}_{-1l}$ na $\overline{H}_{kl}$ takto: Prvku $F \in \overline{H}_{-1l}$ přiřadíme $p^{k+1}F(p) \in \overline{H}_{kl}$. Toto zobrazení je isometricky isomorfní. Symbolicky píšeme: $Z(F) = p^{k+1}F$.

Zabývejme se nyní prostory $\overline{H}_{0l}$. Z konstrukce je zřejmé, že množina H_{0l} je hustá v $\overline{H}_{0l}$. (Je snadné ukázat, že H_{0l} je hustá v $\overline{H}_{kl}$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$.) Jest $H_{0l} \neq \overline{H}_{0l}$. To plyne ze zřejmého faktu, že $H_{-1l} \neq \overline{H}_{-1l}$. Například v $\overline{H}_{01}$ leží 1, což odpovídá distribuci, která je prvkem h_{11} a k níž příslušná absolutně spojitá funkce je $f(t) = t$. Tato distribuce se nazývá Diracova funkce $\delta_0(t)$. Jak jsou tedy charakterisovány ty obrazy, jejichž originály jsou z h_{0l} a tedy funkce?

Věta 8. *Nutná a postačující podmínka, aby $F \in H_{0l}$ je, aby*

0. $F \in \overline{H}_{0l}$,

1. *integrál* $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \dfrac{F(p)}{p} e^{pt}\, dp$ *byl nezávislý na x (zde se integruje po přímce $\operatorname{Re} p = x > l$ ve smyslu hlavní hodnoty),*

2. $\varphi(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \dfrac{F(p)}{p} e^{pt}\, dp$ *byla absolutně spojitá funkce v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$,*

3. $|\varphi(t)| \leqq Me^{lt}$, *kde M je nějaká konstanta.*

Důkaz. *Nutnost.* Je-li $F \in H_{0l}$, potom $\dfrac{F(p)}{p} \in H_{-1l}$, a tedy podle věty 6 platí podmínky 1, 2, 3.

Postačitelnost. Platí-li podmínky 0, 1, 2, 3, potom podle věty 6 platí, že $\dfrac{F(p)}{p} \in H_{-1l}$, a tedy $F(p) \in H_{0l}$.

Již dříve bylo poznamenáno, že $m = \sum_{l=0}^{\infty} h_{0l}$. Věta 8 dává tedy úplnou charakteristiku Laplaceových obrazů funkcí. Charakteristiku Laplaceových obrazů podal RICARDO SAN JUAN LLOSA v [5]. Naše charakteristika se liší od jeho hlavně proto, že východiskem pro důkaz věty 6 byla věta 3.

Parafrází věty 8 pro prostory $\overline{H}_{kl}$ je věta následující:

Věta 9. *Nutná a postačující podmínka k tomu, aby $F \in H_{kl}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, je, aby*

0. $\mathring{F} \in \overline{H}_{kl}$,

1. *integrál* $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p^{k+1}} e^{pt}\, \mathrm{d}p$ *byl nezávislý na x (integruje se po přímce* $\operatorname{Re} p = x > l$ *ve smyslu hlavní hodnoty),*

2. *integrál* $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p^{k+1}} e^{pt}\, \mathrm{d}p$ *byla absolutně spojitá funkce v každém konečném intervalu z* $\langle 0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$,

3. $|\varphi(t)| \leqq Me^{lt}$, *kde M je nějaká konstanta.*

Poznamenejme, že konvergenci v prostoru $\overline{H}_{kl}$ odpovídá v prostoru originálů konvergence v průměru originálů příslušných k $\frac{F(p)}{p^{k+1}}$ s vahou e^{-2lt}. To znamená, že

$$F_n \to F \Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-2lt} |g_n(t) - g(t)|^2 \, dt \to 0 .$$

Funkce $g(t)$ nazveme $(k + 1)$-krát integrované distribuce.

Definice 9. *Je-li distribuce h daná funkcionálem podle definice 2, tedy*

$$h(\varphi) = (-1)^{k+1} \int\limits_0^\infty f(t)\, \varphi^{k+1}(t)\, dt ,$$

potom $g(t) = f'(t)$ je k-krát integrovaná distribuce h.

Hilbertovy prostory $\overline{H}_{kl}$ mohou být základnou pro důkaz existence a unicity řešení některých parciálních diferenciálních rovnic. Tak příklad uvedený v oddíle 3 můžeme pozměnit tak, že místo teploty 1 na koncích tyče budeme uvažovat teplotu rovnou Diracově funkci $\delta_0(t)$, tedy distribuci. Podmínky 1, 2, 3 a 5 příkladu zůstanou nezměněny, pouze podmínka 4 bude:

$$\lim_{x \to \pm 1} \int\limits_0^\infty e^{-2t} |1 - \int\limits_0^t u(\tau, x)\, d\tau|^2 \, dt = 0 .$$

Obraz jediného řešení v tomto případě je $\frac{\operatorname{ch} \sqrt{p}\, x}{\operatorname{ch} \sqrt{p}}$.