Werk

Label: Article

Jahr: 1958

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0083|log72

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 83 * PRAHA, 20. V. 1958 * ČÍSLO 2

ZUR THEORIE DER GRAPHEN

KAREL ČULÍK, Brno

DT: 513.19

(Eingelangt am 25. VIII. 1956)

Die Theorie der Graphen, die in der Monographie von D. König [5] enthalten ist, ist mit den modernen algebraischen Theorien nicht gleichwertig. Ihre Reichhaltigkeit ist durch die Mannigfaltigkeit der untersuchten Eigenschaften der Graphen bewirkt. Die Definition des Graphen als einer Menge, auf der eine binäre Relation definiert ist (siehe z. B. R. D. Luce: *Networks satisfying minimality conditions*, Amer. Jour. Math. *75* (1953), 825—838 oder P. Turán [12], O. Ore [10] u. a.), ermöglicht auf einfache und natürliche Weise nicht nur die bekannten Grundbegriffe der Graphentheorie (Teilgraph, Isomorphismus, Summe und Zusammenhang), aber auch die übriggebliebenen Grundbegriffe einer algebraischen Theorie (Homomorphismus, Einfachheit, direktes Produkt, Faktorgraph u. a.) einzuführen. Dadurch wird die Theorie der Graphen in die modernen algebraischen Theorien eingereiht. Z. B. die Theorie der nichtgerichteten Graphen wird als eine beigeordnete Theorie den Theorien der verschiedenartig geordneten Mengen gleichgestellt. Die erste kann als die Theorie der Mengen mit symmetrischer und die anderen als die Theorien der Mengen mit transitiven Relationen betrachtet werden. Alle diese Theorien sind der Theorie der (allgemeinen) Graphen untergeordnet, die sich in einigen Punkten (Einfachheit, direktes Produkt) von der Theorie der Relationen unterscheidet, wie diese in der mathematischen Logik gebildet wurde (siehe A. Mostowski [6] bzw. A. Tarski [11]).

In folgenden Abschnitten werden algebraische Grundbegriffe der (allgemeinen) Graphentheorie (analogisch z. B. zur Gruppentheorie) eingeführt. Zwischen diesen Grundbegriffen werden einige Beziehungen abgeleitet. Durch Spezialisierung der Graphenbedingungen entstehen einige neue Grundbegriffe (Homomorphismus, Einfachheit u. a.) und Sätze der Theorie der quasi- bzw. auch der teilweisegeordneten Mengen und der anderen ähnlichen Gebilde (vgl. G. Birkhoff [1], M. Richardson [8], R. D. Luce u. a.).

Einleitung

Die zahlreichen Fragen über Graphen, Konfigurationen, endliche Geometrien, über die Mengen mit spezieller Relation und die verschiedenartigen Fragen kombinatorischen Charakters, die heute in gewissem Masse getrennt untersucht werden, lassen sich mindestens in den Hauptrichtungen mit Hilfe der algebraischen Methoden beschreiben und durch die Theorie der Mengen mit einer binären Relation vereinigen.

Die wichtigsten der bekannten Eigenschaften der binären Relation sind die Reflexivität, die Symmetrie und die Transitivität, die wir mit den Anfangsbuchstaben **R**-, **S**- und **T**- bezeichnen werden. Von diesen Eigenschaften sind durch verschiedenartige Abänderungen weitere Eigenschaften der Relationen gebildet worden, z. B. die Areflexivität — **aR** (siehe auch die Irreflexivität bei M. Richardson [9]), Antisymmetrie — **antiS**, Asymmetrie — **aS** (siehe M. Richardson [8]) und andere (siehe G. Birkhoff [1]). Am häufigsten studiert wurden die Mengen mit **RT**-Relationen, etwa noch mit weiteren Eigenschaften, denen auch die Monographie von G. Birkhoff [1] gewidmet ist. Für das Studium der nichtgerichteten Graphen, der Konfigurationen und der verschiedenartigen Fragen der kombinatorischen Geometrie und Topologie sind die **S**-Relationen wichtig. Vor allem ist die Inzidenz eine **S**-Relation, die in der Geometrie, entweder als **RS**-Relation (siehe S. Gorn: *On incidence geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940)), oder als **aRS**-Relation (siehe D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, 7. Aufl.) auftreten kann. Von speziellen Gesichtspunkten aus wurden auch allgemeinere Relationen, bzw. Mengen mit diesen Relationen untersucht (siehe z. B. die Disjunktion und die Polarität bei G. Birkhoff [1], allgemeine **aR**-Relation bei M. Richardson [9] bzw. schon bei J. v. Neumann-O. Morgenstern: *Theory of games and economic behavior*, allgemeine **R**-Relation bei M. M. Day: *Arithmetic of ordered systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 1—43 und hauptsächlich die „gerichteten" Graphen bei O. Ore [10]).

Zum Unterschied von der Theorie der Relationen der mathematischen Logik interessieren uns die Beschreibung, die Eigenschaften und die Beziehungen zwischen den Mengen selbst (auf denen eine binäre Relation definiert ist), obwohl der Zusammenhang zwischen der Theorie der Mengen mit Relation und Theorie der Relationen (mit ihren Feldern) selbst natürlich sehr eng sein muss. Den Begriff der Relation halten wir hier für keinen Grundbegriff.

Eine binäre Relation ϱ, die auf der Menge $F \neq \emptyset$ definiert ist, ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $F \times F$, also $\varrho \subset F \times F$. Dan kann man über *die charakteristische* Funktion f der Relation ϱ (bezüglich $F \times F$) sprechen. Es gilt also $(x, y) \in \varrho \Leftrightarrow x\varrho y \Leftrightarrow f[x, y] = 1$. Weiter werden wir diese bequemere und mehr übersichtlichere Funktionausdrucksweise zur Beschreibung der Relation auf der gegebenen Menge benützen. Wir wollen auch nicht zwischen der charakteristischen Funktion einer Relation und der Relation selbst (auf gegebener Menge) unterscheiden. Mit dem Symbol $F(f)$ bezeichnen wir also die Menge F, auf der eine Relation (bzw. ihre charakteristische Funktion) f definiert ist. Es ist klar, dass das Feld der Relation f (siehe A. MOSTOWSKI [6], S. 130) nur eine Teilmenge der Menge F ist. Zum Wortausdruck des Umstandes $f[x, y] = 1$ wollen wir sagen „*x bindet y*" (statt der Benennung „*dominates*", die bei M. Richardson [9] benützt wird und in der man mehr transitive und asymmetrische Bedeutung fühlt).

1. Begriff des Graphen

Unter einem *Graphen* $F(f)$ verstehen wir eine nichtleere Menge F mit einer binären Relation (bzw. mit ihrer charakteristischen Funktion) f. Wir sagen, dass auf der Menge F ein *Graph* $F(f)$ *mit der Relation* f definiert wird. Die leere Menge $\emptyset$ nennen wir den leeren Graphen. Soweit nichts anders gesagt wird, versteht man unter einem Graphen immer einen nichtleeren Graphen. Die Mächtigkeit kard F der Menge F heisst *die Mächtigkeit des Graphen* $F(f)$.

Ein Graph mit einer **S**- bzw. mit einer **antiS**-Relation heisst *ein nichtgerichteter* bzw. *gerichterer* Graph (zum Unterschied von O. Ore [10], der unter einem gerichteten Graphen unseren allgemeinen Graphen versteht). Ein Graph mit **RT**-Relation bzw. mit **aS**-Relation heisst *quasi-* bzw. *schwach-geordnete Menge.* Ein Graph mit **R antiST**-Relation bzw. mit **aST**-Relation ist eine *teilweise geordnete Menge* im Sinne G. Birkhoff's bzw. B. DUSHNIK'S und E. W. MILLER'S. Ein Graph mit **aR**-Relation wird bei D. KÖNIG [5] als ein Graph *im engeren Sinne* bezeichnet u. s. w.

Die Elemente der Menge F des Graphen $F(f)$ heissen *Knoten* des Graphen $F(f)$. Ein geordnetes Paar (x, y), $x \neq y$ bzw. $x = y$, der Knoten aus $F(f)$, von denen der erste Knoten x den zweiten y in $F(f)$ bindet, d. h. es gilt $f[x, y] = 1$, heisst eine *Kante* bzw. eine *Schlinge* des Graphen $F(f)$. In unserer Auffassung des Graphenbegriffes sind beide Begriffe die der Kante und die der Schlinge entbehrlich, weil sie nicht mehr in die Grungbegriffe der Graphentheorie fallen. Diese Vereinfachung (siehe auch z. B. G. A. DIRAC: *The structure of k-chromatic graphs*, Fund. Math. 40 (1953), P. TURÁN [12], O. Ore [10], u. a.) bedeutet aber, dass man sich nur auf Graphen in der Auffassung von D. König beschränkt, die folgende Bedingung erfüllen müssen: *zu jedem geordneten Paare der Knoten* x, y *gibt es höchstens eine Kante oder Schlinge* (x, y). Man sieht aber sofort, dass die übriggeblieben „Königschen" Graphen mit Hilfe der oben definierten Graphen auch beschrieben werden können und zwar so, dass jeder Kante und jeder Schlinge eines geeignet gewählten Graphen eine geeignete Mächtigkeit (wie die Multiplizität dieser Kante bzw. Schlinge) zugeordnet wird.

Ein Knoten x des Graphen $F(f)$ heisst *isoliert*, wenn $f[x, y] = f[y, x] = 0$ für jeden $y \in F$, $y \neq x$, gilt. Es gibt also zwei Arten von isolierten Knoten, u. zw. *isolierte Knoten x mit Schlinge* (für $f[x, x] = 1$) und *isolierte Knoten ohne Schlinge* (für $f[x, x] = 0$). Den Graphen, der keine isolierten Knoten enthält, bezeichnen wir als den *Königschen Graphen*[1]). Endlich wollen wir die Graphen, deren Mächtigkeit gleich 1 ist, und den leeren Graphen, *triviale* Graphen nennen. Der triviale Graph, der einen einzigen Knoten mit Schlinge enthält, heisst *Einselgraph*.

Es sei a ein Knoten des Graphen $F(f)$. Die Menge $L(a)$ bzw. $R(a)$ aller Knoten $x \neq a$, für die $f[x, a] = 1$ bzw. $f[a, x] = 1$, nennen wir die *linke* bzw. *rechte Umgebung* des Knoten a in $F(f)$ und die Mächtigkeit kard $L(a)$ bzw. kard $R(a)$ nennen wir den *linken* bzw. *rechten Grad* dieses Knoten in $F(f)$. Die Vereinigung $L(A) \cup R(A)$ heisst die *Umgebung* und die Summe kard $L(a)$ + + kard $R(a)$ heisst der *Grad* des Knoten a in $F(f)$. Bei den nichtgerichteten Graphen ist es üblich nur die Hälfte dieses Grades als den Grad des Knoten zu betrachten. Ähnliche Begriffe kann man auch allgemein für jede Teilmenge $A \subset F$ einführen (vgl. O. Ore [10]).

1.1. Definition. *Eine Abbildung φ eines Graphen $F(f)$ auf einen Graphen $G(g)$, die die Bedingung*

$$x, y \in F \Rightarrow g[\varphi(x), \varphi(y)] = f[x, y] \tag{1}$$

erfüllt, heisst ein Homomorphismus.[2]) *Der Graph $F(f)$ bzw. $G(g)$ heisst das homomorphe Vorbild bzw. Bild des Graphen $G(g)$ bzw. $F(f)$ in der Abbildung φ, was man mit $F(f) \rightarrow G(g)$ bezeichnet. Wenn die Abbildung φ schlicht ist, so heisst sie Isomorphismus und man schreibt $F(f) \leftrightarrow G(g)$.*

Die Relation $\rightarrow$ ist reflexiv und transitiv und die Relation $\leftrightarrow$ ist eine Äquivalenzrelation, sodass wir über Klassen der paarweise isomorphen Graphen sprechen können.

Zwei Graphen $F(f)$ und $F(f^*)$ nennen wir zueinander *komplementär*, wenn für ihre Relationen $f[x, y] \neq f^*[x, y]$ für alle $x, y \in F$ gilt. Den Graphen, in dem jeder Knoten x jeden anderen Knoten $y, y \neq x$ bindet, nennen wir *vollständig* und seinen komplementären Graphen *frei*. Der Graph $F(\tilde{f})$ heisst der *konverse* Graph zu $F(f)$, wenn seine Relation folgendermassen definiert ist: $\tilde{f}[x, y] = f[y, x]$ für alle $x, y \in F$.[3])

---

[1]) Diese Bedingung drückt den Inhalt des einzigen Königschen Axioms (siehe D. König [5], S. 2) aus. Im Falle eines „Königschen Graphen“ $F(f)$ ist die Menge F mit dem Feld der Relation f identisch (siehe A. Mostowski [6], S. 130).

[2]) Dieser Homomorphismus ist stärker als der bei A. Mostowski [6], S. 197 und auch als der übliche Homomorphismus in der Algebra.

[3]) Über weitere Eigenschaften der komplementären und konversen Graphen siehe A. Mostowski [6], S. 97, 119 u. f. Im Falle einer teilweise geordneten Menge wurde von G. Birkhoff [1], S. 19 der konverse Graph dualer Graph benannt.

Durch eine *Realisation* des Graphen $F(f)$ verstehen wir jeden Graphen $G(g)$, der isomorph mit $F(f)$ ist und dessen Knoten und auch dessen Relation in irgendeiner speziellen Weise gegeben sind. Zur Veranschaulichung der Graphen, die genug kleine Mächtigkeit haben, dienen uns die üblichen *Ebenerealisationen.*[4])

Bei den endlichen Graphen führt uns der Begriff der Inzidenzmatrix des Graphen zu einer nützlichen Representation. Die Relation f des Graphen $F(f)$, kard $F = n$ (wo n eine natürliche Zahl ist), ist nämlich durch eine n-reihige Quadratmatrix $A^{(n)} = \|a_{ij}\|$, wo $a_{ij} = f[x_i, x_j]$, $x_i, x_j \in F$, für alle $i, j = 1, 2, \ldots, \ldots, n$, bestimmt. Jede solche Matrix heisst die *Inzidenzmatrix des Graphen* $F(f)$. Jede Quadratmatrix $A^{(n)} = \|a_{ij}\|$, die nur von Nullen und Einsern gebildet ist, ist also eine Representation eines endlichen Graphen $F(f)$, dessen jeder Knoten gerade einer Reihe und zugleich der gleichnamigen Spalte entspricht, sodass die Relation f durch Beziehung $f[x_i, x_j] = a_{ij}$ bestimmt ist. Jede zwei Inzidenzmatrizen desselben Graphen unterscheiden sich nur in der Anordnung ihrer Reihen und Spalten, aber in solcher Weise, dass bei dem Wechsel der i-ten mit der j-ten Reihe zugleich auch die i-te mit der j-ten Spalte umgewechselt werden muss und umgekehrt. Zwei Matrizen $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, deren eine aus der anderen durch vorige Abänderung gebildet werden kann, heissen *vollständig äquivalent* und man schreibt $A^{(n)} \approxeq B^{(n)}$.

Es ist klar, dass die Inzidenzmatrizen der isomorphen endlichen Graphen vollständig äquivalent sind, sodass den Klassen isomorpher Graphen die Klassen vollständig äquivalenter Inzidenzmatrizen eindeutig entsprechen. Die Anzahl der nichtisomorphen endlichen Graphen kann mit Hilfe der entsprechen den Inzidenzmatrizen bestimmt werden. An der Inzidenzmatrix kann man leicht erkennen, welche Eigenschaften die Relation des entsprechenden Graphen besitzt.

1.2. Satz. *Bezeichnet* **X**- *eine der Eigenschaften* **R**-, **aR**-, **S**-, **aS**-, **T**- *der Relation, so ist ein homomorphes Bild und Vorbild eines* **X**-*Graphen wieder ein* **X**-*Graph. Ein homomorphes Bild eines* **antiS**-*Graphen ist auch ein* **antiS**-*Graph.*

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus 1.1.

Es ist klar, dass ein homomorphes Vorbild eines **antiS**-*Graphen* kein **antiS**-Graph sein muss. Aus 1.2 folgt, dass ein homomorphes Bild und Vorbild eines nichtgerichteten Graphen wieder ein nichtgerichteter Graph ist und dasselbe gilt auch für die quasi- und schwach-geordneten Mengen. Betrachten wir die

---

[4]) Für verschiedene Knoten x, y wählen wir verschiedene Punkte der Ebene; zwei Punkte verbindet man mit einem einfachen Jordanschen Bogen dann und nur dann, wenn für die entsprechenden Knoten x, y die Behauptung entweder x bindet y oder y bindet x gilt. Im ersten Falle bezeichnen wir den Bogen (in seiner Mitte) mit einem Pfeil, der von x nach y gerichtet ist und umgekehrt im zweiten Falle. Wenn beide Fälle zusammenzutreffen, lassen wir den Bogen ohne Pfeil.

teilweise Ordnung als eine **aST**-Relation, so gilt die vorige Behauptung auch für die teilweise-geordneten Mengen (anderenfalls gilt sie nur über die homomorphen Bilder).

1.3. Definition. *Ein Graph $G(g)$ heisst Teilgraph (oder Subgraph) des Graphen $F(f)$, wenn er die Bedingungen*

$$G \subset F \quad \text{und} \quad x, y \in G \Rightarrow g[x, y] \leqq f[x, y] \tag{2}$$

erfüllt. Der Teilgraph $G(g)$ heisst satt, wenn in (2) *stets das Gleichheitszeichen gilt.*

Durch jede Untermenge der Knoten eines gegebenen Graphen wird ein einziger satter Teilgraph, aber im allgemeinen mehrere Teilgraphen bestimmt, wobei die gewählte Untermenge die Menge aller seiner Knoten ist. Eine Inzidenzmatrix des satten Teilgraphen ist vollständig äquivalent mit einer bestimmten Submatrix der Inzidenzmatrix des gegebenen (endlichen) Graphen. Im Falle einer nichtsatten Teilgraphen (mit denselben Knoten) muss man in dieser Submatrix einige Einser durch Nullen ersetzen, um eine Inzidenzmatrix des betreffenden Teilgraphen zu bilden.

Man kann annehmen, dass der leere Graph ein Teilgraph jedes Graphen ist. Das System aller satten Teilgraphen eines gegebenen Graphen bildet eine Boolesche Algebra mit Verbandsordnung „*ein satter Teilgraph sein*", die isomorph mit der Algebra aller Untermengen einer Menge ist. Das System aller Teilgraphen mit Verbandsordnung „*ein Teilgraph sein*" bildet auch eine Boolesche Algebra, die die vorige als eine Subalgebra enthält.[5]) Die Boolesche Algebra aller Teilgraphen des Graphen $F(f)$ enthält die Boolesche Subalgebra aller Teilgraphen der Form $F(g)$, die im Falle ,dass $F(f)$ ein vollständiger Graph mit **R**-Relation ist, mit der „*proper relation algebra*" (siehe A. TARSKI [11]) identisch ist. Damit ist der Zusammenhang zwischen der Theorie der Graphen und der Theorie der binären Relationen beschrieben.

2. Einfachheit

Unter einer Zerlegung F eines Graphen $F(f)$ verstehen wir immer eine Zerlegung auf der Menge aller seiner Knoten.[6])

---

[5]) Beim Supremum bzw. Infimum bildet man neben der mengentheoretischen Vereinigung bzw. des Durchschnittes der zugegörigen Mengen von Knoten noch die kleinste Erweiterung bzw. die grösste Partialfunktion der zugehörigen charakteristischen Funktionen (der Relationen) der betreffenden Teilgraphen (siehe A. A. MOSTOVSKI - K. KURATOWSKI [7], S. 58).

[6]) Die Bezeichnungen und die Terminologie aus der Theorie der Zerlegungen auf der Menge benützen wir nach O. BORŮVKA [2].

Wenn der Graph $G(g)$ das homomorphe Bild des Graphen $F(f)$ im Homomorphismus φ ist, so wird die sogenannte *erzeugende Zerlegung* $\bar{F}$ des Graphen $F(f)$ durch folgende Äquivalenz

$$x, y \in F \Rightarrow \{x \sim y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)\} \tag{3}$$

definiert. Auf jedem (nichtleeren) Graphen existiert mindestens eine erzeugende Zerlegung, nämlich die Minimalzerlegung (d. h. die Zerlegung $\bar{F}$, für die $x \in F \Rightarrow \{x\} \in \bar{F}$ gilt).

2.1. Satz. *Eine Zerlegung $\bar{F}$ des Graphen $F(f)$ ist dann und nur dann seine erzeugende Zerlegung, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$X, Y \in \bar{F} \Rightarrow f[x, y] = \text{Konst für jedes } x \in X, y \in Y . \tag{4}$$

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung (4) folgt unmittelbar aus (3) und (1). Sei also eine Zerlegung $\bar{F}$ des Graphen $F(f)$ gegeben, die die Bedingung (4) erfüllt. Auf dieser Zerlegung kann man einen Graphen $\bar{F}(\bar{f})$ folgendermassen definieren

$$X, Y \in \bar{F} \Rightarrow \bar{f}[X, Y] = f[x, y] \quad \text{wo} \quad x \in X, y \in Y . \tag{5}$$

Wir definieren nun die Abbildung φ der Menge F auf die Menge $\bar{F}$ durch die Beziehung

$$x \in X, X \in \bar{F} \Rightarrow \varphi(x) = X , \quad \text{d. h.} \quad x \in \varphi(x) . \tag{6}$$

Dann gilt offenbar $\bar{f}[\varphi(x), \varphi(y)] = \bar{f}[X, Y] = f[x, y]$ für alle $x, y \in F$, sodass nach (1) die Abbildung φ ein Homomorphismus ist.

Den Graphen $\bar{F}(\bar{f})$, der auf der erzeugenden Zerlegung $\bar{F}$ des Graphen $F(f)$ durch die Bedingung (5) definiert ist, nennen wir den *Faktorgraphen* des Graphen $F(f)$.

2.2. Folgerung. *Ein Graph ist das homomorphe Vorbild jedes seiner Faktorgraphen und jedes homomorphe Bild eines Graphen ist mit einem seiner Faktorgraphen isomorph.*

Beweis. Im ersten Teil wird der gesuchte Homomorphismus durch die Bedingung (6) definiert und im zweiten Teil wird der gesuchte Faktorgraph auf der Zerlegung (3) definiert.

Aus 2.2 folgt, dass es bei der Untersuchung der homomorphen Bilder eines Graphen genügt, sich auf seine Faktorgraphen zu beschränken. Zur Beschreibung dieser Faktorgraphen kann man die spezialen Homomorphismen (6) ausnützen.

Ein Graph heisst *einfach*, wenn auf ihm nur eine einzige erzeugende Zerlegung definiert werden kann.

2.3. Satz. *Der Graph $F(f)$ ist dann und nur dann einfach, wenn folgende Bedingung erfüllt wird:*

$$x, y \in F,\ x \neq y \Rightarrow \text{ es existiert ein solcher } z \in F, \text{ der mindestens eine der Ungleichheiten } f[x, z] \neq f[y, z],\ f[z, x] \neq f[z, y] \text{ erfüllt.} \tag{7}$$

Beweis. I. Sei $F(f)$ ein einfacher Graph und sei weiter vorausgesetzt, dass (7) nicht erfüllt ist, d. h. es existieren $x, y \in F$, $x \neq y$, sodass $f[x, z] = f[y, z]$ und auch $f[z, x] = f[z, y]$ für jeden Knoten $z \in F$ gilt. Dann ist die Zerlegung $\bar{F}$, die aus der Minimalzerlegung so gebildet ist, dass man die Elemente $\{x\}$, $\{y\}$ vereinigt und alle übrigen Elemente ohne Änderung bleiben, offenbar erzeugend und verschieden von der Minimalzerlegung, was aber der Einfachheit des Graphen $F(f)$ widerspricht.

II. Sei nun umgekehrt die Bedingung (7) für den Graphen $F(f)$ erfüllt und sei weiter vorausgesetzt, dass $F(f)$ nicht einfach ist, d. h. dass mindestens eine erzeugende Zerlegung $\bar{F}$ des Graphen $F(f)$ existiert, die folgende Eigenschaft hat: es existiert $M \in \bar{F}$ der Mächtigkeit kard $M \geqq 2$. Dann existieren also $x, y \in M$, $x \neq y$, für die (bezüglich des entsprechenden Faktorgraphen $\bar{F}(\bar{f})$) nach (5) die Gleichheiten $f[x, z] = \bar{f}[M, Z] = f[y, z]$ und $f[z, x] = \bar{f}[Z, M] = f[z, y]$ für alle $z \in Z$ und jede $Z \in \bar{F}$ gelten, was in Widerspruch mit (7) ist.

Für einen endlichen Graphen folgt aus der Bedingung (7), dass er dann und nur dann einfach ist, wenn seine Inzidenzmatrix folgende Eigenschaft besitzt:

die i-te und j-te Reihe bzw. Spalte, $i \neq j$, sind gleich $\Rightarrow$ die i-te und j-te Spalte bzw. Reihe sind verschieden (im Sinne der Matrizengleichheit). (7')

Der vollständige Graph mit **R**-Relation ist offenbar dann und nur dann einfach, wenn er ein Einselgraph ist, während der vollständige Graph mit a**R**-Relation immer einfach ist. Bei den freien Graphen ist das umgekehrt.

2.4. Satz. *Ein Faktorgraph $\bar{F}(\bar{f})$ des Graphen $F(f)$ ist dann und nur dann einfach, wenn die Zerlegung $\bar{F}$ die kleinste Deckung des Systems aller erzeugengen Zerlegungen des Graphen $F(f)$ ist.*

Beweis. I. Es sei $\bar{F}(\bar{f})$ ein einfacher Faktorgraph und $\bar{F}_1(\bar{f}_1)$ ein beliebiger Faktorgraph des Graphen $F(f)$. Es sei nun $Y \in \bar{F}_1$ und es sei weiter vorausgesetzt, dass mindestens zwei solche Elemente der Zerlegung $\bar{F}$, und zwar $X', X'' \in \bar{F}$, $X' \neq X'$, existieren, dass $X' \cap Y \neq \emptyset \neq X'' \cap Y$ gilt. Es gibt also auch Knoten $x' \in X'' \cap Y$, $x'' \in X'' \cap Y$, $x' \neq x''$, und zu jedem $X \in \bar{F}$ kann man ein $Z \in \bar{F}_1$ finden, sodass ein Knoten $z \in X \cap Z$ existiert. Dann aber gilt nach (5) $\bar{f}[X', X] = f[x', z] = \bar{f}_1[Y, Z] = f[x'', z] = \bar{f}[X'', X]$ und $\bar{f}[X, X'] = \bar{f}[X, X'']$ für jedes Element $X \in \bar{F}$, sodass nach 2.3 der Faktorgraph $\bar{F}(\bar{f})$ nicht einfach sein kann, was ein Widerspruch ist. Es muss also zu jedem $Y \in F_1$ gerade ein Element $X \in \overline{F}$ der Eigenschaft $X \cap Y \neq \emptyset$ existieren und für dieses gilt dann $X \subset Y$. Damit wird gezeigt, dass $\overline{F}$ eine Deckung der Zerlegung $\overline{F}_1$ ist und weil $\overline{F}$ selbst eine erzeugende Zerlegung ist, ist sie auch das Supremum des Systems aller erzeugenden Zerlegungen. Daraus folgt nach einem Satze von O. Borůvka [2], S. 18, dass $\overline{F}$ die kleinste Deckung des betreffenden Systems ist.

II. Es sei nun umgekehrt $\overline{F}$ die kleinste Deckung des Systems aller erzeugenden Zerlegungen des Graphen $F(f)$. Aus der Konstruktion der kleinsten Deckung eines Systems (siehe O. Borůvka [2], S. 16) geht unmittelbar hervor, dass $\overline{F}$ wieder eine erzeugende Zerlegung ist. Wenn wir nun voraussetzen, dass $\overline{F}(\overline{f})$ nicht einfach ist, d. h. dass nach (7) zwei solche Elemente $X', X'' \in \overline{F}$, $X' \neq X''$, existieren, dass $\overline{f}[X'. X] = \overline{f}[X'', X]$ und zugleich $\overline{f}[X, X'] = \overline{f}[X, X'']$ für jedes $X \in \overline{F}$ gilt, kann man aus der Zerlegung $\overline{F}$ eine neue Zerlegung $\overline{F}_1$ folgendermassen konstruieren: $\overline{F}_1 = \underset{X}{\mathrm{E}}\{X \in \overline{F}, X' \neq X \neq X''\} \cup \{(X' \cup X'')\}$. Die Zerlegung $\overline{F}_1$ ist wieder erzeugend, aber $\overline{F}$ ist keine Deckung derselben, was ein Widerspruch ist.

2.5. Folgerung. *Jeder Graph $F(f)$ besitzt einen einzigen einfachen Faktorgraphen. Die entsprechende erzeugende Zerlegung ist durch folgende Äquivalenz bestimmt,*

$$x \sim y \Leftrightarrow f[x, z] = f[y, z]\,, \quad \text{wobei gleichzeitig } f[z, x] = f[z, y] \quad \text{für jeden } z \in F \text{ gilt.} \tag{8}$$

2.6. Folgerung. *Der einfache Faktorgraph ist das homomorphe Bild jedes Faktorgraphen des gegebenen Graphen.*

2.7. Satz. *Jeder Graph ist das homomorphe Vorbild eines einzigen (bis auf die Isomorphismen) einfachen Graphen.*

Beweis. Der Satz folgt aus 2.2 und 2.5.

Im Sinne des Satzes 2.7 können wir sagen, dass jedem Graphen $F(f)$ *sein einfacher* Graph zugehört. Nach 2.5 ist es möglich, einen einfachen Faktorgraphen $\overline{F}(\overline{f})$ für diesen zu wählen und jedem Knoten $X_\iota \in \overline{F}$ desselben die Mächtigkeit kard $X_\iota = \alpha_\iota$ zuzuordnen. Das System (nicht die Menge) $\{\alpha_\iota\}$ $\iota \in I$, aller dieser Mächtigkeiten mit der Zuordnung derselben zu den Knoten eines beliebigen seiner einfachen Graphen (die Zuordnung wird durch beliebige Isomorphismen unter den einfachen Graphen des gegebenen Graphen vermittelt) heisst die *homomorphe Charakteristik* des Graphen $F(f)$.

Es sei nun ein einfacher Graph $G(g)$ gegeben und es seien Knoten $y_\iota \in G$, $\iota \in I$, irgendwelche Mächtigkeiten α_ι zugeordnet. Man kann nun leicht den Graphen $F(f)$ mit dieser homomorphen Charakteristik konstruieren. Zu diesem Zwecke, genügt es ein System der paarweise disjunkten Mengen Z_ι, kard $Z_\iota = \alpha_\iota$, für jedes $\iota \in I$ zu wählen und den Graphen $F(f)$ folgendermassen zu definieren: $F = \bigcup_{\iota \in I} Z_\iota$ und $x \in Z_\iota$, $y \in Z_\varkappa \Rightarrow f[x, y] = g[z_\iota, z_\varkappa]$. Dann ist das System der Mengen Z_ι eine erzeugende Zerlegung $\overline{F}$ des Graphen $F(f)$ und zwar gerade die, die durch die Äquivalenz (8) bestimmt wird. Der entsprechende Faktorgraph $\overline{F}(\overline{f})$ ist offenbar einfach und mit $G(g)$ in verlangter Weise isomorph, sodass $F(f)$ die vorher gegebene homomorphe Charakteristik besitzt.

In ähnlicher Weise kann man auch homomorphe Vorbilder eines beliegigen (nicht nur einfachen) Graphen konstruieren.

2.8. Satz. *Es sei $\{\alpha_\iota\}$ bzw. $\{\beta_\iota\}$ die homomorphe Charakteristik des Graphen $F(f)$ bzw. $G(g)$. Dann gilt: der Graph $G(g)$ ist ein homomorphes Bild des Graphen $F(f)$ dann und nur dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$\left.\begin{array}{l}\textit{den Graphen } F(f),\ G(g) \textit{ gehört derselbe einfache Graph } H(h) \textit{ zu, zu} \\ \textit{dessen Knoten } z_\iota \in H \textit{ die Mächtigkeiten } \alpha_\iota, \beta_\iota \textit{ so zugeordnet werden} \\ \textit{können, dass die Ungleichheit } \alpha_\iota \geqq \beta_\iota \textit{ für alle } \iota \textit{ gilt.}\end{array}\right\} \quad (9)$$

Beweis. I. Es sei vor allem $F(f) \to G(g)$. Ist $H(h)$ der einfache Graph des Graphen $G(g)$, so folgt aus der Transitivität des Homomorphismus und aus 2.7, dass $H(h)$ der einfache Graph auch des Graphen $F(f)$ ist. Ist nun $H(h)$ der einfache Graph, der dem Graphen $F(f)$ zugehört, so gilt $F(f) \to H(h)$ und nach 2.2 gibt es solche Faktorgraphen $\overline{F}_1(\overline{f}_1)$, $\overline{F}_2(\overline{f}_2)$ des Graphen $F(f)$, dass $\overline{F}_1(\overline{f}_1) \longleftrightarrow H(h)$ und $\overline{F}_2(\overline{f}_2) \longleftrightarrow G(g)$ gilt. Aber $\overline{F}_1(\overline{f}_1)$ ist einfach, sodass aus 2.6 die Beziehung $\overline{F}_2(\overline{f}_2) \to \overline{F}_1(\overline{f}_1)$ oder $G(g) \to H(h)$ folgt und dann muss nach 2.7 der einfache Graph $H(h)$ auch dem Graphen $G(g)$ zugehören. Damit ist also gezeigt, dass der gemeinsame einfache Graph $H(h)$ der beiden Graphen $F(f)$ und $G(g)$ existiert, auf dessen Knoten $z_\iota \in H$ die Mächtigkeiten α_ι und β_ι (durch entsprechende Isomorphismen) bezogen werden. Es gilt also $F(f) \to G(g)$, $G(g) \to H(h)$ und φ, ψ seien die entsprechenden Homomorphismen. Dann ist auch $\chi = \psi\varphi$ ein Homomorphismus, der $F(f)$ auf $H(h)$ abbildet. Die angeführten Homomorphismen bestimmen durch die Äquivalenz (3) entsprechende erzeugende Zerlegungen, deren Elemente von folgender Gestalt sind: $Y_\iota = \underset{y}{\mathrm{E}} \{y \in G,\ \psi(y) = z_\iota,\ z_\iota \in H\}$ und $X_\iota = \underset{x}{\mathrm{E}} \{x \in F,\ \chi(x) = z_\iota,\ z_\iota \in H\} = \underset{x}{\mathrm{E}} \{x \in F,\ \varphi(x) = y,\ y \in Y_\iota\}$. Die betreffenden Zerlegung sind nach 2.5 gerade die, die durch die Äquivalenz (8) bestimmt werden, sodass kard $X_\iota = \alpha_\iota$, kard $Y_\iota = \beta_\iota$. Aus der Gestalt der Elementen X_ι folgt, dass $\alpha_\iota \geqq \beta_\iota$ für jedes ι gilt.

II. Erfüllen nun beide Graphen $F(f)$ und $G(g)$ die Bedingung (9) und bezeichnen wir mit X_ι bzw. Y_ι die Mengen aller Knoten des Graphen $F(f)$ bzw. $G(g)$, die auf denselben Knoten $z_\iota \in H$ des Graphen $H(h)$ abgebildet werden, so folgt unmittelbar aus (9) und (4), dass jedes X_ι auf Y_ι abgebildet werden kann und dass die dadurch definierte Abbildung des Graphen $F(f)$ auf den Graphen $G(g)$ ein Homomorphismus ist.

2.9. Folgerung. *Zu allen homomorphen Vorbildern und auch Bildern des gegebenen Graphen gehört ein einziger (bis auf Isomorphismen) einfacher Graph.*

2.10. Satz. *Es sei $F(f) \to G(g)$ und seien $\{\alpha_\iota\}$ und $\{\beta_\iota\}$ die homomorphen Charakteristiken der Graphen $F(f)$ und $G(g)$, die die Bedingung (9) erfüllen. Dann gilt:*

a) *es existieren mindestens $\prod_\iota \binom{\alpha_\iota}{\beta_\iota} \geqq 1$ Subgraphen des Graphen $F(f)$, die isomorph mit $G(g)$ sind, wenn $\binom{\alpha_\iota}{\beta_\iota}$ die Mächtigkeit des Systems aller Untermengen der Mächtigkeit β_ι auf der Menge der Mächtigkeit α_ι bezeichnet und*

b) *es existieren mindestens $\prod_\iota \gamma_\iota \geqq 1$ Faktorgraphen $\bar{F}(\bar{f})$, die isomorph mit $G(g)$ sind, wenn γ_ι die Mächtigkeit des Systems aller Zerlegungen der Mächtigkeit β_ι auf der Menge der Mächtigkeit α_ι ist.*

Beweis. Beide Behauptungen folgen aus 2.8.

2.11. Satz. *Es sei Graph $F(f)$ mit der homomorphen Charakteristik $\{\alpha_\iota\}$ gegeben. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent*

a) *$F(f)$ ist einfach,*
b) *$F(f) \to G(g) \Rightarrow F(f) \longleftrightarrow G(g)$.*
c) *$\alpha_\iota = 1$ für jedes ι.*

Beweis. Die Implikation a) $\Rightarrow$ b) folgt direkt aus 2.2 und aus b) nach 2.2 folgt $F(f) \longleftrightarrow \bar{F}(\bar{f})$ für jeden Faktorgraphen $\bar{F}(\bar{f})$ des Graphen $F(f)$, also auch für seinen einfachen Faktorgraphen, was aber heisst, dass $F(f)$ auch einfach sein muss. Dies beweist die Implikation b) $\Rightarrow$ a) und die Äquivalenz a) $\Leftrightarrow$ c) folgt aus der Definition der homomorphen Charakteristik.

2.12. Satz. *Es gilt*

$$F(f) \to G(g)\,, \quad G(g) \to F(f) \Leftrightarrow F(f) \longleftrightarrow G(g)\,.$$

Beweis. Ist die linke Seite der Äquivalenz gültig, so folgt aus 2.8, dass der gemeinsame einfache Graph $H(h)$ der beiden Graphen existiert und dass auf seine Knoten $z_\iota \in H$ die Mächtigkeiten der homomorphen Charakteristiken $\{\alpha_\iota\}$ und $\{\beta_\iota\}$ der Graphen $F(f)$ und $G(g)$ bezogen werden. Nach (9) gilt also $\alpha_\iota = \beta_\iota$ für jedes ι. Ist weiter $\bar{F}(\bar{f})$ bzw. $\bar{G}(\bar{g})$ der einfache Faktorgraph des Graphen $F(f)$ bzw. $G(g)$, so gibt es (nach der Definition der homomorphen Charakteristik) Isomorphismen, die dem Knoten $z_\iota \in H$ den Knoten $X_\iota \in \bar{F}$ bzw. $Y_\iota \in \bar{G}$ auf solche Weise zuordnen, dass kard $X_\iota = \alpha_\iota$ bzw. kard $Y_\iota = \beta_\iota$ für jedes ι ist. Aus $\alpha_\iota = \beta_\iota$ folgt aber, dass X_ι immer auf Y_ι schlicht abgebildet werden kann, sodass die entstehende Abbildung des Graphen $F(f)$ auf den Graphen $G(g)$ nach (5) ein Isomorphismus ist. Die umgekehrte Implikation ist trivial.

Wenn wir die Relation „ein homomorphes Bild sein" in natürlicher Weise[7]) auf das System der Klassen der isomorphen Graphen übertragen, so wird nach 2.12 eine teilweise Anordnung dieses Systems entstehen. Wenn wir die Relation „ein satter Teilgraph sein" oder „ein Teilgraph sein" auf das System der Klassen von isomorphen Graphen übertragen, so wird nur eine Quasi-Anordnung entstehen. Es ist nämlich möglich drei (unendlichen) Graphen $F(f)$, $G(g)$, $H(h)$ auf solche Weise zu definieren, dass $F(f)$ ein satter Teilgraph von $G(g)$ und $G(g)$ ein satter Teilgraph von $H(h)$ ist und dabei $F(f) \longleftrightarrow H(h)$, aber nicht $F(f) \longleftrightarrow G(g)$ gilt. Es sei z. B. $H = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, $h[a_0, a_i] = 1$ für $i = 1, 2, \ldots$, $h[a_{2i+1}, a_{2i+2}] = 1$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$ und in allen anderen Fällen gilt $h[a_i, a_j] = 0$. Beide übriggebliebenen Graphen sind durch die Mengen aller ihrer Knoten $G = \{a_0, a_2, a_3, \ldots\}$, $F = \{a_0, a_3, a_4, \ldots\}$ als satte Teilgraphen eindeutig bestimmt.

2.13. Satz. *Jeder* **R antiS**-*Graph ist einfach.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass ein **R antiS**-Graph $F(f)$ nicht einfach ist. Nach 2.3 gibt es die Knoten $x, y \in F$, $x \neq y$, für die $f[x, z] = f[y, z]$ und $f[z, x] = f[z, y]$ für alle $z \in F$ gilt. Aber $f[x, x] = f[y, y] = 1$, sodass auch $f[x, y] = f[y, x] = 1$ sein muss, was der Voraussetzung der Antisymmetrie widerspricht.

Aus 2.13 folgt, dass auch jede teilweise geordnete Menge einfach ist, soweit sie als ein **R antiST**-Graph betrachtet wird. Betrachten wir die teilweise Ordnung als eine **aST**-Relation, braucht eine teilweise geordnete Menge nicht einfach zu sein und alle Sätze dieses Abschnittes sind benutzbar und führen zu einer, offenbar nicht sehr tiefen, Klassifikation der teilweise geordneten Mengen.

2.14. Satz. *Die komplementären Graphen haben folgende Eigenschaften*

a) $F(f) \to G(g) \Leftrightarrow F(f^*) \to G(g^*)$,

b) $F(f)$ *ist einfach* $\Leftrightarrow F(f^*)$ *ist einfach,*

c) *Der einfache Graph* $G(g)$ *bzw.* $H(h)$ *gehört dem Graphen* $F(f)$ *bzw.* $F(f^*)$ *zu* $\Leftrightarrow G(g) \longleftrightarrow H(h^*)$,

d) *Die Graphen* $F(f)$, $F(f^*)$ *besitzen dieselben Mächtigkeiten der homomorphen Charakteristik.*

Beweis. a) folgt direkt aus 1.1 und b) aus 2.3. Die beiden letzen Behauptungen folgen aus den vorigen.

---

[7]) D. h., dass wir eine Relation σ unter den Klassen $\{F(f)\}$, $\{G(g)\}$ foldendermassen definieren: $\{F(f)\}\ \sigma\ \{G(g)\} \Leftrightarrow$ es gibt einen solchen $H(h) \in \{G(g)\}$, dass er ein homomorphes Bild des Graphen $F(f)$ ist. Ähnlich definieren wir eine Relation σ folgendermassen: $\{F(f)\}\ \sigma\ \{G(g)\} \Leftrightarrow$ es gibt einen solchen $H(h) \in \{F(f)\}$, dass er ein satter Teilgraph des Graphen $G(g)$ ist.

3. Zusammenhang

Bezüglich der gegebenen Definition des Graphen braucht man einige allgemeinere Begriffe über die Knotenfolgen als die, die bei D. König [5] bzw. bei G. Birkhoff [1] eingeführt werden.

Eine endliche Folge $\{x_i\}_{i=1}^d$, $d \geqq 2$, der Knoten des Graphen $F(f)$, deren Elemente folgende Bedingung

$$x_i, x_{i+1} \in F\,, \quad 1 \leqq i < d \Rightarrow f[x_i, x_{i+1}] + f[x_{i+1}, x_i] = 1 \tag{10}$$

erfüllen, heisst die *gebundene Folge* von x_1 nach x_d in $F(f)$. Gilt noch mehr $f[x_1, x_d] + f[x_d, x_1] = 1$ bzw. $= 0$, so heisst sie die *geschlossene* bzw. *offene gebundene Folge*. Ist die gebundene Folge $\{x_i\}_{i=1}^d$ schlicht (bezüglich ihrer Knoten), d. h. gilt $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$, $1 \leqq i, j \leqq d$, so heisst sie *Zug* und d heisst seine *Länge*. Es ist klar, was man unter einem *geschlossenen* bzw. *offenen Zuge* versteht. Endlich jeden Knoten halten wir für die sog. *triviale gebundene Folge* bzw. für den *trivialen Zug*.

Ist $\{x_i\}_{i=1}^d$ ein Zug in $F(f)$, der alle Knoten aus F enthält (d. h. $F = \{x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_d\}$) und wenn weiter

$$f[x_i, x_j] = 0 \quad \text{für jedes} \quad i \neq j, j+1, j-1, 1 \leqq i \leqq d\,,$$

gilt, dann nennen wir auch den Graphen $F(f)$ selbst einen *Zug*. Man kann zu keinen Missverstädnissen kommen, wenn wir Züge einmal als Folgen, andermal als Graphen ansehen, weil der Zusammenhang zwischen diesen zwei Begriffen eineindeutig ist.

Erfüllt die gebundene Folge $\{x_i\}_{i=1}^d$ in $F(f)$ eine schärfere Bedingung

$$x_i, x_{i+1} \in F, 1 \leqq i < d \Rightarrow f[x_i, x_{i+1}] = 1\,, \tag{10'}$$

so heisst sie eine *monoton-gebundene Folge*. Gilt noch weiter $f[x_d, x_1] = 1$ bzw. $= 0$, so spricht man von einer *geschlossenen* bzw. *offenen monoton-gebundenen Folge*. Analog ist das mit dem *monotonen Zuge*.

Erfüllt die gebundene Folge $\{x_i\}_{i=1}^d$ in $F(f)$ eine noch schärfere Bedingung

$$x_i, x_{i+1} \in F\,, \quad 1 \leqq i < d \Rightarrow f[x_i, x_{i+1}] = f[x_{i+1}, x_i] = 1\,, \tag{10''}$$

so heisst sie eine *voll-gebundene Folge*. Gilt auch $f[x_1, x_d] + f[x_d, x_1] = 2$ bzw. < 2, so heisst sie *geschlossene* bzw. *offene voll-gebundene Folge*. Wieder kann man von einem *vollen Zuge* sprechen, der offenbar entweder geschlossen oder offen sein kann.

Durch vorige Definitionen werden auch einige weitere spezielle Graphen auf eine ähnliche Weise wie der Zug eingeführt, nämlich ein *monotoner* bzw. *voller Zug*, der entweder offen oder geschlossen sein kann.[8])

Wir werden sagen, dass zwei verschiedene Elemente $x_1, x_d \in F$ *zusammenhängen* (bzw. *monoton-zusammenhängen* bzw. *voll-zusammenhängen*) in $F(f)$, falls es eine gebundene Folge (bzw. monoton-gebundene bzw. voll-gebundene Folge) $\{x_i\}_{i=1}^{d}$ von x_1 nach x_d (bzw. auch eine von x_d nach x_1) in $F(f)$ gibt. Gilt dieses für jedes Paar von verschiedenen Knoten des Graphen $F(f)$, so sagen wir, dass der Graph $F(f)$ *zusammenhängend* (bzw. *monoton-zusammenhängend* bzw. *voll-zusammenhängend*) ist. Also ist jeder triviale Graph zusammenhängend (ja sogar voll-zusammenhängend).

Für die nichtgerichteten Graphen sind alle drei Arten des Zusammenhanges äquivalent, aber ein nichttrivialer grichteter Graph muss nicht voll-zusammenhängend und die nichttriviale teilweise geordnete Menge muss nicht monoton-zusammenhängend sein. Ein Graph ist dann und nur dann monoton-zusammenhängend, wenn je zwei verschiedene Knoten seiner Knoten auf einem geschlossenen und monotonen Zuge liegen. Es ist endlich klar, dass aus dem vollen Zusammenhange der monotone und aus diesem der (gewöhnliche) Zusammenhang folgt.

Ein Homomorphismus bildet eine gebundene Folge auf eine gebundene Folge ab, wobei alle erwähnten Eigenschaften der gebundenen Folgen beibehalten werden.

3.1. Satz. *Ein homomorphes Vorbild und Bild eines zusammenhängenden und nichttrivialen Graphen ist wieder zusammenhängend. Dasselbe gilt für den monotonen bzw. vollen Zusammenhang. Ein homomorphes Vorbild eines Einselgraphen ist voll-zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $F(f)$ ein nichttrivialer und zusammenhängender Graph, der ein homomorphes Bild im Homomorphismus φ eines Graphen $G(g)$ ist. Sind nun $y' \neq y''$ zwei beliebige Knoten aus G, so gibt es zwei Möglichkeiten. Ist $\varphi(y') \neq \varphi(y'')$, so gibt es eine gebundene Folge $\{x_i\}_{i=1}^{d}$, $d \geqq 2$ in $F(f)$ von $\varphi(y') = x_1$ nach $\varphi(y'') = x_d$. Es existieren weiter die Knoten $y_i \in G$, für die $\varphi(y_i) = x_i$, $1 \leqq i \leqq d$, gilt, wobei $y_1 = y'$, $y_d = y''$. Nach 1.1 ist $\{y_i\}_{i=1}^{d}$ wieder eine gebundene Folge in $G(g)$ von y' nach y''. Gilt nun $\varphi(y') = \varphi(y'')$, so gibt es einen Knoten $x \in F$, $x \neq \varphi(y')$ und auch $y \in G$, $\varphi(y) = x$. Dann muss aber $y' \neq y \neq y''$ sein, sodass für die Paare y', y und y, y'' die vorigen Bedingungen erfüllt sind. Also gibt es eine gebundene Folge in $G(g)$ von y' nach y und eine von y nach y''. Aus diesen zwei Folgen kann man offenbar eine gebundene Folge in $G(g)$ von y' nach y'' konstruieren.

[8]) Es ist klar, dass bei D. König [5] ein offener bzw. geschlossener monotoner Zug eine *Bahn* bzw. ein *Zyklus* genannt wird und ähnlich ein offener bzw. gechlossener voller Zug heisst ein *Weg* bzw. ein *Kreis*. Statt des Ausdrucks „*monoton*" benützt D. König „*kontinuierlich gerichtet*".

Auf eine ähnliche Weise führt man den Beweis für beide weiteren Arten des Zusammenhanges durch.

Für die homomorphen Bilder ist die Behauptung klar. Endlich ist ein homomorphes Vorbild eines Einselgraphen immer vollständig, also auch vollzusammenhängend.

Die Relation des Zusammenhängens (bzw. des monotonen bzw. vollen Zusammenhängens) auf der Menge F eines Graphen $F(f)$ ist eine Äquivalenzrelation und darum definiert sie eine Zerlegung $\overline{F}$

$$x, y \in M\,, \quad M \in \overline{F} \Leftrightarrow x, y \quad \text{zusammenhängen in} \quad F(f)\,. \tag{11}$$

In speziellen Untersuchungen ist es angebracht über die gebundene Folge $\{x_i\}_{i=1}^{d}$ in $F(f)$ zu sprechen, die *schlicht bezüglich der Kanten* (x_i, x_{i+1}), $1 \leqq i < d$ ist, d. h. für die $x_i = x_j$, $i \neq j \Rightarrow x_{i+1} \neq x_{j+1}$ gilt (vgl. den Begriff des *Kantenzuges* bei D. König [1]).

Wir wollen noch bemerken, dass auch *unendliche gebundene Folgen* aller erwähnten Arten und auch entsprechende *unendliche Züge* eingeführt werden können. Bei unendlichen gebundenen Folgen unterscheiden sich drei Ordnungstypen und zwar ω-, ω^*- und $\omega^* + \omega$-*Folgen*.

4. Kardinalsumme

Unter Kardinalsumme der Graphen verstehen wir einen Graphen, der bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt ist. Bei dieser Definition setzt man stillschweigend voraus, dass die betreffenden Graphen paarweise disjunkt sind.[9])

4.1. Definition. *Es seien Graphen* $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$, *gegeben. Der Graph* $F(f)$, *wo* $F = \bigcup_{\iota \in I} F_\iota$ *und* f *die Bedingung*

$$x, y \in F_\iota \Rightarrow f[x, y] = f_\iota[x, y] \quad \textit{und} \quad x \in F_\iota, y \in F_\varkappa, \ \iota \neq \varkappa \Rightarrow f[x, y] = 0 \tag{12}$$

erfüllt, heisst die Kardinalsumme $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ *der Graphen* $F_\iota(f_\iota)$. *Ist die Indizenmenge* I *endlich, bezeichnen wir die Operation der Kardinalsumme mit dem Symbol* $+$.

4.2. Satz. *Die Kardinalsumme der Graphen ist allgemein kommutativ und assoziativ.*

4.3. Folgerung. *Es sei* $A^{(m)}$ *bzw.* $B^{(n)}$ *eine Inzidenzmatrix des endlichen Graphen* $F(f)$ *bzw.* $G(g)$. *Dann ist jede Inzidenzmatrix* $S^{(s)}$ *der Kardinalsumme*

[9]) Siehe G. Birkhoff [1], S. 25. Die Kardinalsumme kann selbstverständlich als ein Spezialfall der Summe der Relationen eingeführt werden (siehe A. Mostowski [6], S. 96).

$F(f) + G(g)$ vollständig äquivalent mit der direkten Summe beider Inzidenzmatrizen $A^{(m)}$, $B^{(n)}$, d. h. es gilt

$$S^{(s)} \approx A^{(m)} \dotplus B^{(n)} .^{10)} \tag{13}$$

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus 4.1 und aus den Eigenschaften der Inzidenzmatrizen der isomorphen Graphen.

Die Rolle der Null bei der Kardinalsumme der Graphen spielt der leere Graph.

Eine Zerlegung $\bar{F}$ des Graphen $F(f)$ wollen wir als eine *Reduktionszerlegung* bezeichnen, wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$X, Y \in \bar{F}, X \neq Y \Rightarrow f[x, y] = f[y, x] = 0 \quad \text{für jede} \quad x \in X, y \in Y . \tag{14}$$

Offenbar ist die Maximalzerlegung $\bar{F}$ (d. h. wenn $F \in \bar{F}$) immer eine Reduktionszerlegung, denn die Bedingung (14) wird leer befriedigt.

4.4. Lemma. *Die grösste Verfeinerung des Systems aller Reduktionszerlegungen des gegebenen Graphen $F(f)$ ist die Zerlegung $\bar{F}$, die durch die Äquivalenz (11) bestimmt wird.*

Beweis. Es seien also $\bar{F}_\iota$, $\iota \in I$ alle Reduktionszerlegungen des Graphen $F(f)$ und es sei $\bar{F}$ die grösste Verfeinerung dieses Systems. Ist $\bar{F}$ die Maximalzerlegung, so ist $\bar{F}$ auch eine Reduktionszerlegung. Ist $\bar{F}$ die Maximalzerlegung nicht, so müssen mindestens zwei Elemente $X, Y \in F$, $X \neq Y$, existieren. Dann folgt aus der Konstruktion der grössten Verfeinerung (siehe O. Borůvka [1], S. 19), dass $X = \bigcap_{\iota \in I} X_\iota$, $Y = \bigcap_{\iota \in I} Y_\iota$, wo $X_\iota, Y_\iota \in \bar{F}_\iota$ alle solche Elemente sind, für die $X_\iota \cap X \neq \emptyset \neq Y_\iota \cap Y$ gilt. Daraus aber folgt, dass $\bar{F}$ die Bedingung (14) erfüllt. Damit wird gezeigt, dass $\bar{F}$ eine Reduktionszerlegung ist. Es sei nun $\bar{F}'$ die Zerlegung (11) auf dem gegebenen Graphen $F(f)$. Wir beweisen vor allem, dass auch $\bar{F}'$ eine Reduktionszerlegung sein muss. Sind nämlich $X', Y' \in \bar{F}'$, $X' \neq Y'$, zwei beliebige Elemente, so können keine Knoten $x \in X'$, $y \in Y'$ in $F(f)$ zusammenhängen, also muss immer $f[x, y] = f[y, x] = 0$ gelten, was aber die Bedingung (14) ist.

Es sei endlich $X \in \bar{F}$, $X' \in \bar{F}'$ und $X \cap X' \neq \emptyset$. Aus vorigen Überlegungen folgt $X \subset X'$. Setzen wir weiter voraus, dass es einen Knoten $y \in X' \cap Y$, $Y \in \bar{F}$, $Y \neq X$, gibt. Es existiert auch $x \in X \cap X'$, $x \neq y$, sodass nach (11) beide Knoten x, y in $F(f)$ zusammenhängen, in anderen Worten es existiert eine Kette $\{z_i\}_{i=1}^d$, $d \geqq 2$, $z_1 = x$, $z_u = y$. Dann gibt es zwei benachbarte Knoten z_j, z_{j+1}, $1 \leqq j < d$, für die $z_j \in X$, z_{j+1} non $\in X$ gilt, was aber in Widerspruch mit (14) ist. Es muss also $X = X'$ und darum auch $\bar{F} = \bar{F}'$ gelten.

[10]) Durch das Symbol $\dotplus$ ist die direkte Summe der Matrizen bezeichnet (siehe A. I. Malcev: *Osnovy linejnoj algebry*, S. 208). Die direkte Summe ist allgemein nicht kommutativ. Aus 4.2 und 4.3 folgt die Kommutativität der direkten Summe der Inzidenzmatrizen, nicht aber für die Gleichheit, sondern nur für die vollständige Äquivalenz der Inzidenzmatrizen.

4.5. Satz. *Für den Graphen $F(f)$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

a) *$F(f)$ ist keine Kardinalsumme von mindestens zwei (nichtleeren) Graphen,*

b) *Auf $F(f)$ existiert nur eine einzige Reduktionszerlegung, und zwar die Maximalzerlegung,*

c) *$F(f)$ ist zusammenhängend.*

Beweis. Die Implikationen a) $\Leftrightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) sind klar. Aus c) aber folgt, dass die Zerlegung (11) die maximale Zerlegung des Graphen $F(f)$ ist und nach 4.4 ist sie die einzige Reduktionszerlegung des gegebenen Graphen.

Aus 4.5 folgt, dass mit einem Zusammenhange, der bei J. Hashimoto [4] eingeführt wurde, der hier definierte Zusammenhang für teilweise geordnete Mengen äquivalent ist.

4.6. Folgerung. *Der zusammenhängende Graph ist entweder trivial oder ein Königscher Graph.*

4.7. Satz. *Jeden (nichtleeren) Graphen $F(f)$ kann man auf eine einzige Weise als Kardinalsumme seiner nichtleeren zusammenhängenden Teilgraphen $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$ ausdrücken. Dabei sind die Mengen F_ι, $\iota \in I$, die Elemente der Zerlegung* (11).

Beweis. Aus (11) folgt, dass jeder Teilgraph $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$, zusammenhängend ist und aus 4.4 folgt weiter, dass $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota) \equiv F(f)$ ist. Wäre nun $\sum_{\iota \in I} G_\iota(g_\iota) \equiv$ $\equiv F(f)$, so müssten G_ι, $\iota \in K$ Elemente einer Reduktionszerlegung $\bar{F}'$ sein Ist $\bar{F}$ die Zerlegung (11), so ist nach 4.4 $\bar{F}'$ eine Deckung derselben, d. h. für $F_\iota \in \bar{F}$, $G_\varkappa \in \bar{F}'$, $F_\iota \cap G_\varkappa \neq \emptyset$ gilt $F_\iota \subset G_\varkappa$, sodass nach 4.5 auch $G_\varkappa = F_\iota$ gelten muss (weil die $G_\varkappa(g_\varkappa)$ zusammenhängend sind), also ist $\bar{F}' = \bar{F}$.[11])

4.8. Satz. *Die Kardinalsumme von einfachen Graphen $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$, ist ein einfacher Graph dann und nur dann, wenn höchstens ein einziger der Graphen $F_\iota(f_\iota)$ einen isolierten Knoten ohne Schlinge enthält.*

Beweis. Ist der Graph $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ einfach, so enthält er höchstens einen isolierten Knoten ohne Schinge, sodass nach 4.1 und 2.3 die angeführte Bedingung notwendig ist. Ist nun diese Bedingung erfüllt, so enthält auch die Kardinalsumme $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ höchstens einen isolierten Knoten ohne Schlinge. Es seien nun $x, y \in \sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ und $x \neq y$. Ist mindestens einer von diesen ein isolierter Knoten, so ist die Bedingung (7) aus 2.3 erfüllt (für die betreffenden zwei Knoten) und ist weiter keiner der beiden ein isolierter Knoten, so sind zwei Fälle möglich. Entweder $x, y \in F_\iota$, sodass (7) wieder erfüllt ist, oder $x \in F_\iota$, $y \in F_\varkappa$, $\iota \neq \varkappa$, was aber bedeutet, dass mindestens ein $z \in F_\iota$, $z \neq x$,

[11]) Einige dieser Ergebnisse über den Zusammenhang sind wohl bekannt (siehe D. König [5]). Sie werden hier nur für den allgemeinen Fall unserer Auffassung des Graphenbegriffs, also auch für die quasi- bzw. teilweise geordneten Mengen abgeleitet.

existiert, für den die Gleichheit $f[x, z] + f[z, x] = 1$ erfüllt ist. Dann gilt nach 4.1 $f[y, z] = f[z, y] = 0$, womit die Bedingung (7) für jedes Paar der Knoten x, y bewiesen wird. Also muss nach 2.3 $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ einfach sein.

4.9. Folgerung. *Die Kardinalsumme der einfachen Königschen Graphen ist wieder ein einfacher Königscher Graph.*

4.10. Satz. *Die Kardinalsumme der homomorphen Bilder $G_\iota(g_\iota)$ der Graphen $F_\iota(f_\iota), \iota \in I$ ist ein homomorphes Bild der Kardinalsumme $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$, d. h.*

$$F_\iota(f_\iota) \to G_\iota(g_\iota) \quad \text{für alle} \quad \iota \in I \Rightarrow \sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota) \to \sum_{\iota \in I} G_\iota(g_\iota)\,. \tag{15}$$

Beweis. Es sei φ_ι, $\iota \in I$, der entsprechende Homomorphismus, der $F_\iota(f_\iota)$ auf $G_\iota(g_\iota)$ abbildet. Dann ist die Abbildung φ der Menge $\bigcup_{\iota \in I} F_\iota$ auf die Menge $\bigcup_{\iota \in I} G_\iota$, die durch die Beziehung $x \in F_\iota \Rightarrow \varphi(x) = \varphi_\iota(x)$ definiert ist, nach 4.1 ein Homomorphismus, der den Graphen $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ auf $\sum_{\iota \in I} G_\iota(g_\iota)$ abbildet.

4.11. Satz. *Es sei $G_\iota(g_\iota)$ ein einfacher Graph, der dem Königschen Graphen $F_\iota(f_\iota)$ für $\iota \in I$ angehört. Dan ist die Kardinalsumme $\sum_{\iota \in I} G_\iota(g_\iota)$ ein einfacher Graph, der der Kardinalsumme $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ angehört.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus 4.9, 4.10, und 2.7.

4.12. Folgerung. *Die homomorphe Charakteristik der Kardinalsumme von Königschen Graphen ist eine blosse Zusammenfassung der homomorphen Charakteristiken einzelner Graphen.*

4.13. Satz. *Es seien $F_\iota(f_\iota)$, $G_\varkappa(g_\varkappa)$, $\iota \in I$, $\varkappa \in K$ zusammenhängende Graphen. Dann gilt*

$$\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota) \to \sum_{\varkappa \in K} G_\varkappa(g_\varkappa) \Rightarrow \text{ es gibt eine schlichte Abbildung } \varphi \text{ der Indizenmenge } I \text{ auf } K, \text{ sodass } F_\iota(f_\iota) \to G_{\varphi(\iota)}(g_{\varphi(\iota)}) \text{ für alle } \iota \in I \text{ gilt.}$$

Beweis. Ist ψ ein Homomorphismus, der $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ auf $\sum_{\varkappa \in K} G_\varkappa(g_\varkappa)$ abbildet so muss nach 3.1, 4.7 und nach der Voraussetzung $\psi\{F_\iota(f_\iota)\} \equiv G_\varkappa(g_\varkappa)$ für ein geeignet gewähltes $\varkappa \in K$ gelten. Damit ist eine schlichte Abbildung φ der Indizenmenge I auf K bestimmt, weil die Kardinalsumme von mindestens zwei (nichtleeren) Graphen nach 4.5 nicht zusammenhängend sein kann.

Nach 4.7 kann man jeden Graphen $F(f)$ in der Form $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ ausdrücken, wo $F_\iota(f_\iota)$ zusammenhängende Graphen sind. Wenn wir also in (16) auf der linken Seite statt des Homomorphismus den Isomorphismus voraussetzen werden, so folgt aus 4.13 die Eindeutigkeit der Zerlegung in zusammenhängende Summanden der Kardinalsumme (bis auf Isomorphismus zwischen den Summanden).

4.14. Satz. *Es sei* **X**- *eine der Eigenschaften der Relation* **R**-, **aR**-, **S**-, **antiS**-, **aS**- *und* **T**-. *Dann ist die Kardinalsumme der* **X**-*Graphen wieder ein* **X**-*Graph.*

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus 4.1 und aus den Definitionen der einzelnen Eigenschfaten.

5. Kardinalprodukt

Unter dem Kardinalprodukt der Graphen verstehen wir einen Graphen, der bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt ist. In der folgenden Definition setzen wir voraus, dass die betreffenden Graphen paarweise disjunkt sind.

5.1. Definition. *Es seien die Graphen* $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$, *gegeben. Den Graphen* $F(f)$, *wo* $F = \mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota$ *und* f *folgende Bedingung erfüllt*

$$(\ldots, x_\iota, \ldots), (\ldots, y_\iota, \ldots) \in F \Rightarrow \{f[(\ldots, x_\iota, \ldots), (\ldots, y_\iota, \ldots)] = 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow f_\iota[x_\iota, y_\iota] = 1 \quad \text{für jedes } \iota \in I\,, \tag{17}$$

nennen wir das Kardinalprodukt $\mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ *der Graphen* $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$. *Ist die Indizenmenge* I *endlich, bezeichnen wir die Operation des Kardinalproduktes mit dem Symbol* $\times$.

Im endlichen Falle des Kardinalproduktes $\mathsf{P}_{i=1}^{m} F_i(f_i)$, kann man seine Relation f durch die Bedingung

$$f[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, x_n)] = \prod_{i=1}^{m} f_i[x_i, y_i] \tag{18}$$

definieren.

5.2. Satz. *Das Kardinalprodukt der Graphen ist allgemein kommutativ und assoziativ und mit der Kardinalsumme auch vollständig distributiv, d. h. es gilt*

$$\mathsf{P}_{\iota \in I}\Big[\sum_{\varkappa_\iota \in I_\iota} F_{\iota,\varkappa_\iota}(f_{\iota,\varkappa_\iota})\Big] \longleftrightarrow \sum_{\varphi \in \Phi} \Big[\mathsf{P}_{\iota \in I} F_{\iota,\varphi(\iota)}(f_{\iota,\varphi(\iota)})\Big]\,, \tag{19}$$

wo I_ι *die Menge aller zweiten Indizen* $\varkappa_\iota$ *in Paaren* $\iota, \varkappa_\iota$ *ist und* Φ *ist die Menge aller eindeutigen Funktionen* φ, *die jedem* $\iota \in I$ *irgendein* $\varphi(\iota) \in I_\iota$ *zuordnen.*[12])

Beweis. Die Kommutativität und die Assoziativität des Kardinalproduktes folgt unmittelbar aus der Definition 5.1. Wir wollen nur die Formel (19) beweisen. Es sei $F(f)$ bzw. $G(g)$ der Graph, der auf der linken bzw. rechten Seite in (19) steht. Nach der Voraussetzung, dass die Graphen $F_{\iota,\varkappa_\iota}(f_{\iota,\varkappa_\iota})$ paarweise disjunkt sind, können wir $F = G$ voraussetzen. Ist nun $x, y \in F$, d. h. $x = (\ldots, x_{\iota,\varkappa_\iota}, \ldots)$, $y = (\ldots, y_{\iota,\lambda_\iota}, \ldots)$, wo $x_{\iota,\lambda_\iota} \in F_{\iota,\varkappa_\iota}$, $y_{\iota,\lambda_\iota} \in F_{\iota,\lambda_\iota}$, so gilt $f[x, y] = 1$ dann und nur dann, wenn $\varkappa_\iota = \lambda_\iota$ und $f_{\iota,\lambda_\iota}[x_{\iota,\varkappa_\iota}, y_{\iota,\varkappa_\iota}] = 1$ für jedes $\iota \in I$ gilt (nach 4.1 und 5.1). Dann gibt es aber eine Funktion $\varphi \in \Phi$, für

[12]) Über die vollständige Distributivität siehe G. Birkhoff [1], S. 233 bzw. 208.

die $\varphi(\iota) = \varkappa_\iota$, $\iota \in I$, gilt, sodass $f_{\iota,\varphi(\iota)}[x_{\iota,\varphi(\iota)}, y_{\iota,\varphi(\iota)}] = 1$ für jedes $\iota \in I$, d. h. $g[x, y] = 1$ gelten muss und auch umgekehrt.

Die Rolle der Einser bei dem Kardinalprodukt spielt der Einselgraph.

5.3. Folgerung. *Es sei $A^{(m)}$ bzw. $B^{(n)}$ eine Inzidenzmatrix des endlichen Graphen $F(f)$ bzw. $G(g)$. Dann ist jede Inzidenzmatrix $P^{(p)}$ des Kardinalproduktes $F(f) \times G(g)$ vollständig äquivalent mit dem direkten* (Kroneckerschen) *Produkte beider Inzidenzmatrizen $A^{(m)}$, $B^{(n)}$, d. h. es gilt*

$$P^{(p)} \approx A^{(m)} \times B^{(n)}, \quad wo \quad p = mn\,.\text{[13]} \tag{20}$$

Beweis. Die Behauptung folgt nach 5.1 aus der Definition des Kroneckerschen Produktes und aus der vollständigen Äquivalenz der Inzidenzmatrizen der isomorphen Graphen.

Aus 5.3 folgt unmittelbar, dass ein endlicher Graph bezüglich des Kardinalproduktes dann und nur dann *unzerlegbar* ist, wenn keine seiner Inzidenzmatrizen als direktes Produkt von mindestens zwei Inzidenzmatrizen des Grades >1 betrachtet werden können. Also jeder Graph, dessen Mächtigkeit eine Primzahl ist, ist unzerlegbar.

Es ist weiter klar, dass man jeden (endlichen) Graphen als Kardinalprodukt von unzerlegbaren Graphen ausdrücken kann. Zum Unterschied von der analogen Zerlegung bezüglich der Kardinalsumme, ist die Zerlegung bezüglich des Kardinalproduktes im allgemeinen nicht eindeutig (bis auf Isomorphismus der entsprechenden Faktoren) bestimmt, was aus folgendem Beispiele folgt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.\text{[14]}$$

5.4. Satz. *Das Kardinalprodukt der homomorphen Bilder $G_\iota(g_\iota)$ der Graphen $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$, ist das homomorphe Bild des Kardinalproduktes $\mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$, d. h. es gilt*

$$F_\iota(f_\iota) \to G_\iota(g_\iota) \quad \text{für jedes } \iota \in I \Rightarrow \mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota) \to \mathsf{P}_{\iota \in I} G_\iota(g_\iota)\,. \tag{21}$$

Beweis. Es seien φ_ι, $\iota \in I$ die Homomorphismen, die $F_\iota(f_\iota)$ auf $G_\iota(g_\iota)$ abbilden, und es sei φ die Abbildung der Menge $\mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota$ auf die Menge $\mathsf{P}_{\iota \in I} G_\iota$, die

[13]) Durch das Symbol $\times$ wird das direkte (Kroneckersche) Produkt der Matrizen bezeichnet (siehe A. I. Malcev: *Osnovy linejnoj algebry*, S. 209). Das direkte Produkt der Matrizen ist nicht kommutativ. Für die Inzidenzmatrizen folgt aus 5.2 die Kommutativität des direkten Produktes bezüglich der vollständigen Äquivalenz statt der Gleichheit der Inzidenzmatrizen.

[14]) In diesem Punkte unterscheidet sich das Kardinalprodukt vom Produkte der Graphen im Sabidussischen Sinne (siehe G. O. Sabidussi: *On a multiplication of graphs*, S. 49, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956)), trotzdem die Menge der nichtisomorphen Graphen $F(f)$, kard $F < \aleph_n$) auch einen kommutativen „Semiring" mit Null- und Einselelement, bezüglich der Operationen der Kardinalsumme und des Kardinalproduktes, bildet (vgl. weiter J. Hashimoto [4]).

folgendermassen definiert ist: $\varphi(\ldots, x_\iota, \ldots) = (\ldots, \varphi_\iota(x_\iota), \ldots)$, wo $x_\iota \in F_\iota$ und $(\ldots, x_\iota, \ldots) \in \underset{\iota \in I}{\mathsf{P}} F_\iota$. Ist nun f bzw. g die Relation des Kardinalproduktes $\underset{\iota \in I}{\mathsf{P}} F_\iota$ bzw. $\underset{\iota \in I}{\mathsf{P}} G_\iota$, so gilt nach 5.1 und 1.1

$$f[(\ldots, x_\iota, \ldots), (\ldots, y_\iota, \ldots)] = 1 \Leftrightarrow f_\iota[x_\iota, y_\iota] = 1 = g_\iota[\varphi_\iota(x_\iota), \varphi_\iota(y_\iota)]$$
$$\text{für jedes } \iota \in I \Leftrightarrow g[(\ldots, \varphi_\iota(x_\iota), \ldots), (\ldots, \varphi_\iota(y_\iota), \ldots)] = 1 .$$

Daraus folgt sofort $f[(\ldots, x_\iota, \ldots), (\ldots, y_\iota, \ldots)] = g[\varphi(\ldots, x_\iota, \ldots), \varphi(\ldots, y_\iota, \ldots)]$ für jede $(\ldots, x_\iota, \ldots), (\ldots, y_\iota, \ldots) \in \underset{\iota \in I}{\mathsf{P}} F_\iota$, d. h. φ ist ein Homomorphismus.

5.5. Satz. *Es seien $F_\iota\ (f_\iota)$, $\iota \in I$ einfache Graphen, für deren Knoten gilt, dass weder ihr linker noch ihr rechter Grad gleich Null ist. Dann ist das Kardinalprodukt $\underset{\iota \in I}{\mathsf{P}} F_\iota(f_\iota)$ ein einfacher Graph.*

Beweis. Setzen wir umgekehrt voraus, dass das Kardinalprodukt $F(f) \equiv \underset{\iota \in I}{\mathsf{P}} F_\iota(f_\iota)$ nicht einfach ist, d. h. dass es nach 2.3 zwei solche Knoten $a = (\ldots, a_\iota, \ldots)$, $b = (\ldots, b_\iota, \ldots)$, $a \neq b$, des Kardinalproduktes $F(f)$ gibt, dass $f[a, x] = f[b, x]$ und auch $f[x, a] = f[x, b]$ für alle $x \in F$ gilt. Dann gibt es einen Index $\iota \in I$, für den $a_\iota \neq b_\iota$ ist. Aus der Einfachheit des Graphen $F_\iota(f_\iota)$ folgt nach 2.3 die Existenz des Knoten $c_\iota \in F_\iota$, für den mindestens eine der folgenden Ungleichheiten $f_\iota[a_\iota, c_\iota] \neq f_\iota[b_\iota, c_\iota]$, $f_\iota[c_\iota, a_\iota] \neq f_\iota[c_\iota, b_\iota]$ gilt. Wir können annehmen, dass z. B. $f_\iota[a_\iota, c_\iota] = 1$ und $f_\iota[b_\iota, c_\iota] = 0$ gilt. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: entweder gibt es zu dem Index $\varkappa \in I$, $\varkappa \neq \iota$, einen Knoten $c_\varkappa \in F_\varkappa$, für den $f_\varkappa[a_\varkappa, c_\varkappa] = 1$ ist, sodass auch $f[a, c] = 1$, wo $c = (\ldots, c_\iota, \ldots)$, gilt, was aber ein Widerspruch ist, denn es muss $f[b, c] = 0$ sein; oder gibt es einen Index $\varkappa \in I$, $\varkappa \neq \iota$, für den $f_\varkappa[a_\varkappa, y_\varkappa] = 0$ für alle $y_\varkappa \in F_\varkappa$ gilt, was unserer Voraussetzung über die Graphen $F_\iota(f_\iota)$ widerspricht. Ähnlich kommen wir zu einem Widerspruch auch in den übrigen Fällen. Also muss das Kardinalprodukt einfach sein.

Es sei nun mit $l(x)$ bzw. mit $r(x)$ der linke bzw. der rechte Grad des Knoten x der Graphen $F(f)$ bezeichnet. Dann nennen wir den Graphen $F(f)$ *halbregulär* bzw. *regulär*, wenn die Grade seiner Knoten folgende Bedingung erfüllen

$$x, y \in F \Rightarrow l(x) = l(y) \quad \text{und} \quad r(x) = r(y) \tag{23}$$

bzw.

$$x, y \in F \Rightarrow l(x) = l(y) = r(x) \doteq r(y) . \tag{23'}$$

5.6. Satz. *Für die Grade der Knoten des Kardinalproduktes $\underset{\iota \in I}{\mathsf{P}} F_\iota(f_\iota)$ der Graphen $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$, gilt*

$$x = (\ldots, x_\iota, \ldots) \in \underset{\iota \in I}{\mathsf{P}} F_\iota(f_\iota),\ x_\iota \in F_\iota \Rightarrow l(x) = \prod_{\iota \in I} l(x)_\iota,\ r(x) = \prod_{\iota \in I} r(x_\iota) . \tag{24}$$

5.7. Folgerung. *Das Kardinalprodukt der halbregulären bzw. der regulären Graphen ist wieder ein halbregulärer bzw. regulärer Graph.*