Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA K JEDNÉ DEFINICI TOPOLOGICKÝCH K-LINEÁLŮ

MILAN KOMAN, Praha

DT: 513.831

(Došlo dne 10. prosince 1956)

V této poznámce je ukázáno, že pro topologické K-lineály definované v [1], poznámka 2, str. 19, neplatí tvrzení: *Ke každému okolí nuly U existuje takové okolí nuly V, že $0 \leqq a \leqq b$, $b \in V \Rightarrow a \in U$,* uvedené na téže straně.

J. MAŘÍK v [1] nazývá topologickým K-lineálem K-lineál Y, v němž je definována topologie tak, že jsou při ní algebraické i svazové operace spojité a jednobodové množiny uzavřené.

Následující příklad ukazuje, že pro takto definované topologické K-lineály neplatí věta:

Ke každému okolí nuly U existuje okolí nuly V tak, že

$$0 \leqq a \leqq b\,, \quad b \in V \Rightarrow a \in U\,.$$

Příklad 1. Buď F množina všech spojitých funkcí v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Buď G množina všech funkcí v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, různých od nuly jen pro konečný počet bodů z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Buď H množina všech funkcí $h = f + g$, kde $f \in F$, $g \in G$ (vyjádření je jednoznačné).

Množina H je zřejmě při obvyklé definici polouspořádání K-lineálem. Definujme v H normu. Pro $f \in F$ buď $\|f\| = \max\limits_{x\in\langle 0,1\rangle}|f(x)|$, pro $g \in G$ buď norma $\|g\| = \sum\limits_{x\in\langle 0,1\rangle}|g(x)|$, pro $h \in H$ buď pak $\|h\| = \|f\| + \|g\|$, kde $h = f + g$; $f \in F$ $g \in G$. Při takto definované normě je H topologickým K-lineálem.

Důkaz. K-lineál H je zřejmě normovaným lineárním prostorem. Je tedy výrazem $\varrho(a, b) = \|a - b\|$, kde $a, b \in H$, definována metrika, při níž jsou algebraické operace spojité (viz na př. větu 42 z [1]). Zbývá tedy dokázat, že i svazové operace jsou při dané normě spojité. Důkaz provedeme postupně.

1. *Je-li $h \in H$, $|h(x)| \leqq \varepsilon$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ a má-li h nejvýše n bodů nespojitosti, je $\|h\| \leqq (2n + 1)\,\varepsilon$.*

Je-li totiž $h = f + g$; $f \in F$, $g \in G$, pak platí

$$|h(x)| \leqq \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leqq \varepsilon\,, \quad |g(x)| \leqq 2\varepsilon\,.$$

Tedy $\|h\| = \|f\| + \|g\| \leqq \varepsilon + 2n\varepsilon = (2n + 1)\,\varepsilon$.

2. *Je-li $g \in G$, $g_0 \in H$ a platí-li $|g_0(x)| \leqq |g(x)|$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$, potom je $g_0 \in G$ a platí $\|g_0\| \leqq \|g\|$.* Zřejmé.

3. *Operace $|h|$ je v každém bodě $h \in H$ spojitá.*

Nechť $h_0 \in H$ a nechť h_0 má n bodů nespojitosti. Buď $h \in H$, $h = f + g$; $f \in F$, $g \in G$. Pak

$$\||h_0| - |h_0 + h|\| \leqq \||h_0| - |h_0 + f|\| + \||h_0 + f| - |h_0 + h|\|\,.$$

Avšak $||h_0| - |h_0 + f|| \leqq |f| \leqq \|f\|$, tedy podle 1 je

$$\||h_0| - |h_0 + f|\| \leqq (2n + 1)\,\|f\|\,.$$

Dále je $||h_0 + f| - |h_0 + h|| \leqq |g| \leqq \|g\|$, tedy podle 2 je

$$\||h_0 + f| - |h_0 + h|\| \leqq \|g\|\,.$$

Celkem tedy

$$\||h_0| - |h_0 + h|\| \leqq (2n + 1)\,\|f\| + \|g\| \leqq (2n + 1)\,\|h\|\,.$$

4. *Svazové operace jsou v každém bodě $h \in H$ spojité.*

Nechť h, $h_0 \in H$, pak

$$h_0 \vee h = h_0 + (h - h_0)_+ = \tfrac{1}{2}(|h_0 - h| + h_0 + h)\,,$$
$$h_0 \wedge h = - [(- h_0) \vee (- h)]\,.$$

H je tedy topologickým K-lineálem, přes to v něm však neplatí výše uvedená věta. Stačí volit na př. $g(x) = \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ pro n hodnot $x \in \langle 0, 1\rangle$, jinak $g(x) = 0$ a $f(x) = 2\varepsilon$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$. Zřejmě nyní $0 \leqq g \leqq f$, ale zatím co $\|f\| = 2\varepsilon$, je $\|g\| = n\varepsilon$, což může být při daném $\varepsilon > 0$ libovolně velké (záleží na počtu bodů nespojitosti funkce g).

Neplatí-li však pro topologické K-lineály shora uvedená věta, neplatí pro ně ani celá řada jiných vět, o nichž bychom předpokládali, že pro ně budou platit, má-li mít totiž uvedená definice topologických K-lineálů rozumný význam. Jako příklad si ukážeme, že pro topologické K-lineály neplatí věta 46 b) a c) z [1].

Příklad 2. Buď H topologický K-lineál z příkladu 1. Definujme v něm funkcionálu J předpisem $J(h) = \sum_{x \in \langle 0,1\rangle} g(x)$, kde $h = f + g$; $f \in F$, $g \in G$. Snadno se zjistí, že J je spojitou funkcionálou. $J(1)$ však není podle [1] regulární funkcionálou, neboť

$$J_+(1) = \sup_{0 \leqq h \leqq 1} J(h) = \infty\,.$$