ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

2

83

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 83 • Č. 2 • STR. 133—256 • PRAHA 20. V. 1958

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky"*)

SVAZEK 83 (1958)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd
Praha II, Žitná 25

OBSAH

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 83 * PRAHA, 20. V. 1958 * ČÍSLO 2

ZUR THEORIE DER GRAPHEN

KAREL ČULÍK, Brno

DT: 513.19

(Eingelangt am 25. VIII. 1956)

Die Theorie der Graphen, die in der Monographie von D. König [5] enthalten ist, ist mit den modernen algebraischen Theorien nicht gleichwertig. Ihre Reichhaltigkeit ist durch die Mannigfaltigkeit der untersuchten Eigenschaften der Graphen bewirkt. Die Definition des Graphen als einer Menge, auf der eine binäre Relation definiert ist (siehe z. B. R. D. Luce: *Networks satisfying minimality conditions*, Amer. Jour. Math. *75* (1953), 825–838 oder P. Turán [12], O. Ore [10] u. a.), ermöglicht auf einfache und natürliche Weise nicht nur die bekannten Grundbegriffe der Graphentheorie (Teilgraph, Isomorphismus, Summe und Zusammenhang), aber auch die übriggebliebenen Grundbegriffe einer algebraischen Theorie (Homomorphismus, Einfachheit, direktes Produkt, Faktorgraph u. a.) einzuführen. Dadurch wird die Theorie der Graphen in die modernen algebraischen Theorien eingereiht. Z. B. die Theorie der nichtgerichteten Graphen wird als eine beigeordnete Theorie den Theorien der verschiedenartig geordneten Mengen gleichgestellt. Die erste kann als die Theorie der Mengen mit symmetrischer und die anderen als die Theorien der Mengen mit transitiven Relationen betrachtet werden. Alle diese Theorien sind der Theorie der (allgemeinen) Graphen untergeordnet, die sich in einigen Punkten (Einfachheit, direktes Produkt) von der Theorie der Relationen unterscheidet, wie diese in der mathematischen Logik gebildet wurde (siehe A. Mostowski [6] bzw. A. Tarski [11]).

In folgenden Abschnitten werden algebraische Grundbegriffe der (allgemeinen) Graphentheorie (analogisch z. B. zur Gruppentheorie) eingeführt. Zwischen diesen Grundbegriffen werden einige Beziehungen abgeleitet. Durch Spezialisierung der Graphenbedingungen entstehen einige neue Grundbegriffe (Homomorphismus, Einfachheit u. a.) und Sätze der Theorie der quasi- bzw. auch der teilweisegeordneten Mengen und der anderen ähnlichen Gebilde (vgl. G. Birkhoff [1], M. Richardson [8], R. D. Luce u. a.).

Einleitung

Die zahlreichen Fragen über Graphen, Konfigurationen, endliche Geometrien, über die Mengen mit spezieller Relation und die verschiedenartigen Fragen kombinatorischen Charakters, die heute in gewissem Masse getrennt untersucht werden, lassen sich mindestens in den Hauptrichtungen mit Hilfe der algebraischen Methoden beschreiben und durch die Theorie der Mengen mit einer binären Relation vereinigen.

Die wichtigsten der bekannten Eigenschaften der binären Relation sind die Reflexivität, die Symmetrie und die Transitivität, die wir mit den Anfangsbuchstaben **R**-, **S**- und **T**- bezeichnen werden. Von diesen Eigenschaften sind durch verschiedenartige Abänderungen weitere Eigenschaften der Relationen gebildet worden, z. B. die Areflexivität — **aR** (siehe auch die Irreflexivität bei M. Richardson [9]), Antisymmetrie — **antiS**, Asymmetrie — **aS** (siehe M. Richardson [8]) und andere (siehe G. Birkhoff [1]). Am häufigsten studiert wurden die Mengen mit **RT**-Relationen, etwa noch mit weiteren Eigenschaften, denen auch die Monographie von G. Birkhoff [1] gewidmet ist. Für das Studium der nichtgerichteten Graphen, der Konfigurationen und der verschiedenartigen Fragen der kombinatorischen Geometrie und Topologie sind die **S**-Relationen wichtig. Vor allem ist die Inzidenz eine **S**-Relation, die in der Geometrie, entweder als **RS**-Relation (siehe S. Gorn: *On incidence geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940)), oder als **aRS**-Relation (siehe D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, 7. Aufl.) auftreten kann. Von speziellen Gesichtspunkten aus wurden auch allgemeinere Relationen, bzw. Mengen mit diesen Relationen untersucht (siehe z. B. die Disjunktion und die Polarität bei G. Birkhoff [1], allgemeine **aR**-Relation bei M. Richardson [9] bzw. schon bei J. v. Neumann-O. Morgenstern: *Theory of games and economic behavior*, allgemeine **R**-Relation bei M. M. Day: *Arithmetic of ordered systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 1—43 und hauptsächlich die „gerichteten" Graphen bei O. Ore [10]).

Zum Unterschied von der Theorie der Relationen der mathematischen Logik interessieren uns die Beschreibung, die Eigenschaften und die Beziehungen zwischen den Mengen selbst (auf denen eine binäre Relation definiert ist), obwohl der Zusammenhang zwischen der Theorie der Mengen mit Relation und Theorie der Relationen (mit ihren Feldern) selbst natürlich sehr eng sein muss. Den Begriff der Relation halten wir hier für keinen Grundbegriff.

Eine binäre Relation ϱ, die auf der Menge $F \neq \emptyset$ definiert ist, ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $F \times F$, also $\varrho \subset F \times F$. Dan kann man über *die charakteristische* Funktion f der Relation ϱ (bezüglich $F \times F$) sprechen. Es gilt also $(x, y) \in \varrho \Leftrightarrow x\varrho y \Leftrightarrow f[x, y] = 1$. Weiter werden wir diese bequemere und mehr übersichtlichere Funktionausdrucksweise zur Beschreibung der Relation auf der gegebenen Menge benützen. Wir wollen auch nicht zwischen der charakteristischen Funktion einer Relation und der Relation selbst (auf gegebener Menge) unterscheiden. Mit dem Symbol $F(f)$ bezeichnen wir also die Menge F, auf der eine Relation (bzw. ihre charakteristische Funktion) f definiert ist. Es ist klar, dass das Feld der Relation f (siehe A. MOSTOWSKI [6], S. 130) nur eine Teilmenge der Menge F ist. Zum Wortausdruck des Umstandes $f[x, y] = 1$ wollen wir sagen „*x bindet y*" (statt der Benennung „*dominates*", die bei M. Richardson [9] benützt wird und in der man mehr transitive und asymmetrische Bedeutung fühlt).

1. Begriff des Graphen

Unter einem *Graphen* $F(f)$ verstehen wir eine nichtleere Menge F mit einer binären Relation (bzw. mit ihrer charakteristischen Funktion) f. Wir sagen, dass auf der Menge F ein *Graph* $F(f)$ *mit der Relation* f definiert wird. Die leere Menge $\emptyset$ nennen wir den leeren Graphen. Soweit nichts anders gesagt wird, versteht man unter einem Graphen immer einen nichtleeren Graphen. Die Mächtigkeit kard F der Menge F heisst *die Mächtigkeit des Graphen* $F(f)$.

Ein Graph mit einer **S**- bzw. mit einer **antiS**-Relation heisst *ein nichtgerichteter* bzw. *gerichterer* Graph (zum Unterschied von O. Ore [10], der unter einem gerichteten Graphen unseren allgemeinen Graphen versteht). Ein Graph mit **RT**-Relation bzw. mit **aS**-Relation heisst *quasi-* bzw. *schwach-geordnete Menge*. Ein Graph mit **R antiST**-Relation bzw. mit **aST**-Relation ist eine *teilweise geordnete Menge* im Sinne G. Birkhoff's bzw. B. DUSHNIK'S und E. W. MILLER'S. Ein Graph mit **aR**-Relation wird bei D. KÖNIG [5] als ein Graph *im engeren Sinne* bezeichnet u. s. w.

Die Elemente der Menge F des Graphen $F(f)$ heissen *Knoten* des Graphen $F(f)$. Ein geordnetes Paar (x, y), $x \neq y$ bzw. $x = y$, der Knoten aus $F(f)$, von denen der erste Knoten x den zweiten y in $F(f)$ bindet, d. h. es gilt $f[x, y] = 1$, heisst eine *Kante* bzw. eine *Schlinge* des Graphen $F(f)$. In unserer Auffassung des Graphenbegriffes sind beide Begriffe die der Kante und die der Schlinge entbehrlich, weil sie nicht mehr in die Grungbegriffe der Graphentheorie fallen. Diese Vereinfachung (siehe auch z. B. G. A. DIRAC: *The structure of k-chromatic graphs*, Fund. Math. 40 (1953), P. TURÁN [12], O. Ore [10], u. a.) bedeutet aber, dass man sich nur auf Graphen in der Auffassung von D. König beschränkt, die folgende Bedingung erfüllen müssen: *zu jedem geordneten Paare der Knoten* x, y *gibt es höchstens eine Kante oder Schlinge* (x, y). Man sieht aber sofort, dass die übriggeblieben „Königschen" Graphen mit Hilfe der oben definierten Graphen auch beschrieben werden können und zwar so, dass jeder Kante und jeder Schlinge eines geeignet gewählten Graphen eine geeignete Mächtigkeit (wie die Multiplizität dieser Kante bzw. Schlinge) zugeordnet wird.

Ein Knoten x des Graphen $F(f)$ heisst *isoliert*, wenn $f[x, y] = f[y, x] = 0$ für jeden $y \in F$, $y \neq x$, gilt. Es gibt also zwei Arten von isolierten Knoten, u. zw. *isolierte Knoten x mit Schlinge* (für $f[x, x] = 1$) und *isolierte Knoten ohne Schlinge* (für $f[x, x] = 0$). Den Graphen, der keine isolierten Knoten enthält, bezeichnen wir als den *Königschen Graphen*[1]). Endlich wollen wir die Graphen, deren Mächtigkeit gleich 1 ist, und den leeren Graphen, *triviale* Graphen nennen. Der triviale Graph, der einen einzigen Knoten mit Schlinge enthält, heisst *Einselgraph*.

Es sei a ein Knoten des Graphen $F(f)$. Die Menge $L(a)$ bzw. $R(a)$ aller Knoten $x \neq a$, für die $f[x, a] = 1$ bzw. $f[a, x] = 1$, nennen wir die *linke* bzw. *rechte Umgebung* des Knoten a in $F(f)$ und die Mächtigkeit kard $L(a)$ bzw. kard $R(a)$ nennen wir den *linken* bzw. *rechten Grad* dieses Knoten in $F(f)$. Die Vereinigung $L(A) \cup R(A)$ heisst die *Umgebung* und die Summe kard $L(a) +$ $+$ kard $R(a)$ heisst der *Grad* des Knoten a in $F(f)$. Bei den nichtgerichteten Graphen ist es üblich nur die Hälfte dieses Grades als den Grad des Knoten zu betrachten. Ähnliche Begriffe kann man auch allgemein für jede Teilmenge $A \subset F$ einführen (vgl. O. Ore [10]).

1.1. Definition. *Eine Abbildung φ eines Graphen $F(f)$ auf einen Graphen $G(g)$, die die Bedingung*

$$x, y \in F \Rightarrow g[\varphi(x), \varphi(y)] = f[x, y] \tag{1}$$

erfüllt, heisst ein Homomorphismus.[2]) *Der Graph $F(f)$ bzw. $G(g)$ heisst das homomorphe Vorbild bzw. Bild des Graphen $G(g)$ bzw. $F(f)$ in der Abbildung φ, was man mit $F(f) \rightarrow G(g)$ bezeichnet. Wenn die Abbildung φ schlicht ist, so heisst sie Isomorphismus und man schreibt $F(f) \leftrightarrow G(g)$.*

Die Relation $\rightarrow$ ist reflexiv und transitiv und die Relation $\leftrightarrow$ ist eine Äquivalenzrelation, sodass wir über Klassen der paarweise isomorphen Graphen sprechen können.

Zwei Graphen $F(f)$ und $F(f^*)$ nennen wir zueinander *komplementär*, wenn für ihre Relationen $f[x, y] \neq f^*[x, y]$ für alle $x, y \in F$ gilt. Den Graphen, in dem jeder Knoten x jeden anderen Knoten y, $y \neq x$ bindet, nennen wir *vollständig* und seinen komplementären Graphen *frei*. Der Graph $F(\tilde{f})$ heisst der *konverse* Graph zu $F(f)$, wenn seine Relation folgendermassen definiert ist: $\tilde{f}[x, y] =$ $= f[y, x]$ für alle $x, y \in F$.[3])

---

[1]) Diese Bedingung drückt den Inhalt des einzigen Königschen Axioms (siehe D. König [5], S. 2) aus. Im Falle eines „Königschen Graphen" $F(f)$ ist die Menge F mit dem Feld der Relation f identisch (siehe A. Mostowski [6], S. 130).

[2]) Dieser Homomorphismus ist stärker als der bei A. Mostowski [6], S. 197 und auch als der übliche Homomorphismus in der Algebra.

[3]) Über weitere Eigenschaften der komplementären und konversen Graphen siehe A. Mostowski [6], S. 97, 119 u. f. Im Falle einer teilweise geordneten Menge wurde von G. Birkhoff [1], S. 19 der konverse Graph dualer Graph benannt.

Durch eine *Realisation* des Graphen $F(f)$ verstehen wir jeden Graphen $G(g)$, der isomorph mit $F(f)$ ist und dessen Knoten und auch dessen Relation in irgendeiner speziellen Weise gegeben sind. Zur Veranschaulichung der Graphen, die genug kleine Mächtigkeit haben, dienen uns die üblichen *Ebenerealisationen.*[4])

Bei den endlichen Graphen führt uns der Begriff der Inzidenzmatrix des Graphen zu einer nützlichen Representation. Die Relation f des Graphen $F(f)$, kard $F = n$ (wo n eine natürliche Zahl ist), ist nämlich durch eine n-reihige Quadratmatrix $A^{(n)} = \|a_{ij}\|$, wo $a_{ij} = f[x_i, x_j]$, $x_i, x_j \in F$, für alle $i, j = 1, 2, \ldots, \ldots, n$, bestimmt. Jede solche Matrix heisst die *Inzidenzmatrix des Graphen* $F(f)$. Jede Quadratmatrix $A^{(n)} = \|a_{ij}\|$, die nur von Nullen und Einsern gebildet ist, ist also eine Representation eines endlichen Graphen $F(f)$, dessen jeder Knoten gerade einer Reihe und zugleich der gleichnamigen Spalte entspricht, sodass die Relation f durch Beziehung $f[x_i, x_j] = a_{ij}$ bestimmt ist. Jede zwei Inzidenzmatrizen desselben Graphen unterscheiden sich nur in der Anordnung ihrer Reihen und Spalten, aber in solcher Weise, dass bei dem Wechsel der i-ten mit der j-ten Reihe zugleich auch die i-te mit der j-ten Spalte umgewechselt werden muss und umgekehrt. Zwei Matrizen $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, deren eine aus der anderen durch vorige Abänderung gebildet werden kann, heissen *vollständig äquivalent* und man schreibt $A^{(n)} \approxeq B^{(n)}$.

Es ist klar, dass die Inzidenzmatrizen der isomorphen endlichen Graphen vollständig äquivalent sind, sodass den Klassen isomorpher Graphen die Klassen vollständig äquivalenter Inzidenzmatrizen eindeutig entsprechen. Die Anzahl der nichtisomorphen endlichen Graphen kann mit Hilfe der entsprechen den Inzidenzmatrizen bestimmt werden. An der Inzidenzmatrix kann man leicht erkennen, welche Eigenschaften die Relation des entsprechenden Graphen besitzt.

1.2. Satz. *Bezeichnet* **X**- *eine der Eigenschaften* **R**-, **aR**-, **S**-, **aS**-, **T**- *der Relation, so ist ein homomorphes Bild und Vorbild eines* **X**-*Graphen wieder ein* **X**-*Graph. Ein homomorphes Bild eines* **antiS**-*Graphen ist auch ein* **antiS**-*Graph.*

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus 1.1.

Es ist klar, dass ein homomorphes Vorbild eines **antiS**-*Graphen* kein **antiS**-Graph sein muss. Aus 1.2 folgt, dass ein homomorphes Bild und Vorbild eines nichtgerichteten Graphen wieder ein nichtgerichteter Graph ist und dasselbe gilt auch für die quasi- und schwach-geordneten Mengen. Betrachten wir die

---

[4]) Für verschiedene Knoten x, y wählen wir verschiedene Punkte der Ebene; zwei Punkte verbindet man mit einem einfachen Jordanschen Bogen dann und nur dann, wenn für die entsprechenden Knoten x, y die Behauptung entweder x bindet y oder y bindet x gilt. Im ersten Falle bezeichnen wir den Bogen (in seiner Mitte) mit einem Pfeil, der von x nach y gerichtet ist und umgekehrt im zweiten Falle. Wenn beide Fälle zusammenzutreffen, lassen wir den Bogen ohne Pfeil.

teilweise Ordnung als eine **aST**-Relation, so gilt die vorige Behauptung auch für die teilweise-geordneten Mengen (anderenfalls gilt sie nur über die homomorphen Bilder).

1.3. Definition. *Ein Graph $G(g)$ heisst Teilgraph (oder Subgraph) des Graphen $F(f)$, wenn er die Bedingungen*

$$G \subset F \quad \text{und} \quad x, y \in G \Rightarrow g[x, y] \leqq f[x, y] \tag{2}$$

erfüllt. Der Teilgraph $G(g)$ heisst satt, wenn in (2) *stets das Gleichheitszeichen gilt.*

Durch jede Untermenge der Knoten eines gegebenen Graphen wird ein einziger satter Teilgraph, aber im allgemeinen mehrere Teilgraphen bestimmt, wobei die gewählte Untermenge die Menge aller seiner Knoten ist. Eine Inzidenzmatrix des satten Teilgraphen ist vollständig äquivalent mit einer bestimmten Submatrix der Inzidenzmatrix des gegebenen (endlichen) Graphen. Im Falle einer nichtsatten Teilgraphen (mit denselben Knoten) muss man in dieser Submatrix einige Einser durch Nullen ersetzen, um eine Inzidenzmatrix des betreffenden Teilgraphen zu bilden.

Man kann annehmen, dass der leere Graph ein Teilgraph jedes Graphen ist. Das System aller satten Teilgraphen eines gegebenen Graphen bildet eine Boolesche Algebra mit Verbandsordnung „*ein satter Teilgraph sein*", die isomorph mit der Algebra aller Untermengen einer Menge ist. Das System aller Teilgraphen mit Verbandsordnung „*ein Teilgraph sein*" bildet auch eine Boolesche Algebra, die die vorige als eine Subalgebra enthält.[5]) Die Boolesche Algebra aller Teilgraphen des Graphen $F(f)$ enthält die Boolesche Subalgebra aller Teilgraphen der Form $F(g)$, die im Falle ,dass $F(f)$ ein vollständiger Graph mit **R**-Relation ist, mit der „*proper relation algebra*" (siehe A. Tarski [11]) identisch ist. Damit ist der Zusammenhang zwischen der Theorie der Graphen und der Theorie der binären Relationen beschrieben.

2. Einfachheit

Unter einer Zerlegung $\bar{F}$ eines Graphen $F(f)$ verstehen wir immer eine Zerlegung auf der Menge aller seiner Knoten.[6])

[5]) Beim Supremum bzw. Infimum bildet man neben der mengentheoretischen Vereinigung bzw. des Durchschnittes der zugegörigen Mengen von Knoten noch die kleinste Erweiterung bzw. die grösste Partialfunktion der zugehörigen charakteristischen Funktionen (der Relationen) der betreffenden Teilgraphen (siehe A. A. Mostovski - K. Kuratowski [7], S. 58).

[6]) Die Bezeichnungen und die Terminologie aus der Theorie der Zerlegungen auf der Menge benützen wir nach O. Borůvka [2].

Wenn der Graph $G(g)$ das homomorphe Bild des Graphen $F(f)$ im Homomorphismus φ ist, so wird die sogenannte *erzeugende Zerlegung* $\bar{F}$ des Graphen $F(f)$ durch folgende Äquivalenz

$$x, y \in F \Rightarrow \{x \sim y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)\} \tag{3}$$

definiert. Auf jedem (nichtleeren) Graphen existiert mindestens eine erzeugende Zerlegung, nämlich die Minimalzerlegung (d. h. die Zerlegung $\bar{F}$, für die $x \in F \Rightarrow \{x\} \in \bar{F}$ gilt).

2.1. Satz. *Eine Zerlegung* $\bar{F}$ *des Graphen* $F(f)$ *ist dann und nur dann seine erzeugende Zerlegung, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$X, Y \in \bar{F} \Rightarrow f[x, y] = \text{Konst für jedes } x \in X, y \in Y\,. \tag{4}$$

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung (4) folgt unmittelbar aus (3) und (1). Sei also eine Zerlegung $\bar{F}$ des Graphen $F(f)$ gegeben, die die Bedingung (4) erfüllt. Auf dieser Zerlegung kann man einen Graphen $\bar{F}(\bar{f})$ folgendermassen definieren

$$X, Y \in \bar{F} \Rightarrow \bar{f}[X, Y] = f[x, y] \quad \text{wo} \quad x \in X, y \in Y\,. \tag{5}$$

Wir definieren nun die Abbildung φ der Menge F auf die Menge $\bar{F}$ durch die Beziehung

$$x \in X, X \in \bar{F} \Rightarrow \varphi(x) = X\,, \quad \text{d. h.} \quad x \in \varphi(x)\,. \tag{6}$$

Dann gilt offenbar $\bar{f}[\varphi(x), \varphi(y)] = \bar{f}[X, Y] = f[x, y]$ für alle $x, y \in F$, sodass nach (1) die Abbildung φ ein Homomorphismus ist.

Den Graphen $\bar{F}(\bar{f})$, der auf der erzeugenden Zerlegung $\bar{F}$ des Graphen $F(f)$ durch die Bedingung (5) definiert ist, nennen wir den *Faktorgraphen* des Graphen $F(f)$.

2.2. Folgerung. *Ein Graph ist das homomorphe Vorbild jedes seiner Faktorgraphen und jedes homomorphe Bild eines Graphen ist mit einem seiner Faktorgraphen isomorph.*

Beweis. Im ersten Teil wird der gesuchte Homomorphismus durch die Bedingung (6) definiert und im zweiten Teil wird der gesuchte Faktorgraph auf der Zerlegung (3) definiert.

Aus 2.2 folgt, dass es bei der Untersuchung der homomorphen Bilder eines Graphen genügt, sich auf seine Faktorgraphen zu beschränken. Zur Beschreibung dieser Faktorgraphen kann man die spezialen Homomorphismen (6) ausnützen.

Ein Graph heisst *einfach*, wenn auf ihm nur eine einzige erzeugende Zerlegung definiert werden kann.

2.3. Satz. *Der Graph $F(f)$ ist dann und nur dann einfach, wenn folgende Bedingung erfüllt wird:*

$$x, y \in F, x \neq y \Rightarrow \text{ es existiert ein solcher } z \in F, \text{ der mindestens eine der Ungleichheiten } f[x, z] \neq f[y, z], f[z, x] \neq f[z, y] \text{ erfüllt.} \tag{7}$$

Beweis. I. Sei $F(f)$ ein einfacher Graph und sei weiter vorausgesetzt, dass (7) nicht erfüllt ist, d. h. es existieren $x, y \in F$, $x \neq y$, sodass $f[x, z] = f[y, z]$ und auch $f[z, x] = f[z, y]$ für jeden Knoten $z \in F$ gilt. Dann ist die Zerlegung $\bar{F}$, die aus der Minimalzerlegung so gebildet ist, dass man die Elemente $\{x\}$, $\{y\}$ vereinigt und alle übrigen Elemente ohne Änderung bleiben, offenbar erzeugend und verschieden von der Minimalzerlegung, was aber der Einfachheit des Graphen $F(f)$ widerspricht.

II. Sei nun umgekehrt die Bedingung (7) für den Graphen $F(f)$ erfüllt und sei weiter vorausgesetzt, dass $F(f)$ nicht einfach ist, d. h. dass mindestens eine erzeugende Zerlegung $\bar{F}$ des Graphen $F(f)$ existiert, die folgende Eigenschaft hat: es existiert $M \in \bar{F}$ der Mächtigkeit kard $M \geqq 2$. Dann existieren also $x, y \in M$, $x \neq y$, für die (bezüglich des entsprechenden Faktorgraphen $\bar{F}(\bar{f})$) nach (5) die Gleichheiten $f[x, z] = \bar{f}[M, Z] = f[y, z]$ und $f[z, x] = \bar{f}[Z, M] = f[z, y]$ für alle $z \in Z$ und jede $Z \in \bar{F}$ gelten, was in Widerspruch mit (7) ist.

Für einen endlichen Graphen folgt aus der Bedingung (7), dass er dann und nur dann einfach ist, wenn seine Inzidenzmatrix folgende Eigenschaft besitzt:

die i-te und j-te Reihe bzw. Spalte, $i \neq j$, sind gleich $\Rightarrow$ die i-te und j-te Spalte bzw. Reihe sind verschieden (im Sinne der Matrizengleichheit). (7′)

Der vollständige Graph mit **R**-Relation ist offenbar dann und nur dann einfach, wenn er ein Einselgraph ist, während der vollständige Graph mit **aR**-Relation immer einfach ist. Bei den freien Graphen ist das umgekehrt.

2.4. Satz. *Ein Faktorgraph $\bar{F}(\bar{f})$ des Graphen $F(f)$ ist dann und nur dann einfach, wenn die Zerlegung $\bar{F}$ die kleinste Deckung des Systems aller erzeugengen Zerlegungen des Graphen $F(f)$ ist.*

Beweis. I. Es sei $\bar{F}(\bar{f})$ ein einfacher Faktorgraph und $\bar{F}_1(\bar{f}_1)$ ein beliebiger Faktorgraph des Graphen $F(f)$. Es sei nun $Y \in \bar{F}_1$ und es sei weiter vorausgesetzt, dass mindestens zwei solche Elemente der Zerlegung $\bar{F}$, und zwar $X', X'' \in \bar{F}$, $X' \neq X'$, existieren, dass $X' \cap Y \neq \emptyset \neq X'' \cap Y$ gilt. Es gibt also auch Knoten $x' \in X'' \cap Y$, $x'' \in X'' \cap Y$, $x' \neq x''$, und zu jedem $X \in \bar{F}$ kann man ein $Z \in \bar{F}_1$ finden, sodass ein Knoten $z \in X \cap Z$ existiert. Dann aber gilt nach (5) $\bar{f}[X', X] = f[x', z] = \bar{f}_1[Y, Z] = f[x'', z] = \bar{f}[X'', X]$ und $\bar{f}[X, X'] = \bar{f}[X, X'']$ für jedes Element $X \in \bar{F}$, sodass nach 2.3 der Faktorgraph $\bar{F}(\bar{f})$ nicht einfach sein kann, was ein Widerspruch ist. Es muss also zu jedem $Y \in F_1$ gerade ein Element $X \in \bar{F}$ der Eigenschaft $X \cap Y \neq \emptyset$ existieren und für dieses gilt dann $X \subset Y$. Damit wird gezeigt, dass $\bar{F}$ eine Deckung der Zerlegung $\bar{F}_1$ ist und weil $\bar{F}$ selbst eine erzeugende Zerlegung ist, ist sie auch das Supremum des Systems aller erzeugenden Zerlegungen. Daraus folgt nach einem Satze von O. Borůvka [2], S. 18, dass $\bar{F}$ die kleinste Deckung des betreffenden Systems ist.

II. Es sei nun umgekehrt $\bar{F}$ die kleinste Deckung des Systems aller erzeugenden Zerlegungen des Graphen $F(f)$. Aus der Konstruktion der kleinsten Deckung eines Systems (siehe O. Borůvka [2], S. 16) geht unmittelbar hervor, dass $\bar{F}$ wieder eine erzeugende Zerlegung ist. Wenn wir nun voraussetzen, dass $\bar{F}(\bar{f})$ nicht einfach ist, d. h. dass nach (7) zwei solche Elemente $X', X'' \in \bar{F}$, $X' \neq X''$, existieren, dass $\bar{f}[X'. X] = \bar{f}[X'', X]$ und zugleich $\bar{f}[X, X'] = \bar{f}[X, X'']$ für jedes $X \in \bar{F}$ gilt, kann man aus der Zerlegung $\bar{F}$ eine neue Zerlegung $\bar{F}_1$ folgendermassen konstruieren: $\bar{F}_1 = \underset{X}{\mathrm{E}} \{X \in \bar{F}, X' \neq X \neq X''\} \cup \{(X' \cup X'')\}$. Die Zerlegung $\bar{F}_1$ ist wieder erzeugend, aber $\bar{F}$ ist keine Deckung derselben, was ein Widerspruch ist.

2.5. Folgerung. *Jeder Graph $F(f)$ besitzt einen einzigen einfachen Faktorgraphen. Die entsprechende erzeugende Zerlegung ist durch folgende Äquivalenz bestimmt,*

$$x \sim y \Leftrightarrow f[x, z] = f[y, z], \quad \text{wobei gleichzeitig } f[z, x] = f[z, y] \quad \text{für jeden } z \in F \text{ gilt.} \tag{8}$$

2.6. Folgerung. *Der einfache Faktorgraph ist das homomorphe Bild jedes Faktorgraphen des gegebenen Graphen.*

2.7. Satz. *Jeder Graph ist das homomorphe Vorbild eines einzigen (bis auf die Isomorphismen) einfachen Graphen.*

Beweis. Der Satz folgt aus 2.2 und 2.5.

Im Sinne des Satzes 2.7 können wir sagen, dass jedem Graphen $F(f)$ *sein einfacher* Graph zugehört. Nach 2.5 ist es möglich, einen einfachen Faktorgraphen $\bar{F}(\bar{f})$ für diesen zu wählen und jedem Knoten $X_\iota \in \bar{F}$ desselben die Mächtigkeit kard $X_\iota = \alpha_\iota$ zuzuordnen. Das System (nicht die Menge) $\{\alpha_\iota\}$ $\iota \in I$, aller dieser Mächtigkeiten mit der Zuordnung derselben zu den Knoten eines beliebigen seiner einfachen Graphen (die Zuordnung wird durch beliebige Isomorphismen unter den einfachen Graphen des gegebenen Graphen vermittelt) heisst die *homomorphe Charakteristik* des Graphen $F(f)$.

Es sei nun ein einfacher Graph $G(g)$ gegeben und es seien Knoten $y_\iota \in G$, $\iota \in I$, irgendwelche Mächtigkeiten α_ι zugeordnet. Man kann nun leicht den Graphen $F(f)$ mit dieser homomorphen Charakteristik konstruieren. Zu diesem Zwecke, genügt es ein System der paarweise disjunkten Mengen Z_ι, kard $Z_\iota = \alpha_\iota$, für jedes $\iota \in I$ zu wählen und den Graphen $F(f)$ folgendermassen zu definieren: $F = \bigcup_{\iota \in I} Z_\iota$ und $x \in Z_\iota$, $y \in Z_\varkappa \Rightarrow f[x, y] = g[z_\iota, z_\varkappa]$. Dann ist das System der Mengen Z_ι eine erzeugende Zerlegung $\overline{F}$ des Graphen $F(f)$ und zwar gerade die, die durch die Äquivalenz (8) bestimmt wird. Der entsprechende Faktorgraph $\overline{F}(\overline{f})$ ist offenbar einfach und mit $G(g)$ in verlangter Weise isomorph, sodass $F(f)$ die vorher gegebene homomorphe Charakteristik besitzt.

In ähnlicher Weise kann man auch homomorphe Vorbilder eines beliegigen (nicht nur einfachen) Graphen konstruieren.

2.8. Satz. *Es sei* $\{\alpha_\iota\}$ *bzw.* $\{\beta_\iota\}$ *die homomorphe Charakteristik des Graphen* $F(f)$ *bzw.* $G(g)$. *Dann gilt: der Graph* $G(g)$ *ist ein homomorphes Bild des Graphen* $F(f)$ *dann und nur dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$\left.\begin{array}{l}\textit{den Graphen } F(f),\ G(g) \textit{ gehört derselbe einfache Graph } H(h) \textit{ zu, zu} \\ \textit{dessen Knoten } z_\iota \in H \textit{ die Mächtigkeiten } \alpha_\iota, \beta_\iota \textit{ so zugeordnet werden} \\ \textit{können, dass die Ungleichheit } \alpha_\iota \geqq \beta_\iota \textit{ für alle } \iota \textit{ gilt.}\end{array}\right\} \quad (9)$$

Beweis. I. Es sei vor allem $F(f) \to G(g)$. Ist $H(h)$ der einfache Graph des Graphen $G(g)$, so folgt aus der Transitivität des Homomorphismus und aus 2.7, dass $H(h)$ der einfache Graph auch des Graphen $F(f)$ ist. Ist nun $H(h)$ der einfache Graph, der dem Graphen $F(f)$ zugehört, so gilt $F(f) \to H(h)$ und nach 2.2 gibt es solche Faktorgraphen $\overline{F}_1(\overline{f}_1)$, $\overline{F}_2(\overline{f}_2)$ des Graphen $F(f)$, dass $\overline{F}_1(\overline{f}_1) \longleftrightarrow H(h)$ und $\overline{F}_2(\overline{f}_2) \longleftrightarrow G(g)$ gilt. Aber $\overline{F}_1(\overline{f}_1)$ ist einfach, sodass aus 2.6 die Beziehung $\overline{F}_2(\overline{f}_2) \to \overline{F}_1(\overline{f}_1)$ oder $G(g) \to H(h)$ folgt und dann muss nach 2.7 der einfache Graph $H(h)$ auch dem Graphen $G(g)$ zugehören. Damit ist also gezeigt, dass der gemeinsame einfache Graph $H(h)$ der beiden Graphen $F(f)$ und $G(g)$ existiert, auf dessen Knoten $z_\iota \in H$ die Mächtigkeiten α_ι und β_ι (durch entsprechende Isomorphismen) bezogen werden. Es gilt also $F(f) \to G(g)$, $G(g) \to H(h)$ und φ, ψ seien die entsprechenden Homomorphismen. Dann ist auch $\chi = \psi\varphi$ ein Homomorphismus, der $F(f)$ auf $H(h)$ abbildet. Die angeführten Homomorphismen bestimmen durch die Äquivalenz (3) entsprechende erzeugende Zerlegungen, deren Elemente von folgender Gestalt sind: $Y_\iota = \underset{y}{\mathrm{E}}\{y \in G, \psi(y) = z_\iota, z_\iota \in H\}$ und $X_\iota = \underset{x}{\mathrm{E}}\{x \in F, \chi(x) = z_\iota, z_\iota \in H\} = \underset{x}{\mathrm{E}}\{x \in F, \varphi(x) = y, y \in Y_\iota\}$. Die betreffenden Zerlegung sind nach 2.5 gerade die, die durch die Äquivalenz (8) bestimmt werden, sodass kard $X_\iota = \alpha_\iota$, kard $Y_\iota = \beta_\iota$. Aus der Gestalt der Elementen X_ι folgt, dass $\alpha_\iota \geqq \beta_\iota$ für jedes ι gilt.

II. Erfüllen nun beide Graphen $F(f)$ und $G(g)$ die Bedingung (9) und bezeichnen wir mit X_ι bzw. Y_ι die Mengen aller Knoten des Graphen $F(f)$ bzw. $G(g)$, die auf denselben Knoten $z_\iota \in H$ des Graphen $H(h)$ abgebildet werden, so folgt unmittelbar aus (9) und (4), dass jedes X_ι auf Y_ι abgebildet werden kann und dass die dadurch definierte Abbildung des Graphen $F(f)$ auf den Graphen $G(g)$ ein Homomorphismus ist.

2.9. Folgerung. *Zu allen homomorphen Vorbildern und auch Bildern des gegebenen Graphen gehört ein einziger (bis auf Isomorphismen) einfacher Graph.*

2.10. Satz. *Es sei $F(f) \to G(g)$ und seien $\{\alpha_\iota\}$ und $\{\beta_\iota\}$ die homomorphen Charakteristiken der Graphen $F(f)$ und $G(g)$, die die Bedingung (9) erfüllen. Dann gilt:*

a) *es existieren mindestens $\prod_\iota \binom{\alpha_\iota}{\beta_\iota} \geqq 1$ Subgraphen des Graphen $F(f)$, die isomorph mit $G(g)$ sind, wenn $\binom{\alpha_\iota}{\beta_\iota}$ die Mächtigkeit des Systems aller Untermengen der Mächtigkeit β_ι auf der Menge der Mächtigkeit α_ι bezeichnet und*

b) *es existieren mindestens $\prod_\iota \gamma_\iota \geqq 1$ Faktorgraphen $\bar{F}(\bar{f})$, die isomorph mit $G(g)$ sind, wenn γ_ι die Mächtigkeit des Systems aller Zerlegungen der Mächtigkeit β_ι auf der Menge der Mächtigkeit α_ι ist.*

Beweis. Beide Behauptungen folgen aus 2.8.

2.11. Satz. *Es sei Graph $F(f)$ mit der homomorphen Charakteristik $\{\alpha_\iota\}$ gegeben. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent*

a) *$F(f)$ ist einfach,*
b) *$F(f) \to G(g) \Rightarrow F(f) \longleftrightarrow G(g)$.*
c) *$\alpha_\iota = 1$ für jedes ι.*

Beweis. Die Implikation a) $\Rightarrow$ b) folgt direkt aus 2.2 und aus b) nach 2.2 folgt $F(f) \longleftrightarrow \bar{F}(\bar{f})$ für jeden Faktorgraphen $\bar{F}(\bar{f})$ des Graphen $F(f)$, also auch für seinen einfachen Faktorgraphen, was aber heisst, dass $F(f)$ auch einfach sein muss. Dies beweist die Implikation b) $\Rightarrow$ a) und die Äquivalenz a) $\Leftrightarrow$ c) folgt aus der Definition der homomorphen Charakteristik.

2.12. Satz. *Es gilt*

$$F(f) \to G(g)\,, \quad G(g) \to F(f) \Leftrightarrow F(f) \longleftrightarrow G(g)\;.$$

Beweis. Ist die linke Seite der Äquivalenz gültig, so folgt aus 2.8, dass der gemeinsame einfache Graph $H(h)$ der beiden Graphen existiert und dass auf seine Knoten $z_\iota \in H$ die Mächtigkeiten der homomorphen Charakteristiken $\{\alpha_\iota\}$ und $\{\beta_\iota\}$ der Graphen $F(f)$ und $G(g)$ bezogen werden. Nach (9) gilt also $\alpha_\iota = \beta_\iota$ für jedes ι. Ist weiter $\bar{F}(\bar{f})$ bzw. $\bar{G}(\bar{g})$ der einfache Faktorgraph des Graphen $F(f)$ bzw. $G(g)$, so gibt es (nach der Definition der homomorphen Charakteristik) Isomorphismen, die dem Knoten $z_\iota \in H$ den Knoten $X_\iota \in \bar{F}$ bzw. $Y_\iota \in \bar{G}$ auf solche Weise zuordnen, dass kard $X_\iota = \alpha_\iota$ bzw. kard $Y_\iota = \beta_\iota$ für jedes ι ist. Aus $\alpha_\iota = \beta_\iota$ folgt aber, dass X_ι immer auf Y_ι schlicht abgebildet werden kann, sodass die entstehende Abbildung des Graphen $F(f)$ auf den Graphen $G(g)$ nach (5) ein Isomorphismus ist. Die umgekehrte Implikation ist trivial.

Wenn wir die Relation „ein homomorphes Bild sein" in natürlicher Weise[7]) auf das System der Klassen der isomorphen Graphen übertragen, so wird nach 2.12 eine teilweise Anordnung dieses Systems entstehen. Wenn wir die Relation „ein satter Teilgraph sein" oder „ein Teilgraph sein" auf das System der Klassen von isomorphen Graphen übertragen, so wird nur eine Quasi-Anordnung entstehen. Es ist nämlich möglich drei (unendlichen) Graphen $F(f)$, $G(g)$, $H(h)$ auf solche Weise zu definieren, dass $F(f)$ ein satter Teilgraph von $G(g)$ und $G(g)$ ein satter Teilgraph von $H(h)$ ist und dabei $F(f) \longleftrightarrow H(h)$, aber nicht $F(f) \longleftrightarrow G(g)$ gilt. Es sei z. B. $H = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, $h[a_0, a_i] = 1$ für $i = 1, 2, \ldots$, $h[a_{2i+1}, a_{2i+2}] = 1$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$ und in allen anderen Fällen gilt $h[a_i, a_j] = 0$. Beide übriggebliebenen Graphen sind durch die Mengen aller ihrer Knoten $G = \{a_0, a_2, a_3, \ldots\}$, $F = \{a_0, a_3, a_4, \ldots\}$ als satte Teilgraphen eindeutig bestimmt.

2.13. Satz. *Jeder* **R antiS**-*Graph ist einfach.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass ein **R antiS**-Graph $F(f)$ nicht einfach ist. Nach 2.3 gibt es die Knoten $x, y \in F$, $x \neq y$, für die $f[x, z] = f[y, z]$ und $f[z, x] = f[z, y]$ für alle $z \in F$ gilt. Aber $f[x, x] = f[y, y] = 1$, sodass auch $f[x, y] = f[y, x] = 1$ sein muss, was der Voraussetzung der Antisymmetrie widerspricht.

Aus 2.13 folgt, dass auch jede teilweise geordnete Menge einfach ist, soweit sie als ein **R antiST**-Graph betrachtet wird. Betrachten wir die teilweise Ordnung als eine **aST**-Relation, braucht eine teilweise geordnete Menge nicht einfach zu sein und alle Sätze dieses Abschnittes sind benutzbar und führen zu einer, offenbar nicht sehr tiefen, Klassifikation der teilweise geordneten Mengen.

2.14. Satz. *Die komplementären Graphen haben folgende Eigenschaften*

a) $F(f) \rightarrow G(g) \Leftrightarrow F(f^*) \rightarrow G(g^*)$,

b) $F(f)$ *ist einfach* $\Leftrightarrow F(f^*)$ *ist einfach,*

c) *Der einfache Graph* $G(g)$ *bzw.* $H(h)$ *gehört dem Graphen* $F(f)$ *bzw.* $F(f^*)$ *zu* $\Leftrightarrow G(g) \longleftrightarrow H(h^*)$,

d) *Die Graphen* $F(f)$, $F(f^*)$ *besitzen dieselben Mächtigkeiten der homomorphen Charakteristik.*

Beweis. a) folgt direkt aus 1.1 und b) aus 2.3. Die beiden letzen Behauptungen folgen aus den vorigen.

[7]) D. h., dass wir eine Relation σ unter den Klassen $\{F(f)\}$, $\{G(g)\}$ foldendermassen definieren: $\{F(f)\}\ \sigma\ \{G(g)\} \Leftrightarrow$ es gibt einen solchen $H(h) \in \{G(g)\}$, dass er ein homomorphes Bild des Graphen $F(f)$ ist. Ähnlich definieren wir eine Relation σ folgendermassen: $\{F(f)\}\ \sigma\ \{G(g)\} \Leftrightarrow$ es gibt einen solchen $H(h) \in \{F(f)\}$, dass er ein satter Teilgraph des Graphen $G(g)$ ist.

3. Zusammenhang

Bezüglich der gegebenen Definition des Graphen braucht man einige allgemeinere Begriffe über die Knotenfolgen als die, die bei D. König [5] bzw. bei G. Birkhoff [1] eingeführt werden.

Eine endliche Folge $\{x_i\}_{i=1}^d$, $d \geqq 2$, der Knoten des Graphen $F(f)$, deren Elemente folgende Bedingung

$$x_i, x_{i+1} \in F\,, \quad 1 \leqq i < d \Rightarrow f[x_i, x_{i+1}] + f[x_{i+1}, x_i] = 1 \tag{10}$$

erfüllen, heisst die *gebundene Folge* von x_1 nach x_d in $F(f)$. Gilt noch mehr $f[x_1, x_d] + f[x_d, x_1] = 1$ bzw. $= 0$, so heisst sie die *geschlossene* bzw. *offene gebundene Folge*. Ist die gebundene Folge $\{x_i\}_{i=1}^d$ schlicht (bezüglich ihrer Knoten), d. h. gilt $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$, $1 \leqq i, j \leqq d$, so heisst sie *Zug* und d heisst seine *Länge*. Es ist klar, was man unter einem *geschlossenen* bzw. *offenen Zuge* versteht. Endlich jeden Knoten halten wir für die sog. *triviale gebundene Folge* bzw. für den *trivialen Zug*.

Ist $\{x_i\}_{i=1}^d$ ein Zug in $F(f)$, der alle Knoten aus F enthält (d. h. $F = \{x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_d\}$) und wenn weiter

$$f[x_i, x_j] = 0 \quad \text{für jedes} \quad i \neq j, j + 1, j - 1, 1 \leqq i \leqq d\,,$$

gilt, dann nennen wir auch den Graphen $F(f)$ selbst einen *Zug*. Man kann zu keinen Missverstädnissen kommen, wenn wir Züge einmal als Folgen, andermal als Graphen ansehen, weil der Zusammenhang zwischen diesen zwei Begriffen eineindeutig ist.

Erfüllt die gebundene Folge $\{x_i\}_{i=1}^d$ in $F(f)$ eine schärfere Bedingung

$$x_i, x_{i+1} \in F, 1 \leqq i < d \Rightarrow f[x_i, x_{i+1}] = 1\,, \tag{10'}$$

so heisst sie eine *monoton-gebundene Folge*. Gilt noch weiter $f[x_d, x_1] = 1$ bzw. $= 0$, so spricht man von einer *geschlossenen* bzw. *offenen monoton-gebundenen Folge*. Analog ist das mit dem *monotonen Zuge*.

Erfüllt die gebundene Folge $\{x_i\}_{i=1}^d$ in $F(f)$ eine noch schärfere Bedingung

$$x_i, x_{i+1} \in F\,, \quad 1 \leqq i < d \Rightarrow f[x_i, x_{i+1}] = f[x_{i+1}, x_i] = 1\,, \tag{10''}$$

so heisst sie eine *voll-gebundene Folge*. Gilt auch $f[x_1, x_d] + f[x_d, x_1] = 2$ bzw. < 2, so heisst sie *geschlossene* bzw. *offene voll-gebundene Folge*. Wieder kann man von einem *vollen Zuge* sprechen, der offenbar entweder geschlossen oder offen sein kann.

Durch vorige Definitionen werden auch einige weitere spezielle Graphen auf eine ähnliche Weise wie der Zug eingeführt, nämlich ein *monotoner* bzw. *voller Zug*, der entweder offen oder geschlossen sein kann.[8])

Wir werden sagen, dass zwei verschiedene Elemente $x_1, x_d \in F$ *zusammenhängen* (bzw. *monoton-zusammenhängen* bzw. *voll-zusammenhängen*) in $F(f)$, falls es eine gebundene Folge (bzw. monoton-gebundene bzw. voll-gebundene Folge) $\{x_i\}_{i=1}^d$ von x_1 nach x_d (bzw. auch eine von x_d nach x_1) in $F(f)$ gibt. Gilt dieses für jedes Paar von verschiedenen Knoten des Graphen $F(f)$, so sagen wir, dass der Graph $F(f)$ *zusammenhängend* (bzw. *monoton-zusammenhängend* bzw. *voll-zusammenhängend*) ist. Also ist jeder triviale Graph zusammenhängend (ja sogar voll-zusammenhängend).

Für die nichtgerichteten Graphen sind alle drei Arten des Zusammenhanges äquivalent, aber ein nichttrivialer grichteter Graph muss nicht voll-zusammenhängend und die nichttriviale teilweise geordnete Menge muss nicht monoton-zusammenhängend sein. Ein Graph ist dann und nur dann monoton-zusammenhängend, wenn je zwei verschiedene Knoten seiner Knoten auf einem geschlossenen und monotonen Zuge liegen. Es ist endlich klar, dass aus dem vollen Zusammenhange der monotone und aus diesem der (gewöhnliche) Zusammenhang folgt.

Ein Homomorphismus bildet eine gebundene Folge auf eine gebundene Folge ab, wobei alle erwähnten Eigenschaften der gebundenen Folgen beibehalten werden.

3.1. Satz. *Ein homomorphes Vorbild und Bild eines zusammenhängenden und nichttrivialen Graphen ist wieder zusammenhängend. Dasselbe gilt für den monotonen bzw. vollen Zusammenhang. Ein homomorphes Vorbild eines Einselgraphen ist voll-zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $F(f)$ ein nichttrivialer und zusammenhängender Graph, der ein homomorphes Bild im Homomorphismus φ eines Graphen $G(g)$ ist. Sind nun $y' \neq y''$ zwei beliebige Knoten aus G, so gibt es zwei Möglichkeiten. Ist $\varphi(y') \neq \varphi(y'')$, so gibt es eine gebundene Folge $\{x_i\}_{i=1}^d$, $d \geqq 2$ in $F(f)$ von $\varphi(y') = x_1$ nach $\varphi(y'') = x_d$. Es existieren weiter die Knoten $y_i \in G$, für die $\varphi(y_i) = x_i$, $1 \leqq i \leqq d$, gilt, wobei $y_1 = y'$, $y_d = y''$. Nach 1.1 ist $\{y_i\}_{i=1}^d$ wieder eine gebundene Folge in $G(g)$ von y' nach y''. Gilt nun $\varphi(y') = \varphi(y'')$, so gibt es einen Knoten $x \in F$, $x \neq \varphi(y')$ und auch $y \in G$, $\varphi(y) = x$. Dann muss aber $y' \neq y \neq y''$ sein, sodass für die Paare y', y und y, y'' die vorigen Bedingungen erfüllt sind. Also gibt es eine gebundene Folge in $G(g)$ von y' nach y und eine von y nach y''. Aus diesen zwei Folgen kann man offenbar eine gebundene Folge in $G(g)$ von y' nach y'' konstruieren.

---

[8]) Es ist klar, dass bei D. König [5] ein offener bzw. geschlossener monotoner Zug eine *Bahn* bzw. ein *Zyklus* genannt wird und ähnlich ein offener bzw. gechlossener voller Zug heisst ein *Weg* bzw. ein *Kreis*. Statt des Ausdrucks „*monoton*" benützt D. König „*kontinuierlich gerichtet*".

Auf eine ähnliche Weise führt man den Beweis für beide weiteren Arten des Zusammenhanges durch.

Für die homomorphen Bilder ist die Behauptung klar. Endlich ist ein homomorphes Vorbild eines Einselgraphen immer vollständig, also auch vollzusammenhängend.

Die Relation des Zusammenhängens (bzw. des monotonen bzw. vollen Zusammenhängens) auf der Menge F eines Graphen $F(f)$ ist eine Äquivalenzrelation und darum definiert sie eine Zerlegung $\overline{F}$

$$x, y \in M\,, \quad M \in \overline{F} \Leftrightarrow x, y \quad \text{zusammenhängen in} \quad F(f)\,. \tag{11}$$

In speziellen Untersuchungen ist es angebracht über die gebundene Folge $\{x_i\}_{i=1}^{d}$ in $F(f)$ zu sprechen, die *schlicht bezüglich der Kanten* (x_i, x_{i+1}), $1 \leqq i < d$ ist, d. h. für die $x_i = x_j$, $i \neq j \Rightarrow x_{i+1} \neq x_{j+1}$ gilt (vgl. den Begriff des *Kantenzuges* bei D. König [1]).

Wir wollen noch bemerken, dass auch *unendliche gebundene Folgen* aller erwähnten Arten und auch entsprechende *unendliche Züge* eingeführt werden können. Bei unendlichen gebundenen Folgen unterscheiden sich drei Ordnungstypen und zwar ω-, ω^*- und $\omega^* + \omega$-*Folgen*.

4. Kardinalsumme

Unter Kardinalsumme der Graphen verstehen wir einen Graphen, der bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt ist. Bei dieser Definition setzt man stillschweigend voraus, dass die betreffenden Graphen paarweise disjunkt sind.[9])

4.1. Definition. *Es seien Graphen* $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$, *gegeben. Der Graph* $F(f)$, *wo* $F = \bigcup_{\iota \in I} F_\iota$ *und* f *die Bedingung*

$$x, y \in F_\iota \Rightarrow f[x, y] = f_\iota[x, y] \quad \textit{und} \quad x \in F_\iota, y \in F_\varkappa, \ \iota \neq \varkappa \Rightarrow f[x, y] = 0 \tag{12}$$

erfüllt, heisst die Kardinalsumme $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ *der Graphen* $F_\iota(f_\iota)$. *Ist die Indizenmenge* I *endlich, bezeichnen wir die Operation der Kardinalsumme mit dem Symbol* $+$.

4.2. Satz. *Die Kardinalsumme der Graphen ist allgemein kommutativ und assoziativ.*

4.3. Folgerung. *Es sei* $A^{(m)}$ *bzw.* $B^{(n)}$ *eine Inzidenzmatrix des endlichen Graphen* $F(f)$ *bzw.* $G(g)$. *Dann ist jede Inzidenzmatrix* $S^{(s)}$ *der Kardinalsumme*

[9]) Siehe G. Birkhoff [1], S. 25. Die Kardinalsumme kann selbstverständlich als ein Spezialfall der Summe der Relationen eingeführt werden (siehe A. Mostowski [6], S. 96).

$F(f) + G(g)$ vollständig äquivalent mit der direkten Summe beider Inzidenzmatrizen $A^{(m)}$, $B^{(n)}$, d. h. es gilt

$$S^{(s)} \approx A^{(m)} \dot{+} B^{(n)}\,.^{10)} \tag{13}$$

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus 4.1 und aus den Eigenschaften der Inzidenzmatrizen der isomorphen Graphen.

Die Rolle der Null bei der Kardinalsumme der Graphen spielt der leere Graph.

Eine Zerlegung $\bar{F}$ des Graphen $F(f)$ wollen wir als eine *Reduktionszerlegung* bezeichnen, wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$X, Y \in \bar{F}, X \neq Y \Rightarrow f[x, y] = f[y, x] = 0 \quad \text{für jede} \quad x \in X, y \in Y\,. \tag{14}$$

Offenbar ist die Maximalzerlegung $\bar{F}$ (d. h. wenn $F \in \bar{F}$) immer eine Reduktionszerlegung, denn die Bedingung (14) wird leer befriedigt.

4.4. Lemma. *Die grösste Verfeinerung des Systems aller Reduktionszerlegungen des gegebenen Graphen $F(f)$ ist die Zerlegung $\bar{F}$, die durch die Äquivalenz* (11) *bestimmt wird.*

Beweis. Es seien also $\bar{F}_\iota$, $\iota \in I$ alle Reduktionszerlegungen des Graphen $F(f)$ und es sei $\bar{F}$ die grösste Verfeinerung dieses Systems. Ist $\bar{F}$ die Maximalzerlegung, so ist $\bar{F}$ auch eine Reduktionszerlegung. Ist $\bar{F}$ die Maximalzerlegung nicht, so müssen mindestens zwei Elemente X, $Y \in F$, $X \neq Y$, existieren. Dann folgt aus der Konstruktion der grössten Verfeinerung (siehe O. Borůvka [1], S. 19), dass $X = \bigcap_{\iota \in I} X_\iota$, $Y = \bigcap_{\iota \in I} Y_\iota$, wo X_ι, $Y_\iota \in \bar{F}_\iota$ alle solche Elemente sind, für die $X_\iota \cap X \neq \emptyset \neq Y_\iota \cap Y$ gilt. Daraus aber folgt, dass $\bar{F}$ die Bedingung (14) erfüllt. Damit wird gezeigt, dass $\bar{F}$ eine Reduktionszerlegung ist. Es sei nun $\bar{F}'$ die Zerlegung (11) auf dem gegebenen Graphen $F(f)$. Wir beweisen vor allem, dass auch $\bar{F}'$ eine Reduktionszerlegung sein muss. Sind nämlich $X', Y' \in \bar{F}'$, $X' \neq Y'$, zwei beliebige Elemente, so können keine Knoten $x \in X'$, $y \in Y'$ in $F(f)$ zusammenhängen, also muss immer $f[x, y] = f[y, x] = 0$ gelten, was aber die Bedingung (14) ist.

Es sei endlich $X \in \bar{F}$, $X' \in \bar{F}'$ und $X \cap X' \neq \emptyset$. Aus vorigen Überlegungen folgt $X \subset X'$. Setzen wir weiter voraus, dass es einen Knoten $y \in X' \cap Y$, $Y \in \bar{F}$, $Y \neq X$, gibt. Es existiert auch $x \in X \cap X'$, $x \neq y$, sodass nach (11) beide Knoten x, y in $F(f)$ zusammenhängen, in anderen Worten es existiert eine Kette $\{z_i\}_{i=1}^d$, $d \geqq 2$, $z_1 = x$, $z_u = y$. Dann gibt es zwei benachbarte Knoten z_j, z_{j+1}, $1 \leqq j < d$, für die $z_j \in X$, z_{j+1} non $\in X$ gilt, was aber in Widerspruch mit (14) ist. Es muss also $X = X'$ und darum auch $\bar{F} = \bar{F}'$ gelten.

[10]) Durch das Symbol $\dot{+}$ ist die direkte Summe der Matrizen bezeichnet (siehe A. I. Malcev: *Osnovy linejnoj algebry*, S. 208). Die direkte Summe ist allgemein nicht kommutativ. Aus 4.2 und 4.3 folgt die Kommutativität der direkten Summe der Inzidenzmatrizen, nicht aber für die Gleichheit, sondern nur für die vollständige Äquivalenz der Inzidenzmatrizen.

4.5. Satz. *Für den Graphen $F(f)$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

a) *$F(f)$ ist keine Kardinalsumme von mindestens zwei (nichtleeren) Graphen,*

b) *Auf $F(f)$ existiert nur eine einzige Reduktionszerlegung, und zwar die Maximalzerlegung,*

c) *$F(f)$ ist zusammenhängend.*

Beweis. Die Implikationen a) $\Leftrightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) sind klar. Aus c) aber folgt, dass die Zerlegung (11) die maximale Zerlegung des Graphen $F(f)$ ist und nach 4.4 ist sie die einzige Reduktionszerlegung des gegebenen Graphen.

Aus 4.5 folgt, dass mit einem Zusammenhange, der bei J. Hashimoto [4] eingeführt wurde, der hier definierte Zusammenhang für teilweise geordnete Mengen äquivalent ist.

4.6. Folgerung. *Der zusammenhängende Graph ist entweder trivial oder ein Königscher Graph.*

4.7. Satz. *Jeden (nichtleeren) Graphen $F(f)$ kann man auf eine einzige Weise als Kardinalsumme seiner nichtleeren zusammenhängenden Teilgraphen $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$ ausdrücken. Dabei sind die Mengen F_ι, $\iota \in I$, die Elemente der Zerlegung* (11).

Beweis. Aus (11) folgt, dass jeder Teilgraph $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$, zusammenhängend ist und aus 4.4 folgt weiter, dass $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota) \equiv F(f)$ ist. Wäre nun $\sum_{\iota \in I} G_\iota(g_\iota) \equiv$ $\equiv F(f)$, so müssten G_ι, $\iota \in K$ Elemente einer Reduktionszerlegung $\bar{F}'$ sein Ist $\bar{F}$ die Zerlegung (11), so ist nach 4.4 $\bar{F}'$ eine Deckung derselben, d. h. für $F_\iota \in \bar{F}$, $G_\varkappa \in \bar{F}'$, $F_\iota \cap G_\varkappa \neq \emptyset$ gilt $F_\iota \subset G_\varkappa$, sodass nach 4.5 auch $G_\varkappa = F_\iota$ gelten muss (weil die $G_\varkappa(g_\varkappa)$ zusammenhängend sind), also ist $\bar{F}' = \bar{F}$.[11])

4.8. Satz. *Die Kardinalsumme von einfachen Graphen $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$, ist ein einfacher Graph dann und nur dann, wenn höchstens ein einziger der Graphen $F_\iota(f_\iota)$ einen isolierten Knoten ohne Schlinge enthält.*

Beweis. Ist der Graph $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ einfach, so enthält er höchstens einen isolierten Knoten ohne Schinge, sodass nach 4.1 und 2.3 die angeführte Bedingung notwendig ist. Ist nun diese Bedingung erfüllt, so enthält auch die Kardinalsumme $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ höchstens einen isolierten Knoten ohne Schlinge. Es seien nun $x, y \in \sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ und $x \neq y$. Ist mindestens einer von diesen ein isolierter Knoten, so ist die Bedingung (7) aus 2.3 erfüllt (für die betreffenden zwei Knoten) und ist weiter keiner der beiden ein isolierter Knoten, so sind zwei Fälle möglich. Entweder $x, y \in F_\iota$, sodass (7) wieder erfüllt ist, oder $x \in F_\iota$, $y \in F_\varkappa$, $\iota \neq \varkappa$, was aber bedeutet, dass mindestens ein $z \in F_\iota$, $z \neq x$,

[11]) Einige dieser Ergebnisse über den Zusammenhang sind wohl bekannt (siehe D. König [5]). Sie werden hier nur für den allgemeinen Fall unserer Auffassung des Graphenbegriffs, also auch für die quasi- bzw. teilweise geordneten Mengen abgeleitet.

existiert, für den die Gleichheit $f[x, z] + f[z, x] = 1$ erfüllt ist. Dann gilt nach 4.1 $f[y, z] = f[z, y] = 0$, womit die Bedingung (7) für jedes Paar der Knoten x, y bewiesen wird. Also muss nach 2.3 $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ einfach sein.

4.9. Folgerung. *Die Kardinalsumme der einfachen Königschen Graphen ist wieder ein einfacher Königscher Graph.*

4.10. Satz. *Die Kardinalsumme der homomorphen Bilder $G_\iota(g_\iota)$ der Graphen $F_\iota(f_\iota), \iota \in I$ ist ein homomorphes Bild der Kardinalsumme $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$*, d. *h.*

$$F_\iota(f_\iota) \to G_\iota(g_\iota) \quad \text{für alle} \quad \iota \in I \Rightarrow \sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota) \to \sum_{\iota \in I} G_\iota(g_\iota) . \tag{15}$$

Beweis. Es sei φ_ι, $\iota \in I$, der entsprechende Homomorphismus, der $F_\iota(f_\iota)$ auf $G_\iota(g_\iota)$ abbildet. Dann ist die Abbildung φ der Menge $\bigcup_{\iota \in I} F_\iota$ auf die Menge $\bigcup_{\iota \in I} G_\iota$, die durch die Beziehung $x \in F_\iota \Rightarrow \varphi(x) = \varphi_\iota(x)$ definiert ist, nach 4.1 ein Homomorphismus, der den Graphen $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ auf $\sum_{\iota \in I} G_\iota(g_\iota)$ abbildet.

4.11. Satz. *Es sei $G_\iota(g_\iota)$ ein einfacher Graph, der dem Königschen Graphen $F_\iota(f_\iota)$ für $\iota \in I$ angehört. Dan ist die Kardinalsumme $\sum_{\iota \in I} G_\iota(g_\iota)$ ein einfacher Graph, der der Kardinalsumme $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ angehört.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus 4.9, 4.10, und 2.7.

4.12. Folgerung. *Die homomorphe Charakteristik der Kardinalsumme von Königschen Graphen ist eine blosse Zusammenfassung der homomorphen Charakteristiken einzelner Graphen.*

4.13. Satz. *Es seien $F_\iota(f_\iota)$, $G_\varkappa(g_\varkappa)$, $\iota \in I$, $\varkappa \in K$ zusammenhängende Graphen. Dann gilt*

$$\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota) \to \sum_{\varkappa \in K} G_\varkappa(g_\varkappa) \Rightarrow \textit{ es gibt eine schlichte Abbildung } \varphi \textit{ der}$$
$$\textit{Indizenmenge } I \textit{ auf } K, \textit{ sodass } F_\iota(f_\iota) \to G_{\varphi(\iota)}(g_{\varphi(\iota)}) \textit{ für alle } \iota \in I \textit{ gilt.}$$

Beweis. Ist ψ ein Homomorphismus, der $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ auf $\sum_{\varkappa \in K} G_\varkappa(g_\varkappa)$ abbildet so muss nach 3.1, 4.7 und nach der Voraussetzung $\psi\{F_\iota(f_\iota)\} \equiv G_\varkappa(g_\varkappa)$ für ein geeignet gewähltes $\varkappa \in K$ gelten. Damit ist eine schlichte Abbildung φ der Indizenmenge I auf K bestimmt, weil die Kardinalsumme von mindestens zwei (nichtleeren) Graphen nach 4.5 nicht zusammenhängend sein kann.

Nach 4.7 kann man jeden Graphen $F(f)$ in der Form $\sum_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ ausdrücken, wo $F_\iota(f_\iota)$ zusammenhängende Graphen sind. Wenn wir also in (16) auf der linken Seite statt des Homomorphismus den Isomorphismus voraussetzen werden, so folgt aus 4.13 die Eindeutigkeit der Zerlegung in zusammenhängende Summanden der Kardinalsumme (bis auf Isomorphismus zwischen den Summanden).

4.14. Satz. *Es sei* **X**- *eine der Eigenschaften der Relation* **R**-, **aR**-, **S**-, **antiS**-, **aS**- *und* **T**-. *Dann ist die Kardinalsumme der* **X**-*Graphen wieder ein* **X**-*Graph.*

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus 4.1 und aus den Definitionen der einzelnen Eigenschfaten.

5. Kardinalprodukt

Unter dem Kardinalprodukt der Graphen verstehen wir einen Graphen, der bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt ist. In der folgenden Definition setzen wir voraus, dass die betreffenden Graphen paarweise disjunkt sind.

5.1. Definition. *Es seien die Graphen* $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$, *gegeben. Den Graphen* $F(f)$, *wo* $F = \mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota$ *und* f *folgende Bedingung erfüllt*

$$(\ldots, x_\iota, \ldots), (\ldots, y_\iota, \ldots) \in F \Rightarrow \{f[(\ldots, x_\iota, \ldots), (\ldots, y_\iota, \ldots)] = 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow f_\iota[x_\iota, y_\iota] = 1 \quad \text{für jedes } \iota \in I\,, \tag{17}$$

nennen wir das Kardinalprodukt $\mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ *der Graphen* $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$. *Ist die Indizenmenge* I *endlich, bezeichnen wir die Operation des Kardinalproduktes mit dem Symbol* $\times$.

Im endlichen Falle des Kardinalproduktes $\mathsf{P}_{i=1}^{m} F_i(f_i)$, kann man seine Relation f durch die Bedingung

$$f[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, x_n)] = \prod_{i=1}^{m} f_i[x_i, y_i] \tag{18}$$

definieren.

5.2. Satz. *Das Kardinalprodukt der Graphen ist allgemein kommutativ und assoziativ und mit der Kardinalsumme auch vollständig distributiv, d. h. es gilt*

$$\mathsf{P}_{\iota \in I}\Big[\sum_{\varkappa_\iota \in I_\iota} F_{\iota,\varkappa_\iota}(f_{\iota,\varkappa_\iota})\Big] \longleftrightarrow \sum_{\varphi \in \Phi}\Big[\mathsf{P}_{\iota \in I} F_{\iota,\varphi(\iota)}(f_{\iota,\varphi(\iota)})\Big]\,, \tag{19}$$

wo I_ι *die Menge aller zweiten Indizen* $\varkappa_\iota$ *in Paaren* $\iota, \varkappa_\iota$ *ist und* Φ *ist die Menge aller eindeutigen Funktionen* φ, *die jedem* $\iota \in I$ *irgendein* $\varphi(\iota) \in I_\iota$ *zuordnen.*[12])

Beweis. Die Kommutativität und die Assoziativität des Kardinalproduktes folgt unmittelbar aus der Definition 5.1. Wir wollen nur die Formel (19) beweisen. Es sei $F(f)$ bzw. $G(g)$ der Graph, der auf der linken bzw. rechten Seite in (19) steht. Nach der Voraussetzung, dass die Graphen $F_{\iota,\varkappa_\iota}(f_{\iota,\varkappa_\iota})$ paarweise disjunkt sind, können wir $F = G$ voraussetzen. Ist nun $x, y \in F$, d. h. $x = (\ldots, x_{\iota,\varkappa_\iota}, \ldots)$, $y = (\ldots, y_{\iota,\lambda_\iota}, \ldots)$, wo $x_{\iota,\lambda_\iota} \in F_{\iota,\varkappa_\iota}$, $y_{\iota,\lambda_\iota} \in F_{\iota,\lambda_\iota}$, so gilt $f[x, y] = 1$ dann und nur dann, wenn $\varkappa_\iota = \lambda_\iota$ und $f_{\iota,\lambda_\iota}[x_{\iota,\varkappa_\iota}, y_{\iota,\varkappa_\iota}] = 1$ für jedes $\iota \in I$ gilt (nach 4.1 und 5.1). Dann gibt es aber eine Funktion $\varphi \in \Phi$, für

[12]) Über die vollständige Distributivität siehe G. Birkhoff [1], S. 233 bzw. 208.

die $\varphi(\iota) = \varkappa_\iota$, $\iota \in I$, gilt, sodass $f_{\iota,\varphi(\iota)}[x_{\iota,\varphi(\iota)}, y_{\iota,\varphi(\iota)}] = 1$ für jedes $\iota \in I$, d. h. $g[x, y] = 1$ gelten muss und auch umgekehrt.

Die Rolle der Einser bei dem Kardinalprodukt spielt der Einselgraph.

5.3. Folgerung. *Es sei $A^{(m)}$ bzw. $B^{(n)}$ eine Inzidenzmatrix des endlichen Graphen $F(f)$ bzw. $G(g)$. Dann ist jede Inzidenzmatrix $P^{(p)}$ des Kardinalproduktes $F(f) \times G(g)$ vollständig äquivalent mit dem direkten* (Kroneckerschen) *Produkte beider Inzidenzmatrizen $A^{(m)}$, $B^{(n)}$, d. h. es gilt*

$$P^{(p)} \underline{\approx} A^{(m)} \times B^{(n)}\,, \quad wo \quad p = mn\,.\text{[13]} \tag{20}$$

Beweis. Die Behauptung folgt nach 5.1 aus der Definition des Kroneckerschen Produktes und aus der vollständigen Äquivalenz der Inzidenzmatrizen der isomorphen Graphen.

Aus 5.3 folgt unmittelbar, dass ein endlicher Graph bezüglich des Kardinalproduktes dann und nur dann *unzerlegbar* ist, wenn keine seiner Inzidenzmatrizen als direktes Produkt von mindestens zwei Inzidenzmatrizen des Grades > 1 betrachtet werden können. Also jeder Graph, dessen Mächtigkeit eine Primzahl ist, ist unzerlegbar.

Es ist weiter klar, dass man jeden (endlichen) Graphen als Kardinalprodukt von unzerlegbaren Graphen ausdrücken kann. Zum Unterschied von der analogen Zerlegung bezüglich der Kardinalsumme, ist die Zerlegung bezüglich des Kardinalproduktes im allgemeinen nicht eindeutig (bis auf Isomorphismus der entsprechenden Faktoren) bestimmt, was aus folgendem Beispiele folgt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \underline{\approx} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.\text{[14]}$$

5.4. Satz. *Das Kardinalprodukt der homomorphen Bilder $G_\iota(g_\iota)$ der Graphen $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$, ist das homomorphe Bild des Kardinalproduktes $\mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$, d. h. es gilt*

$$F_\iota(f_\iota) \rightarrow G_\iota(g_\iota) \quad \text{für jedes } \iota \in I \Rightarrow \mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota) \rightarrow \mathsf{P}_{\iota \in I} G_\iota(g_\iota)\,. \tag{21}$$

Beweis. Es seien φ_ι, $\iota \in I$ die Homomorphismen, die $F_\iota(f_\iota)$ auf $G_\iota(g_\iota)$ abbilden, und es sei φ die Abbildung der Menge $\mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota$ auf die Menge $\mathsf{P}_{\iota \in I} G_\iota$, die

---

[13]) Durch das Symbol $\times$ wird das direkte (Kroneckersche) Produkt der Matrizen bezeichnet (siehe A. I. Malcev: *Osnovy linejnoj algebry*, S. 209). Das direkte Produkt der Matrizen ist nicht kommutativ. Für die Inzidenzmatrizen folgt aus 5.2 die Kommutativität des direkten Produktes bezüglich der vollständigen Äquivalenz statt der Gleichheit der Inzidenzmatrizen.

[14]) In diesem Punkte unterscheidet sich das Kardinalprodukt vom Produkte der Graphen im Sabidussischen Sinne (siehe G. O. Sabidussi: *On a multiplication of graphs*, S. 49, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956)), trotzdem die Menge der nichtisomorphen Graphen $F(f)$, kard $F < \aleph_n$) auch einen kommutativen „Semiring" mit Null- und Einselelement, bezüglich der Operationen der Kardinalsumme und des Kardinalproduktes, bildet (vgl. weiter J. Hashimoto [4]).

folgendermassen definiert ist: $\varphi(\ldots, x_\iota, \ldots) = (\ldots, \varphi_\iota(x_\iota), \ldots)$, wo $x_\iota \in F_\iota$ und $(\ldots, x_\iota, \ldots) \in \mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota$. Ist nun f bzw. g die Relation des Kardinalproduktes $\mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota$ bzw. $\mathsf{P}_{\iota \in I} G_\iota$, so gilt nach 5.1 und 1.1

$$f[(\ldots, x_\iota, \ldots), (\ldots, y_\iota, \ldots)] = 1 \Leftrightarrow f_\iota[x_\iota, y_\iota] = 1 = g_\iota[\varphi_\iota(x_\iota)\,,\, \varphi_\iota(y_\iota)]$$
$$\text{für jedes } \iota \in I \Leftrightarrow g[(\ldots, \varphi_\iota(x_\iota), \ldots), (\ldots, \varphi_\iota(y_\iota), \ldots)] = 1\,.$$

Daraus folgt sofort $f[(\ldots, x_\iota, \ldots), (\ldots, y_\iota, \ldots)] = g[\varphi(\ldots, x_\iota, \ldots), \varphi(\ldots, y_\iota, \ldots)]$ für jede $(\ldots, x_\iota, \ldots), (\ldots, y_\iota, \ldots) \in \mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota$, d. h. φ ist ein Homomorphismus.

5.5. Satz. *Es seien $F_\iota\,(f_\iota)$, $\iota \in I$ einfache Graphen, für deren Knoten gilt, dass weder ihr linker noch ihr rechter Grad gleich Null ist. Dann ist das Kardinalprodukt $\mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ ein einfacher Graph.*

Beweis. Setzen wir umgekehrt voraus, dass das Kardinalprodukt $F(f) \equiv \equiv \mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ nicht einfach ist, d. h. dass es nach 2.3 zwei solche Knoten $a = = (\ldots, a_\iota, \ldots)$, $b = (\ldots, b_\iota, \ldots)$, $a \neq b$, des Kardinalproduktes $F(f)$ gibt, dass $f[a, x] = f[b, x]$ und auch $f[x, a] = f[x, b]$ für alle $x \in F$ gilt. Dann gibt es einen Index $\iota \in I$, für den $a_\iota \neq b_\iota$ ist. Aus der Einfachheit des Graphen $F_\iota(f_\iota)$ folgt nach 2.3 die Existenz des Knoten $c_\iota \in F_\iota$, für den mindestens eine der folgenden Ungleichheiten $f_\iota[a_\iota, c_\iota] \neq f_\iota[b_\iota, c_\iota]$, $f_\iota[c_\iota, a_\iota] \neq f_\iota[c_\iota, b_\iota]$ gilt. Wir können annehmen, dass z. B. $f_\iota[a_\iota, c_\iota] = 1$ und $f_\iota[b_\iota, c_\iota] = 0$ gilt. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: entweder gibt es zu dem Index $\varkappa \in I$, $\varkappa \neq \iota$, einen Knoten $c_\varkappa \in F_\varkappa$, für den $f_\varkappa[a_\varkappa, c_\varkappa] = 1$ ist, sodass auch $f[a, c] = 1$, wo $c = (\ldots, c_\iota, \ldots)$, gilt, was aber ein Widerspruch ist, denn es muss $f[b, c] = 0$ sein; oder gibt es einen Index $\varkappa \in I$, $\varkappa \neq \iota$, für den $f_\varkappa[a_\varkappa, y_\varkappa] = 0$ für alle $y_\varkappa \in F_\varkappa$ gilt, was unserer Voraussetzung über die Graphen $F_\iota(f_\iota)$ widerspricht. Ähnlich kommen wir zu einem Widerspruch auch in den übrigen Fällen. Also muss das Kardinalprodukt einfach sein.

Es sei nun mit $l(x)$ bzw. mit $r(x)$ der linke bzw. der rechte Grad des Knoten x der Graphen $F(f)$ bezeichnet. Dann nennen wir den Graphen $F(f)$ *halbregulär* bzw. *regulär*, wenn die Grade seiner Knoten folgende Bedingung erfüllen

$$x, y \in F \Rightarrow l(x) = l(y) \quad \text{und} \quad r(x) = r(y) \tag{23}$$

bzw.

$$x, y \in F \Rightarrow l(x) = l(y) = r(x) \doteq r(y)\,. \tag{23'}$$

5.6. Satz. *Für die Grade der Knoten des Kardinalproduktes $\mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota)$ der Graphen $F_\iota(f_\iota)$, $\iota \in I$, gilt*

$$x = (\ldots, x_\iota, \ldots) \in \mathsf{P}_{\iota \in I} F_\iota(f_\iota),\, x_\iota \in F_\iota \Rightarrow l(x) = \prod_{\iota \in I} l(x)_\iota,\, r(x) = \prod_{\iota \in I} r(x_\iota)\,. \tag{24}$$

5.7. Folgerung. *Das Kardinalprodukt der halbregulären bzw. der regulären Graphen ist wieder ein halbregulärer bzw. regulärer Graph.*

5.8. Satz. *Es sei* **X**- *eine der Eigenschaften der Relation* **R**-, **aR**-, **S**-, **antiS**-, **aS**- *und* **T**-. *Dann ist das Kardinalprodukt der* **X**-*Graphen wieder ein* **X**-*Graph.*

Aus 5.8 folgt also, dass das Kardinalprodukt der nichtgerichteten bzw. gerichteten Graphen oder der quasi-geordneten bzw. teilweise geordneten Mengen wieder ein Graph von derselben Art sein muss.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *G. Birkhoff:* Teoria struktur (russische Übersetzung der 2. Ausg.), 1952.

[2] *O. Borůvka:* Theorie rozkladů v množině (mit franz. Résumé). Spisy přír. fak. MU v Brně, Nr. *278* (1946), 3—37.

[3] *B. Dushnik-E. W. Miller:* Partially ordered sets, Amer. Jour. of Math. *63* (1941), 600—610.

[4] *J. Hashimoto:* On direct product decomposition of partially ordered sets, Annals of Math. *54* (1951), 315—318.

[5] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, 1936.

[6] *A. Mostowski:* Logika matematyczna, 1948.

[7] *A. Mostowski-K. Kuratowski:* Teoria mnogości, 1952.

[8] *M. Richardson:* On weakly ordered systems, Bull. Amer. Math. Soc. *52* (1946), 113—116.

[9] *M. Richardson:* Relativization and extension of solution of irreflexive relations, Pacif. Jour. Math. *5* (1955), 551—584.

[10] *O. Ore:* Studies on directed graphs, I., Annals of Math. *63* (1956), 383—406.

[11] *A. Tarski:* On the calculus of relations, Jour. of Symb. Logic *6* (1941), 73—89.

[12] *P. Turán:* On the theory of graphs, Colloq. Math. *3* (1954), 19—30.

Výtah

K TEORII GRAFŮ

KAREL ČULÍK, Brno

(Došlo dne 25. srpna 1956)

Teorie grafů zahrnutá v monografii D. KÖNIGA [5] není rovnocenná moderním algebraickým teoriím. Její bohatství je ve velkém množství studovaných vlastností grafů. Definice grafu jako množiny, na níž je definována binární relace (srv. R. D. LUCE: *Networks satisfying minimality conditions*, Amer. Journ. Math. 75 (1953) nebo P. TURÁN [12], O. ORE [10] aj.), dovoluje jednoduchým a přirozeným způsobem zavést nejen známé základní pojmy teorie grafů (subgraf, isomorfismus, součet a souvislost), ale i zbývající základní pojmy algebraické teorie (homomorfizmus, jednoduchost, přímý součin aj.). Tímto způsobem je teorie grafů zahrnuta mezi moderní algebraické teorie. Např. teorie neorientovaných grafů je souřadnou teorií k teoriím různými způsoby uspořádaných množin. První je teorií množin se symetrickou relací, zatím co ostatní jsou teorie množin s různými transitivními relacemi. Všechny tyto teorie jsou součástí obecné teorie grafů, která se v některých bodech odlišuje (jednoduchost a přímý součin) od teorie relací matematické logiky (srv. A. TARSKI [11] nebo A. MOSTOWSKI [6]).

V předložené práci se zavádí základní algebraické pojmy (obecné) teorie grafů (v analogii k teorii grup) a dokazují některé základní věty o vztazích mezi nimi.

Jestliže specialisujeme podmínky kladené na grafy, ukazuje se, že obecnými definicemi jsou zavedeny nové pojmy a obecnými větami získány nové výsledky, např. v teorii částečně uspořádaných množin (např. pojmy homomorfismu, jednoduchosti, souvislosti a věty odstavce 2).

Резюме

К ТЕОРИИ ГРАФОВ

КАРЕЛ ЧУЛИК (Karel Čulík), Брно

(Поступило в редакцию 25/VIII 1956 г.)

Теория графов, изложенная в монографии Д. Кенига [5], не равноценна современным алгебраическим теориям. Ее богатство заключается в большом количестве изученных свойств графов. Определение графа как множества, на котором задано бинарное отношение (срв. Р. Д. Люс: *Networks satisfying minimality conditions*, *Amer. Jour. Math.* 75 (1953) или П. Туран [12], О. Орэ [10] и др.), позволяет простым и натуральным образом ввести как известные основные понятия теории графов (подграф, изоморфизм, сумма и связность), так и остальные основные понятия алгебраической теории (гомоморфизм, простота, прямое произведение и др.). Таким образом теория графов включена в современные алгебраические теории. Напр., теория неориентированных графов стоит наравне с теориями различным способом упорядоченных множеств. Первая есть не что иное как теория множеств с симметричным, а остальные — как теории множеств с транзитивными отношениями. Все эти теории принадлежат общей теории графов, которая отличается в некоторых пунктах (простота и прямое произведение) от теории реляции математической логики (срв. А. Тарский [11] или А. Мостовский [6]).

В настоящей работе вводятся алгебраические основные понятия (общей) теории графов (в аналогии с теорией групп), и доказываются некоторые основные теоремы об отношениях между ними.

Если условия для графов специализировать, то окажется, что введены новые понятия и получены новые теоремы, напр., теории частично упорядоченных множеств (напр., понятия гомоморфизма, простоты, связности и теоремы абзаца 2).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA K JEDNÉ DEFINICI TOPOLOGICKÝCH K-LINEÁLŮ

MILAN KOMAN, Praha

DT: 513.831

(Došlo dne 10. prosince 1956)

V této poznámce je ukázáno, že pro topologické K-lineály definované v [1], poznámka 2, str. 19, neplatí tvrzení: *Ke každému okolí nuly U existuje takové okolí nuly V, že* $0 \leqq a \leqq b$, $b \in V \Rightarrow a \in U$, uvedené na téže straně.

J. Mařík v [1] nazývá topologickým K-lineálem K-lineál Y, v němž je definována topologie tak, že jsou při ní algebraické i svazové operace spojité a jednobodové množiny uzavřené.

Následující příklad ukazuje, že pro takto definované topologické K-lineály neplatí věta:

Ke každému okolí nuly U existuje okolí nuly V tak, že

$$0 \leqq a \leqq b\,, \quad b \in V \Rightarrow a \in U\,.$$

Příklad 1. Buď F množina všech spojitých funkcí v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Buď G množina všech funkcí v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, různých od nuly jen pro konečný počet bodů z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Buď H množina všech funkcí $h = f + g$, kde $f \in F$, $g \in G$ (vyjádření je jednoznačné).

Množina H je zřejmě při obvyklé definici polouspořádání K-lineálem. Definujme v H normu. Pro $f \in F$ buď $\|f\| = \max\limits_{x \in \langle 0,1\rangle} |f(x)|$, pro $g \in G$ buď norma $\|g\| = \sum\limits_{x \in \langle 0,1\rangle} |g(x)|$, pro $h \in H$ buď pak $\|h\| = \|f\| + \|g\|$, kde $h = f + g$; $f \in F$ $g \in G$. Při takto definované normě je H topologickým K-lineálem.

Důkaz. K-lineál H je zřejmě normovaným lineárním prostorem. Je tedy výrazem $\varrho(a, b) = \|a - b\|$, kde $a, b \in H$, definována metrika, při níž jsou algebraické operace spojité (viz na př. větu 42 z [1]). Zbývá tedy dokázat, že i svazové operace jsou při dané normě spojité. Důkaz provedeme postupně.

1. *Je-li $h \in H$, $|h(x)| \leqq \varepsilon$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ a má-li h nejvýše n bodů nespojitosti, je* $\|h\| \leqq (2n + 1)\,\varepsilon$.

Je-li totiž $h = f + g$; $f \in F$, $g \in G$, pak platí

$$|h(x)| \leqq \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leqq \varepsilon\,, \quad |g(x)| \leqq 2\varepsilon\,.$$

Tedy $\|h\| = \|f\| + \|g\| \leqq \varepsilon + 2n\varepsilon = (2n + 1)\,\varepsilon$.

2. *Je-li $g \in G$, $g_0 \in H$ a platí-li $|g_0(x)| \leqq |g(x)|$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$, potom je $g_0 \in G$ a platí $\|g_0\| \leqq \|g\|$.* Zřejmé.

3. *Operace $|h|$ je v každém bodě $h \in H$ spojitá.*

Nechť $h_0 \in H$ a nechť h_0 má n bodů nespojitosti. Buď $h \in H$, $h = f + g$; $f \in F$, $g \in G$. Pak

$$\||h_0| - |h_0 + h|\| \leqq \||h_0| - |h_0 + f|\| + \||h_0 + f| - |h_0 + h|\|\,.$$

Avšak $||h_0| - |h_0 + f|| \leqq |f| \leqq \|f\|$, tedy podle 1 je

$$\||h_0| - |h_0 + f|\| \leqq (2n + 1)\,\|f\|\,.$$

Dále je $||h_0 + f| - |h_0 + h|| \leqq |g| \leqq \|g\|$, tedy podle 2 je

$$\||h_0 + f| - |h_0 + h|\| \leqq \|g\|\,.$$

Celkem tedy

$$\||h_0| - |h_0 + h|\| \leqq (2n + 1)\,\|f\| + \|g\| \leqq (2n + 1)\,\|h\|\,.$$

4. *Svazové operace jsou v každém bodě $h \in H$ spojité.*

Nechť $h, h_0 \in H$, pak

$$h_0 \vee h = h_0 + (h - h_0)_+ = \tfrac{1}{2}(|h_0 - h| + h_0 + h)\,,$$
$$h_0 \wedge h = - [(- h_0) \vee (- h)]\,.$$

H je tedy topologickým K-lineálem, přes to v něm však neplatí výše uvedená věta. Stačí volit na př. $g(x) = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) pro n hodnot $x \in \langle 0, 1\rangle$, jinak $g(x) = 0$ a $f(x) = 2\varepsilon$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$. Zřejmě nyní $0 \leqq g \leqq f$, ale zatím co $\|f\| = 2\varepsilon$, je $\|g\| = n\varepsilon$, což může být při daném $\varepsilon > 0$ libovolně velké (záleží na počtu bodů nespojitosti funkce g).

Neplatí-li však pro topologické K-lineály shora uvedená věta, neplatí pro ně ani celá řada jiných vět, o nichž bychom předpokládali, že pro ně budou platit, má-li mít totiž uvedená definice topologických K-lineálů rozumný význam. Jako příklad si ukážeme, že pro topologické K-lineály neplatí věta 46 b) a c) z [1].

Příklad 2. Buď H topologický K-lineál z příkladu 1. Definujme v něm funkcionálu J předpisem $J(h) = \sum\limits_{x \in \langle 0, 1\rangle} g(x)$, kde $h = f + g$; $f \in F$, $g \in G$. Snadno se zjistí, že J je spojitou funkcionálou. $J(1)$ však není podle [1] regulární funkcionálou, neboť

$$J_+(1) = \sup_{0 \leqq h \leqq 1} J(h) = \infty\,.$$

Není tedy $C(H)$ (množina všech spojitých funkcionál na topologickém K-lineálu H) K-lineálem a neplatí též $C(H) \subset R(H)$ (množina všech regulárních funkcionál na K-lineálu H).

Buď Y K-lineál, ve kterém je definována topologie, při níž jsou algebraické a svazové operace spojité; buď $\mathfrak{V}$ systém všech okolí nuly. Řekneme, že Y má vlastnost T_1, jestliže ke každému okolí $U \in \mathfrak{V}$ existuje takové okolí $V \in \mathfrak{V}$, že $x - y \in V \Rightarrow x_+ - y_+ \in U$; řekneme, že Y má vlastnost T_2, jestliže ke každému $U \in \mathfrak{V}$ existuje takové $V \in \mathfrak{V}$, že $0 \leqq x \leqq y \in V \Rightarrow x \in U$. Na str. 19 v [1] je vlastně dokázáno, že z vlastnosti T_1 plyne vlastnost T_2; pokládá se však za zřejmé, že každý K-lineál s topologií, při níž jsou algebraické a svazové operace spojité a jednobodové množiny uzavřené, má vlastnost T_1. Avšak K-lineál H z našeho příkladu nemá vlastnost T_2 a nemůže tedy mít ani vlastnost T_1 (o čemž se lze snadno přesvědčit přímo).

Snadno se zjistí, že naopak také z vlastnosti T_2 plyne vlastnost T_1.

To dokážeme takto: Buď $U \in \mathfrak{V}$. Protože $x = x_+ - x_-$, $x_+ \leqq |x|$, $x_- \leqq |x|$, plyne z vlastnosti T_2 a ze spojitosti algebraických operací, že ke každému $U \in \mathfrak{V}$ existuje takové $U_1 \in \mathfrak{V}$, že $|x| \in U_1 \Rightarrow x \in U$. Z vlastnosti T_2 plyne dále existence takového $U_2 \in \mathfrak{V}$, že $0 \leqq x \leqq y \in U_2 \Rightarrow x \in U_1$. Ze spojitosti algebraických a svazových operací pak plyne, že existuje takové $V \in \mathfrak{V}$, že $x \in V \Rightarrow$ $\Rightarrow |x| \in U_2$. Jestliže nyní $x - y \in V$, je $|x - y| \in U_2$; protože podle [1], str. 8, odst. 17 platí $|x_+ - y_+| \leqq |x - y|$, je $|x_+ - y_+| \in U_1$ a tedy $x_+ - y_+ \in U$. Tím je důkaz ukončen.

Vlastnost T_1 vyjadřuje stejnoměrnou spojitost zobrazení $x \rightarrow x_+$ a tedy (za předpokladu spojitosti algebraických operací) také stejnoměrnou spojitost svazových operací; to znamená, že ke každému $U \in \mathfrak{V}$ existuje $V \in \mathfrak{V}$ tak, že platí implikace:

$$x_1 - y_1 \in V, x_2 - y_2 \in V \Rightarrow (x_1 \vee x_2) - (y_1 \vee y_2) \in U, (x_1 \wedge x_2) - (y_1 \wedge y_2) \in U .$$

K-lineál Y, v němž je definována topologie, při níž jsou algebraické a svazové operace spojité a jednobodové množiny uzavřené, se v [1], str. 19 nazývá topologickým K-lineálem. Viděli jsme však, že tato definice není vhodná. Chceme-li pro topologické K-lineály zachovat aspoň hlavní věty, dokázané v [1] pro K-lineály s obecnou normou, musíme požadovat více, např. některou z vlastností T_1, T_2 nebo stejnoměrnou spojitost svazových operací.

LITERATURA

[1] *J. Mařík:* Vrcholy jednotkové koule v prostoru funkcionál na daném polouspořádaném prostoru, Časopis pro pěstování matematiky *79* (1954), 3—40.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ K-ЛИНЕАЛОВ

МИЛАН КОМАН (Milan Koman), Прага

(Поступило в редакцию 10/12 1956 г.)

Если определяются топологические K-линеалы как K-линеалы, в которых дана топология, при которой алгебраические и структурные операции непрерывны и одноточечные множества замкнуты, то не справедливо утверждение, приведенное в [1]:

В каждой окрестности нуля U существует такая окрестность нуля V, что $0 \leqq a \leqq b$, $b \in U \Rightarrow a \in V$.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ZU EINER DEFINITION DER TOPOLOGISCHEN K-LINEALE

MILAN KOMAN, Praha

(Eigelangt am 10. XII. 1956)

Definiert man topologische K-Lineale als K-Lineale, in welchen eine Topologie gegeben ist, in der algebraische Operationen und Verbandoperationen stetig und Einpunktsmengen geschlossen sind, dann gilt in [1] angeführte Behauptung nicht:

Zu jeder Umgebung des Nullelements U kann man eine solche Umgebung des Nullelements V finden, dass $0 \leqq a \leqq b$, $b \in V \Rightarrow a \in U$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA K CHARAKTERISTICKÉ VLASTNOSTI LAPLACEOVA OBRAZU FUNKCE A K PŘEVRÁCENÍ JISTÝCH PODMNOŽIN LAPLACEOVÝCH OBRAZŮ DISTRIBUCÍ V HILBERTOVY PROSTORY

JINDŘICH NEČAS, Praha DT: 517.63

(Došlo dne 25. února 1957)

V tomto pojednání je definována Laplaceova transformace jisté třídy distribucí, v níž jsou zahrnuty laplaceovsky transformovatelné funkce. Je podána nutná a postačující podmínka pro to, aby daný obraz byl obrazem funkce. Množina Laplaceových obrazů distribucí se dá psát jako $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \overline{H}_{kl}$, kde $\overline{H}_{kl}$ jsou Hilbertovy prostory.

1. Základní definice a vztahy

Nejdříve podáme definici distribuce řádu nejvýše $k = 0, 1, 2, \ldots$, růstu nejvýše $l = 0, 1, 2, \ldots$. Ostatní běžné definice z teorie Laplaceovy transformace, pokud je neuvedeme, jsou obsaženy v knize G. Doetsche [1] v tom znění, jak jich budeme užívat.

Definice 1. *Množina D se skládá z funkcí φ, definovaných v E_1, nekonečněkrát derivovatelných, rovných nule vně konečného intervalu.*

Definice 2. *Množina h_{kl} se skládá z funkcionálů h, definovaných na D (distribucí), které mají tyto vlastnosti: h je v h_{kl}, jestliže existuje funkce definovaná v $\langle 0, \infty)$, absolutně spojitá v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$ a taková, že $|f(t)| \leqq Me^{lt}$ (M je konstanta), $f(0) = 0$, $\int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-2lt} \, dt < \infty$, $h(\varphi) = (-1)^{k+1} \cdot \int_0^\infty f(t) \varphi^{(k+1)}(t) \, dt$.*

Dokážeme nyní tuto jednoduchou větu:

Věta 1. *Buď $h \in h_{k_1 l}$ a $h \in h_{k_2 l}$. Předpokládejme, že $k_1 \leqq k_2$. Buď $f_1(t)$ resp. $f_2(t)$ funkce určující distribuci h podle definice 2. Potom $f_1^{(k_1 - k_2)}(t) = f_2(t)$. Zde $f_1^{(0)}(t) = f_1(t)$, $f_1^{(-1)}(t) = \int_0^t f_1(s) \, ds$, $f_1^{(-2)}(t) = \int_0^t f_1^{(-1)}(s) \, ds$ atd.*

Důkaz. $h(\varphi) = (-1)^{k_1+1} \int\limits_0^\infty f_1(t)\, \varphi^{(k_1+1)}(t)\, dt$, $h(\varphi) = (-1)^{k_2+1} \int\limits_0^\infty f_2(t)\, \varphi^{(k_2+1)}(t)\, .\, dt$. Integrujeme-li v prvém integrálu per partes, dostaneme: $h(\varphi) = (-1)^{k_2+1}\, .$ $. \int\limits_0^\infty f^{(k_1-k_2)}(t)\, \varphi^{(k_2+1)}(t)\, dt$, a tedy $\int\limits_0^\infty [f_1^{(k_1-k_2)}(t) - f_2(t)]\, \varphi^{k_2+1}(t)\, dt = 0$ pro $\varphi \in D$. Položme $f(t) = f_1^{(k_1-k_2)}(t) - f_2(t)$; $f(t)$ je spojitá v $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$. Předpokládejme, že pro nějaké $t_1 > 0$ je $f(t_1) \neq 0$. Najděme $\Psi \in D$ takovou, že $\int\limits_0^\infty f(t)\, \Psi(t)\, dt > 0$. Taková funkce vždy existuje. Snadno se dá ukázat, že existuje funkce $X(t) \in D$ taková, že pro $t \geqq 0$ je $X^{(k_2+1)}(t) = \Psi(t)$. Vskutku, položme

$$\Psi_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} [\Psi(t) - \Psi(t + A_0)]\, dt\, ,$$

kde A_0 je tak veliké, že $\Psi(t) = 0$, je-li t non $\in \langle -\tfrac{1}{2}A_0, \tfrac{1}{2}A_0\rangle$. Jestliže již budeme mít zkonstruovánu funkci $\Psi_k(t)$, potom

$$\Psi_{k+1}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} [\Psi_k(t) - \Psi_k(t + A_k)]\, dt\, ,$$

kde A_k je tak veliké, že $\Psi_k(t) = 0$, je-li t non $\in \langle -\tfrac{1}{2}A_k, \tfrac{1}{2}A_k\rangle$. Zřejmě $\Psi_{k_2+1}(t) \in D$ a $\Psi_{k_2+1}^{(k_2+1)}(t) = \Psi(t)$. To vede ovšem ke sporu.

Definice 3. *Funkce $h(t)$ definovaná skoro všude v $\langle 0, \infty)$ se nazývá laplaceovsky transformovatelná nebo originálem, jestliže platí:*

1. *v každém konečném intervalu $0 \leqq a \leqq b < \infty$ je integrabilní podle Lebesguea,*

2. *existuje komplexní číslo p tak, že $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_0^A e^{-pt}h(t)\, dt$ je konečné číslo. Laplaceovým obrazem funkce $h(t)$ nazýváme potom $H(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}h(t)\, dt$. Množinu laplaceovsky transformovatelných funkcí budeme značit m.*

Definice 4. *Laplaceův obraz $H(p)$ distribuce $h \in h_{kl}$ je $H(p) = p^{k+1} \int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)\, dt$ a je definován pro p, pro něž* $\mathrm{Re}\, p > l$.

Poznamenejme nejdříve, že obraz distribuce nezávisí na funkci f definující ji jako funkcionál v D. To plyne snadno z věty 1 a známého faktu, že Laplaceův obraz funkce $\int\limits_0^t f(s)\, ds$ je $\dfrac{F(p)}{p}$, kde $f(s)$ je originál a $F(p)$ je jeho obraz.

Ukažme nyní, že množina všech originálů ve smyslu definice 3 je algebraicky isomorfní s množinou všech distribucí řádu nula a růstu $l \geqq 0$. To umožní psát $m = \sum_{l=0}^{\infty} h_{0l}$. Navíc ukažme, že definice 4 je zobecněním definice 3. Na tyto otázky odpovídá

věta 2. *Funkce h patří do m a integrál $\int_0^{\infty} e^{-pt}h(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje pro $\operatorname{Re} p > \sigma \geqq 0$ tehdy a jenom tehdy, existuje-li funkce $h_1(t)$ definovaná v $\langle 0, \infty)$, absolutně spojitá v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$ a pro niž platí: $h_1(0) = 0$, $|h_1(t)| \leqq M(\tau)\, e^{\tau t}$, kde $M(\tau)$ závisí pouze na τ a $\tau > \sigma \geqq 0$. Přitom $h_1'(t) = h(t)$. Je-li $h \in m$, potom $H(p) = pH_1(p)$.*

Důkaz. *Nutnost.* Položme $h_1(t) = \int_0^t h(u)\,\mathrm{d}u$. Buď $x > \sigma$. Je $h_1(t) = \int_0^t h(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t h(u)\, e^{-xu}e^{xu}\,\mathrm{d}u = e^{xu}\int_0^u h(s)\, e^{-xs}\,\mathrm{d}s]_0^t - x\int_0^t(\int_0^u h(s)\, e^{-xs}\,\mathrm{d}s)\, e^{xu}\,\mathrm{d}u$. Vzhledem k tomu, že $\lim_{u\to\infty} \int_0^u h(s)\, e^{-xs}\,\mathrm{d}s$ je konečné číslo, dostáváme

$$|h_1(t)| \leqq M(x)\, e^{xt}\,. \tag{1}$$

Postačitelnost. Buď $h(t) = h_1'(t)$ a $h_1(t)$ nechť splňuje předpoklady věty 1. Buď $\operatorname{Re} p > \sigma$. Zvolme $\sigma < x < \operatorname{Re} p$.

$$\int_0^A h(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t = h_1(A)\, e^{-pA} + p\int_0^A h_1(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t\,.$$

Protože $|h_1(A)| \leqq M(x)\, e^{xA}$, dostáváme odtud, že integrál $\int_0^{\infty} h(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ konverguje pro $\operatorname{Re} p > \sigma$ a navíc $H(p) = pH_1(p)$. Tím je důkaz věty 2 hotov.

Jestliže tedy funkci $h \in m$ přiřadíme distribuci

$$h(\varphi) = -\int_0^{\infty}(\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \in \sum_{l=0}^{\infty} h_{0l}$$

a naopak distribuci z $\sum_{l=0}^{\infty} h_{0l}$, $h(\varphi) = -\int_0^{\infty} f(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ přiřadíme funkci $f'(t)$, dostáváme výše zmíněný algebraický isomorfismus. Z věty 2 bezprostředně plyne, že definice 4 je zobecněním definice 3.

2. Zavedení prostorů $\bar{H}_{-1l}$

Definice 5. *h_{-1l} je množina funkcí $h(t)$ absolutně spojitých v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$, pro které dále platí $h(0) = 0$, $|h(t)| \leqq Me^{lt}$, $\int_0^{\infty} |h(t)|^2\, e^{-2lt}\,\mathrm{d}t < \infty$. H_{-1l} je množina Laplaceových obrazů funkcí z h_{-1l}.*

H_{-1l} je zřejmě lineární prostor. Při zavedení skalárního součinu v H_{-1l} a doplnění na úplný prostor se budeme opírat o známou větu z teorie Laplaceovy transformace.

Věta 3. *Podmínka*

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau < \infty \tag{2}$$

je nutná a stačí k tomu, aby funkce $F(p)$, regulární v polorovině $\operatorname{Re} p > \gamma$, *byla Laplaceovým obrazem funkce $f(t)$, pro kterou platí* $\int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-2\gamma t} \, dt < \infty$. *Je-li podmínka* (2) *splněna, potom*

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\gamma + i\tau)|^2 \, d\tau = 2\pi \int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-2\gamma t} \, dt \,. \tag{3}$$

$F(\gamma + i\tau)$ je funkce, pro niž

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\gamma + i\tau)|^2 \, d\tau < \infty \,, \quad \lim_{\substack{\sigma\to\gamma \\ \sigma>\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau) - F(\gamma + i\tau)|^2 \, d\tau = 0 \,.$$

Tato limita funkcí $F(\sigma + i\tau)$ v uvedeném smyslu vždy existuje.

Důkaz viz [1], str. 422.

Jestliže $h \in h_{-1l}$, potom $\int_0^\infty |h(t)|^2 e^{-2lt} \, dt < \infty$, a tedy $\sup_{\sigma>l} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau < \infty$.

Zaveďme skalární součin a normu v lineárním prostoru H_{-1l} takto:

Definice 6. *Je-li $F(p)$ a $G(p)$ v H_{-1l}, potom skalární součin funkcí $F(p)$ a $G(p)$ je* $(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} F(l + i\tau) \overline{G(l + i\tau)} \, d\tau$. *Normu pro funkci $F(p)$ definujeme takto:* $\|F\| = [\int_{-\infty}^{\infty} |F(l + i\tau)|^2 \, d\tau]^{\frac{1}{2}}$.

Zaveďme nyní do našich úvah množiny funkcí P_l, $l = 0, 1, \ldots$, s těmito vlastnostmi:

Definice 7. *Buď P_l ($l = 0, 1, \ldots$) množina funkcí $F(p)$, pro niž platí:*

1. *$F(p)$ je regulární v polorovině* $\operatorname{Re} p > l$,
2. $\sup_{\sigma>l} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau < \infty$.

V P_l definujeme skalární součin funkcí $F(p)$ a $G(p)$ rovnicí

$$(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} F(l + i\tau) \, \overline{G(l + i\tau)} \, d\tau \,.$$

Z věty 3 plyne téměř bezprostředně:

Věta 4. *P_l je Hilbertův prostor a $P_l = \overline{H}_{-1l}$.*

Důkaz. Jde v podstatě o to, dokázat, že a) P_l je úplný, b) $\|F\| = 0 \Rightarrow F = 0$. Důkaz platnosti ostatních axiomů Hilbertova prostoru je zcela jednoduchý.

a) Buď tedy F_n cauchyovská posloupnost funkcí z P_l. Z úplnosti prostoru $L_2(0, \infty)$ plyne existence $f(t)$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty |f_n(t) - f(t)|^2 e^{-2lt} \, dt = 0 .$$

$F(p)$ však leží v P_l a je opět podle (3) nutně

$$\lim_{n\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(l + i\tau) - F(l + i\tau)|^2 \, d\tau = 0 .$$

b) Nechť tedy $\|F\| = 0$. Podle (3) však $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau = 0$ pro $\sigma > l$, což vzhledem k regulárnosti $F(p)$ má za následek, že $F(p) = 0$. Rovnost $P_l = \overline{H}_{1l}$ plyne bezprostředně z (3).

V dalším budeme potřebovat následující větu z teorie Laplaceovy transformace:

Věta 5. *Nechť $F \in \overline{H}_{-1l}$. Potom pro $\sigma > l$ je* $f(t) = e^{\sigma t} \operatorname{l.i.m}_{\omega=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{i\tau t} \cdot F(\sigma + i\tau) \, d\tau$, *což znamená*

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_{-\infty}^{0} |f_\omega(t)|^2 e^{-2\sigma t} \, dt + \int_0^\infty |f(t) - f_\omega(t)|^2 e^{-2\sigma t} \, dt = 0 .$$

Zde klademe $f_\omega(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{i\tau t} F(\sigma + i\tau) \, d\tau$.

Důkaz viz [1], str. 423.

Uveďme nyní charakteristiku těch $F(p)$, které jsou v H_{-1l}.

Věta 6. *Nechť $F \in \overline{H}_{-1l}$. Nutná a postačující podnínka pro to, aby $F \in H_{-1l}$, je:*

1. *integrál* $\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p) \, e^{pt} \, dp$ *je nezávislý na x (zde se integruje po přímce* $\operatorname{Re} p = x > l$ *ve smyslu hlavní hodnoty),*

2. $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p) \, e^{+pt} \, dp$ *je absolutně spojitá funkce v každém omezeném intervalu z* $\langle 0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$,

3. $|\varphi(t)| \leqq M e^{lt}$, *kde M je nějaká konstanta.*

Důkaz. *Nutnost.* Je-li $F \in \overline{H}_{-1l}$, potom $\int\limits_0^\infty |f(t)|\, e^{-xt}\, dt < \infty$ pro $x > l$, jak plyne z odhadu $|f(t)| \leqq Me^{lt}$. Ze známé věty o inversním integrálu (viz [1], str. 212) plynou podmínky 1, 2, 3.

Postačitelnost. Nechť platí podmínky 1, 2, 3. Podle věty 5 je

$$f(t) = e^{\sigma t} \operatorname*{l.i.m}_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\omega}^{\omega} e^{i\tau t} F(\sigma + i\tau)\, d\tau.$$

Z množiny funkcí $f_\omega(t)$ vybereme posloupnost konvergující skoro všude k $f(t)$. Tato limita se však vzhledem k podmínce 1 věty 6 skoro všude rovná $\varphi(t)$. Tím je důkaz proveden.

Z konvergence v prostoru $\overline{H}_{-1l}$ plynou některé téměř samozřejmé výsledky.

Věta 7. *Nechť F_n je v $\overline{H}_{-1l}$ a $F_n \to 0$ v prostoru $\overline{H}_{-1l}$. Potom na každé omezené oblasti Ω, jejíž uzávěr leží napravo od přímky* $\operatorname{Re} p = l$, *$F_n^{(k)} \to 0$ stejnoměrně bodově ($k = 0, 1, 2, \ldots, F_n^{(k)}$ jsou derivace).*

Důkaz plyne bezprostředně z faktu, že existuje obdélník Ω', jenž leží napravo od přímky $\operatorname{Re} p = l$ a přitom $\Omega' \supset \overline{\Omega}$. Zřejmě platí $\int\limits_{\Omega'} |F_n(p)|^2\, d\Omega \to 0$, což je podmínka postačující pro platnost naší věty. (Viz [3], str. 431.)

3. Užití prostorů $\overline{H}_{-1l}$

Hilbertův prostor $\overline{H}_{-1l}$ nám může prokázat velmi platné služby při důkaze existence a unicity řešení parciálních diferenciálních rovnic. Ukážeme to na jednoduchém, ale typickém příkladě:

Hledejme rozdělení teploty v konečné tyči délky 2, *je-li počáteční teplota rovna nule a jsou-li oba její konce udržovány na konstantní teplotě* 1.

Na řešení budeme klást tyto podmínky:

1. $u(t, x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ jsou spojité funkce v oblasti Ω $(0 < t < \infty,\ -1 < x < 1)$,
2. existuje M tak, že $u(t, x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ jsou v absolutní hodnotě $\leqq M(\varepsilon)\, e^t$ pro $t > 0$ a $-1 + \varepsilon \leqq x \leqq 1 - \varepsilon$,
3. $u(t, x)$ je spojitě prodlužitelná k nule, když $t \to 0$ a $-1 < x < 1$,
4. $\lim\limits_{x \to \pm 1} \int\limits_0^\infty |1 - u(t, x)|^2\, e^{-2t}\, dt = 0,$ (4)
5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ uvnitř Ω.

Jestliže budeme postupovat obvyklým způsobem (viz např. [4]), potom pro obraz $U(p, x) = \int_0^\infty u(t, x)\, e^{-pt}\, dt$ definovaný pro $\operatorname{Re} p > 1$ dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{d^2U(p,x)}{dx^2} - pU(p,x) = 0\,. \tag{6}$$

Její obecné řešení je

$$U(p, x) = A(p) \operatorname{ch} \sqrt{p}\,.\, x + B(p) \operatorname{sh} \sqrt{px}\,.$$

Z podmínky $\lim\limits_{x \to \pm 1} \sup\limits_{\sigma > 1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| U(\sigma + i\tau, x) - \frac{1}{\sigma + i\tau} \right|^2 d\tau = 0$, která je ekvivalentní podmínce (4), a z věty 7 plyne, že pro $\operatorname{Re} p > 1$ je $A(p) \operatorname{ch} \sqrt{p} \pm \pm B(p) \operatorname{sh} \sqrt{p} = \frac{1}{p}$. Odtud plyne, že $Ap = \frac{1}{p} \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{p}}$, $B(p) = 0$. Je tedy

$$U(p, x) = \frac{1}{p} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{p}\,.\, x}{\operatorname{ch} \sqrt{p}}\,. \tag{7}$$

Jestliže $U(p, x)$ je obrazem s požadovanými vlastnostmi, potom

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{p} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{p}\,.\, x}{\operatorname{ch} \sqrt{p}}\, e^{pt}\, dp\,. \tag{8}$$

Tento integrál bereme ve smyslu hlavní hodnoty ($\sigma > 1$). Funkce $u(t, x)$ definovaná v (8) nyní splňuje zřejmě vlastnost 1, a vzhledem k tomu, že platí $\left| \frac{\operatorname{ch} \sqrt{p}\,.\, x}{\operatorname{ch} \sqrt{p}} \right| \leq M e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\tau}(1 - |x|)}$, dostáváme 2. Dále platí zřejmě 4 a 5. Obraz $u(t, x)$ je 7. Protože $u(t, x)$ je spojitě prodlužitelná pro $t \to 0$, musí toto spojité prodloužení být rovno nule, jak plyne z rovnice (6). Tím jsme dokázali existenci řešení. Unicitu ve třídě funkcí splňujících podmínky 1, 2, 3, 4, 5 bychom dokázali úplně stejným způsobem.

4. Vyšetřování prostorů $\bar{H}_{kl}$

Nyní budeme vyšetřovat lineární prostor H_{0l} a obecně lineární prostory H_{kl}.

Definice 8. *H_{kl} je množina Laplaceových obrazů distribucí z h_{kl} ($k = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 0, 1, 2, \ldots$). Je-li $F(p)$ a $G(p)$ v H_{kl}, potom definujeme skalární součin rovností*

$$(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(l + i\tau)\, \overline{G(l + i\tau)}}{(l + i\tau)^{k+1}\, (l - i\tau)^{k+1}}\, d\tau\,.$$

Zcela analogicky, jako jsme to učinili v oddíle 3, se dá ukázat, že $\overline{H}_{kl}$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem zavedeném v definici 8.

Snadno se též nahlédne, že $\overline{H}_{kl}$ se skládá ze všech funkcí s vlastností

$$\sup_{\sigma > l} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(\sigma + i\tau)}{(\sigma + i\tau)^{k+1}} \right|^2 d\tau < \infty ; \tag{9}$$

$$F(p) \text{ je regulární v polorovině } \operatorname{Re} p > l . \tag{10}$$

Zobrazme nyní prostor $\overline{H}_{-1l}$ na $\overline{H}_{kl}$ takto: Prvku $F \in \overline{H}_{-1l}$ přiřadíme $p^{k+1}F(p) \in \overline{H}_{kl}$. Toto zobrazení je isometricky isomorfní. Symbolicky píšeme: $Z(F) = p^{k+1}F$.

Zabývejme se nyní prostory $\overline{H}_{0l}$. Z konstrukce je zřejmé, že množina H_{0l} je hustá v $\overline{H}_{0l}$. (Je snadné ukázat, že H_{0l} je hustá v $\overline{H}_{kl}$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$.) Jest $H_{0l} \neq \overline{H}_{0l}$. To plyne ze zřejmého faktu, že $H_{-1l} \neq \overline{H}_{-1l}$. Například v $\overline{H}_{01}$ leží 1, což odpovídá distribuci, která je prvkem h_{11} a k níž příslušná absolutně spojitá funkce je $f(t) = t$. Tato distribuce se nazývá Diracova funkce $\delta_0(t)$. Jak jsou tedy charakterisovány ty obrazy, jejichž originály jsou z h_{0l} a tedy funkce?

Věta 8. *Nutná a postačující podmínka, aby $F \in H_{0l}$ je, aby*

0. $F \in \overline{H}_{0l}$,

1. *integrál* $\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} \, dp$ *byl nezávislý na x (zde se integruje po přímce $\operatorname{Re} p = x > l$ ve smyslu hlavní hodnoty),*

2. $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} \, dp$ *byla absolutně spojitá funkce v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$,*

3. $|\varphi(t)| \leqq M e^{lt}$, *kde M je nějaká konstanta.*

Důkaz. *Nutnost.* Je-li $F \in H_{0l}$, potom $\frac{F(p)}{p} \in H_{-1l}$, a tedy podle věty 6 platí podmínky 1, 2, 3.

Postačitelnost. Platí-li podmínky 0, 1, 2, 3, potom podle věty 6 platí, že $\frac{F(p)}{p} \in H_{-1l}$, a tedy $F(p) \in H_{0l}$.

Již dříve bylo poznamenáno, že $m = \sum_{l=0}^{\infty} h_{0l}$. Věta 8 dává tedy úplnou charakteristiku Laplaceových obrazů funkcí. Charakteristiku Laplaceových obrazů podal RICARDO SAN JUAN LLOSA v [5]. Naše charakteristika se liší od jeho hlavně proto, že východiskem pro důkaz věty 6 byla věta 3.

Parafrází věty 8 pro prostory $\overline{H}_{kl}$ je věta následující:

Věta 9. *Nutná a postačující podmínka k tomu, aby $F \in H_{kl}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, je, aby*

0. $\mathring{F} \in \overline{H}_{kl}$,

1. *integrál* $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p^{k+1}} e^{pt}\,\mathrm{d}p$ *byl nezávislý na x (integruje se po přímce* $\operatorname{Re} p = x > l$ *ve smyslu hlavní hodnoty),*

2. *integrál* $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p^{k+1}} e^{pt}\,\mathrm{d}p$ *byla absolutně spojitá funkce v každém konečném intervalu z* $\langle 0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$,

3. $|\varphi(t)| \leqq Me^{lt}$, *kde M je nějaká konstanta.*

Poznamenejme, že konvergenci v prostoru $\overline{H}_{kl}$ odpovídá v prostoru originálů konvergence v průměru originálů příslušných k $\frac{F(p)}{p^{k+1}}$ s vahou e^{-2lt}. To znamená, že

$$F_n \to F \Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-2lt} \,|g_n(t) - g(t)|^2\,\mathrm{d}t \to 0\,.$$

Funkce $g(t)$ nazveme $(k + 1)$-krát integrované distribuce.

Definice 9. *Je-li distribuce h daná funkcionálem podle definice 2, tedy*

$$h(\varphi) = (-1)^{k+1} \int\limits_0^\infty f(t)\, \varphi^{k+1}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

potom $g(t) = f'(t)$ je k-krát integrovaná distribuce h.

Hilbertovy prostory $\overline{H}_{kl}$ mohou být základnou pro důkaz existence a unicity řešení některých parciálních diferenciálních rovnic. Tak příklad uvedený v oddíle 3 můžeme pozměnit tak, že místo teploty 1 na koncích tyče budeme uvažovat teplotu rovnou Diracově funkci $\delta_0(t)$, tedy distribuci. Podmínky 1, 2, 3 a 5 příkladu zůstanou nezměněny, pouze podmínka 4 bude:

$$\lim_{x \to \pm 1} \int\limits_0^\infty e^{-2t} |1 - \int\limits_0^t u(\tau, x)\,\mathrm{d}\tau|^2\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Obraz jediného řešení v tomto případě je $\frac{\operatorname{ch} \sqrt{p}\, x}{\operatorname{ch} \sqrt{p}}$.

LITERATURA

[1] *G. Doetsch:* Handbuch der Laplace-Transformation, Basel 1950.

[2] *V. A. Ditkin, P. I. Kuzněcov:* Příručka operátorového počtu, Praha 1954.

[3] *А. И. Маркушевич:* Теория аналитических функций, Moskva 1950.

[4] *К. Дж. Трантер:* Интегральные преобразования в математической физике, Moskva 1956.

[5] *Ricardo San Juan Llosa:* Charakterisierung der durch einfach konvergente Laplace-Integrale darstellbaren Funktionen, Mathematische Nachrichten *12*, 1954, č. 1—2, 113—118.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ ПО ПОВОДУ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО СВОЙСТВА ЛАПЛАСОВСКОГО ОБРАЗА ФУНКЦИИ И ПРЕВРАЩЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПОДМНОЖЕСТВ ЛАПЛАСОВСКИХ ОБРАЗОВ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВА ГИЛЬБЕРТА

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага

(Поступило в редакцию 25/II 1957 г.)

В работе дается определение множества обобщенных функций в E_1 $(= (-\infty, \infty))$, равных нулю для $t < 0$; далее определяются их лапласовские образы. Введенные обобщенные функции характерны тем, что их образ является регулярной функцией $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > l$ (l — целое) и обладает тем свойством, что существует целое число $k \geqq 0$ так, что $\dfrac{F(p)}{p^{k+1}}$ есть лапласовский образ функции. Далее в замечании показано, что множество образов можно записать в виде суммы пространств Гильберта $\overline{H}_{kl}$. Из теоремы, содержащей необходимое и достаточное условие для того, чтобы данный элемент из $\overline{H}_{kl}$ принадлежал H_{kl}, следует также необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная регулярная функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p > l$ была лапласовским образом функции. На основании равенства Парсеваля показано, как можно сформулировать краевые проблемы для некоторых дифференциальных уравнений с частными производными и доказать существование и единственность решений из легко заметных свойств образов.

Résumé

UNE NOTE SUR LA PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE D'UNE FONCTION ET SUR CERTAINS ESPACES DE HILBERT $\overline{H}_{kl}$ DONT LA SOMME $\sum_{k=0,\ l=0}^{\infty} \overline{H}_{kl}$ EST L'ENSEMBLE DES TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE DISTRIBUTIONS

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Reçu le 25 février 1957)

Le travail commence par la définition d'une certaine classe de distributions en $E_1 = (-\infty, \infty)$, nulles pour $t < 0$, pour lesquelles il est possible de définir la transformation de Laplace.

Les transformées des distributions en question sont les fonctions analytiques $F(p)$ dans le domaine $\operatorname{Re} p > l$ $(l = 0, 1, 2, \dots)$ et telles qu'on peut trouver un nombre entier $k \geqq 0$, pour que $\frac{F(p)}{p^{k+1}}$ soit la transformée de Laplace d'une fonction.

Il est montré dans une note que l'ensemble des transformées est la somme des certains espaces de Hilbert.

Dans ce travail, il y a un théorème qui donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $F(p)$ (analytique dans le domaine $\operatorname{Re} p > l$) soit la transformée de Laplace d'une fonction.

Puis on explique, comment on peut définier les problèmes aux limites pour les équations spéciales aux dérivées partielles et en s'appuyant sur l'égalité de Parceval démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O STYKU VARIET V AFINNÍM LINEÁRNÍM PROSTORU

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha

DT: 519.55

(Došlo dne 25. března 1957)

V tomto článku je určitým způsobem zaveden pojem styku dvou variet ${}^{(1)}X_p, {}^{(2)}X_p$ dimense p v afinním lineárním prostoru E_n ($n \geqq 2$, $1 \leqq p \leqq n - 1$). Definovaný pojem styku je invariantní ve smyslu afinní geometrie. Jsou nalezeny velmi jednoduché nutné a postačující podmínky pro to, aby uvažované (spojitě diferencovatelné) variety měly ve společném bodě styk aspoň k-tého řádu ($k \geqq 1$). V části II článku se uvažuje speciální „metrická" definice styku křivek a styku nadploch v euklidovském n-rozměrném prostoru a prokazuje se jejich ekvivalence (ve smyslu v práci popsaném) s „afinní" definicí styku těchto variet, která je se svými některými důsledky uvedena v části I.

I

V lineárním afinním prostoru E_n o souřadnicích x^α ($\alpha = 1, \ldots, n$) jsou dány dvě variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ dimense p ($1 \leqq p < n$) parametrickými popisy

$$ {}^{(1)}X_p\colon \quad x^\alpha = {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a), \quad a = 1, \ldots, p; \ \alpha = 1, \ldots, n\,, \qquad (1,1)_a $$

$$ {}^{(2)}X_p\colon \quad x^\alpha = {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a), \quad a = 1, \ldots, p; \ \alpha = 1, \ldots, n\,. \qquad (1,1)_b $$

Budeme v dalším předpokládat:

(a) variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají společný bod $\underset{0}{P} \in E_n$, jehož souřadnice $\underset{0}{x^\alpha}$ odpovídají hodnotám ${}^{(1)}\underset{0}{\eta^a}$ parametrů ${}^{(1)}\eta^a$ variety ${}^{(1)}X_p$ a hodnotám ${}^{(2)}\underset{0}{\eta^a}$ parametrů ${}^{(2)}\eta^a$ variety ${}^{(2)}X_p$;

(b) funkce ${}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)$ mají spojité parciální derivace

$$ {}^{(1)}B^\alpha_{a_1\ldots a_l} = \frac{\partial^l\, {}^{(1)}x^\alpha}{\partial\, {}^{(1)}\eta^{a_1} \ldots \partial\, {}^{(1)}\eta^{a_l}}\,, \quad l = 1, \ldots, k \qquad (1,2)_a $$

v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta^1}, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta^p})$; funkce ${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\underset{0}{\eta^a})$ mají spojité parciální derivace

$$ {}^{(2)}B^\alpha_{a_1\ldots b_l} \equiv \frac{\partial^l\, {}^{(2)}x^\alpha}{\partial\, {}^{(2)}\eta^1, \ldots, \partial\, {}^{(2)}\eta^{a_l}}\,, \quad l = 1, \ldots, k \qquad (1,2)_b $$

v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(2)}\underset{0}{\eta^1}, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{\eta^p})$; přitom je $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$.

(c) bod $\underset{0}{P}$ je regulárním bodem variety ${}^{(1)}X_p$ a současně regulárním bodem variety ${}^{(2)}X_p$. To znamená, že matice

$$\begin{pmatrix} {}^{(1)}B_1^1 & {}^{(1)}B_1^2 & \dots & {}^{(1)}B_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{(1)}B_p^1 & {}^{(1)}B_p^2 & \dots & {}^{(1)}B_p^n \end{pmatrix}_{{}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a}$$

a matice

$$\begin{pmatrix} {}^{(2)}B_1^1 & {}^{(2)}B_1^2 & \dots & {}^{(2)}B_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{(2)}B_p^1 & {}^{(2)}B_p^2 & \dots & {}^{(2)}B_p^n \end{pmatrix}_{{}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\underset{0}{\eta}^a}$$

mají hodnost p.

Věta 1. *Nechť ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ jsou variety v E_n s vlastnostmi shora citovanými. Buďtež $\underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \underset{0}{\overset{(2)}{v}}{}^\alpha, \dots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha$ konstantní vektory v E_n s vlastnostmi*

$$\varDelta_1 \equiv [{}^{(1)}\underset{0}{B}{}_1^\alpha, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}_2^\alpha, \dots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}_p^\alpha, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \dots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0\,, \tag{1,3$_a$}$$

$$\varDelta_2 \equiv [{}^{(2)}\underset{0}{B}{}_1^\alpha, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}_2^\alpha, \dots, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}_p^\alpha, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \dots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0\,, \tag{1,3$_b$}$$

kde symbol $\underset{0}{B}{}_a^\alpha$ značí hodnotu veličiny B_a^α v bodě $\underset{0}{P}$ společném varietám ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$. Potom systémem rovnic

$${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda} \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n \tag{1,4}$$

je definována lokálně určitá korespondence mezi body variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, která je jednojednoznačná v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{P}$.

Důkaz. Položme

$$F^\alpha({}^{(2)}\eta^a, {}^{(1)}\eta^a, \underset{s}{\lambda}) \equiv {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) - \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda} \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha, \quad (\alpha = 1, \dots, n)\,.$$

Potom systém (1,4) můžeme psát stručněji ve tvaru

$$F^\alpha({}^{(2)}\eta^a, {}^{(1)}\eta^a, \underset{s}{\lambda}) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n)\,. \tag{1,5}$$

Vzhledem k předpokladu (a) jsou rovnice (1,5) splněny pro

$${}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a\,, \quad {}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a\,, \quad \underset{s}{\lambda} = 0 \quad (a = 1, \dots, p;\ s = 1, \dots, n-p)\,.$$

Z předpokladu (b) a z (1,5), (1,4) plyne dále, že funkce $F^\alpha({}^{(2)}\eta^a, {}^{(1)}\eta^a, \underset{s}{\lambda})$ $(\alpha = 1, \dots, n)$ mají v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^1, {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^2, \dots, {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^p, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^2, \dots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p, \underset{1}{\lambda} = 0, \underset{2}{\lambda} = 0, \dots, \underset{n-p}{\lambda} = 0)$ spojité parciální derivace podle ${}^{(2)}\eta^a$,

${}^{(1)}\eta^a$, $\underset{s}{\lambda}$ až do řádu k-tého (včetně). Z (1,5), (1,4), $(1,2)_{a,b}$, $(1,3)_{a,b}$ snadno vypočteme, že

$$\left[\frac{\partial F^\alpha}{\partial {}^{(2)}\eta^1}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial {}^{(2)}\eta^2}, \dots, \frac{\partial F^\alpha}{\partial {}^{(2)}\eta^p}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial \underset{1}{\lambda}}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial \underset{2}{\lambda}}, \dots, \frac{\partial F^\alpha}{\partial \underset{n-p}{\lambda}}\right]_{P_0} =$$

$$= (-1)^{n-p}\,[\underset{0}{{}^{(2)}B^\alpha_1}, \underset{0}{{}^{(2)}B^\alpha_2}, \dots, \underset{0}{{}^{(2)}B^\alpha_p}, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \underset{0}{\overset{(2)}{v}}{}^\alpha, \dots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0\,,$$

$$\left[\frac{\partial F^\alpha}{\partial {}^{(1)}\eta^1}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial {}^{(1)}\eta^2}, \dots, \frac{\partial F^\alpha}{\partial {}^{(1)}\eta^p}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial \underset{1}{\lambda}}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial \underset{2}{\lambda}}, \dots, \frac{\partial F^\alpha}{\partial \underset{n-p}{\lambda}}\right]_{P_0} =$$

$$= (-1)^{n}\,[\underset{0}{{}^{(1)}B^\alpha_1}, \underset{0}{{}^{(1)}B^\alpha_2}, \dots, \underset{0}{{}^{(1)}B^\alpha_p}, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \underset{0}{\overset{(2)}{v}}{}^\alpha, \dots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0.$$

Na základě známé existenční věty z teorie implicitních funkcí plyne pak tento fakt: Rovnicemi (1,5) resp. (1,4) jsou lokálně, v dostatečně malém okolí bodu $(\underset{0}{{}^{(1)}\eta^1}, \underset{0}{{}^{(1)}\eta^2}, \dots, \underset{0}{{}^{(1)}\eta^p})$, definovány funkce

$$ {}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b)\,, \quad a = 1, \dots, p\,, \qquad (1,6)_a$$

$$ \underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^b)\,, \quad s = 1, \dots, n-p\,, \qquad (1,6)_b$$

které mají spojité parciální derivace podle proměnných ${}^{(1)}\eta^a$ až do řádu k-tého (včetně) v uvažovaném okolí. Právě tak jsou rovnicemi (1,4) lokálně, v dostatečně malém okolí bodu $(\underset{0}{{}^{(2)}\eta^1}, \underset{0}{{}^{(2)}\eta^2}, \dots, \underset{0}{{}^{(2)}\eta^p})$, definovány funkce

$$ {}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\eta^a({}^{(2)}\eta^b)\,, \quad a = 1, \dots, n-p\,, \qquad (1,7)_a$$

$$ \underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(2)}\eta^b)\,, \qquad s = 1, \dots, n-p \qquad (1,7)_b$$

se spojitými parciálními derivacemi až do řádu k-tého (včetně) v uvažovaném okolí. Zřejmě je

$$ \underset{0}{{}^{(2)}\eta^a} = {}^{(2)}\eta^a(\underset{0}{{}^{(1)}\eta^b})\,, \quad a = 1, \dots, p\,, \qquad (1,8)_a$$

$$ (\underset{s}{\lambda}) = \underset{s}{\lambda}(\underset{0}{{}^{(1)}\eta^b}) = 0\,, \quad s = 1, \dots, n-p\,. \qquad (1,8)_b$$

Odtud (tj. především z $(1,6)_a$, $(1,7)_a$) plyne, že relacemi $(1,6)_a$ je lokálně, v okolí bodu $\underset{0}{P}$ společného oběma varietám ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, popsána jednojednoznačná korespondence mezi parametry variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ a tedy též lokální jednojednoznačná korespondence mezi body variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$. Tím je věta 1 dokázána.

Poznámka 1. Dosazením z $(1,6)_a$, $(1,6)_b$ do (1,4) dostáváme lokálně platnou identitu

$$ {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b)) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)\, \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha\,, \qquad (1,9)$$

z níž plyne (ve smyslu symboliky zavedené v $(1,2)_{a,b}$):

$$
{}^{(2)}B^{\alpha}_{b}\,{}^{(2)}_{(1)}A^{b}_{a} - {}^{(1)}B^{\alpha}_{a} = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}_{a} \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^{\alpha}\,, \tag{1,10}
$$

při čemž zavádíme pro stručnost označení

$$
{}^{(2)}_{(1)}A^{b}_{a} \equiv \frac{\partial\,{}^{(2)}\eta^{b}}{\partial\,{}^{(1)}\eta^{a}}\,, \quad \underset{s}{\lambda}_{a} \equiv \frac{\partial}{\partial\,{}^{(1)}\eta^{a}}\,\underset{s}{\lambda}\,.
$$

Jestliže symbolem [ ] budeme označovat determinant ze složek vektorů v této závorce uvedených, potom z (1,10) vyplývá

$$
[{}^{(2)}B^{\alpha}_{a}\,{}^{(2)}_{(1)}A^{b}_{1},\ {}^{(2)}B^{\alpha}_{b}\,{}^{(2)}_{(1)}A^{b}_{2},\ \dots,\ {}^{(2)}B^{\alpha}_{b}\,{}^{(2)}_{(1)}A^{b}_{p},\ \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha},\ \underset{0}{\overset{(2)}{v}}{}^{\alpha},\ \dots,\ \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^{\alpha}\,] =
$$

$$
= [{}^{(2)}B^{\alpha}_{1},\ {}^{(2)}B^{\alpha}_{2},\ \dots,\ {}^{(2)}B^{\alpha}_{p},\ \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha},\ \underset{0}{\overset{(2)}{v}}{}^{\alpha},\ \dots,\ \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^{\alpha}\,][{}^{(2)}_{(1)}A^{1}_{a},\ {}^{(2)}_{(1)}A^{2}_{a},\ \dots,\ {}^{(2)}_{(1)}A^{p}_{a}] =
$$

$$
= [{}^{(1)}B^{\alpha}_{1} - \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}_{1} \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^{\alpha},\ {}^{(2)}B^{\alpha}_{2} - \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}_{2} \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^{\alpha} \dots,\ {}^{(2)}B^{\alpha}_{p} - \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}_{p} \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^{\alpha},\ \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha},\ \dots,\ \underset{0}{\overset{n-p}{v}}{}^{\alpha}\,] =
$$

$$
= [{}^{(1)}B^{\alpha}_{1},\ {}^{(1)}B^{\alpha}_{2},\ \dots,\ {}^{(1)}B^{\alpha}_{p},\ \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha},\ \underset{0}{\overset{(2)}{v}}{}^{\alpha},\ \dots,\ \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^{a}\,]\,.
$$

Odtud a z $(1,3)_{a,b}$ dostaneme ihned

$$
[{}^{(2)}_{(1)}A^{1}_{a},\ {}^{(2)}_{(1)}A^{2}_{a},\ \dots,\ {}^{(2)}_{(1)}A^{p}_{a}]_{P_0} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \neq 0\,.
$$

Relace $(1,6)_a$ představují tedy lokálně (v okolí bodu $\underset{0}{P}$ na varietě ${}^{(2)}X_p$) regulární transformaci parametrů v ${}^{(2)}X_p$ (s jakobiánem od nuly různým v $\underset{0}{P}$).

Poznámka 2. Jak bylo ověřeno průběhem důkazu věty 1 jsou za předpokladů této věty rovnicemi (1,4) jednoznačně definovány v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{1}, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{2}, \dots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{p})$[1]) funkce $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^{a})$ $(s = 1, \dots, n-p)$, které mají tyto vlastnosti:

1. $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{a}) \equiv (\underset{s}{\lambda})_0 = 0$ pro $s = 1, \dots, n-p$,
2. mají spojité parciální derivace

$$
\underset{s}{\lambda}_{a_1 a_2 \dots a_l} \equiv \frac{\partial^{l} \underset{s}{\lambda}}{\partial\,{}^{(1)}\eta^{a_1}\,\partial\,{}^{(1)}\eta^{a_2} \dots \partial\,{}^{(1)}\eta^{a_l}} \tag{1,11}
$$

pro

$$
a_1, a_2, \dots, a_l = 1, 2, \dots, p\,; \quad s = 1, \dots, n-p\,; \quad 1 \leqq l \leqq k\,.
$$

---

[1]) Tedy bodu $\underset{0}{P}$ na varietě ${}^{(1)}X_p$, při čemž $\underset{0}{P}$ je podle předpokladu společným bodem variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$.

Pro totální diferenciály funkcí $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ řádu l-tého ($1 \leqq l \leqq k$) zavedeme obvyklé označení $d^l\underset{s}{\lambda}$. Symboly

$$(d^1\underset{s}{\lambda})_0,\ (d^2\underset{s}{\lambda})_0,\ \dots,\ (d^l\underset{s}{\lambda})_0,\ \dots$$

nechť značí v dalším pořadě prvý, druhý, ..., l-tý, ... totální diferenciál funkce $\underset{s}{\lambda}$ v bodě $\underset{0}{P}$ odpovídajícím hodnotám ${}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a$ parametrů ${}^{(1)}\eta^a$ variety ${}^{(1)}X_p$.

Definice 1. *Nechť pro variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ z věty* 1 *o společném bodě $\underset{0}{P}$ platí při korespondenci* (1,4)

$$(d^l\underset{s}{\lambda})_0 = 0 \quad pro \quad l = 1, \dots, k;\ s = 1, \dots, n - p\,. \qquad (1{,}12)$$

Potom říkáme, že variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk nejméně k-tého řádu. Je-li aspoň pro jedno $s \in 1, \dots, n - p$ $(d^{k+1}\underset{s}{\lambda})_0 \neq 0$, potom říkáme, že uvažované variety mají v $\underset{0}{P}$ styk právě k-tého řádu.[2])

Poznámka 3. Pod výrokem „variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají ve společném bodě styk k-tého řádu" budeme v dalším rozumět styk nejméně k-tého řádu v $\underset{0}{P}$.

Věta 2. *Nechť variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají — za předpokladů shora uvažovaných — ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk k-tého řádu ($k \geqq 1$): Potom tento fakt je nezávislý*

1. *na volbě konstantního $(n - p)$-vektoru $\overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \dots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha$ v korespondenci* (1,4), *vyhovujícího podmínkám* $(1{,}3)_{a,b}$,
2. *na volbě parametrů variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$,*
3. *na volbě systému souřadného v E_n.*

Důkaz. Mějme dva systémy

$$\overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \overset{(2)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \dots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha;\quad \overset{(1)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha, \overset{(2)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha, \dots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha$$

konstantních vektorů v E_n, vyhovujících podmínkách $(1{,}3)_{a\,b}$, tj.

$$[{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_2, \dots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \dots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha] \neq 0\,, \quad [{}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_2, \dots, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \dots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha] \neq 0\,,$$

$$[{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_2, \dots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \overset{(1)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha, \dots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha] \neq 0\,, \quad [{}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_2, \dots, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \overset{(1)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha, \dots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{w}}{}^\alpha] \neq 0\,.$$

Uvažujme nyní dvě lokální korespondence mezi body variet ${}^{(1)}X_p$ a ${}^{(2)}X_p$ a to jednak korespondenci (1,4), tj.

$${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}\, \overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha \qquad (1{,}13)_a$$

[2]) Za předpokladu, že existují totální diferenciály řádu $k + 1$ funkcí $\underset{s}{\lambda}$ v bodě $\underset{0}{P}$.

a dále korespondenci

$$ {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\bar\lambda}\, \underset{0}{\overset{(s)}{w}}{}^\alpha . \qquad (1,13)_b $$

Podle věty 1 jsou relacemi $(1,13)_a$ lokálně — v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ — definovány funkce

$$ {}^{(2)}\eta^a = \varphi^a({}^{(1)}\eta^b) , \quad a = 1, \ldots, p , \qquad (1,14)_b $$

$$ \underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^b) , \quad s = 1, \ldots, n-p ; \qquad (1,15)_b $$

podobně jsou relacemi $(1,13)_b$ definovány v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ funkce

$$ {}^{(2)}\eta^a = \psi^a({}^{(1)}\eta^b) , \quad a = 1, \ldots, p , \qquad (1,14) $$

$$ \underset{s}{\bar\lambda} = \underset{s}{\bar\lambda}({}^{(1)}\eta^b) , \quad s = 1, \ldots, n-p . \qquad (1,15)_b $$

Funkce uvedené v $(1,14)_{a,b}$, $(1,15)_{a,b}$ mají v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ spojité parciální derivace až do řádu k včetně — jak vyplývá z důkazu věty 1.

Tyto funkce vyhovují dále podmínkám

$$ \left.\begin{aligned} {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a &= \varphi^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^b) , \quad a = 1, \ldots, p ; \\ (\underset{s}{\lambda})_0 &= 0 , \quad s = 1, \ldots, n-p ; \end{aligned}\right\} \qquad (1,16)_a $$

$$ \left.\begin{aligned} {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a &= \psi^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^b) , \quad a = 1, \ldots, p ; \\ (\underset{s}{\bar\lambda})_0 &= 0 , \quad s = 1, \ldots, n-p , \end{aligned}\right\} \qquad (1,16)_b $$

jak víme z důkazu věty 1.

V dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ platí tedy identity:

$$ {}^{(2)}x^\alpha(\varphi^a({}^{(1)}\eta^b)) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)\, \underset{0}{\overset{s}{v}}{}^\alpha , \qquad (1,17)_a $$

$$ {}^{(2)}x^\alpha(\psi^a({}^{(1)}\eta^b)) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\bar\lambda}({}^{(1)}\eta^a)\, \underset{0}{\overset{s}{w}}{}^\alpha . \qquad (1,17)_b $$

Zaveďme v dalším označení

$$ \begin{aligned} \varphi^a_{b_1 \ldots b_l} &\equiv \frac{\partial^l \varphi^a}{\partial^{(1)}\eta^{b_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{b_l}} , & \psi^a_{b_1 \ldots b_l} &\equiv \frac{\partial^l \psi^a}{\partial^{(1)}\eta^{b_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{b_l}} , \\ \underset{s}{\lambda}_{a_1 \ldots a_l} &\equiv \frac{\partial^l \underset{s}{\lambda}}{\partial^{(1)}\eta^{a_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{a_l}} , & \underset{s}{\bar\lambda}_{a_1 \ldots a_l} &\equiv \frac{\partial^l \underset{s}{\bar\lambda}}{\partial^{(1)}\eta^{a_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{a_l}} , \end{aligned} \qquad (1,18) $$

kde $a, a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p$; $l = 1, \ldots, k$; $s = 1, \ldots, n-p$. Nechť symboly ${}^{(1)}B^\alpha_{a_1 \ldots a_l}$ a ${}^{(2)}B^\alpha_{a_1 \ldots a_l}$ mají význam z (1,2).

Poznámka 4. Uveďme nyní známý pojem, který bude pro průběh našeho důkazu užitečným.

Každý nenulový vektor ${}^{(1)}t_\alpha$ v E_n, pro který patí

$$ {}^{(1)}B_a^\alpha\, {}^{(1)}t_\alpha = 0\,, \quad a = 1, \ldots, p\,, \tag{1,19$_a$} $$

nazývá se tečným vektorem variety ${}^{(1)}X_p$. Podobně každý nenulový vektor ${}^{(2)}t_\alpha$ v E_n, vyhovující rovnicím

$$ {}^{(2)}B_a^\alpha\, {}^{(2)}t_\alpha = 0\,, \quad a = 1, \ldots, p\,, \tag{1,19$_b$} $$

je tečným vektorem variety ${}^{(2)}X_p$.

Je nyní dobře známo, že za našich předpokladů o varietě ${}^{(1)}X_p$ (resp. ${}^{(2)}X_p$), učiněných na počátku práce, můžeme vždy najít $n - p$ lineárně nezávislých vektorů ${}^{(1)}\underset{s}{t_\alpha}$, $s = 1, \ldots, n - p$ (resp. ${}^{(2)}\underset{s}{t_\alpha}$, $s = 1, \ldots, n - p$), vyhovujících rovnicím $(1,19)_a$ (resp. $(1,19)_b$), při čemž každé řešení rovnic $(1,19)_a$ (resp. $(1,19)_b$) je lineární kombinací vektorů ${}^{(1)}\underset{s}{t_\alpha}$, $s = 1, \ldots, n - p$ (resp. ${}^{(2)}\underset{s}{t_\alpha}$, $s = 1, \ldots, n - p$). Definujme speciálně:

$$ {}^{(1)}\underset{s}{t_\alpha} \equiv e_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1} \ldots \alpha_{p+s-1} \alpha\, \alpha_{p+s+1} \ldots \alpha_n}\, {}^{(1)}B_\alpha^{\alpha_1} \ldots B_p^{\alpha_p} \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_{p+1}} \ldots \overset{(s-1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_{p+s-1}} \overset{(s+1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_{p+s+1}} \ldots \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_n} \tag{1,20$_a$} $$

pro $s = 1, \ldots, n - p$, kde

$$ e_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \equiv \begin{cases} 0, & \text{jsou-li aspoň dva indexy stejné,} \\ 1, & \text{jsou-li indexy vesměs různé a permutace } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ čísel } 1, \ldots, n \text{ je sudá,} \\ -1, & \text{jsou-li indexy vesměs různé a permutace } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ čísel } 1, \ldots, n \text{ je lichá.} \end{cases} \tag{1,21} $$

Vektory ${}^{(1)}\underset{s}{t_\alpha}$ definované v $(1,20)_a$ vyhovují zřejmě rovnicím $(1,19)_a$. Tyto vektory splňují podmínky

$$ \left. \begin{aligned} &\overset{(l)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}\, {}^{(1)}\underset{s}{t_\alpha} = 0 \quad \text{pro} \quad s \neq l \quad (s, l = 1, \ldots, n - p)\,, \\ &\left|\overset{(l)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha}\, {}^{(1)}\underset{s}{t_\alpha}\right| = |\Delta_1| \neq 0 \quad \text{pro} \quad s = l \end{aligned} \right\} \tag{1,22} $$

v bodě $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$, jak plyne z $(1,3)_a$ a $(1,20)_a$. Ten fakt, že vektory ${}^{(1)}\underset{s}{t_\alpha}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ jsou v bodě $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ lineárně nezávislé, plyne snadno z podmínek (1,22). Analogicky můžeme definovat systém tečných vektorů ${}^{(2)}\underset{s}{t_\alpha}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ variety ${}^{(2)}X_p$, tj.

$$ {}^{(2)}\underset{s}{t_\alpha} \equiv e_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1} \ldots \alpha_{p+s-1} \alpha\, \alpha_{p+s+1} \ldots \alpha_n}\, {}^{(2)}B_1^\alpha \ldots {}^{(2)}B_p^\alpha \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_{p+1}} \ldots \overset{(s-1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_{p+s-1}} \overset{(s+1)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_{p+s+1}} \ldots \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^{\alpha_n}\,, \tag{1,20$_b$} $$

nezávislých v bodě $({}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^p)$.

Pomocná věta 1. *Nechť*

$$\underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha}, \underset{0}{\overset{(2)}{v}}{}^{\alpha}, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^{\alpha} \quad \text{a} \quad \underset{0}{\overset{(1)}{w}}{}^{\alpha}, \underset{0}{\overset{(2)}{w}}{}^{\alpha}, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{w}}{}^{\alpha}$$

jsou dva systémy konstantních vektorů v E_n s vlastnostmi

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\equiv [{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{1}, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{p}, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha}, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^{\alpha}] \neq 0\,, \\ \overline{\Delta}_1 &\equiv [{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{1}, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{p}, \underset{0}{\overset{(1)}{w}}{}^{\alpha}, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{w}}{}^{\alpha}] \neq 0\,. \end{aligned} \tag{1,23}$$

Nechť ${}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha}$ *$(s = 1, \ldots, n - p)$ jsou vektory definované v* $(1,20)_a$ *a nechť symboly* $({}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha})_0$ *představují hodnoty veličin* ${}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha}$ *v bodě* $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{1} \ldots {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^{p})$.

Jestliže $\underset{(l)}{\mu}$ *$(l = 1, \ldots, n - p)$ jsou reálná čísla, pro která platí*

$$\underset{(l)}{\mu}\underset{0}{\overset{(l)}{w}}{}^{\alpha}({}^{(1)}\underset{s}{t}_{\alpha})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n - p, \text{ [3]}$$

potom

$$\underset{(l)}{\mu} = 0 \quad \text{pro} \quad l = 1, \ldots, n - p\,.$$

Důkaz. Vzhledem k první z podmínek (1,23) můžeme každý z vektorů $\underset{0}{\overset{(l)}{w}}{}^{\alpha}$ (pro $l = 1, \ldots, n - p$) psát jako lineární kombinaci vektorů ${}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{1}, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{p}$, $\underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha}, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^{\alpha}$, tj.

$$\underset{0}{\overset{(l)}{w}}{}^{\alpha} = {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{a}\overset{(l)}{C}{}^{a} + \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^{\alpha}D^{l}_{s} \text{ [4]} \tag{1,24}$$

Pro determinant $\overline{\Delta}_1$ z (1,23) dostaneme s přihlédnutím k (1,21), (1,24)

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_1 &= e_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_1}_{1} \ldots {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_p}_{p}\underset{0}{\overset{(1)}{w}}{}^{\alpha_{p+1}} \ldots \underset{0}{\overset{(n-p)}{w}}{}^{\alpha_n} = \\ &= e_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_{1} \,..\, {}^{(1)}B^{\alpha_p}_{p}({}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_{p+1}}_{a_1}\overset{(1)}{C}{}^{a_1} + \underset{0}{\overset{(s_1)}{v}}{}^{\alpha}D^{1}_{s_1}) \ldots ({}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_p}_{a_{n-p}} \ldots \overset{(n-p)}{C}{}^{a_{n-p}} + \underset{0}{\overset{(s_{n-p})}{v}}{}^{\alpha_p}D^{n-p}_{s_{n-p}}) = \\ &= e_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_1}_{1} \ldots {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_p}_{p}\underset{0}{\overset{(s_1)}{v}}{}^{\alpha_{p+1}} \ldots \underset{0}{\overset{(s_{n-p})}{v}}{}^{\alpha_n}D^{1}_{s_1} \ldots D^{n-p}_{s_{n-p}} = \\ &= e_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_1}_{1} \ldots {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha_p}_{p}\underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha_{p+1}} \ldots \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^{\alpha_n} \,.\, e^{s_1\ldots s_{n-p}}D^{1}_{s_1} \ldots D^{n-p}_{s_{n-p}}\,, \end{aligned}$$

[3]) Zde sčítáme přes $l = 1, \ldots, n - p$.

[4]) Zde sčítáme přes $a = 1, \ldots, p$; $s = 1, \ldots, n - p$.

kde

$$e^{s_1 \dots s_{n-p}} \equiv \begin{cases} 0, & \text{jsou-li aspoň dva indexy v permutaci } s_1, \dots, s_{n-p} \text{ čísel } 1, \dots, n-p \text{ stejné;} \\ 1, & \text{jsou-li v permutaci } s_1, \dots, s_{n-p} \text{ indexy vesměs různé a permutace sudá;} \\ -1, & \text{jsou-li v permutaci } s_1, \dots, s_{n-p} \text{ indexy vesměs různé a permutace lichá.} \end{cases}$$

Z předchozího a z (1,23) dostaneme

$$\overline{\Delta}_1 = \Delta_1 \,.\, [D] \neq 0 \,, \tag{1,25$_a$}$$

kde

$$[D] \equiv \begin{vmatrix} D^1_1 & D^1_2 & \dots D^1_{n-p} \\ D^2_1 & D^2_2 & \dots D^2_{n-p} \\ \dots & \dots & \dots \\ D^{n-p}_1 & D^{n-p}_2 & \dots D^{n-p}_{n-p} \end{vmatrix} \,. \tag{1,25$_b$}$$

Z (1,24), (1,19)$_a$, (1,22), (1,23) plyne nyní

$$\begin{aligned} |\underset{(l)}{\overset{(l)}{\mu}}\, \underset{0}{w^\alpha} (^{(1)}\underset{s}{t_\alpha})_0| &= |\underset{(l)}{\overset{(l)}{\mu}} (^{(1)}\underset{0}{B^\alpha_a} C^\alpha + \underset{0}{\overset{(k)}{v^\alpha}} D^l_k)\,(^{(1)}\underset{s}{t_\alpha})_0| = \\ &= |\underset{(l)}{\mu} D^l_k \,\underset{0}{\overset{(k)}{v^\alpha}} (^{(1)}\underset{s}{t_\alpha})_0| = |\Delta_1 \underset{(l)}{\mu} D^l_s| \,. \end{aligned} \tag{1,26}$$

Z předpokladu

$$\underset{(l)}{\mu}\, \underset{0}{w^\alpha} (^{(1)}\underset{s}{t_\alpha})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \dots, n-p$$

a z (1,26) plyne dále

$$\Delta_1 \underset{(l)}{\mu} D^l_s = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \dots, n-p$$

a tedy, vzhledem k (1,23),

$$\underset{(l)}{\mu} D^l_s = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \dots, n-p \,. \tag{1,27}$$

Pro systém (1,27) $n - p$ lineárních homogenních rovnic v $n - p$ neznámých $\underset{(l)}{\mu}$ plyne pak na základě (1,25)$_a$ jednoznačné řešení $\underset{(l)}{\mu} = 0$ pro $l = 1, \dots, n - p$. Tím je pomocná věta dokázána.

Nyní přistoupíme k důkazu tvrzení (1) naší věty, který provedeme metodou úplné indukce.

Předpokládejme tedy nejdříve, že variety $^{(1)}X_p$, $^{(2)}X_p$ mají ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk prvého řádu ve smyslu naší definice při volbě $\underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}$ $(s = 1, \dots, n - p)$ konstantních vektorů v E_n, vyhovujících podmínce (1,3)$_a$. Z lokálních identit (1,17)$_{a,b}$ plyne (ve smyslu symboliky (1,18), (1,2)$_{a,b}$)

$$^{(2)}B^\alpha_b \varphi^b_a - {}^{(1)}B^\alpha_a = \sum_{s=1}^{n-p} \lambda_a \underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}} \,, \tag{1,28$_a$}$$

$$ {}^{(2)}B^{\alpha}_{b}\psi^{b}_{a} - {}^{(1)}B^{\alpha}_{a} = \sum_{s=1}^{n-p} \bar{\lambda}_{a} \underset{s}{} \overset{(s)}{\underset{0}{w}}{}^{\alpha} . \tag{1,28$_b$} $$

Dle našeho předpokladu je (podle definice 1 a podle (1,12))

$$ (\underset{s}{\lambda})_0 = (\mathrm{d}\underset{s}{\lambda})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n-p \, . $$

Je tedy též (podle symboliky v (1,18))

$$ (\underset{s}{\lambda_a})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n-p; \; a = 1, \ldots, p \, . \tag{1,29} $$

Z (1,28)$_a$, (1,29) plyne pak

$$ {}^{(2)}\underset{0}{B^{\alpha}_{b}}(\varphi^{b}_{a})_0 - {}^{(1)}\underset{0}{B^{\alpha}_{a}} = 0 \, . \tag{1,30} $$

Násobením předchozích rovnic tečným vektorem $({}^{(1)}\underset{s}{\mathrm{t}_{\alpha}})_0$ (a sečtením přes $\alpha = 1, \ldots, n$) dostaneme vzhledem k (1,19)$_a$

$$ {}^{(2)}\underset{0}{B^{\alpha}_{b}}({}^{(1)}\underset{s}{t_{\alpha}})_0(\varphi^{b}_{a})_0 = 0 $$

pro $s = 1, \ldots, n-p$; $b = 1, \ldots, p$. Podle výsledku uvedeného v poznámce 1 plyne z předchozích rovnic

$$ {}^{(2)}\underset{0}{B^{\alpha}_{b}}({}^{(1)}\underset{s}{t_{\alpha}})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n-p \tag{1,30} $$

a pro $b = 1, \ldots, p$. Z (1,30), (1,28)$_b$ plyne pak ihned

$$ \sum_{s=1}^{n-p} (\underset{s}{\bar{\lambda}_a})_0 \, \overset{(s)}{\underset{0}{w}}{}^{\alpha}({}^{(1)}\underset{s}{t_{\alpha}})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n-p \, . $$

Odtud plyne pak podle tvrzení předchozí pomocné věty ihned

$$ (\underset{s}{\bar{\lambda}_a})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n-p \quad \text{a pro} \quad a = 1, \ldots, p \, . $$

Je tedy též

$$ (\mathrm{d}\underset{s}{\bar{\lambda}})_0 = 0 \quad (s = 1, \ldots, n-p) \, . $$

Odtud a z (1,29), (1,28)$_{a,b}$ dostaneme

$$ {}^{(2)}\underset{0}{B^{\alpha}_{b}}((\varphi^{b}_{a})_0 - (\psi^{b}_{a})_0) = 0 \quad (a = 1, \ldots, p; \; \alpha = 1, \ldots, n) \, , $$

z čehož vyplývá — vzhledem k lineární nezávislosti vektorů ${}^{(2)}\underset{0}{B^{\alpha}_{b}}$ — že $(\varphi^{b}_{a})_0 = (\psi^{b}_{a})_0$. Ověřili jsme si tedy implikaci

$$ (\underset{s}{\lambda})_0 = (\mathrm{d}\underset{s}{\lambda})_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} {}^{(1)}(\underset{s}{\bar{\lambda}})_0 = (\mathrm{d}\underset{s}{\bar{\lambda}})_0 = 0 \, , \\ {}^{(2)}(\varphi^{b}_{a})_0 = (\psi^{b}_{a})_0 \, , \end{cases} \tag{1,31} $$

platnou pro $s = 1, \ldots, n-p$; $a, b = 1, \ldots, p$. Podmínky $(\underset{s}{\bar{\lambda}})_0 = (\mathrm{d}\underset{s}{\bar{\lambda}})_0 = 0$ $(s = 1, \ldots, n-p)$ znamenají, že variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají ve společném bodě $\underset{0}{P}$

styk prvého řádu též při výchozí korespondenci $(1{,}13)_b$. Tím je tvrzení (1) naší věty dokázáno pro $k = 1$.

Předpokládejme nyní, že variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk řádu l-tého, kde $l > 1$, při výchozí korespondenci (1,4). Předpokládáme tedy, že pro funkce $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ $(s = 1, \ldots, n - 1)$ v (1,4) platí

$$(\mathrm{d}^j \underset{s}{\lambda})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad j = 0, 1, \ldots, l\,. \tag{1,32}$$

Předpokládáme dále (jako vlastní indukční krok), že tvrzení (1) naší věty je správné pro styk řádu $l - 1$. My budeme — vedeni implikací (1,31) — předpokládat navíc, že platí

$$(\mathrm{d}^j \underset{s}{\lambda})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad j = 0, 1, \ldots, l - 1 \Rightarrow \begin{cases} 1)\ (\mathrm{d}^j \underset{s}{\bar{\lambda}})_0 = 0 \text{ pro } j = 0, 1, \ldots, l - 1, \\ 2)\ (\varphi^b_{a_1 \ldots a_j})_0 = (\psi^b_{a_1 \ldots a_j})_0 \end{cases} \tag{1,33}$$

pro $j = 1, 2, \ldots, l - 1$; $b, a_1, \ldots, a_{l-1} = 1, \ldots, p$. Předpoklad (1,32) je zřejmě ekvivalentní předpokladu

$$(\underset{s}{\lambda})_0 = (\underset{s}{\lambda}_{a_1})_0 = (\underset{s}{\lambda}_{a_1 a_2})_0 = \ldots = (\underset{s}{\lambda}_{a_1 \ldots a_l})_0 = 0 \tag{1,34}$$

pro $s = 1, \ldots, n - p$; $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$.

Parciálním, $(l - 1)$-krát iterovaným derivováním identit $(1{,}28)_{a,b}$ podle ${}^{(1)}\eta^a$, dostaneme identity tvaru

$$\begin{aligned} {}^{(2)}B^\alpha_{b_1} \varphi^{b_1}_{a_1 \ldots a_l} + \sum_{1 < j \leqq l} {}^{(2)}B^\alpha_{b_1 \ldots b_j} \Phi^{b_1 \ldots b_j}_{a_1 \ldots a_l} + {}^{(1)}B^\alpha_{a_1 \ldots a_l} &= \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}_{a_1 \ldots a_l} \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha, \\ {}^{(2)}B^\alpha_{b_1} \psi^{b_1}_{a_1 \ldots a_l} \sum_{1 < j \leqq l} {}^{(2)}B^\alpha_{b_1 \ldots b_j} \Psi^{b_1 \ldots b_j}_{a_1 \ldots a_l} + {}^{(1)}B^\alpha_{a_1 \ldots a_l} &= \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\bar{\lambda}}_{a_1 \ldots a_s} \underset{0}{\overset{(s)}{w}}{}^\alpha, \end{aligned} \tag*{1,35)$_{a,b}$}$$

kde $\Phi^{b_1 \ldots b_j}_{a_1 \ldots a_l}$ jsou součiny, v nichž až na číselný faktor vystupují pouze elementy $\varphi^b_{a_1 \ldots a_m}$ $(m \in 1, \ldots, j)$. Veličiny $\Psi^{b_1 \ldots b_j}_{a_1 \ldots a_l}$ jsou veličiny téhož typu jako $\Phi^{b_1 \ldots b_j}_{a_1 \ldots a_l}$ a dostaneme je z předchozích záměnou symbolu ψ za φ. Odtud a z indukčního předpokladu (1,33) plyne

$$(\Phi^{b_1 \ldots b_j}_{a_1 \ldots a_l})_0 = (\Psi^{b_1 \ldots b_l}_{a_1 \ldots a_l})_0 \quad \text{pro} \quad 1 < j \leqq l\,. \tag{1,36}$$

Z $(1{,}35)_{a,b}$ plyne s ohledem na (1,36), (1,34)

$${}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_{b_1}((\varphi^{b_1}_{a_1 \ldots a_l})_0 - (\psi^{b_1}_{a_1 \ldots a_l})_0) = - \sum_{s=1}^{n-p} (\underset{s}{\bar{\lambda}}_{a_1 \ldots a_l})_0 \underset{0}{\overset{(s)}{w}}{}^\alpha\,.$$

Násobením předchozích relací vektorem $({}^{(1)}\underset{l}{t}_\alpha)_0$ $(l \in 1, \ldots, n - p)$ a sečtením přes α dostaneme vzhledem k (1,30)

$$\sum_{s+1}^{n-p} (\underset{s}{\bar{\lambda}}_{a_1 \ldots a_l})_0 \underset{0}{\overset{s}{w}}{}^\alpha ({}^{(1)}\underset{l}{t}_\alpha)_0 = 0$$

pro $l = 1, \ldots, n - p$ a pro $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$. Z předchozích relací však vyplývá ihned v důsledku dříve uvedené pomocné věty $(\underset{s}{\overline{\lambda}}_{a_1 \ldots a_l})_0 = 0$ pro $s = 1, \ldots, n - p$ a pro $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$. Dosazením odtud do (1,31) dostaneme

$$\underset{0}{{}^{(2)}B^{\alpha}_{b_l}}((\varphi^{b_l}_{a_1 \ldots a_l})_0 - (\psi^{b_l}_{a_1 \ldots a_l})_0) = 0$$

a tedy — vzhledem k lineární nezávislosti vektorů ${}^{(2)}B^{\alpha}_{b_1}$ —

$$(\varphi^{b_l}_{a_1 \ldots a_l})_0 = (\psi^{b_l}_{a_1 \ldots a_l})_0 \, .$$

Tím jsme ověřili implikaci (1,33) pro $j = l$. Tím je však tvrzení (1) naší věty metodou úplné indukce dokázáno. Poznatek citovaný sub 2) v implikaci (1,33) jest vedlejším výsledkem, o němž se zmíníme v poznámce za důkazem této věty.

Abychom dokázali tvrzení (2) naší věty, budeme předpokládat, že variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ s parametrickými popisy $(1,1)_a$, $(1,1)_b$ mají ve společném bodě styk k-tého řádu. Potom, ve smyslu naší definice styku, splňují funkce $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ (které jsou lokálně jednoznačně definovány korespondencí (1,4)) podmínky (1,12), které jsou ekvivalentní podmínkám (1,34).

Nechť

$$ {}^{(1)}\tilde{\eta}^a = {}^{(1)}\tilde{\eta}^a({}^{(1)}\eta^b) \tag{$1,37_a$}$$

je libovolná transformace parametrů variety ${}^{(1)}X_p$ a to regulární v nějakém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^1, \ldots {}^{(1)}\underset{0}{\eta}^p)$ [5]).

Rovnice

$$ {}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\overline{\eta}({}^{(2)}\eta^b) \tag{$1,37_b$}$$

nechť popisují lokálně — v nějakém okolí bodu $({}^{(2)}\underset{0}{\eta}^1, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{\eta}^p)$ — regulární transformaci parametrů variety ${}^{(2)}X_p$. Předpokládejme dále, že existují v uvažovaných okolích variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ spojité parciální derivace

$$ {}^{(1)}\tilde{A}^a_{b_1 \ldots b_l} \equiv \frac{\partial^{l(1)}\tilde{\eta}^a}{\partial^{(1)}\eta^{b_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{b_l}} \, , \quad l = 1, \ldots, k \, , \tag{$1,38_a$}$$

$$ {}^{(2)}\overline{A}^a_{b_1 \ldots b_l} \equiv \frac{\partial^{l(2)}\overline{\eta}^a}{\partial^{(2)}\eta^{b_1} \ldots \partial^{(2)}\eta^{b_l}} \, , \quad l = 1, \ldots, k \, . \tag{$1,38_b$}$$

Podle věty 1 definují relace (1,4) lokálně jednoznačně funkce $\underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$, $s = 1, \ldots, n - p$, které představují určité skaláry variety ${}^{(1)}X_p$. Důsledek téže věty 1 je, že variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ lze vztáhnout k jednomu a témuž systému ${}^{(1)}\eta^a$ parametrů variety ${}^{(1)}X_p$. Skaláry $\underset{s}{\lambda}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ jsou tedy zřejmě nezávislé na transformaci $(1,37)_b$ parametrů variety ${}^{(2)}X_p$.

---

[5]) Tedy bodu $\underset{0}{P}$ na varietě ${}^{(1)}X_p$, který je společný oběma varietám ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$.

Definujme

$$\tilde{\underset{s}{\lambda}} \equiv \tilde{\underset{s}{\lambda}}({}^{(1)}\tilde{\eta}^a) \equiv \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a({}^{(1)}\tilde{\eta}^b)), \tag{1,39$_a$}$$

$$\tilde{\underset{s}{\lambda}}_{b_1\ldots b_l} \equiv \frac{\partial^l \tilde{\underset{s}{\lambda}}}{\partial^{(1)}\tilde{\eta}^{b_1}\ldots\partial^{(1)}\tilde{\eta}^{b_l}}\quad l = 1, \ldots, k, \tag{1,39$_b$}$$

$$^{(1)}C^a_{b_1\ldots b_l} \equiv \frac{\partial^{l\,(1)}\eta^a}{\partial^{(1)}\tilde{\eta}^{b_1}\ldots\partial^{(1)}\tilde{\eta}^{b_l}},\quad l = 1, \ldots, k \tag{1,39$_c$}$$

pro $s = 1, \ldots, n - p$; $a, b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p$. Z (1,39)$_a$ plyne pak s přihlédnutím k (1,39)$_{b,c}$, (1,34):

$$\tilde{\underset{s}{\lambda}}_{b_1\ldots b_l} = \underset{s}{\lambda}_{a_1}U^{a_1}_{b_1\ldots b_l} + \underset{s}{\lambda}_{a_1a_2}U^{a_1a_2}_{b_1\ldots b_l} + \ldots + \underset{s}{\lambda}_{a_1\ldots a_l}U^{a_1\ldots a_l}_{b_1\ldots b_l} \tag{1,40}$$

pro $s = 1, \ldots, n - p$, $l = 1, \ldots, k$, kde $U^{a_1}_{b_1\ldots b_l}, U^{a_1a_2}_{b_1\ldots b_l}, \ldots, U^{a_1\ldots a_l}_{b_1\ldots b_l}$ závisí pouze na parciálních derivacích ${}^{(1)}C^a_{b_1}, {}^{(1)}C^a_{b_1b_2}, \ldots, {}^{(1)}C^a_{b_1\ldots b_l}$. Toto tvrzení se dá snadno ověřit metodou úplné indukce. Z (1,34), (1,39) a (1,40) pak vyplývá ihned implikace

$$(\underset{s}{\lambda})_0 = (\underset{s}{\lambda}_{a_1})_0 = \ldots = (\underset{s}{\lambda}_{a_1\ldots a_k})_0 = 0 \Rightarrow (\tilde{\underset{s}{\lambda}})_0 = (\tilde{\underset{s}{\lambda}}_{a_1}) = \ldots = (\tilde{\underset{s}{\lambda}}_{a_1\ldots a_l})_0 = 0$$

pro $s = 1, \ldots, n - p$. Platí tedy též

$$(\mathrm{d}^l\underset{s}{\lambda})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n - p;\ l = 0, 1, \ldots, k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathrm{d}^l\tilde{\underset{s}{\lambda}})_0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n - p;\ l = 0, 1, \ldots, k.$$

Odtud a z definice styku je správnost tvrzení (2) naší věty evidentní.

Tvrzení (3) naší věty je evidentní. Skaláry $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ a jejich parciální derivace $\underset{s}{\lambda}_{a_1\ldots a_l}$ $(l = 1, \ldots, k)$ jsou vnitřními geometrickými objekty variety ${}^{(1)}X_p$ a jsou tedy nezávislé na volbě souřadnic v E_n, v němž variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ leží.

Poznámka 5. V důkazu tvrzení (1) předchozí věty jsme navíc ukázali, že při korespondencích (1,17)$_a$, (1,17)$_b$, popsaných lokálně (v uvedeném pořadí) korespondencemi (1,14)$_a$, (1,14)$_b$ mezi parametry ${}^{(1)}\eta^a$, ${}^{(2)}\eta^a$ variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, platí vedle podmínek $(\varphi^a)_0 = (\psi^a)_0$ $(a = 1, \ldots, p)$[6]) též podmínky $(\varphi^a_{a_1\ldots a_l})_0 = (\psi^a_{a_1\ldots a_l})_0$ pro $a, a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$, jak je naznačeno v (1,33). Tyto podmínky naznačují vzájemnou souvislost mezi dvěma korespondencemi typu (1,17)$_a$, (1,17)$_b$.

Věta 3. *Nechť variety* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *mají — za uvažovaných předpokladů — ve společném bodě* $\underset{0}{P}$ *styk k-tého řádu* $(k \geqq 1)$. *Potom lze — a to nekonečně mnoha způsoby — vztáhnout variety* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *k témuž systému parametrů* η^a *tak, že platí: Jsou-li*

$$x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha(\eta^a) \quad (\alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p) \tag{1,41}$$

a

$$x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha(\eta^a) \quad (\alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p)$$

[6]) Plynoucích z (1,16)$_a$, (1,16$_b$).

parametrické popisy variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, vztažených lokálně — v okolí jejich společného bodu $\underset{0}{P}$, odpovídajícímu hodnotám parametrů $\underset{0}{\eta}^a$ — k témuž systému parametrů, pak je

$$\left(\frac{\partial^{l\,(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{a_1}\dots\partial\eta^{a_l}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{l\,(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{a_1}\dots\partial\eta^{a_l}}\right)_0 \tag{1,42}$$

pro $l = 0, 1, \dots, k$; $a_1, \dots, a_l = 1, \dots, p$.

Důkaz je velmi snadný. Nechť $\underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}$ $(s = 1, \dots, n-p)$ je libovolný systém konstantních vektorů v E_n s vlastností $(1,3)_{a,b}$. Položíme-li v identitě (1,9)

$$\begin{gathered} {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,, \\ {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b))\,, \end{gathered} \tag{1,43}$$

potom lokální identitu (1,9) můžeme psát ve tvaru

$${}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) - {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)\, \underset{0}{\overset{s}{v^\alpha}}\,. \tag{1,44}$$

Podle předpokladu mají variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ ve společném bodě styk k-tého řádu $(k \geqq 1)$. Podle definice styku platí pak (1,12), kteréžto podmínky jsou ekvivalentní podmínkám (1,34). Z (1,34) a (1,44) plynou pak bezprostředně podmínky (1,42), kde klademe $\eta^a = {}^{(1)}\eta^a$.

Dokážeme nyní ještě, že lze variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ vztáhnout nekonečně mnoha způsoby k témuž systému parametrů (lokálně, v nějakém okolí jejich společného bodu $\underset{0}{P}$) tak, že platí (1,42). Víme již, že za předpokladů naší věty lze při korespondenci (1,4) vztáhnout variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ k témuž systému parametrů η^a a že při označení (1,43) a při popisu (1,41) variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ platí (1,42). Buďtež nyní

$$\overline{\eta}^a({}^{(1)}\eta^b)\,, \quad a = 1, \dots, p \tag{1,45$_a$}$$

libovolné funkce proměnných ${}^{(1)}\eta^b$ $(b = 1, \dots, p)$ těchto vlastností:

(a)

$$\overline{\eta}^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^b) = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a \quad (a = 1, \dots, p)\,, \tag{1,45$_b$}$$

(b) v nějakém dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^1, \dots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}^p)$ existují spojité parciální derivace

$${}^{(1)}\overline{A}^a_{b_1\dots b_l} \equiv \frac{\partial^l\overline{\eta}^a}{\partial{}^{(1)}\eta^{b_1}\dots\partial{}^{(1)}\eta^{b_l}}\,, \quad l = 2, \dots, k \tag{1,45$_c$}$$

pro $a, b_1, \dots, b_l = 1, \dots, p$,

(c) je

$$({}^{(1)}\overline{A}^a_{b_1})_0 = \delta^a_{b_1},\ ({}^{(1)}\overline{A}^a_{b_1\dots b_l})_0 = 0,\ l = 2, \dots, k \tag{1,45$_d$}$$

pro $a, b_1, \dots, b_l = 1, \dots, p$.

Je především nyní z (1,44) a z věty 1 evidentní, že rovnicemi

$$ {}^{(2)}\xi^\alpha(\eta^a) - {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)\, \underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}} $$

je — za předpokladů naší věty — popsána lokální korespondence mezi body variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, při čemž tato korespondence je popsána korespondencí $\eta^a = {}^{(1)}\eta^a$ $(a = 1, \ldots, p)$ mezi parametry obou uvažovaných variet. Tato korespondence je pak přímo obsažena v popisu (1,41) obou variet. Omezme se nyní na dostatečně malé okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta^1}, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta^p})$ a v popisu $x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha(\eta^a)$ variety ${}^{(2)}X_p$ položme $\eta^a = \bar{\eta}^a({}^{(1)}\eta^b)$. Zvolíme-li pak pro varietu ${}^{(2)}X_p$ parametrický popis

$$ x^\alpha = {}^{(2)}\bar{\xi}^\alpha({}^{(1)}\eta^b) \equiv {}^{(2)}\xi^\alpha(\bar{\eta}^b({}^{(1)}\eta^a)) \qquad (1,46)_b $$

a pro varietu ${}^{(1)}X_p$ popis

$$ x^\alpha = {}^{(1)}\bar{\xi}^\alpha({}^{(1)}\eta^b) \equiv {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^b)\,, \qquad (1,46)_c $$

potom pevně zvoleným hodnotám parametrů ${}^{(1)}\eta^b$(dostatečně blízkým hodnotám ${}^{(1)}\underset{0}{\eta^a}$) odpovídá jednoznačně určitý bod na varietě ${}^{(1)}X_p$ a určitý bod na varietě ${}^{(2)}X_p$. Při popisu

$$ x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,, \quad x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha(\eta^a) $$

variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ je tedy relacemi

$$ \eta^a = \bar{\eta}^a({}^{(1}\eta^b) \qquad (1,46) $$

definována zcela určitá korespondence mezi body variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ a to lokálně jednojednoznačná v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta^1}, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta^p})$. To platí pro každé funkce $\bar{\eta}^a({}^{(1)}\eta^b)$ s vlastnostmi (a), (b), (c) shora uvedenými. Z $(1,45)_{a,b,c,d}$, (1,43), $(1,46)_{a,b}$ plyne

$$ \begin{aligned} {}^{(2)}\bar{\xi}^\alpha({}^{(1)}\underset{0}{\eta^b}) &= {}^{(2)}\xi^\alpha(\bar{\eta}^b({}^{(1)}\underset{0}{\eta^a})) = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\underset{0}{\eta^b}) = \\ &= {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta^b})) = {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\underset{0}{\eta^a}) = \underset{0}{x^\alpha} = \\ &= {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\underset{0}{\eta^a}) = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\underset{0}{\eta^a}) = {}^{(1)}\bar{\xi}^\alpha({}^{(1)}\underset{0}{\eta^a})\,, \end{aligned} $$

tedy stručně

$$ ({}^{(2)}\bar{\xi}^\alpha)_0 = ({}^{(1)}\bar{\xi}^\alpha)_0\,. $$

Z $(1,46)_b$, $(1,45)_c$, plyne

$$ \frac{\partial\, {}^{(2)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial\, {}^{(1)}\eta^b} = \frac{\partial\, {}^{(2)}\xi^\alpha}{\partial \bar{\eta}^a}\, {}^{(1)}\bar{A}^a_b\,. $$

Odtud a z $(1,45)_{b,d}$ plyne

$$ \left(\frac{\partial\, {}^{(2)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial\, {}^{(1)}\eta^b}\right)_0 = \left(\frac{\partial\, {}^{(2)}\xi^\alpha}{\partial \eta^a}\right)_0 \delta^a_b = \left(\frac{\partial\, {}^{(2)}\xi^\alpha}{\partial \eta^b}\right)_0 $$

a tedy vzhledem k (1,42), (1,46)$_a$

$$\left(\frac{\partial^{(2)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta_b}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{(1)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^b}\right)_0 .$$

Metodou úplné indukce bychom nyní snadno ověřili, že platí

$$\left(\frac{\partial^{l(2)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{b_1}\dots\partial^{(1)}\eta^{b_l}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{l(1)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{b_1}\dots\partial^{(1)}\eta^{b_l}}\right)_0$$

pro $l = 2, \dots, k;\ b_1, \dots, b_l = 1, \dots, p$.

Korespondencí tvaru (1,46)$_c$ s vlastnostmi (1,45)$_b$, (1,45)$_d$ je však nekonečně mnoho[7]) (zřejmě též nekonečně mnoho v oboru analytických korespondencí uvažovaného typu). Tím je věta 3 dokázána.

Poznámka 6. Z důkazu předchozí věty plyne tento výsledek: Nechť variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ s popisem

$${}^{(1)}X_p\colon\ x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,,\quad {}^{(2)}X_p\colon\ x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(2)}\eta^a)$$

mají společný bod $\underset{0}{P}$ odpovídající hodnotám ${}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a \equiv \underset{0}{\eta}{}^a$ parametrů. Nechť při korespondenci ${}^{(2)}\eta^a = {}^{(1)}\eta^a \equiv \eta^a$ platí (za dříve uvažovaných předpokladů o varietách ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$) podmínky (1,42). Je-li ${}^{(2)}\eta^a = \bar{\eta}^a({}^{(1)}\eta^b)$ libovolná korespondence mezi parametry ${}^{(1)}\eta^a$, ${}^{(2)}\eta^a$ variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ s vlastnostmi (a), (b), (c)[8]) a jestliže pro variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ píšeme lokální popis

$${}^{(1)}X_p\colon\ x^\alpha = {}^{(1)}\bar{\xi}^\alpha({}^{(1)}\eta^b) \equiv {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^b)\,,$$

$${}^{(2)}X_p\colon\ x^\alpha = {}^{(2)}\bar{\xi}^\alpha({}^{(1)}\eta^b) \equiv {}^{(2)}\xi^\alpha(\bar{\eta}^a({}^{(1)}\eta^b))\,,$$

potom platí

$$\left(\frac{\partial^{l(2)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{b_1}\dots\partial^{(1)}\eta^{b_l}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{l(1)}\bar{\xi}^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{b_1}\dots\partial^{(1)}\eta^{b_l}}\right)_0$$

pro $l = 0, 1, \dots, k;\ b_1, \dots, b_l = 1, \dots, p$.

Věta 4. *Nechť ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ jsou variety dimense p v E_n $(1 \leqq p \leqq n-1,$ $n \geqq 2)$ s parametrickým popisem*

$$\begin{aligned} {}^{(1)}X_p\colon\ & x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha(\eta^a)\,,\quad \alpha = 1, \dots, n;\ a = 1, \dots, p\,,\\ {}^{(2)}X_p\colon\ & x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha(\eta^a)\,,\quad \alpha = 1, \dots, n;\ a = 1, \dots, p\ ^{9)} \end{aligned} \tag{1,47}$$

a nechť jsou splněny tyto předpoklady:

(1) *variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají bod $\underset{0}{P}$ o souřadnicích $\underset{0}{x}{}^\alpha$ v E_n společný, při čemž*

$$\underset{0}{x}{}^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha(\underset{0}{\eta}{}^a) = {}^{(2)}\xi^\alpha(\underset{0}{\eta}{}^a)\,; \tag{1,48}$$

---

[7]) Vzájemně různých.

[8]) Citovanými za (1,45)$_a$.

[9]) Tedy ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ jsou vztaženy k jednomu a témuž systému parametrů η^a.

(2) *funkce* ${}^{(1)}\xi^\alpha(\eta^a)$, ${}^{(2)}\xi^\alpha(\eta^a)$ *mají v určitém okolí bodu* $(\underset{0}{\eta}^1, \ldots, \underset{0}{\eta}^p)$ *spojité parciální derivace*

$$\frac{\partial^l\, {}^{(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{b_1} \ldots \partial\eta^{b_l}}, \quad \frac{\partial^l\, {}^{(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{b_1} \ldots \partial\eta^{b_l}} \quad \text{pro } l = 1, \ldots, k;\ b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p;$$

(3) *matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\, {}^{(1)}\xi^1}{\partial\eta^1} & \frac{\partial\, {}^{(1)}\xi^2}{\partial\eta^1} & \ldots & \frac{\partial\, {}^{(1)}\xi^n}{\partial\eta^1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\, {}^{(1)}\xi^1}{\partial\eta^p} & \frac{\partial\, {}^{(1)}\xi^2}{\partial\eta^p} & \ldots & \frac{\partial\, {}^{(1)}\xi^n}{\partial\eta^p} \end{pmatrix}_{\eta^a = \underset{0}{\eta}^a}$$

a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\, {}^{(2)}\xi^1}{\partial\eta^1} & \frac{\partial\, {}^{(2)}\xi^2}{\partial\eta^1} & \ldots & \frac{\partial\, {}^{(2)}\xi^n}{\partial\eta^1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\, {}^{(2)}\xi^1}{\partial\eta^p} & \frac{\partial\, {}^{(2)}\xi^2}{\partial\eta^p} & \ldots & \frac{\partial\, {}^{(2)}\xi^n}{\partial\eta^p} \end{pmatrix}_{\eta^a = \underset{0}{\eta}^a}$$

mají hodnost p.

Platí-li

$$\left(\frac{\partial^l\, {}^{(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{b_1} \ldots \partial\eta^{b_l}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^l\, {}^{(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{b_1} \ldots \partial\eta^{b_l}}\right)_0 \tag{1,49}$$

pro $l = 1, \ldots, k$; $b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p$, *potom mají variety* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *ve společném bodě* $\underset{0}{P}$ *styk aspoň k-tého řádu ve smyslu naší definice.*

Důkaz. Pro dané variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ pišme

$${}^{(1)}X_p\colon \quad x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,, \tag{1,50$_a$}$$

$${}^{(2)}X_p\colon \quad x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(2)}\eta^a)\,, \tag{1,50$_b$}$$

Vztažení variet ${}^{(2)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ k témuž systému parametrů η^a je popsáno jednoduše korespondencí ${}^{(2)}\eta^a = {}^{(1)}\eta^a$ $(\equiv \eta^a)$ mezi parametry ${}^{(1)}\eta^a$, ${}^{(2)}\eta^a$ variet $(1,50)_a$, $(1,50)_b$. Systémem rovnic

$${}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}\, \overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha\,, \tag{1,51}$$

kde $\overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha$ $(s = 1, \ldots, n-p)$ jsou konstantní vektory v E_n s vlastností $(1,3)_{a,b}$,[10]) je potom — podle věty 1 — definována lokálně jednojednoznačná korespondence (v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{P}$) mezi body variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$. Podle

---

[10]) Kde

$${}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a \equiv \left(\frac{\partial\, {}^{(1)}\xi^\alpha}{\partial\, {}^{(1)}\eta^a}\right)_0 = \left(\frac{\partial\, {}^{(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^a}\right)_0, \quad {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a \equiv \left(\frac{\partial\, {}^{(2)}\xi^\alpha}{\partial\, {}^{(2)}\eta^a}\right)_0 = \left(\frac{\partial\, {}^{(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^a}\right).$$

věty 1 jsou rovnicemi (1,51) v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}^p)$ jednoznačně definovány funkce

$$ {}^{(2)}\eta^a = \varphi^a({}^{(1)}\eta^a)\,, \quad \underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)\,, \quad s = 1, \ldots, n-p;\ a = 1, \ldots, p \qquad (1{,}52)_a $$

těchto vlastností:

(A)

$$ \begin{aligned} {}^{(2)}\underset{0}{\eta}^a &= \varphi^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a) = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a = \underset{0}{\eta}^a\,;^{11)} \\ (\underset{s}{\lambda})_0 &= \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a) = 0\,, \quad s = 1, \ldots, n-p\,; \end{aligned} \qquad (1{,}52)_b $$

(B) funkce $\varphi^a({}^{(1)}\eta^a)$, $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ mají v uvažovaném okolí spojité parciální derivace

$$ \varphi^a_{\cdot b_1 \ldots b_l} \equiv \frac{\partial^l \varphi^a}{\partial^{(1)}\eta^{b_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{b_l}}\,, \quad \underset{s}{\lambda}_{b_1 \ldots b_l} \equiv \frac{\partial^l \underset{s}{\lambda}}{\partial^{(1)}\eta^{b_1} \ldots \partial^{(1)}\eta^{b_l}} \qquad (1{,}52)_c $$

pro $l = 1, \ldots, k$; $s = 1, \ldots, n-p$; $a, b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p$.

Z lokální identity

$$ {}^{(2)}\xi^\alpha(\varphi^a({}^{(1)}\eta^b)) - {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)\underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha \qquad (1{,}52)_d $$

plyne pak — na základě symboliky zavedené v $(1{,}52)_c$ —

$$ \varphi^a_b \left(\frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^a}\right)_{{}^{(2)}\eta^a = \varphi^a({}^{(1)}\eta^b)} - \frac{\partial^{(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^b} = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}_b \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha $$

a tedy

$$ (\varphi^a_b)_0 \left(\frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^a}\right)_{{}^{(2)}\underset{0}{\eta}^a = \varphi^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^b)} - \left(\frac{\partial^{(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^b}\right)_0 = \sum_{s=1}^{n-p} (\underset{s}{\lambda}_b)_0 \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha\,. \qquad (1{,}53) $$

Je však, jak plyne z (1,47), $(1{,}50)_{a,b}$, $(1{,}52)_b$,

$$ \left(\frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^a}\right)_{{}^{(2)}\underset{0}{\eta}^a = \varphi^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^b)} = \left(\frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^a}\right)_{{}^{(2)}\eta_0^a = \eta_0^a} = \left(\frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^a}\right)_0\,, $$

$$ \left(\frac{\partial^{(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^a}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^a}\right)_0. $$

Odtud a z předpokladu (1,49) plyne pak následující přepis relací (1,53):

$$ {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a((\varphi^a_b)_0 - \delta^a_b) = \sum_{s=1}^{n-p} (\underset{s}{\lambda}_b)_0 \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha\,, \qquad (1{,}54) $$

kde

$$ {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a \equiv \left(\frac{\partial^{(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^a}\right)_0. $$

Vzhledem k lineární nezávislosti vektorů

$$ {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a\ (a = 1, \ldots, p)\,, \quad \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha\ (s = 1, \ldots, n-p) $$

---

11) To plyne z věty 1 a z předpokladu (1) naší věty 4.

plyne z (1,54) jednak

$$(\underset{s}{\lambda_b})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1, \ldots, n - p;\ b = 1, \ldots, p\,, \tag{1,55$_a$}$$

jednak

$$(\varphi^a_b)_0 = \delta^a_b \quad \text{pro} \quad a, b = 1, \ldots, p\,. \tag{1,55$_b$}$$

Dvojnásobným derivováním identity $(1,52)_d$ obdržíme:

$$\begin{gathered}\varphi^{a_1}_{b_1}\varphi^{a_2}_{b_2}\left(\frac{\partial^{2(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^{a_1}\,\partial^{(2)}\eta^{a_2}}\right)_{{}^{(2)}\eta^a = \varphi^a({}^{(1)}\eta^b)} + \varphi^{a_1}_{b_1b_2}\left(\frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^{a_1}}\right)_{{}^{(2)}\eta^a = \varphi({}^{(2)}\eta^b)} - \\ - \frac{\partial^{2(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{b_1}\,\partial^{(1)}\eta^{b_2}} = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda_{b_1b_2}}\underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}\,.\end{gathered} \tag{1,56}$$

Je nyní, jak plyne z $(1,52)_b$, $(1,50)_{a,b}$, $(1,47)$:

$$\left(\frac{\partial^{2(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^{a_1}\,\partial^{(2)}\eta^{a_2}}\right)_{{}^{(2)}\underset{0}{\eta^a} = \varphi^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta^b})} = \left(\frac{\partial^{2(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{a_1}\partial\eta^{a_2}}\right)_{\underset{0}{\eta^a} = {}^{(1)}\underset{0}{\eta^a} = {}^{(2)}\underset{0}{\eta^a}} = \left(\frac{\partial^{2(2)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{a_1}\partial\eta^{a_2}}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\partial^{2(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1}\partial^{(1)}\eta^{a_2}}\right)_{{}^{(1)}\underset{0}{\eta^a}} = \left(\frac{\partial^{2(1)}\xi^\alpha}{\partial\eta^{a_1}\partial\eta^{a_2}}\right)_0.$$

Odtud a z $(1,55)_b$, $(1,49)$ plyne následující přepis relací (1,56):

$$\left(\frac{\partial^{(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^{a_1}}\right)_{{}^{(2)}\underset{0}{\eta^a} = \varphi^a({}^{(1)}\underset{0}{\eta^b})} (\varphi^{a_1}_{b_1b_2})_0 = \sum_{s=1}^{n-p} (\underset{s}{\lambda_{b_1b_2}})_0\,\underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}\,,$$

což můžeme vzhledem k předchozím úvahám a k zavedené symolice psát ve tvaru

$${}^{(1)}\underset{0}{B^\alpha_{a_1}}(\varphi^{a_1}_{b_1b_2})_0 = \sum_{s=1}^{n-p} (\underset{s}{\lambda_{b_1b_2}})_0\,\underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}\,.$$

Odtud plyne, vzhledem k lineární nezávislosti vektorů ${}^{(1)}\underset{0}{B^\alpha_a}$ $(a = 1, \ldots, p)$, $\underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}$ $(s = 1, \ldots, n)$, jednak

$$(\underset{s}{\lambda_{b_1b_2}})_0 = 0 \ (b_1, b_2 = 1, \ldots, p)\,, \tag{1,56$_a$}$$

jednak

$$(\varphi^{a_1}_{b_1b_2})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad a_1, b_1, b_2 = 1, \ldots, p\,. \tag{1,56$_b$}$$

Metodou úplné indukce snadno pak ověříme, že platí

$$(\underset{s}{\lambda_{b_1 \ldots b_l}})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad 2 \leqq l \leqq k \tag{1,57$_a$}$$

a pro $b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p$ a dále, že je

$$(\varphi^{a_1}_{b_1 \ldots b_l})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad 2 \leqq l \leqq k \tag{1,57$_b$}$$

a pro $a_1, b_1, \ldots, b_l = 1, \ldots, p$.

Z definice a z $(1,55)_a$, $(1,56)_a$, $(1,57)_a$ pak plyne ihned, že variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají v bodě $\underset{0}{P}$ styk k-tého řádu, což jsme měli dokázat.

Poznámka 7. Z předchozích vět vyplývají bezprostředně dva důsledky. Především lze tvrzení z vět 3, 4 spojit a výsledek formulovat stručně takto:

K tomu, aby variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *měly – za předpokladů uvedených na počátku – v bodě* $\underset{0}{P}$ *styk k-tého řádu, je nutné a stačí toto: Variety* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *můžeme lokálně v nějakém okolí bodu* $\underset{0}{P}$ *vzáhnout k jednomu a témuž systému parametrů* η^a *tak, že při odpovídajícím parametrickém popisu tvaru* (1,47) *variet* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *jsou splněny podmínky* (1,49).

Z unicity Taylorova rozvoje analytické funkce a z věty 3 plyne bezprostředně:

Nechť funkce ${}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)$ *v* $(1,1)_{a,b}$ *jsou analytickými funkcemi v nějakém okolí bodu* $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ *a podobně* ${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a)$ *jsou analytickými funkcemi v nějakém okolí bodu* $({}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^1, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^p)$ *a nechť platí dále:*

(I) *jsou splněny předpoklady* (a), (b) *na str.* 171 *o varietách* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *(s popisem* $(1,1_{a,b})$*);*

(II) *variety* ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *s popisem* $(1,1)_{a,b}$ *mají ve společném bodě styk libovolně vysokého řádu.*

Potom variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *splývají v celém (dostatečně malém) okolí bodu* $\underset{0}{P}$.

V následující části II tohoto článku budeme se zabývat dvěma speciálními definicemi styku: První bude známá metrická definice styku regulárních křivek, druhá pak jinou metrickou definicí styku nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ v E_n. Prokážeme určitou „ekvivalenci" těchto definic styku s definicí styku vyslovenou v této části I.

II

Nechť E_n značí v dalším n-rozměrný euklidovský prostor o pravoúhlých (kartézských) souřadnicích x^α.

Nechť bod $\underset{0}{P}$ o souřadnicích $\underset{0}{x}{}^\alpha$ je bodem společným dvěma křivkám ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$, které mají parametrický popis

$$ {}^{(1)}C\colon\quad x^\alpha = {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}t)\,, \tag{2,1$_a$}$$

$$ {}^{(2)}C\colon\quad x^\alpha = {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}t)\,, \tag{2,1$_b$}$$

při čemž předpokládáme:

(a) pro hodnotu ${}^{(1)}\underset{0}{t}$ parametru ${}^{(1)}t$ křivky ${}^{(1)}C$ a pro hodnotu ${}^{(2)}\underset{0}{t}$ parametru ${}^{(2)}t$ křivky ${}^{(2)}C$ je

$$\underset{0}{x}{}^\alpha = {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\underset{0}{t}) = {}^{(2)}x({}^{(2)}\underset{0}{t})\;;$$

(b) existuje okolí bodu $\underset{0}{P}$ na křivce ${}^{(1)}C$, v němž funkce ${}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}t)$ mají spojité derivace (podle ${}^{(1)}t$) až do řádu k-tého ($k \geqq 1$). Analogický předpoklad činíme o funkcích ${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}t)$;

(c) bod $\underset{0}{P}$ je regulárním bodem křivek ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$.

Označíme-li ${}^{(1)}s$ oblouk křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}s$ oblouk křivky ${}^{(2)}C$, pak jest

$$
{}^{(1)}s = \int\limits_{{}^{(1)}\underset{0}{t}}^{{}^{(1)}t} \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}^{(1)}x^{\alpha}}{\mathrm{d}^{(1)}t} \frac{\mathrm{d}^{(1)}x^{\beta}}{\mathrm{d}^{(1)}t}}\, \mathrm{d}^{(1)}t\,, \quad {}^{(2)}s = \int\limits_{{}^{(2)}\underset{0}{t}}^{{}^{(2)}t} \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}^{(2)}x^{\alpha}}{\mathrm{d}^{(1)}t} \frac{\mathrm{d}^{(2)}x^{\beta}}{\mathrm{d}^{(2)}t^{\alpha}}}\, \mathrm{d}^{(2)}t\,, \tag{2,2}
$$

kde

$$
g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \text{ pro } \alpha = \beta\,, \\ 0 \text{ pro } \alpha \neq \beta\,. \end{cases}
$$

Za našich předpokladů můžeme křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ vztáhnout lokálně — v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{P}$ — k jejich oblouku jakožto parametru. Můžeme tedy pro ně psát následující lokální popis:

$$
{}^{(1)}C\colon \quad x^{\alpha} = {}^{(1)}\xi^{\alpha}({}^{(1)}s) \equiv {}^{(1)}x^{\alpha}({}^{(1)}t({}^{(1)}s))\,, \tag{2,3$_a$}
$$

$$
{}^{(2)}C\colon \quad x^{\alpha} = {}^{(2)}\xi^{\alpha}({}^{(2)}s) \equiv {}^{(2)}x^{\alpha}({}^{(2)}t({}^{(2)}s))\,, \tag{2,3$_b$}
$$

při čemž

$$
{}^{(1)}s = {}^{(2)}s = 0 \Rightarrow {}^{(1)}\xi^{\alpha}(0) = {}^{(2)}\xi^{\alpha}(0) = \underset{0}{x}^{\alpha}\,. \tag{2,4}
$$

Obvyklá definice styku aspoň k-tého řádu křivek ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ je nyní tato:

Platí-li při korespondenci ${}^{(1)}s = {}^{(2)}s = s$

$$
\lim_{s \to 0} \frac{{}^{(2)}\xi^{\alpha}(s) - {}^{(1)}\xi^{\alpha}(s)}{s^{k}} = 0\,,^{12)}
$$

kde k je nějaké přirozené číslo, potom říkáme, že křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ mají v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu.

Je nyní dobře známo, že za platnosti našich předpokladů jsou podmínky

$$
\left(\frac{\mathrm{d}^{l}\,{}^{(2)}\xi^{\alpha}}{\mathrm{d}s^{l}}\right)_{s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^{l}\,{}^{(1)}\xi^{\alpha}}{\mathrm{d}s^{l}}\right)_{s=0}, \quad l = 0, \ldots, k \tag{2,5}
$$

nutnými a postačujícími podmínkami pro styk aspoň k-tého řádu křivek ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ v bodě $\underset{0}{P}$.

Dokážeme nyní velmi snadno, že předchozí „metrická" definice styku dvou křivek je ekvivalentní s „afinní" definicí styku dvou křivek z části I této práce (pro $p = 1$) a to ekvivalentní v tomto smyslu:

Mají-li křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ za uvedených předpokladů ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu „metrické" definice styku křivek, potom mají v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu „afinní" definice styku křivek a naopak.

Abychom toto tvrzení dokázali, předpokládejme nejdříve, že křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ s popisem $(2,1)_a$, $(2,1)_b$ mají za předpokladů (a), (b), (c) shora uvedených v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu metrické definice styku křivek. Vztáhne-

---

12) Je tedy též $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{{}^{(2)}\xi^{\alpha}(s) - {}^{(1)}\alpha(s)}{s^{p}} = 0$ pro $0 \leqq s < k$.

me-li každou z těchto křivek k jejímu oblouku jakožto novému parametru, potom při korespondenci ${}^{(1)}s = {}^{(2)}s \equiv s$ platí podmínky (2,5), jak bylo v předchozím uvedeno. Odtud a z věty 4 v části I plyne pak ihned, že křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ mají ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu „afinní“ definice styku variet z části I (kde klademe $p = 1$).

Předpokládejme za druhé, že křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ s popisem $(2,1)_a$, $(2,1)_b$ mají — za platnosti předpokladů (a), (b), (c) — v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu „afinní“ definice 1 styku variet z části I (definice z části I pro případ $p = 1$). Potom — podle věty 3 v části I — můžeme křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ lokálně (v dostatečně malých okolích bodu $\underset{0}{P}$ na těchto křivkách) vztáhnout k jednomu a témuž parametru t, tj.

$$ {}^{(1)}C\colon \quad x^\alpha = {}^{(1)}\bar{x}^\alpha(t)\,, \tag{2,6$_a$} $$

$$ {}^{(2)}C\colon \quad x^\alpha = {}^{(2)}\bar{x}^\alpha(t)\,, \tag{2,6$_b$} $$

při čemž platí

$$ \left(\frac{\mathrm{d}^l\,{}^{(1)}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}t^l}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}^l\,{}^{(2)}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}t^l}\right)_0, \quad l = 0, 1, \ldots, k\,, \tag{2,7} $$

kde symbol $(\ )_0$ představuje hodnotu veličiny v závorce uvedené pro $t = \underset{0}{t}$, kde

$$ \underset{0}{x}^\alpha = {}^{(1)}\bar{x}^\alpha(\underset{0}{t}) = {}^{(2)}\bar{x}^\alpha(\underset{0}{t})\,.^{13)} \tag{2,8} $$

Funkce ${}^{(1)}s(t)$, ${}^{(2)}s(t)$ takto definované[14])

$$ {}^{(1)}s = \int_{\underset{0}{t}}^{t} \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}\,{}^{(1)}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\,{}^{(1)}\bar{x}^\beta}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t\,, \quad {}^{(2)}s = \int_{\underset{0}{t}}^{t} \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}\,{}^{(2)}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\,{}^{(2)}\bar{x}^\beta}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t \tag{2,9$_a$} $$

jsou oblouky křivek ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ v uvedeném pořadí. Za platnosti našich předpokladů plyne lokálně, v okolí hodnoty ${}^{(1)}s = {}^{(2)}s = 0$,

$$ t = {}^{(1)}\varphi({}^{(1)}s)\,, \quad t = {}^{(2)}\varphi({}^{(2)}s)\,. \tag{2,9$_b$} $$

Odtud plyne pro křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ s popisem $(2,6)_{a,b}$ lokální popis

$$ {}^{(1)}C\colon \quad x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}s) \equiv {}^{(1)}\bar{x}^\alpha({}^{(1)}\varphi({}^{(1)}s))\,, \tag{2,10$_a$} $$

$$ {}^{(2)}C\colon \quad x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(2)}s) \equiv {}^{(2)}\bar{x}^\alpha({}^{(2)}\varphi({}^{(2)}s))\,. \tag{2,10$_b$} $$

Z $(2,9)_{a,b}$ a (2,7) plyne (s užitím poučky o derivování inversních funkcí)

$$ \left(\frac{\mathrm{d}^l\,{}^{(1)}\varphi}{\mathrm{d}\,{}^{(1)}s^l}\right)_{{}^{(1)}s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^{l\,(2)}\varphi}{\mathrm{d}s^2}\right)_{{}^{(2)}s=0}, \quad l = 0, 1, \ldots, k\,, \tag{2,11} $$

jak se snadno ověří.

13) $\underset{0}{x}^\alpha$ jsou souřadnice bodu $\underset{0}{P}$ společného křivkám ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$.

14) Viz (2,2).

Pro křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ s popisem $(2{,}10)_a$, $(2{,}10)_b$ plyne z $(2{,}10)_{a,b}$, $(2{,}7)$, $(2{,}9)_a$, $(2{,}11)$, $(2{,}8)$

$$({}^{(1)}\xi^\alpha)_{{}^{(1)}s=s=0} = ({}^{(2)}\xi^\alpha)_{{}^{(2)}s=s=0}$$

a dále

$$\left(\frac{\mathrm{d}{}^{(1)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}{}^{(1)}s}\right)_{{}^{(1)}s=s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}{}^{(1)}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}t}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}{}^{(1)}\varphi}{\mathrm{d}{}^{(1)}s}\right)_{{}^{(1)}s=s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}{}^{(2)}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}t}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}{}^{(2)}\varphi}{\mathrm{d}{}^{(2)}s}\right)_{{}^{(2)}s=s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}{}^{(2)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}{}^{(2)}s}\right)_{{}^{(2)}s=s=0}$$

a tedy při korespondenci ${}^{(2)}s = {}^{(1)}s = s$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2{}^{(1)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^2}\right)_{s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^2{}^{(2)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^2}\right)_{s=0}.$$

Snadno bychom nyní dokázali (metodou úplné indukce), že je

$$\left(\frac{\mathrm{d}^l{}^{(1)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^l}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}^l{}^{(2)}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^l}\right)_0$$

pro $l = 2, \ldots, k$. Platí tedy $(2{,}5)$, což je postačující podmínkou pro to, aby křivky ${}^{(1)}C$, ${}^{(2)}C$ měly v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu „metrické“ definice styku křivek. Tím je ekvivalence obou definic styku křivek prokázána.

*

V dalším se budeme zabývat speciální definicí styku dvou nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ v euklidovském prostoru E_n $(n \geqq 2)$, odlišné od té, která plyne z definice styku variet z části I pro $p = n - 1$, a prokážeme ekvivalenci těchto dvou definic ve shora uvedeném smyslu.

Nechť bod $\underset{0}{P} \in E_n$ je společným bodem nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ s parametrickým popisem

$$ {}^{(1)}X_{n-1}\colon\ x^\alpha = {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,, \quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, n-1\,, \qquad (2{,}12)_a$$

$$ {}^{(2)}X_{n-1}\colon\ x^\alpha = {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a)\,, \quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, n-1\,, \qquad (2{,}12)_b$$

při čemž nechť platí předpoklady (a), (b), (c) uvedené na počátku části I práce (pro $p = n - 1$). Symbolem $\underset{1}{N}{}^\alpha$ označme jednotkový vektor metrické normály nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$. Vektor $\underset{1}{N}{}^\alpha = \underset{1}{N}{}^\alpha({}^{(1)}\eta^a)$ je tedy v nějakém okolí bodu $\underset{0}{P}$ na nadploše ${}^{(1)}X_{n-1}$ jednoznačně definován podmínkami

$$g_{\alpha\beta}\,{}^{(1)}B^\alpha_a \underset{1}{N}{}^\beta = 0\,, \quad \left({}^{(1)}B^\alpha_a \equiv \frac{\partial{}^{(1)}x^\alpha}{\partial{}^{(1)}\eta^a}\right); \quad a = 1, \ldots, n-1\,,$$

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{N}{}^\alpha\underset{1}{N}{}^\beta = 1\,, \qquad (2{,}13)$$

determinant

$$[{}^{(1)}B^\alpha_1, \ldots, {}^{(1)}B^\alpha_{n-1}, \underset{1}{N}{}^\alpha] > 0\,.$$

Systémem rovnic

$$ {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \mu \underset{1}{N}{}^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \tag{2,14}$$

je lokálně, v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{P}$, definována jednojednoznačná korespondence mezi body nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$. To bychom ověřili analogicky jako tvrzení věty 1 v části I. Rovnicemi (2,14) jsou v nějakém okolí bodu $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a)$ jednoznačně definovány funkce

$$ {}^{(2)}\eta^a = \tilde{\varphi}^a({}^{(1)}\eta^b)\,, \quad a = 1, \ldots, n-1\,, \quad \mu = \mu({}^{(1)}\eta^b) \tag{2,14)*}$$

se spojitými parciálními derivacemi až do k-tého řádu (včetně) podle ${}^{(1)}\eta^a$.[15])

Nechť symbol $(\mathrm{d}^l\mu)_0$ značí l-tý diferenciál funkce $\mu({}^{(1)}\eta^a)$ v bodě $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a)$ $(l = 1, \ldots, k)$. Definujme nyní styk aspoň k-tého řádu nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ v bodě $\underset{0}{P}$ takto:

Nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ mají za shora uvedených předpokladů v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu korespondence (2,14), *jestliže platí*

$$ (\mu)_0 = (\mathrm{d}\mu)_0 = \ldots = (\mathrm{d}^k\mu)_0 = 0\,. \tag{2,15}$$

To je tedy speciální definice styku nadploch a to „metrická", neboť používáme metrické normály při definici korespondence (2,14). Platí nyní toto tvrzení:

Mají-li nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ za uvažovaných předpokladů ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu právě uvedené definice styku nadploch při korespondenci (2,14), *potom mají v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu afinní definice styku variet z části* I (*pro $p = n - 1$*) *a naopak.* Jsou tedy v tomto slova smyslu obě definice styku nadploch *ekvivalentní.*

Abychom toto tvrzení dokázali, předpokládejme nejdříve, že nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ s parametrickým popisem $(2,12)_a$, $(2,12)_b$ mají — za uvažovaných předpokladů — v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ($k \geqq 1$) ve smyslu hoření definice styku nadploch (při korespondenci (2,14)). Z (2,14), (2,14)* plyne lokální identita

$$ {}^{(2)}x^\alpha(\tilde{\varphi}^a({}^{(1)}\eta^b)) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \mu({}^{(1)}\eta^a)\, \underset{1}{N}{}^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,. \tag{2,16}$$

Píšeme-li pro nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ parametrický lokální popis

$$ {}^{(1)}X_{n-1}\colon \quad x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,,$$

$$ {}^{(2)}X_{n-1}\colon \quad x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(2)}x^\alpha(\tilde{\varphi}^a({}^{(1)}\eta^b))\,,$$

potom můžeme identitu (2,16) přepsat na tvar

$$ {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) - {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \mu({}^{(1)}\eta^a)\, \underset{1}{N}{}^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,,$$

[15]) Viz důkaz věty 1, část I.

z níž plyne pak, vzhledem k předpokladu (2,15),

$$\left(\frac{\partial^{l}\,{}^{(2)}\xi^{\alpha}}{\partial\,{}^{(1)}\eta^{a_1}\ldots\partial\,{}^{(1)}\eta^{a_l}}\right)=\left(\frac{\partial^{l}\,{}^{(1)}\xi^{\alpha}}{\partial\,{}^{(1)}\eta^{a_1}\ldots\partial\,{}^{(1)}\eta^{a}}\right)_0$$

pro $l = 0, 1, \ldots, k$; $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, n - 1$; $\alpha = 1, \ldots, n$.

Odtud plyne pak ihned — s odvoláním na větu 4 v části I —, že nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ mají v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu afinní definice styku variet v části I.

Předpokládejme za druhé, že nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ s popisem $(2,12)_a$ $(2,12)_b$ mají ve společném bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu afinní definice styku variet z části I. Potom — podle věty 3, část I — můžeme uvažované nadplochy vztáhnout k jednomu a témuž systému η^a parametrů, t. j.

$${}^{(1)}X_{n-1}\colon\ x^{\alpha} = {}^{(1)}\bar{x}^{\alpha}(\eta^a)\,, \qquad (2,17)_a$$

$${}^{(2)}X_{n-1}\colon\ x^{\alpha} = {}^{(2)}\bar{x}^{\alpha}(\eta^a)\,, \qquad (2,17)_b$$

při čemž platí

$$\left(\frac{\partial^{l}\,{}^{(1)}\bar{x}^{\alpha}}{\partial\eta^{a_1}\ldots\partial\eta^{a_l}}\right)=\left(\frac{\partial^{l}\,{}^{(2)}\bar{x}^{\alpha}}{\partial\eta^{a_1}\ldots\partial\eta^{a_l}}\right)_0 \text{[16]} \qquad (2,18)$$

pro $l = 0, 1, \ldots, k$; $\alpha = 1, \ldots, n$; $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, n - 1$. Místo lokálního popisu $(2,17)_a$, $(2,17)_b$ nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ pišme (ryze formálně)

$${}^{(1)}X_{n-1}\colon\ x^{\alpha} = {}^{(1)}\bar{x}^{\alpha}(\eta^a)\,, \qquad (2,19)_a$$

$${}^{(2)}X_{n-1}\colon\ x^{\alpha} = {}^{(2)}\bar{x}^{\alpha}({}^{*}\eta^a)\,. \qquad (2,19)_b$$

Je tedy

$$\underset{0}{x}{}^{\alpha} = {}^{(1)}\bar{x}^{\alpha}(\eta^a) = {}^{(2)}\bar{x}^{\alpha}({}^{*}\eta^a) \quad \text{pro} \quad \eta^a = {}^{*}\eta^a = \underset{0}{\eta}{}^a\,.$$

Nechť $\underset{1}{N}{}^{\alpha}$ je jednotkový normální vektor nadplochy ${}^{(1)}X_{n-1}$ (s popisem $(2,19)_a$). Rovnicemi

$${}^{(2)}\bar{x}^{\alpha}({}^{*}\eta^a) - {}^{(1)}\bar{x}^{\alpha}(\eta^a) = \mu\,\underset{1}{N}{}^{\alpha}(\eta^a) \qquad (2,20)$$

je pak lokálně — v dostatečně malém okolí bodu $(\underset{0}{\eta}{}^a)$ — definována jednojednoznačná korespondence

$${}^{*}\eta^a = \psi^a(\eta^b) \quad (\text{kde} \quad \psi^a(\underset{0}{\eta}{}^b) = \underset{0}{{}^{*}\eta}{}^a = \underset{0}{\eta}{}^a) \qquad (2,21)$$

mezi parametry nadploch ${}^{(1)}X_{n-1}$, ${}^{(2)}X_{n-1}$ a tedy též mezi body těchto nadploch v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{P}$. Relacemi (2,20) je rovněž jednoznačně lokálně definována funkce $\mu = \mu(\eta^a)$, při čemž jak funkce $\psi^a(\eta^b)$ $(a = 1, \ldots, n - 1)$ tak funkce $\mu(\eta^a)$ mají spojité parciální derivace podle argumentů η,

[16]) Kde symbol $(\ )_0$ značí hodnotu veličiny v závorce uvedené pro $\eta^a = \underset{0}{\eta}{}^a$, kde $\underset{0}{x}{}^{\alpha} \equiv {}^{(1)}\bar{x}^{\alpha}(\underset{0}{\eta}{}^a) = {}^{(2)}\bar{x}^{\alpha}(\underset{0}{\eta}{}^a)$ jsou souřadnice bodu $\underset{0}{P}$ v E_n.

až do řádu k v nějakém dostatečně malém okolí bodu $(\underset{0}{\eta}{}^a)$. Platí tedy lokální identita

$$^{(2)}\bar{x}^\alpha(\psi^a(\eta^b)) - {}^{(1)}\bar{x}^\alpha(\eta^a) = \mu(\eta^a)\,\underset{1}{N}{}^\alpha(\eta^a)\,. \tag{2,22}$$

Z (2,22), (2,21), (2,18) plyne ihned

$$(\mu)_0 = 0\,. \tag{2,23$_a$}$$

Parciálním derivováním identity (2,22) dostaneme (pro $k \geqq 1$)

$$\frac{\partial^{(2)}\bar{x}^\alpha}{\partial^*\eta^b}\frac{\partial\psi^b}{\partial\eta^a} - \frac{\partial^{(1)}\bar{x}^\alpha}{\partial\eta^a} = \frac{\partial\mu}{\partial\eta^a}\underset{1}{N}{}^\alpha + \mu\frac{\partial}{\partial\eta^a}\underset{1}{N}{}^\alpha$$

a tedy též

$$\left(\frac{\partial^{(2)}\bar{x}^\alpha}{\partial^*\eta^b}\right)_0\left(\frac{\partial\psi^b}{\partial\eta^a}\right)_0 - \left(\frac{\partial^{(1)}\bar{x}^\alpha}{\partial\eta^a}\right)_0 = \left(\frac{\partial\mu}{\partial\eta^a}\right)_0(\underset{1}{N}{}^\alpha)_0 + (\mu)_0\left(\frac{\partial}{\partial\eta^a}\underset{1}{N}{}^\alpha\right)_0.$$

Odtud plyne pak, vzhledem k $(2{,}17)_{a,b}$, $(2{,}19)_{a\,b}$, (2,18), $(2{,}23)_a$,

$$\left(\frac{\partial^{(1)}\bar{x}^\alpha}{\partial\eta^b}\right)_0\left(\left(\frac{\partial\psi^b}{\partial\eta^a}\right)_0 - \delta^b_a\right) = \left(\frac{\partial\mu}{\partial\eta^a}\right)_0(\underset{1}{N}{}^\alpha)_0\,,$$

a tedy — vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\underset{1}{N}{}^\alpha$, $^{(1)}B^\alpha_a \equiv \dfrac{\partial^{(1)}\bar{x}^\alpha}{\partial\eta^a}$ $(a = 1, \dots, n-1)$ —

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\psi^b}{\partial\eta^a}\right)_0 &= \delta^b_a\,,\\ \left(\frac{\partial\mu}{\partial\eta^a}\right)_0 &= 0\end{aligned}\right. \tag{2,23$_b$}$$

pro $a, b = 1, \dots, n-1$. Podobně jako v důkazu věty 4 bychom si ověřili, že platí (při $k \geqq 2$):

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^l\psi^b}{\partial\eta^{a_1}\dots\partial\eta^{a_l}}\right)_0 &= 0 \quad\text{pro}\quad l = 2, \dots, k\,,\\ \left(\frac{\partial^l\mu}{\partial\eta^{a_1}\dots\partial\eta^{a_l}}\right)_0 &= 0 \quad\text{pro}\quad l = 2, \dots, k\end{aligned}\right. \tag{2,23$_c$}$$

a pro $a_1, \dots, a_l = 1, \dots, n-1$. Z platnosti podmínek $(2{,}23)_{a,b,c}$ plyne platnost podmínky (2,15). To však znamená — podle naší shora vyslovené definice — že nadplochy $^{(1)}X_{n-1}$, $^{(2)}X_{n-1}$ mají v bodě $\underset{0}{P}$ styk aspoň k-tého řádu ve smyslu korespondence (2,14). Tím je ekvivalence uvažovaných dvou definic styku nadploch v E_n prokázána.

Poznámka 8. Definici styku nadploch v euklidovském prostoru E_n $(n \geqq 2)$ ve smyslu korespondence (2,14) bychom mohli nyní snadno zobecnit pro styk dvou p-rozměrných variet $^{(1)}X_p$, $^{(2)}X_p$ v E_n $(1 \leqq p < n-1)$. V takovémto případě bychom uvažovali $n - p$ jednotlivých vzájemně kolmých vektorů

$\underset{s}{N}{}^{\alpha}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ a současně kolmých k tečnému prostoru variety ${}^{(1)}X_p$ v bodě $\underset{0}{P}$ a místo korespondence (2,14) korespondenci

$$ {}^{(2)}x^{\alpha}({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^{\alpha}({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda} \underset{s}{N}{}^{\alpha} \,, $$

kde $\alpha = 1, \ldots, n$; $a = 1, \ldots, p$.

Poznamenejme ještě závěrem, že je poměrně snadné definici styku variet z části I zobecnit pro styk variet v afinních prostorech s libovolnou konexí.

Резюме

О КАСАНИИ МНОГООБРАЗИЙ В АФФИННОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ФРАНТИШЕК НОЖИЧКА (František Nožička), Прага

(Поступило в редакцию 25/III 1957 г.)

Рассмотрим в аффинном линейном пространстве $E_n (n \geqq 2)$ с координатами x^{α} $(\alpha = 1, \ldots, n)$ два многообразия ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ $(1 \leqq p \leqq n - 1)$, заданные в параметрическом виде

$$ {}^{(1)}X_p\colon\ x^{\alpha} = {}^{(1)}x^{\alpha}({}^{(1)}\eta^a) \,, \quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p \,, \qquad (\mathrm{I})_a $$

$$ {}^{(2)}X_p\colon\ x^{\alpha} = {}^{(2)}x^{\alpha}({}^{(2)}\eta^a) \,, \quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p \,, \qquad (\mathrm{I})_b $$

причем предполагается, что

(a) точка $\underset{0}{P} \in E_n$ с координатами $\underset{0}{x}{}^{\alpha}$ есть общая точка многообразий ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$. Этой точке соответствуют значения ${}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a$ параметров ${}^{(1)}\eta^a$ многообразия ${}^{(1)}X_p$ и значения ${}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a$ параметров ${}^{(2)}\eta^a$ многообразия ${}^{(2)}X_p$;

(б) функции ${}^{(1)}x^{\alpha}({}^{(1)}\eta^a)$, ${}^{(2)}x^{\alpha}({}^{(2)}\eta^a)$ обладают непрерывными частными производными по своим аргументам вплоть до порядка $k \geqq 1$ (включительно) в некоторых окрестностях точки ${}^{(1)}X_p$ на многообразиях ${}^{(2)}X_p$;

(в) точка $\underset{0}{P}$ — регулярная точка многообразий ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$.

Пусть $\underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^{\alpha}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ — постоянные векторы в E_n, удовлетворяющие условиям:

$$ \left. \begin{aligned} &\text{определитель} \quad [{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_p, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha}, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^{\alpha}] \neq 0 \,, \\ &\text{определитель} \quad [{}^{(2)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_1, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^{\alpha}_p, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^{\alpha}, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^{\alpha}] \neq 0 \,, \end{aligned} \right\} \qquad (\mathrm{II}) $$

где

$$
{}^{(1)}\underset{0}{B}{}_a^\alpha \equiv \left(\frac{\partial\,{}^{(1)}x^\alpha}{\partial\,{}^{(1)}\eta^b}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a},
$$

$$
{}^{(2)}\underset{0}{B}{}_a^\alpha = \left(\frac{\partial\,{}^{(2)}x^\alpha}{\partial\,{}^{(2)}\eta^a}\right)_{{}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a}.
$$

В этих предположениях системой уравнений

$$
{}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}\, \overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha \tag{III}
$$

локально определяется некоторое соответствие между точками многообразий ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, являющееся одно-однозначным в достаточно малой окрестности точки $\underset{0}{P}$ (теорема 1 в тексте). Кроме того, уравнениями (III) локально (в достаточно малой окрестности точки $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a)$) однозначно определяются и скаляры $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ $(s = 1, \ldots, n - p)$, причем функции $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ обладают в рассматриваемой окрестности непрерывными частными производными по своим аргументам не менее чем k-го порядка.

Пусть символы $(\mathrm{d}^l \underset{s}{\lambda})_0$ представляют полный дифференциал функции $\underset{s}{\lambda}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ l-го порядка $(l = 1, \ldots, k)$ в точке $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a)$. Тогда мы можем дать следующее определение касания по крайней мере k-го порядка многообразий ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ в их общей точке $\underset{0}{P}$:

Многообразия ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ претерпевают при указанных выше условиях в точке $\underset{0}{P}$ касание по крайней мере k-го порядка, если

$$
(\underset{s}{\lambda})_0 = (\mathrm{d}\underset{s}{\lambda})_0 = \ldots = (\mathrm{d}^k \underset{s}{\lambda})_0 = 0 \quad \text{для} \quad s = 1, \ldots, n - p\,.
$$

Таким образом сформулировано некоторое специальное определение касания двух многообразий в точке линейного аффинного пространства E_n.

Обстоятельство, что два многообразия ${}^{(1)}X_n$, ${}^{(2)}X_p$ в E_n претерпевают в точке $\underset{0}{P}$ касание по крайней мере k-го порядка в смысле указанного определения, является независимым (теорема 2 в тексте)

1. от выбора постоянных векторов $\overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha$ ($s = 1, \ldots, n - p$ со свойствами (II);
2. от выбора системы параметров многообразий ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$;
3. от выбора координат в E_n.

Для того, чтобы многообразия ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ $(\mathrm{I})_a$, $(\mathrm{I})_b$ претерпевали — при указанных выше условиях (а), (б), (в) — в точке $\underset{0}{P}$ касание по крайней мере k-го порядка ($k \geqq 1$), необходимо и достаточно следующее:

Существуют функции

$$ {}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b) \tag{IV} $$

со следующими свойствами:

(А) соотношения (IV) определяют локально одно-однозначное соответствие между параметрами ${}^{(1)}\eta^a$, ${}^{(2)}\eta^a$ многообразий ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ в некоторой окрестности точки $(\underset{0}{{}^{(1)}\eta^a})$;

(Б) $\underset{0}{{}^{(2)}\eta^a} = {}^{(2)}\eta^a(\underset{0}{{}^{(1)}\eta^a})$;

(В) если уравнения

$$ x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,, $$
$$ x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b)) $$

представляют локальное параметрическое описание многообразий ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, отнесенных к одной и той же системе ${}^{(1)}\eta^a$ параметров, то выполняются условия

$$ \left(\frac{\partial^{l\,(1)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1}\ldots\partial^{(1)}\eta^{a_l}}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = \underset{0}{{}^{(1)}\eta^a}} = \left(\frac{\partial^{l\,(2)}\xi^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^{a_1}\ldots\partial^{(1)}\eta^{a_l}}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = \underset{0}{{}^{(1)}\eta^a}} $$

для $l = 1, \ldots, k$; $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$ (теоремы 3, 4 чешского текста).

Оказывается, что известное метрическое определение касания двух кривых в E_n равносильно приведенному выше определению касания для случая $p = 1$. Для случая касания двух гиперповерхностей в E_n приводится другое, метрическое определение касания, равносильное указанному выше аффинному определению касания многообразий при $p = n - 1$.

Résumé

SUR LE CONTACT DES VARIÉTÉS DANS UN ESPACE AFFINE LINÉAIRE

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha

(Reçu le 25 Mars 1957)

Considérons dans un espace affino-euclidien E_n ($n \geqq 2$) deux variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ ($1 \leqq p \leqq n - 1$) aux équations paramétriques suivantes

$$ {}^{(1)}X_p\colon\quad x^\alpha = {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\,,\quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p\,, \tag{I$_a$} $$
$$ {}^{(2)}X_p\colon\quad x^\alpha = {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a)\,,\quad \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, p\,, \tag{I$_b$} $$

où x^α sont les coordonnées dans E_n. Nous supposerons que

(a) les variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ aient en commun le point $\underset{0}{P}$ dont les coordonnées $\underset{0}{x}^\alpha$ dans E_n correspondent aux valeurs ${}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a$ des paramètres ${}^{(1)}\eta^a$ de la variété ${}^{(1)}X_p$ et aux valeurs ${}^{(2)}\underset{0}{\eta}^a$ des paramètres ${}^{(2)}\eta^a$ de la variété ${}^{(2)}X_p$;

(b) les fonctions ${}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)({}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a))$ aient des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $k \geqq 1$ par rapport aux variables ${}^{(1)}\eta^a$ $({}^{(2)}\eta^a)$ dans un entourage du point $\underset{0}{P}$ de la variété ${}^{(1)}X_p$ $({}^{(2)}X_p)$;

(c) le point $\underset{0}{P}$ soit un point régulier des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$.

Soient $\underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ des vecteurs constants dans E_n possédant la propriété suivante:

le déterminant

$$[{}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_1, \ldots, {}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0\,,$$

le déterminant (II)

$$[{}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_2, \ldots, {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_p, \underset{0}{\overset{(1)}{v}}{}^\alpha, \ldots, \underset{0}{\overset{(n-p)}{v}}{}^\alpha] \neq 0\,,$$

où

$${}^{(1)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a \equiv \left(\frac{\partial^{(1)}x^\alpha}{\partial^{(1)}\eta^a}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a}, \qquad {}^{(2)}\underset{0}{B}{}^\alpha_a \equiv \left(\frac{\partial^{(2)}x^\alpha}{\partial^{(2)}\eta^a}\right)_{{}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\underset{0}{\eta}^a}.$$

Ces suppositions étant faites le système des équations

$${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda}\, \underset{0}{\overset{(s)}{v}}{}^\alpha \tag{III}$$

définit une certaine correspondance entre les points des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$, qui est localement biunivoque dans un entourage assez petit du point $\underset{0}{P}$ (théorème 1 du texte tchèque). Les scalaires $\underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ sont bien définis par les équations (III) dans un entourage assez petit du point $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a)$ en y possédant des dérivées partielles continues par rapport aux variables ${}^{(1)}\eta^a$ jusqu'à l'ordre k.

En désignant par $(\mathrm{d}^l\underset{s}{\lambda})_0$ la différentielle d'ordre l $(l = 1, \ldots, k)$ de la fonction $\underset{s}{\lambda}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$, dans le point $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}^a)$ on définit le contact d'ordre k (au moins) des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ en $\underset{0}{P}$ de la manière suivante:

Nous dirons que les variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *ont en* $\underset{0}{P}$ *un contact d'ordre* k *au moins, si les conditions suivantes sont valables*: $(\underset{s}{\lambda})_0 = (\mathrm{d}\underset{s}{\lambda})_0 = \ldots = (\mathrm{d}^k\underset{s}{\lambda})_0 = 0$ *pour* $s = 1, \ldots, n - p$.

C'est une certaine définition du contact de deux variétés au point de l'espace affine linéaire E_n.

Le fait que les variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ ont un contact d'ordre k au moins (dans leur point $\underset{0}{P}$ commun) dans le sens de la définition énoncée, est indépendant (théorème 2 du texte tchèque)

1. du choix des vecteurs $\underset{0}{\overset{(s)}{v^\alpha}}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ constants dans E_n, qui satisfont aux conditions (II);

2. du choix du système paramètrique des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$;

3. du choix de coordonnées dans E_n.

Pour que les variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ aient un contact d'ordre k (au moins) au point $\underset{0}{P}$ commun, il faut et il suffit qu'il èxiste des fonctions

$$ {}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b) \tag{IV} $$

aux propriétés suivantes:

(A) les relations (IV) déterminent une correspondance locale biunivoque entre les points des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ dans un entourage du point $(\underset{0}{{}^{(1)}\eta^b})$;

(B) $\underset{0}{{}^{(2)}\eta^a} = {}^{(2)}\eta^a(\underset{0}{{}^{(1)}\eta^b})$;

(C) les équations

$$ x^\alpha = {}^{(1)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)\ , $$

$$ x^\alpha = {}^{(2)}\xi^\alpha({}^{(1)}\eta^a) \equiv {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a({}^{(1)}\eta^b)) $$

étant la description paramétrique des variétés ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ douées d'un même système de paramètres ${}^{(1)}\eta^a$, les conditions

$$ \left(\frac{\partial^l\,{}^{(1)}\xi^\alpha}{\partial\,{}^{(1)}\eta^{a_1}\ldots\partial\,{}^{(1)}\eta^{a_l}}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = \underset{0}{{}^{(1)}\eta^a}} = \left(\frac{\partial^l\,{}^{(2)}\xi^\alpha}{\partial\,{}^{(1)}\eta^{a_1}\ldots\partial\,{}^{(1)}\eta^{a_l}}\right)_{{}^{(1)}\eta^a = \underset{0}{{}^{(1)}\eta^a}} $$

sont satisfaites pour $l = 1, \ldots, k$; $a_1, \ldots, a_l = 1, \ldots, p$ (les théorèmes 3 et 4 du texte tchèque).

La définition du contact de deux courbes bien connue en géométrie métrique euclidienne et la définition du contact des variétés énoncée plus haut pour le cas $p = 1$ sont équivalentes. Dans le cas du contact de deux hypersurfaces dans l'espace métrique euclidien on peut introduire une nouvelle définition du contact équivalente avec la définition bien connue du contact en géométrie métrique et avec notre définition affinne du contact (énoncée plus haut) en y posant $p = n - 1$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O NĚKTERÝCH VLASTNOSTECH HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE ČTVRTÉHO ŘÁDU

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

DT: 517.941

(Došlo dne 29. března 1957)

V práci jsou odvozeny dva kanonické tvary homogenní lineární diferenciální rovnice 4. řádu, které mohou být užitečné při studiu oscilačních a asymptotických vlastností. Při odvození obou kanonických tvarů hrají podstatnou úlohu funkce ω, ω_1, ω_2, z nichž první je diferenciálním invariantem a ostatní jsou diferenciálními semiinvarianty.

1

Nechť je dána diferenciální rovnice

$$y'''' + 4a_3y''' + 6a_2y'' + 4a_1y' + a_0y = 0\,. \tag{1,1}$$

Poznámka 1,1. O každé lineární diferenciální rovnici a tedy i o rovnici (1,1) budeme vždy předpokládat, že její koeficienty jsou spojitými funkcemi proměnné x v jistém intervalu $\langle a, b\rangle \equiv J$, při čemž v případě $b = \infty$ je interval J zprava otevřený.

G. Sansone, viz [8], odvozuje za předpokladu, že funkce a_3'', a_2' jsou v J spojité, typický tvar rovnice (1,1)

$$[\vartheta_2 y'']'' - [\vartheta_1 y']' - \Omega y' + \vartheta_0 y = 0\,, \tag{1,2}$$

kde

$$\vartheta_2 = e^{2\int a_3 dx}\,, \quad \vartheta_1 = -\,2S\vartheta_2\,, \quad \Omega = -\,2\vartheta_2 I\,, \quad \vartheta_0 = a_0\vartheta_2\,,$$

$$S = 3a_2 - a_3' - 2a_3^2\,,$$

$$I = 4a_3^3 + 6a_3a_3' - 6a_3a_2 + a_3'' - 3a_2' + 2a_1\,, \tag{1,3}$$

kterého používá při studiu některých oscilačních a asymptotických vlastností.

Poznámka 1,2. Funkce (1,3) je Halphenův invariant diferenciální rovnice (1,1), viz Halphen [2], Sansone l. c.

Poznámka 1,3. V této práci odvodíme jiné tvary rovnice (1,1), jež nazveme kanonickými. Těchto tvarů jsme použili v práci [4] {[3]} ke studiu oscilačních {asymptotických} vlastností diferenciální rovnice (1,1).

Poznámka 1,4. V celé této práci vyloučíme ze svých úvah triviální řešení.

2

Iterací homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

$$L[y] = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^{(\nu)} = 0 \tag{2,1}$$

obdržíme homogenní lineární diferenciální rovnici $2n$-tého řádu

$$L^2[y] = L[L[y]] = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \{L[y]\}^{(\nu)} = 0\,. \tag{2,2}$$

Poznámka 2,1. O koeficientech a_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) předpokládáme, že mají v J spojité derivace, které se v rovnici (2,2) vyskytují.

Platí tyto jednoduché pomocné věty:

Lemma 1. *Každé řešení rovnice* (2,1) *je řešením rovnice* (2,2).

Lemma 2. *Nechť* $Y(x)$ [$\eta(x)$] *je řešení rovnice* (2,1) [$L[y] = Y(x)$]. *Potom* $\eta(x)$ *je řešení rovnice* (2,2).

Poznámka 2,2. Platnost pomocných vět 1 a 2 se snadno rozšíří na diferenciální rovnici $L^k[y] = 0$, $k > 2$ přirozené.

Definice 1. Iterovanou rovnicí nazveme každou homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu, která vznikne n-násobnou iterací homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu

$$P[y] = A_1 y' + A_0 y = 0\,, \quad A_1 \neq 0\,. \tag{2,3}$$

Jestliže $y_1(x)$ je řešení rovnice (2,3), pak podle pomocných vět 1, 2 funkce

$$y_i(x) = y_1(x)\,.\left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{2,4}$$

$$\left(\text{kde} \left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^0 = 1\,, \left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^1 = \int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x,\right.$$
$$\left.\left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^2 = \int \frac{1}{A_1}\left(\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x, \text{ atd.}\right),$$

vyhovují iterované rovnici n-tého řádu

$$P^n[y] = 0\,. \tag{2,5}$$

Integrály (2,4) jsou lineárně nezávislé. Neboť v opačném případě by platila pro všechna $x \in J$ identita

$$y_1(x)\left(c_1 + c_2 \int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x + c_3 \left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^2 + \ldots + c_n \left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^{n-1}\right) = 0\,,$$

kde aspoň jedno z čísel c_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ je různé od nuly. Avšak tato identita je nemožná, neboť $y_1(x)$ je netriviální integrál rovnice (2,3) a wronskien funkcí, které se vyskytují uvnitř kulaté závorky, se rovná

$$A_1^{\frac{1}{2}n(1-n)} \neq 0 .$$

3

Předpokládejme, že v rovnici (1,1) jsou koeficienty a_3''', a_2'' spojitými funkcemi v intervalu J.

Věta 1. *Diferenciální rovnice (1,1) vznikne iterací diferenciální rovnice (2,3), když a jen když platí pro všechna $x \in J$ identity*

$$I = 4a_3^3 + 6a_3a_3' - 6a_3a_2 + a_3'' - 3a_2' + 2a_1 = 0\,, \tag{3,1}$$

$$\begin{aligned} I_2 = {} & 44a_3^4 + 288a_3^2a_3' + 140a_3a_3'' + 84a_3'^2 + 20a_3''' + 12a_3^2a_2 - \\ & - 150a_3a_2' + 12a_3'a_2 - 81a_2^2 - 45a_2'' + 25a_0 = 0\,. \end{aligned} \tag{3,2}$$

D ů k a z této věty není obtížný, ale je pracný. Uvedeme pouze jeho hlavní myšlenky.

Je $P^4(y) = A_1^4y'''' + A_1^3(6A_1' + 4A_0)\,y''' + A_1^2(7A_1'^2 + 4A_1A_1'' + 12A_1'A_0 +$
$+ 6A_1A_0' + 6A_0^2)\,y'' + A_1(4A_1A_1'A_1'' + A_1^2A_1''' + A_1'^3 + 4A_1'^2A_0 +$
$+ 4A_1A_1''A_0 + 10A_1A_1'A_0' + 4A_1^2A_0'' + 6A_1'A_0^2 + 12A_1A_0A_0' + 4A_0^3)\,y' +$
$+ (A_1A_1'^2A_0' + A_1^2A_1''A_0' + 3A_1^2A_1'A_0'' + 4A_1A_1'A_0A_0' + 3A_1^2A_0'^2 +$
$+ 4A_1^2A_0A_0'' + A_1^3A_0''' + 6A_1A_0^2A_0' + A_0^4)\,y.$

Dosadíme-li do (3,1), (3,2)

$$\left.\begin{aligned} & 6\,\frac{A_1'}{A_1} + 4\,\frac{A_0}{A_1} = 4a_3\,, \\ & 7\,\frac{A_1'^2}{A_1^2} + 4\,\frac{A_1''}{A_1} + 12\,\frac{A_1'A_0}{A_1^2} + 6\,\frac{A_0'}{A_1} + 6\,\frac{A_0^2}{A_1^2} = 6a_2\,, \\ & 4\,\frac{A_1'A_1''}{A_1^2} + \frac{A_1'''}{A_1} + \frac{A_1'^3}{A_1^3} + 4\,\frac{A_1'^2A_0}{A_1^3} + 4\,\frac{A_1''A_0}{A_1^2} + 10\,\frac{A_1'A_0'}{A_1^2} + \\ & \quad + 4\,\frac{A_0''}{A_1} + 6\,\frac{A_1'A_0^2}{A_1^3} + 12\,\frac{A_0A_0'}{A_1^2} + 4\,\frac{A_0^3}{A_1^3} = 4a_1\,, \\ & \frac{A_1'^2A_0'}{A_1^3} + \frac{A_1''A_0'}{A_1^2} + 3\,\frac{A_1'A_0''}{A_1^2} + 4\,\frac{A_1'A_0A_0'}{A_1^3} + 3\,\frac{A_0'^2}{A_1^2} + \\ & \quad + 4\,\frac{A_0A_0''}{A_1^2} + \frac{A_0'''}{A_1} + 6\,\frac{A_0^2A_0'}{A_1^3} + \frac{A_0^4}{A_1^4} = a_0\,, \end{aligned}\right\} \tag{3,3}$$

pak zjistíme, že $I = I_2 = 0$. Je tedy podmínka (3,1), (3,2) nutná.

Nechť naopak platí (3,1), (3,2). Má-li rovnice (1,1) vzniknout iterací rovnice (2,3), pak musí funkce A_1, A_0 vyhovovat systému diferenciálních rovnic (3,3). Ukážeme, že při splnění našeho předpokladu existuje vždy řešení systému (3,3).

Z první rovnice (3,3) vychází

$$A_0 = a_3 A_1 - \tfrac{3}{2} A_1' . \tag{3,4}$$

Dosadíme-li (3,4) do druhé, třetí a čtvrté rovnice (3,3), obdržíme po úpravě diferenciální rovnice

$$2\frac{A_1''}{A_1} - \frac{A_1'^2}{A_1^2} = \frac{12}{5}(a_3^2 + a_3' - a_2) , \tag{3,5}$$

$$\frac{A_1'''}{A_1} - 2\frac{A_1''A_1'}{A_1^2} + \frac{A_1'^3}{A_1^3} + a_3\left(2\frac{A_1''}{A_1} - \frac{A_1'^2}{A_1^2}\right) = \frac{4}{5}[a_3^3 + 3a_3a_3' + a_3'' - a_1] , \tag{3,6}$$

$$\begin{gathered}\frac{A_1''''}{A_1} - 3\frac{A_1'''A_1'}{A_1^2} + \frac{17}{2}\frac{A_1''A_1'^2}{A_1^3} - \frac{7}{2}\left(\frac{A_1''}{A_1}\right)^2 - \frac{27}{8}\frac{A_1'^4}{A_1^4} + \frac{5}{3}\left[2a_3\left(\frac{A_1'''}{A_1} - \right.\right.\\ \left.\left. - 2\frac{A_1''A_1'}{A_1^2} + \frac{A_1'^3}{A_1^3}\right) + (a_3^2 + a_3')\left(2\frac{A_1''}{A_1} - \frac{A_1'^2}{A_1^2}\right)\right] = \frac{2}{3}[a_3^4 + 6a_3^2a_3' + \\ + 4a_3a_3'' + 3a_3'^2 + a_3''' - a_0] .\end{gathered} \tag{3,7}$$

Systém (3,3) má řešení tehdy, když diferenciální rovnice (3,5), (3,6), (3,7) mají společné řešení. Tato otázka souvisí s pojmem reducibility diferenciálních rovnic (3,6), (3,7) — viz Königsberger [5] —, takže nám stačí najít podmínku, kdy rovnice (3,5) je integrálem diferenciálních rovnic (3,6), (3,7). Tato podmínka je $I = 0$, $I_2 = 0$.

V poznámkách 3,1—3,4 předpokládáme, že rovnice (1,1) je iterovaná.

P o z n á m k a 3,1. Jestliže rovnice (1,1) vznikla iterací (2,3), pak můžeme psát její obecný integrál ve tvaru

$$y(x) = e^{-\int\frac{A_0}{A_1}\mathrm{d}x}\left[c_1 + \int\left(c_2 + \int\left(c_3 + c_4\int\frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right)\frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right)\frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right] , \tag{3,8}$$

viz lemma 1, 2.

P o z n á m k a 3,2. Nechť u_1 je partikulární integrál rovnice

$$u'' = \tfrac{3}{5}(a_3^2 + a_3' - a_2)\, u , \tag{3,9}$$

pak funkce u_1^2 je integrálem rovnice (3,5). Klademe-li v (3,8) s ohledem na (3,4) $A_1 = u_1^2$, $A_0 = a_3u_1^2 - 3u_1u_1'$, dostáváme vzorec

$$y(x) = u_1^3 e^{-\int a_3\mathrm{d}x}\left[c_1 + \int\left(c_2 + \int\left(c_3 + c_4\int\frac{1}{u_1^2}\,\mathrm{d}x\right)\frac{1}{u_1^2}\,\mathrm{d}x\right)\frac{1}{u_1^2}\,\mathrm{d}x\right] . \tag{3,10}$$

P o z n á m k a 3,3. Nechť w_1 je partikulární integrál rovnice

$$2w' + w^2 = \tfrac{12}{5}(a_3^2 + a_3' - a_2) ,$$

pak funkce $e^{\int w_1 dx}$ je integrálem rovnice (3,5). Klademe-li v (3,8) s ohledem na (3,4)

$$A_1 = e^{\int w_1 dx}, \quad A_0 = a_3 e^{\int w_1 dx} - \tfrac{3}{2} w_1 e^{\int w_1 dx},$$

obdržíme vzorec

$$y(x) = e^{\frac{1}{3}\int (w_1 - 2a_3) dx}[c_1 + \int (c_2 + \int (c_3 + c_4 \int e^{-\int w_1 dx} dx) e^{-\int w_1 dx} dx) e^{-\int w_1 dx} dx] .$$

Poznámka 3,4. Nechť u_1, u_2 jsou nezávislé integrály rovnice (3,9). Podle (3,10) jsou funkce

$$u_1^3 e^{-\int a_3 dx}, \quad u_2^3 e^{-\int a_3 dx}, \tag{3,11}$$

$$(u_1 \pm u_2)^3 e^{-\int a_3 dx} \tag{3,12}$$

řešeními diferenciální rovnice (1,1). Z (3,12) vyplývá, že i funkce

$$u_1^2 u_2 e^{-\int a_3 dx}, \quad u_1 u_2^2 e^{-\int a_3 dx} \tag{3,13}$$

jsou řešeními diferenciální rovnice (1,1). Funkce (3,11), (3,13) jsou lineárně nezávislé, neboť

$$W[u_1^3, u_2^3, u_1^2 u_2, u_1 u_2^2] = -12 W [u_1, u_2]^6 \neq 0 .$$

4

Nechť je dána diferenciální rovnice

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu y^{(\nu)} = 0, \quad n \geqq 3 \text{ přirozené}, \ a_n = 1 . \tag{4,1}$$

O koeficientech a_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n - 1$) předpokládáme, že mají v intervalu J všechny derivace, které budeme potřebovat.

Je známo (viz Sansone [10], str. 81), že nejobecnější bodová transformace, která převádí rovnici (4,1) řádu $n > 3$ v rovnici téhož typu, je tvaru

$$y = t(x)\, u , \tag{4,2}$$

$$\xi = \xi(x) . \tag{4,3}$$

Označme symbolem

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \tag{4,4}$$

libovolnou funkci koeficientů rovnice (4,1) a jejich derivací.

Poznámka 4,1. Říkáme, že funkce (4,4) je absolutně, resp. relativně invariantní vzhledem k transformaci (4,2), jestliže platí rovnice

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = I(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$$

resp.

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = f(x)\, I(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) ,$$

kde b_i ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$) jsou koeficienty rovnice (4,12) a $f(x)$ je nějaká funkce proměnné x.

Říkáme, že funkce (4,4) je absolutně resp. relativně invariantní vzhledem k transformaci (4,3), jestliže platí rovnice

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = I(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1})$$

resp.

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = f(x)\, I(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1}),$$

kde $\bar{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ jsou koeficienty rovnice (4,14) a $f(x)$ je nějaká funkce proměnné x.

Nazveme funkci (4,4) prvním [druhým] absolutním semiinvariantem rovnice (4,1), jestliže je absolutně invariantní vzhledem k transformaci (4,2) [(4,3)].

Nazveme funkci (4,4) prvním [druhým] relativním semiinvariantem — kratčeji semiinvariantem — rovnice (4,1), jestliže je relativně invariantní vzhledem k transformaci (4,2) [(4,3)].

Nazveme funkci (4,4) absolutním invariantem [relativním invariantem — kratčeji invariantem] rovnice (4,1),jestliže je absolutně [relativně] invariantní vzhledem k oběma transformacím (4,2), (4,3).

Podle této definice je např. funkce (4,4) invariantem rovnice (4,1), jestliže vzhledem k jedné z transformací (4,2), (4,3) je absolutně invariantní a vzhledem k druhé je relativně invariantní.

Transformace

$$T \sim y = e^{-\int a_{n-1}\,\mathrm{d}x}\, u \tag{4,5}$$

převádí (4,1) na polokanonický tvar

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} A_\nu u^{(\nu)}, \quad A_n = 1, \quad A_{n-1} = 0. \tag{4,6}$$

Koeficienty A_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n-2)$ jsou prvními absolutními semiinvarianty rovnice (4,6), neboť platí následující věta:

Jestliže použijeme v rovnici (4,1) *transformace* (4,2) *a transformovanou rovnici převedeme pomocí transformace* $T \sim h(x)v$ *na polokanonický tvar*

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu v^{(\nu)} = 0, \quad B_n = 1, \quad B_{n-1} = 0, \tag{4,7}$$

pak

$$A_\nu = B_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{4,8}$$

Viz Sansone [10], str. 81.

P o z n á m k a 4,2. Písmenem T budeme značit každou transformaci tvaru (4,2) která převádí danou lineární diferenciální rovnici na polokanonický tvar.

Poznámka 4,3. Mezi koeficienty rovnic (4,1), (4,6) platí vztahy:

$$A_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-1}^2 - a'_{n-1}\,, \tag{4,9}$$

$$A_{n-3} = a_{n-3} - 3a_{n-1}a_{n-2} + 2a_{n-1}^3 - a''_{n-1}\,, \tag{4,10}$$

$$\begin{aligned} A_{n-4} = a_{n-4} - 4a_{n-1}a_{n-3} - 6a'_{n-1}a_{n-2} + 6a_{n-1}^2a_{n-2} - 3a_{n-1}^4 + \\ + 6a_{n-1}^2a'_{n-1} + 3a'^2_{n-1} - a'''_{n-1}\,. \end{aligned} \tag{4,11}$$

Lemma 3. *Jestliže funkce (4,4) je absolutně invariantní vzhledem k transformaci T, pak je také absolutně invariantní vzhledem k libovolné transformaci tvaru (4,2).*

Důkaz. Jestliže použijeme v (4,1) transformace (4,2), obdržíme rovnici

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} b_\nu u^{(\nu)} = 0\,, \quad b_n = 1\,, \tag{4,12}$$

kterou můžeme pomocí transformace

$$T \sim u = e^{-\int b_{n-1}\,\mathrm{d}x}\, v$$

převést na (4,7). Vzhledem k předpokladu a (4,8) platí

$$\begin{aligned} I(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) = I(B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}) = I(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}) = \\ = I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Poznámka 4,4. Mezi koeficienty rovnic (4,12), (4,1) platí vztahy

$$b_\nu = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{n-\nu} \binom{n-\nu}{k} a_{n-k}\, t^{(n-\nu-k)}\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{4,13}$$

Transformací (4,3) přejde (4,1) v rovnici

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \bar{a}_\nu \frac{\mathrm{d}^\nu y}{\mathrm{d}\xi^\nu}\,, \quad \bar{a}_0 = \frac{a_0}{(\xi')^n}\,, \quad \bar{a}_n = 1\,, \tag{4,14}$$

kde

$$\binom{n}{\nu} (\xi')^n\, \bar{a}_\nu = \sum_{i=0}^{n-\nu} \binom{n}{i} a_{n-i} \frac{K_{n-i,\nu}}{\nu!}\,, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n\,. \tag{4,15}$$

Pomocí známých hodnot

$$K_{m,m} = m!(\xi')^m\,, \quad K_{m,1} = \xi^{(m)}\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,,$$

$$\frac{K_{m,m-1}}{(m-1)!} = \binom{m}{3} \xi''(\xi')^{m-2}\,, \quad m = 2, 3, \ldots\,,$$

$$\frac{K_{m,m-2}}{(m-2)!} = \binom{m}{3} \xi'''(\xi')^{m-3} + 3\binom{m}{4} (\xi'')^2(\xi')^{m-4}\,, \quad m = 4, 5, \ldots$$

jsou vyčísleny v Sansonově knize [10], str. 84 koeficienty

$$\bar{a}_{n-1} = \frac{1}{\xi'}\left[\frac{n-1}{2}\frac{\xi''}{\xi'} + a_{n-1}\right], \tag{4,16}$$

$$\bar{a}_{n-2} = \frac{1}{(\xi')^2}\left[a_{n-2} + (n-2)\,a_{n-1}\frac{\xi''}{\xi'} + \frac{n-2}{3}\frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{(n-2)(n-3)}{4}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2\right]. \tag{4,17}$$

Jestliže vypočteme ještě

$$\frac{K_{m,m-3}}{(m-3)!} = \binom{m}{4}\xi^{(IV)}(\xi')^{m-4} + 10\binom{m}{5}\xi'''\xi''(\xi')^{m-5} + 15\binom{m}{6}(\xi'')^3(\xi')^{m-6},$$

obdržíme podle (4,15)

$$\bar{a}_{n-3} = \frac{1}{(\xi')^3}\left\{\frac{n-3}{4}\frac{\xi^{(IV)}}{\xi'} + \frac{(n-3)(n-4)}{2}\frac{\xi'''\xi''}{(\xi')^2} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{8}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^3 + \right.$$

$$\left. + a_{n-1}\left[(n-3)\frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{3}{4}(n-3)(n-4)\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2\right] + a_{n-2}\cdot\frac{3}{2}(n-3)\frac{\xi''}{\xi'} + a_{n-3}\right\}. \tag{4,18}$$

Jestliže

$$\alpha_\nu = \sum_{i=1}^{n-\nu}(-1)^i\binom{n-\nu}{i}a_{n-\nu}^{(n-\nu-i)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{4,19}$$

pak rovnice

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\alpha_\nu y^{(\nu)} = 0, \quad \alpha_n = 1$$

je adjungovaná s rovnicí (4,1).

5

Věta 2. *Funkce*

$$I = I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}) = 4a_{n-1}^3 + 6a_{n-1}a_{n-1}' - 6a_{n-1}a_{n-2} + \\ + a_{n-1}'' - 3a_{n-2}' + 2a_{n-3} \tag{5,1}$$

je invariantem rovnice (4,1) *a má tyto vlastnosti:*

1. $I(b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}) = I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3})$,
2. $I(\bar{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-3}) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3 I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3})$,
3. $I(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-3}) = -I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3})$.

Důkaz je velmi snadný a spočívá v podstatě ve verifikaci vlastností 1, 2, 3, kterou zde vzhledem k její zdlouhavosti nebudeme provádět. Poznamenejme pouze, že k verifikaci vlastnosti 1 můžeme použít lemmy 3 a vzorců (4,9), (4,10), k verifikaci vlastnosti 2 vzorců (4,16), (4,17), (4,18), k verifikaci vlastnosti 3 vztahu (4,19).

Poznámka 5,1. Podle vlastnosti 3 soudíme, že

$$I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}) = 0 \tag{5,2}$$

je nutnou podmínkou pro to, aby rovnice (4,1) byla samoadjungovaná. Jestliže $n = 3, 4$, pak podmínka (5,2) je i postačující.

Poznámka 5,2. Pro $n = 3, 4$ jsou vlastnosti funkce (5,1) v literatuře známé. Pro $n = 3$ je funkce (5,1) nazývána Laguerrovým invariantem — viz na př. Sansone [9], Laguerre [6] —, pro $n = 4$ obdržíme Halphenův invariant — viz (1,3).

Věta 3. *Funkce* $I_2 = I_2(a_3, a_2, a_1, a_0)$ — viz (3,2) — *je druhým semiinvariantem rovnice* (1,1) *a má tyto vlastnosti*:

1. $I_2(\bar{a}_3, \bar{a}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_0) = \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right)^4 I_2(a_3, a_2, a_1, a_0)$,

2. $I_2(b_3, b_2, b_1, b_0) = 50 \dfrac{t'}{t} I(a_3, a_2, a_1) + I_2(a_3, a_2, a_1, a_0)$,

3. $I_2(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0) = I_2(a_3, a_2, a_1, a_0) - 50I'(a_3, a_2, a_1)$.

Důkaz lze snadno provést verifikací. Je

$$\begin{aligned} I_2(A_3, A_2, A_1, A_0) = &- 156a_3^4 - 12a_3^3a_3' + 90a_3a_3'' + 84a_3'^2 + 20a_3''' + \\ &+ 312a_3^2a_2 + 12a_3'a_2 - 100a_3a_1 - 81a_2^2 - 45a_2'' + 25a_0 = \\ &= I_1(a_3, a_2, a_1, a_0) = I_1 \, . \end{aligned} \tag{5,3}$$

Srovnáme-li funkce (3,2) a (5,3), tj. I_1 a I_2, snadno podle lemmy 3 dojdeme k závěru, že *funkce* $I_1(a_3, a_2, a_1, a_0)$ *je prvním absolutním semiinvariantem rovnice* (1,1). Funkce I, I_1, I_2 pro $n = 4$ jsou vázány vztahem

$$I_2(a_3, a_2, a_1, a_0) = 50a_3I(a_3, a_2, a_1) + I_1(a_3, a_2, a_1, a_0) \, ,$$

odkud (vzhledem k vlastnostem funkcí I, I_2) odvodíme, že

$$I_1(\bar{a}_3, \bar{a}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_0) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right)^4 \left[I_1(a_3, a_2, a_1, a_0) - 75 \frac{\xi''}{\xi'} I(a_3, a_2, a_1)\right] .$$

Píšeme-li v (5,3) $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4}$ místo a_3, a_2, a_1, a_0, můžeme se opět verifikací přesvědčit [pomocí lemmy 3 a vzorců (4,9), (4,10), (4,11)], že *funkce* $I_1(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4})$ *je prvním absolutním semiinvariantem rovnice* (4,1) pro $n \geqq 4$ a má tyto vlastnosti:

1. $I_1(b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, b_{n-4}) = I_1(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4})$,

2. $I_1(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-4}) = I_1(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4}) - 50I'(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3})$.

6

Použijeme vlastností funkcí I, I_1, I_2 k odvození dvou kanonických tvarů homogenní lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu.

Nechť v rovnici

$$Y'''' + 4a_3Y''' + 6a_2Y'' + 4a_1Y' + a_0Y = 0 \tag{6,1}$$

jsou funkce a_2''', a_3'' spojité v intervalu J a nechť I, I_1, I_2 jsou funkce koeficientů rovnice (6,1), definované vzorci (5,1), (5,3), (3,2).

Transformací $T \sim Y = e^{-\int a_3 \mathrm{d}x} y$ můžeme (6,1) převést na tvar

$$y'''' + 6A_2y'' + 4A_1y' + A_0y = 0\,, \tag{6,2}$$

kde $A_2 = a_2 - a_3^2 - a_3'$, $4A_1 = 6A_2' + 2I$, $A_0 = \frac{81}{25}A_2^2 + \frac{9}{5}A_2'' + \frac{1}{25}I_1$.

Zavedením nových označení

$$A = \tfrac{3}{5}A_2\,, \quad \omega = 2I\,, \quad \omega_1 = \tfrac{1}{25}I_1 \tag{6,3}$$

obdržíme první kanonický tvar rovnice (6,1)

$$y'''' + 10Ay'' + (10A' + \omega)\,y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\,y = 0\,, \tag{6,4}$$

kde vzhledem k předpokladu jsou funkce A, ω, ω_1 spojité v intervalu J.

V případě $\omega = 0$ pro všechna $x \in J$ je

$$y'''' + (10Ay')' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\,y = 0 \tag{6,5}$$

samoadjungovaná rovnice.

Rovnice

$$y'''' + (10Ay')' + 3(3A^2 + A'')\,y = 0 \tag{6,6}$$

je podle věty 1 iterovanou rovnicí a podle poznámky 3,4 tvoří její fundamentální systém funkce u^3, u^2v, uv^2, v^3, jestliže u, v jsou lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice

$$u'' + Au = 0. \tag{6,7}$$

Jestliže použijeme v (6,2) postupně transformací $y = tv$, $\xi = \xi(x)$, dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}\xi^4} + 4p_3\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}\xi^3} + 6p_2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\xi^2} + 4p_1\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + p_0y = 0\,, \tag{6,8}$$

kde $p_3 = \frac{1}{\xi'}\left[\frac{3}{2}\frac{\xi''}{\xi'} + \frac{t'}{t}\right]$, $p_2 = \frac{1}{\xi'^2}\left[\frac{t''}{t} + A_2 + 2\frac{t'}{t}\frac{\xi''}{\xi'} + \frac{2}{3}\frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2\right]$.

Má-li rovnice (6,7) aspoň jedno řešení $z(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$, pak můžeme položit

$$\xi = \int \frac{1}{z^2(x)}\,\mathrm{d}x + c\,, \quad t = z^3\,,$$

takže $p_3 = p_2 = 0$; viz např. Sansone [10], str. 86. Pak

$$4p_1 = \frac{1}{\xi'^3}\,2I\,, \quad p_0 = \frac{1}{\xi'^4}\left[\frac{1}{25}\,I_1 - 3\,\frac{\xi''}{\xi'}\,I\right].$$

Použijeme-li ještě označení (6,3), obdržíme druhý kanonický tvar rovnice (6,1)

$$\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}\xi^4} + \frac{1}{\xi'^3}\,\omega\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\xi'^4}\left(\omega_1 - \frac{3}{2}\,\frac{\xi''}{\xi'}\,\omega\right)v = 0 \tag{6,9}$$

resp.

$$\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}\xi^4} + z^6\omega\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + z^8\left(\omega_1 + 3\,\frac{z'}{z}\,\omega\right)v = 0\,.$$

Poznámka 6,1. Je-li rovnice (6,1) samoadjungovaná, můžeme ji uvedenými transformacemi převést na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}\xi^4} + \frac{1}{\xi'^4}\,\omega_1 v = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}\xi^4} + z^8\omega_1 v = 0\,.$$

LITERATURA

[1] *Gutzmer A.*: Bemerkungen über die Iteration linearer homogenen Differentialgleichungen. Věstník královské české společnosti nauk, 1892, 54—59.

[2] *Halphen G. H.*: Sur les invariants des equations différentielles lineaires du quatriéme ordre. Acta mathematica, *3* (1883/1884), 325—380.

[3] *Hustý Zd.*: Asymptotické vlastnosti integrálů homogenní lineární diferenciální rovnice 4. řádu. Čas. pro pěst. mat. *83* (1958), 60—69.

[4] *З. Густы:* Колебательные свойства однородного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка. Чех. мат. ж. *8* (1958), 62—75.

[5] *Königsberger L.*: Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig 1882.

[6] *Laguerre M.*: Sur les equations differentielles linéaires du troisieme ordre. Comptes rendus, *88* (1879), 116—119.

[7] *Laguerre M.*: Sur quelques invariants des equations différentielles linéaires. Comptes rendus, *88* (1879), 224—227.

[8] *Sansone G.*: Le equazioni lineari, omogenee, del quarto ordine, nel campo reale. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II-Vol. XI-Fasc. III—IV, 1942, 151—196.

[9] *Sansone G.*: Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale. Revista (1948), 195—253.

[10] *Сансоне Дж.*: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. I. Москва, 1953.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

ЗДЕНЕК ГУСТЫ (Zdeněk Hustý), Брно

(Поступило в редакцию 29/III 1957 г.)

Дифференциальное уравнение (1,1) получается путем итерации дифференциального уравнения (2,3) тогда и только тогда, если справедливы тождества (3,1), (3,2), т. е. $I = I_2 = 0$. Функция I является инвариантом уравнения (4,1), функция I_2 $[I_1 = I_2 - 50a_3I]$ — семиинвариантом уравнения (1,1) [(4,1) для $n \geqq 4$]. В работе далее приводятся некоторые свойства функций I, I_1, I_2 и две канонических формы (6,4), (6,9) дифференциального уравнения (1,1).

Zusammenfassung

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN DER HOMOGENEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG VIERTER ORDNUNG

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingelangt am 29. März 1957)

Die Differentialgleichung (1,1) geht dann und nur dann durch Iteration der Differentialgleichung (2,3) hervor, wenn die Identitäten (3,1), (3,2), d. h. $I = I_2 = 0$, gelten. Funktion I ist Invariante der Differentialgleichung (4,1), Funktion I_2 $[I_1 = I_2 - 50a_3I]$ Semiinvariante der Differentialgleichung (1,1) [(4,1) für $n \geqq 4$]. Ferner werden in der Arbeit noch einige Eigenschaften der Funktionen I, I_1, I_2 und zwei kanonische Formen (6,4), (6,9) der Differentialgleichung (1,1) angegeben.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O W-BASÍCH ORIENTOVANÝCH GRAFŮ

MIROSLAV FIEDLER a JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

DT: 513.19

(Došlo dne 4. června 1957)

V článku se jedná o jistých podgrafech orientovaných grafů a o jejich významu jednak pro acyklické, jednak pro dobře orientované grafy. Ukazuje se také souvislost těchto podgrafů s determinanty.

V theorii konečných neorientovaných grafů se studují též grafy, jejichž jeden uzel má význačné postavení.[1]) I pro grafy orientované je možno zavést pojem uzlu význačného vzhledem k orientaci grafu; v tomto článku si všimneme některých vlastností takovýchto grafů. Při tom u orientovaných grafů ke každým dvěma různým uzlům i, k připouštíme nejvýše jednu hranu $\overrightarrow{ik}$; u neorientovaných grafů nepřipouštíme dvojúhelníky vůbec. Dále vylučujeme u všech grafů smyčky. V literatuře se někdy nepřipouštějí grafy s isolovanými uzly (viz KÖNIG [1]), ačkoliv většina vět platí i bez tohoto omezení. V této práci se nám jevilo výhodnější nevylučovat isolované uzly. Jestliže se někdy odvoláváme na známé věty, jež byly odvozeny v tomto omezujícím pojetí, činíme tak vesměs v případech, kdy rozšíření platnosti těchto vět na případy s isolovanými uzly je triviální.

Poněvadž zde jednáme převážně o orientovaných grafech, budeme grafem rozumět (není-li jinak výslovně uvedeno) konečný orientovaný graf.

Pramenem grafu G rozumíme takový jeho uzel, který není koncový pro žádnou hranu grafu G. (Příkladem pramene je isolovaný uzel grafu.) Souvislý graf s jediným pramenem označme jako W-*graf*; je-li W-graf stromem, mluvíme o W-*stromě* (isolovaný uzel považujeme též za W-strom). Nyní zavedeme pojem W-*base* orientovaného grafu G: tak budeme nazývat graf H, který je podgrafem v G, obsahuje všechny uzly grafu G a každá jeho komponenta je W-strom.[2])

[1]) KÖNIG [1] užívá (na str. 76) pro takový graf názvu *Wurzelgraph*, v anglické literatuře najdeme pojmenování *rooted tree*. G. PÓLYA [3] studoval speciální typ neorientovaných stromů *(Setzbäume)*, v nichž význačným je jeden z koncových uzlů stromu; tyto grafy mají aplikaci v organické chemii.

[2]) Souvislá W-base souvislého grafu G je tedy kostrou grafu G. Někteří autoři definují pojem kostry i pro nesouvislé neorientované grafy ([1], str. 56), jiní jen pro souvislé neorientované grafy ([2], str. 109).

Zřejmě v každém grafu existuje W-base (představuje ji na př. podgraf složený jen z isolovaných uzlů).

Je-li G neorientovaný graf, můžeme sestrojit orientovaný graf G' tak, že ponecháme množinu uzlů grafu G a místo každé hrany $vw \in G$ zavedeme právě jednu z hran $\overrightarrow{vw}$, $\overrightarrow{wv}$; pak řekneme, že jsme G *orientovali*. Nechť G', G'' jsou orientované grafy, které vznikly tím, že jsme orientovali graf G. Existuje-li v G hrana xy tak, že $\overrightarrow{xy} \in G'$, $\overrightarrow{yx} \in G''$, řekneme, že G' a G'' *se liší orientací*. Vzniká otázka, který neorientovaný graf G s daným uzlem w lze orientovat dvěma způsoby tak, aby vznikly W-grafy G' a G'' s pramenem w, které se liší orientací. Než tuto otázku zodpovíme, uvedeme bez důkazu[3]) jednu pomocnou větu o neorientovaných grafech.

Lemma 1. *Je-li G souvislý neorientovaný graf a H takový podgraf grafu G, který neobsahuje žádnou kružnici, pak existuje kostra grafu G, jejímž podgrafem je graf H.*

Věta 1. *Nechť G je souvislý neorientovaný graf a w je jeho uzel. Pak existuje jediná orientace převádějící G ve W-graf s pramenem w právě tehdy, je-li G strom.*

Důkaz. I. Nechť G je strom o n uzlech. Dokážeme existenci jediného W-stromu s pramenem w. Pro $n = 1$ a $n = 2$ je tvrzení zřejmé. Budiž $n > 2$; učiňme indukční předpoklad a uvažujme strom S_n o n uzlech a v něm uzel w. Protože takový strom má aspoň dva koncové uzly ([1], str. 49), existuje v S_n koncový uzel $v \neq w$. Odstraňme z S_n uzel v a příslušnou koncovou hranu. Je vidět, že vznikne strom[4]) S_{n-1} o $n - 1$ uzlech, který obsahuje uzel w. Podle indukčního předpokladu lze S_{n-1} orientovat tak, že vznikne W-strom s pramenem w. Tento W-strom tedy doplníme hranou jdoucí do uzlu v a existence žádané orientace stromu S_n je dokázána. Abychom nahlédli ještě unicitu, předpokládejme, že W-stromy S'_n a S''_n (vzniklé z neorientovaného stromu S_n) se liší orientací. Do koncového uzlu v (který byl nalezen výše) jde hrana $\overrightarrow{tv}$ v obou W-stromech. Odstraňme ji i s uzlem v; vzniknou opět dva W-stromy s pramenem w, které se liší orientací (spor s indukčním předpokladem).

II. Nechť G není strom; dokážeme existenci dvou W-grafů G' a G'' s pramenem w, které se liší orientací. Sestrojme v G keřík B_w s centrem w.[5]) Protože B_w je podgraf grafu G neobsahující kružnici,[6]) můžeme podle lemmatu 1 sestrojit kostru K grafu G, jejíž podgrafem je keřík B_w. Podle odst. I lze K orientovat jako W-strom s pramenem w. V G existují hrany, které nepatří do K (žádná

[3]) Důkaz lze najít ve [2], str. 112 (lemma 27).

[4]) Souvislost plyne z [1], str. 11, věta 14.

[5]) *Keřík* (Büschel) B_w s centrem w v grafu G je podgraf grafu G, který tvoří všechny hrany grafu G incidující s uzlem w a všechny koncové uzly všech těchto hran (viz [1], str. 128).

[6]) Keřík obecně může obsahovat kružnici (dvojúhelník), avšak vzhledem k tomu, že u neorientovaných grafů nepřipouštíme dvojúhelníky, keřík v námi uvažovaných neorientovaných grafech neobsahuje kružnici.

z nich neinciduje s w); nechť xy je jedna z nich. Graf G' (resp. G'') sestrojíme nyní tak, že zkonstruovaný už W-strom doplníme hranou $\overrightarrow{xy}$ (resp. $\overrightarrow{yx}$); ostatní hrany grafu G nepatřící do K (existují-li) orientujme libovolně. Pak W-grafy G' a G'' se liší orientací.

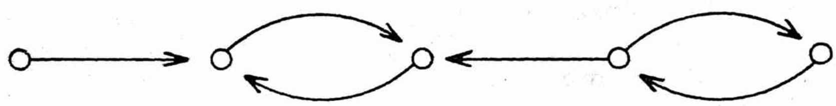
Věta 2. *W-graf s pramenem w je W-stromem právě tehdy, jde-li do každého uzlu $v \neq w$ jediná hrana.*

Důkaz. I. Uvažujme W-strom o n uzlech a označme n_1 (resp. n_2) počet těch jeho uzlů, do nichž jde jediná hrana (resp. aspoň dvě hrany). Platí tedy $1 + n_1 + n_2 = n$. Protože každá hrana jde do jednoho uzlu, můžeme počet hran $n - 1$ našeho W-stromu odhadnout takto: $1 . n_1 + 2n_2 \leqq n - 1$. Odtud $n_2 \leqq 0$ a dále $n_1 = n - 1$.

II. Obráceně nechť G je W-graf o n uzlech s pramenem w, v němž do každého uzlu $v \neq w$ jde jediná hrana; graf G má tedy $n - 1$ hran a protože je souvislý, je strom ([1], str. 54, věta 14).

Poznámka 1. Jestliže graf G má n uzlů a existuje-li jeho W-base K s r komponentami, pak K má $n - r$ hran (podle věty 2 jde totiž do každého uzlu, který není pramenem, právě jedna hrana).

Ačkoliv existence W-base v každém grafu je zřejmá, není možno sestrojit v každém grafu G takovou W-basi, jejíž prameny by byly libovolně předem vybrané uzly grafu G, dokonce nelze ani předepsat počet komponent W-base. Tak např. ve W-grafu z obr. 1 neexistuje souvislá W-base. Omezíme se tedy na speciální typy orientovaných grafů; nejprve věnujme pozornost acyklickým[7]) grafům.



Obr. 1.

Věta 3. *Nechť A je acyklický graf a nechť $w_1, w_2, \ldots, w_r$ ($r \geqq 1$) jsou všechny jeho prameny; nechť dále B je podgraf grafu A, jehož každá komponenta je W-strom. Pak existuje W-base grafu A s prameny w_i ($1 \leqq i \leqq r$), jejímž podgrafem je B.*

Důkaz. Nechť předně je A souvislý; označme h (resp. u) počet jeho hran (resp. uzlů). Platí $h \geqq u - 1$ ([1], str. 54, věta 15). Důkaz nyní podáme indukcí podle h (při pevném u).

Je-li $h = u - 1$, je A strom a tvrzení platí (jak bychom nahlédli indukcí podle u). Budiž $h_0 > u - 1$; učiňme indukční předpoklad a uvažujme souvislý acyklický graf A_0 s h_0 hranami, s prameny w_i ($1 \leqq i \leqq r$) a s podgrafem B_0 popsaných už vlastností. V A_0 existuje kružnice O, která ovšem není cyklem.

[7]) Orientovaný graf se nazývá *acyklický*, neobsahuje-li jako podgraf žádný cyklus (viz [4]).

V O tedy existují dvě různé hrany $\overrightarrow{v_1v}$, $\overrightarrow{v_2v}$; obě tyto hrany nemohou současně patřit k B_0 (plyne z věty 2). Nechť tedy $\overrightarrow{v_1v}$ non $\in B_0$; odstraňme $\overrightarrow{v_1v}$ z grafu A_0: dostaneme tak souvislý[8]) acyklický graf A_1 (o h_0 — 1 hranách) s prameny[9]) w_i $(1 \leqq i \leqq r)$ a s podgrafem B_0. Podle indukčního předpokladu tedy existuje W-base grafu A_1 mající B_0 za podgraf a ta splňuje požadavky vyslovené v textu věty. Pro souvislé grafy A je tedy důkaz podán.

Dále je zřejmé, že každý souvislý acyklický graf A obsahuje W-basi s týmiž prameny, jaké má A (vynecháváme předpoklad o B).

Nechť konečně A není souvislý. Je-li každý jeho uzel isolovaný, je tvrzení zřejmé. Nechť tedy A má komponentu $\bar{A}$ o aspoň dvou uzlech a nechť $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_t$ jsou její prameny. Jsou-li $\bar{A}$ a B disjunktní, lze zřejmě v $\bar{A}$ sestrojit W-basi s prameny $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_t$. Mají-li $\bar{A}$ a B společné uzly, existuje v $\bar{A}$ maximální podgraf $\bar{B}$ grafu B takový, že komponenty grafu $\bar{B}$ jsou W-stromy. Pak podle dosud podaného důkazu je zřejmé, že v $\bar{A}$ existuje W-base s prameny $\bar{w}_k, \ldots, \bar{w}_t$, jejímž podgrafem je $\bar{B}$. Provedeme-li takovou konstrukci W-basí pro každou komponentu grafu A, která není isolovaným uzlem, dostaneme žádanou W-basi. Důkaz je podán.

Také v dobře orientovaných grafech[10]) hraje pojem W-base zajímavou roli, jak ukážeme ve větách 4 a 5. Nejprve však uvedeme jednu pomocnou větu.

Lemma 2. *Orientovaný strom obsahuje aspoň jeden pramen.*

Důkaz plyne ihned odtud, že strom má více uzlů než hran.

Věta 4. *Jestliže ke každému uzlu w grafu G existuje W-base grafu G s jediným pramenem w, pak G je dobře orientovaný graf.*

Důkaz. Máme dokázat, že ke každé dvojici různých uzlů x, y existuje dráha vedoucí z x do y. Sestrojme W-basi s (jediným) pramenem x. Uzly x, y jsou v ní spojeny jedinou cestou C ([1], str. 48, věta 2). Ukážeme, že C je dráha. Kdyby tomu tak nebylo, existoval by na C uzel t, do něhož by vcházely dvě hrany cesty C. Tyto hrany by tedy vcházely do t také v naší souvislé W-basi, která je W-stromem (spor s větou 2).

Věta 5. *Nechť G je dobře orientovaný graf a nechť B je (neprázdný) podgraf grafu G, jehož každá komponenta je W-strom. Pak existuje W-base grafu G, která obsahuje B jako podgraf a která má tytéž prameny jako B.*

Důkaz. Nechť U je množina všech uzlů z G, které nejsou v B, a m nechť je počet prvků z U. Větu dokážeme indukcí podle m. Pro $m = 0$ graf B je W-basí a věta platí. Budiž tedy $m > 0$ a nechť věta platí pro všechny podgrafy B

---

[8]) [1], str. 11, věta 14.

[9]) Nový pramen nemůže při konstrukci grafu A_1 vzniknout.

[10]) Graf je *dobře orientovaný*, lze-li z každého jeho uzlu dojít po dráze do každého jeho dalšího uzlu (viz [4]).

grafu G, pro něž je příslušný počet prvků z U menší než m. Existuje alespoň jeden uzel $u \in B$ a alespoň jeden $v \in U$. Poněvadž G je dobře orientovaný graf, existuje v G dráha vedoucí z u do v. Označme u' poslední uzel této dráhy, který je v B. Je $u' \neq v$ a uzel v' následující za u' je z U. Tedy $\overrightarrow{u'v'}$ je hrana z G. Přidáme-li ke grafu B hranu $\overrightarrow{u'v'}$ a uzel v', dostaneme nový graf B', jehož každá komponenta je W-strom a který má tytéž prameny jako B. Poněvadž počet prvků z příslušné množiny U' je $m - 1$, existuje podle indukčního předpokladu W-base, která obsahuje B' (a tedy i B) jako podgraf a která má tytéž prameny jako B' (a tedy i jako B). Tím je věta dokázána.

Důsledek. Graf G je dobře orientovaný právě tehdy, jestliže ke každé neprázdné podmnožině P množiny uzlů grafu G existuje W-base grafu G, jejímiž prameny jsou právě uzly z P.

Důkaz plyne ihned z vět 4 a 5.

Pojem W-base grafu má zajímavou aplikaci také v theorii determinantů, jak ukážeme ve větě 6. K tomu potřebujeme pojem *ohodnoceného* grafu ([1], str. 121). Nechť je dán orientovaný graf G; jeho uzly označme $1, 2, 3, \ldots, n$ ($n \geqq 2$). Ke každé hraně $\overrightarrow{ik}$ přiřaďme reálné číslo u_{ik}. K takto ohodnocenému grafu G sestrojme nyní matici $\mathbf{A}_G = \|a_{ik}\|_1^n$ definovanou takto:

I. Při $i \neq k$ klademe $a_{ik} = - u_{ik}$, existuje-li v G hrana $\overrightarrow{ik}$; neexistuje-li taková hrana, je $a_{ik} = 0$.

II. $a_{kk} = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} u_{ik}$ (pro $k = 1, 2, \ldots, n$).

Budiž $1 \leqq r < n$ a nechť $A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ je minor matice $\mathbf{A}_G$, vzniklý z $\mathbf{A}_G$ vynecháním řádků a sloupců, které jsou označeny čísly $i_1, i_2, \ldots, i_r$.

Je-li dále G ohodnocený graf s alespoň jednou hranou, označme $\pi\{G\}$ součin všech čísel, jichž bylo užito k ohodnocení hran grafu G. Nechť $K(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ je W-base grafu G s prameny $i_1, i_2, \ldots, i_r$; označme $\sum\limits_{G}\pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ součet všech $\pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ přes všechny W-base grafu G, které mají prameny $i_1, i_2, \ldots, i_r$ (prázdný součet klademe roven nule). Odvodíme nejprve dvě pomocné věty.

Lemma 3. *Je-li G ohodnocený W-strom s pramenem n, pak $A_G(n) = \pi\{G\}$.*

Důkaz. Pro $n = 2$ je tvrzení zřejmé. Budiž tedy $n > 2$ a nechť tvrzení platí pro všechny W-stromy o n_0 uzlech ($2 \leqq n_0 < n$). Uvažujme ohodnocený W-strom S o n uzlech (s pramenem označeným n). Každý strom má aspoň dva koncové uzly ([1], str. 49), tedy každý W-strom má aspoň jeden koncový uzel y různý od pramene; nechť v S do y jde hrana $\overrightarrow{xy}$. Odstraňme z S uzel y a hranu $\overrightarrow{xy}$ (vynechávajíce ovšem také u_{xy}). Dostaneme ohodnocený W-strom S^* o $n - 1$ uzlech (s pramenem n), tedy $\pi\{S\} = u_{xy}\, \pi\{S^*\}$.

Označíme-li $A_{S*}(n)$ minor definovaný pomocí S^*, platí podle indukčního předpokladu $A_{S*}(n) = \pi\{S^*\}$ čili $\pi\{S\} = u_{xy} A_{S*}(n)$. Abychom dokázali, že $A_S(n) = u_{xy} A_{S*}(n)$, rozvedeme $A_S(n)$ podle prvků y-tého řádku (v něm nejvýše jen prvek u_{xy} stojící v hlavní úhlopříčce je $\neq 0$). Důkaz je podán.

Lemma 4. $A_G(n) = \sum_G \pi\{K(n)\}$.

Důkaz. Buďiž h počet hran grafu G. Je-li $h = 0$, neexistuje žádná souvislá W-base, tedy $\sum_G \pi\{K(n)\} = 0$. Minor $A_G(n)$ je pak také roven nule, proto tvrzení platí. Buďiž $h > 0$; učiňme indukční předpoklad a uvažujme ohodnocený graf G, který má h hran (počet uzlů je stále n). Jemu odpovídá matice $\mathbf{A}_G$. Omezíme se jen na ty ohodnocené grafy G, kde n je pramen grafu G (čili $\mathbf{A}_G$ má v n-tém sloupci samé nuly), neboť hrany jdoucí do n nehrají roli ani v $A_G(n)$, ani v $\sum_G \pi\{K(n)\}$. Probereme nyní dva případy:

I. Nechť do každého uzlu grafu G jde nejvýše jedna hrana. Je-li některý uzel $x \neq n$ grafu G jeho pramenem, pak neexistuje souvislá W-base $K(n)$, tedy $\sum_G \pi\{K(n)\} = 0$. Dále v x-tém sloupci matice $\mathbf{A}_G$ jsou samé nuly, tedy $A_G(n) = 0$; tvrzení platí.

Zbývá případ, kdy do každého uzlu $x \neq n$ grafu G jde jediná hrana.

a) Není-li G souvislý, pak neexistuje souvislá W-base, tedy $\sum_G \pi\{K(n)\} = 0$. Zvolme komponentu C grafu G, v níž neleží uzel n. Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že C má uzly $1, 2, 3, \ldots, l$ $(l < n)$. Každý subdeterminant minoru $A_G(n)$ vzatý z prvních l sloupců je roven nule (od nuly různé prvky jsou zde jen v prvních l řádcích a při tom sloupcové součty jsou rovny nule). Podle Laplace-ovy věty je tedy $A_G(n) = 0$, čímž je tvrzení ověřeno.

b) Je-li G souvislý, je to W-strom s pramenem n (věta 2) a tvrzení plyne z lemmatu 3.

II. Nechť existuje uzel r grafu G, do něhož jdou aspoň dvě různé hrany $\overrightarrow{s_1 r}$, $\overrightarrow{s_2 r}$. Sestrojme v ohodnoceném grafu G podgraf G_1 tak, že vypustíme z G hranu $\overrightarrow{s_1 r}$; dále sestrojme v G podgraf G_2 tak, že v G vypustíme všechny hrany jdoucí do r ponechávajíce jen $\overrightarrow{s_1 r}$. Ponecháme-li ohodnocení hran, jsou G_1 a G_2 ohodnocené grafy; nechť $A_{G_1}(n)$ a $A_{G_2}(n)$ jsou příslušné minory. Platí zřejmě $A_G(n) = A_{G_1}(n) + A_{G_2}(n)$. Každá souvislá W-base grafu G (s pramenem n) je souvislou W-basí právě jednoho z grafů G_1 a G_2 a obráceně. Protože každý z grafů G_1, G_2 má méně hran než h, lze použít indukčního předpokladu, tedy

$$A_{G_i}(n) = \sum_{G_i} \pi\{K(n)\}, \quad (i = 1, 2),$$

takže

$$A_G(n) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{G_i} \pi\{K(n)\} = \sum_{G} \pi\{K(n)\}\,.$$

Důkaz je podán.

Věta 6. $A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r) = \sum_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$.

Důkaz. Můžeme se omezit na ty grafy G, v nichž každý z uzlů $i_1, i_2, \ldots, i_r$ je pramenem (viz obdobné omezení v důkazu lemmatu 4).

Podle lemmatu 4 tvrzení platí pro $r = 1$. Budiž dále $r > 1$; učiňme indukční předpoklad a sestrojme minor $A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r)$. Jsou-li $i_1, i_2, \ldots, i_r$ isolované v grafu G, je tvrzení zřejmé. Je-li jeden z nich neisolovaný a všechny ostatní isolované, platí tvrzení na základě lemmatu 4. Nechť nyní aspoň dva z uvedených pramenů nejsou isolované; lze předpokládat, že to jsou uzly i_r, i_{r-1}. Nechť $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ je množina uzlů, do nichž vede hrana aspoň z jednoho z uzlů i_r, i_{r-1}. Sestrojme z grafu G pomocný ohodnocený graf H takto: Uzly i_r, i_{r-1} nechme splynout v nový uzel i, ostatní uzly grafu G ponechme. Hrany grafu G, které nevycházejí ani z i_r, ani z i_{r-1}, ponechme i s příslušným ohodnocením. Uzel i spojme s každým uzlem z J a ohodnoťme součtem $S_{ij_\alpha} = u_{i_rj_\alpha} + u_{i_{r-1}j_\alpha}$ (při tom definujme $u_{i_rj_\alpha} = 0$, neexistuje-li $\overrightarrow{i_rj_\alpha} \in G$ a podobně pro $u_{i_{r-1}j_\alpha}$).

Zřejmě platí[11])

$$A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r| = A_H(i_1, i_2, \ldots, i_{r-2}, i)\,.$$

Podle indukčního předpokladu dostáváme

$$A_H(i_1, \ldots, i_{r-2}, i) = \sum_H \pi\{K(i_1, \ldots, i_{r-2}, i)\}\,.$$

Nechť K^* je graf, který vznikne, vynecháme-li v $K(i_1, \ldots, i_{r-2}, i)$ uzel i a hrany s ním incidentní. Pak v H platí $\pi\{K(i_1, \ldots, i_{r-2}i)\} = \sigma \,.\, \pi\{K^*\}$, kde σ je součin čísel s_{ij_α} přes vhodné $j_\alpha \in J$.[12]) Upravme σ podle distributivního zákona. Vidíme, že $\pi\{K(i_1, \ldots, i_{r-2}, i)\}$, sestrojené v H, lze vypočíst jako součet všech součinů $\pi\{\bar{K}(i_1, \ldots, i_r)\}$, kde $\bar{K}(i_1, \ldots, i_r)$ probíhá všechny W-base grafu G obsahující K^* jako podgraf. Abychom dokázali

$$\sum_H \pi\{K(i_1, \ldots, i_{r-2}, i)\} = \sum_G \pi\{K(i_1, \ldots, i_r)\}\,,$$

uvážíme ještě, že každou W-basi $K(i_1, \ldots, i_r)$ grafu G dostaneme z jediné W-base $K(i_1, \ldots, i_{r-2}, i)$ grafu H, doplníme-li K^* vhodnými hranami. Důkaz je podán.

---

[11]) Pro $r = 2$ nechť pravá strana znamená $A_H(i)$.

[12]) Uvědomíme si, že zde K^* je graf, jehož komponenty jsou W-stromy, při čemž prameny tvoří uzly z J a uzly $i_1, i_2, \ldots, i_{r-2}$.

Poznámka 2. Věty 6 lze použít k určení počtu všech W-basí daného orientovaného grafu G (o alespoň dvou uzlech), které mají předepsanou množinu pramenů $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Ohodnotíme-li totiž každou hranu grafu G číslem 1, je hledaný počet roven číslu

$$\sum_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\} = A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r).$$

Poznámka 3. Věta 6 může sloužit na př. i k určení počtu (souvislých) koster neorientovaného grafu G. Sestrojme totiž orientovaný graf G' tak, že v G místo každé hrany xy zavedeme dvě hrany $\overrightarrow{xy}$ a $\overrightarrow{yx}$; budiž w libovolný (pevný) uzel grafu G. Pak počet koster grafu G je roven počtu souvislých W-basí s pramenem w v grafu G', jak plyne z věty 1. Přiřadíme-li tedy grafu G o uzlech $1, 2, \ldots, n$ ($n \geqq 2$) čtvercovou n-řádkovou matici $\|a_{ij}\|_1^n$, kde pro $i \neq j$ je $a_{ij} = a_{ji} = -1$ (resp. 0), je-li (resp. není-li) v G hrana ij, zatím co $a_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}$, potom každý hlavní minor stupně $n - 1$ je roven hledanému počtu koster grafu G.[13])

Jako aplikaci uvedeme nyní dva příklady.

Příklad 1. Neorientovaný graf, jehož každá kružnice obsahuje sudý počet hran, se nazývá *sudý graf* ([1], str. 170). Sudé grafy charakterisuje ta vlastnost, že v nich existuje rozklad množiny uzlů na dvě (neprázdné) třídy M, N tak, že jen uzly dvou různých tříd jsou spojeny hranou ([1], str. 170, věta 12). Nechť m (resp. n) je počet prvků množiny M (resp. N). Nazveme *úplným sudým grafem* U takový sudý graf, v němž ke každé dvojici uzlů x, y ($x \in M$, $y \in N$) existuje hrana $xy \in U$.

Podle poznámky 3 je počet koster grafu U roven determinantu

$$\begin{array}{c}
\left|\begin{array}{cccccccc}
n, & 0, & \ldots, & 0, & -1, & -1, & \ldots, & -1 \\
0, & n, & \ldots, & 0, & -1, & -1, & \ldots, & -1 \\
\multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\
0, & 0, & \ldots, & n, & -1, & -1, & \ldots, & -1 \\
-1, & -1, & \ldots, & -1, & m, & 0, & \ldots, & 0 \\
-1, & -1, & \ldots, & -1, & 0, & m, & \ldots, & 0 \\
\multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\
-1, & -1, & \ldots, & -1, & 0, & 0, & \ldots, & m
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} m \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n-1
\end{array} \\
\underbrace{\hphantom{-1,\ -1,\ \ldots,\ -1,}}_{m}\ \underbrace{\hphantom{0,\ 0,\ \ldots,\ m}}_{n-1}
\end{array}$$

Tento determinant je, jak se snadno vypočte, roven $m^{n-1}n^{m-1}$.[14])

Příklad 2. Budiž A acyklický graf s prameny $w_1, w_2, \ldots, w_r$ ($r \geqq 1$). Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_s$ jsou ostatní uzly grafu A, při čemž d_i značí počet hran, které ústí

[13]) K obdobnému vzorci dospěl jiným způsobem H. M. Trent v práci [5].

[14]) Srovnej se známým Cayleyho vzorcem pro počet koster úplného grafu ([1], str. 78).

do v_i $(1 \leqq i \leqq s)$. Podle poznámky 2 dokážeme, že počet W-basí grafu A, které mají prameny $w_1, w_2, \ldots, w_r$, je $d_1 d_2 \ldots d_s$.[15])

Ohodnoťme opět každou hranu grafu A číslem 1. Volbou číslování uzlů lze vždy dosáhnout toho, že matice $\|a_{ik}\|_1^n$ je trojúhelníková. V její hlavní diagonále jsou jednak čísla d_i, jednak r nul. Z věty 6 už plyne žádaný výsledek.

LITERATURA

[1] *D. König;* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[2] *A. Kotzig;* Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov, Bratislava 1956 (skriptum).

[3] *G. Pólya;* Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Math. *68* (1937), 145—254.

[4] *J. Sedláček;* O konečných orientovaných grafech, Časopis pro pěstování matematiky *82* (1957), 195—215.

[5] *H. M. Trent;* A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph, Proc. mat. Acad. Sci USA, *40*, 1004—1007 (1954).

Резюме

О W-БАЗАХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler) и ИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага

(Поступило в редакцию 4/VI 1957 г.)

Источником конечного ориентированного графа G мы называем такую его вершину, которая не является концевой ни для какого ребра графа G. Связный ориентированный граф с одним единственным источником назовем *W-графом*; в случае, если W-граф является деревом, мы говорим о *W-дереве* (граф с одной вершиной мы считаем также W-деревом). Если G — конечный ориентированный граф, то под его *W-базой* мы подразумеваем подграф графа G, каждая составляющая которого является W-деревом и который содержит все вершины графа G. В статье мы прежде всего рассматриваем W-базы в ациклических и хорошо ориентированных графах. (Ориентированный граф является *ациклическим*, если он не содержит в качестве своего подграфа ни одного цикла. Граф является *хорошо ориентированным*, если в нем из каждой вершины ведет путь к любой дальнейшей.) Доказываются следующие теоремы:

[15]) Tento výsledek tedy doplňuje větu 3.

Пусть A — ациклический граф, и $w_1, w_2, \ldots, w_r$ ($r \geqq 1$) — все его источники; пусть, далее, B — подграф графа A, каждая составляющая которого является W-деревом. Тогда существует W-база графа A с источниками $w_1, w_2, \ldots, w_r$, подграфом которой является B (теорема 3).

Если для каждой вершины w конечного ориентированного графа G существует W-база графа G с одним единственным источником w, то G является хорошо ориентированным графом (теорема 4).

Пусть G — хорошо ориентированный граф и пусть B — (непустой) подграф графа G, каждая составляющая которого является W-деревом. Тогда существует W-база графа G, содержащая B в качестве подграфа и имеющая те же источники, как и B (теорема 5).

Из двух последних теорем вытекает такое следствие: Граф G является хорошо ориентированным тогда и только тогда, если для любого непустого подмножества P множества вершин графа G существует W-база графа G, источниками которой являются в точности вершины P.

Понятие W-базы графа находит применение также в теории определителей. Пусть G — ориентированный граф; обозначим его вершины через $1, 2, 3, \ldots, n$ ($n \geqq 2$). Каждому ребру $\overrightarrow{ik}$ поставим в соответствие действительное число u_{ik} и составим для помеченного таким образом графа G матрицу $\mathbf{A}_G = \|a_{ik}\|_1^n$, определенную следующим образом:

I. Если $i \neq k$, то положим $a_{ik} = -u_{ik}$ тогда и только тогда, если в G существует ребро $\overrightarrow{ik}$; если же такого ребра не существует, то положим $a_{ik} = 0$.

II. Для $k = 1, 2, \ldots, n$ положим $a_{kk} = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} u_{ik}$. Пусть $A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ — минор матрицы $\mathbf{A}_G$, полученный из $\mathbf{A}_G$ путем вычеркивания строк и столбцов, обозначенных числами $i_1, i_2, \ldots, i_r$ (где $1 \leqq r < n$). Для помеченного графа H обозначим через $\pi(H)$ произведение всех чисел, использованных для пометок ребер графа H. Пусть $K(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ есть W-база графа G с источниками $i_1, i_2, \ldots, i_r$; обозначим через $\sum\limits_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ сумму всех $\pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$, взятую по всем W-базам графа G, имеющим фиксированные источники $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Тогда (теорема 6):

$$A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r) = \sum_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}\,.$$

В заключении работы иллюстрируются применения указанной теоремы об определителях. Показано, что эта теорема может быть использована, напр., и для определения числа (связных) основ неориентированного графа. В частности, разобран случай т. наз. *полного четного графа.* Четный граф можно — как известно — охарактеризовать тем, что в нем существует разложение множества вершин на два класса M, N так, что только вершины двух различных классов соединены ребрами. Пусть m (соотв. n) есть число элементов множества M (соотв. N). Если теперь назвать полным четным графом U такой четный граф, в котором для каждой пары вершин $x \in M$, $y \in N$ существует ребро $xy \in U$, то число основ графа U равно $m^{n-1} \cdot n^{m-1}$.

Zusammenfassung

ÜBER WURZELBASEN VON GERICHTETEN GRAPHEN

MIROSLAV FIEDLER u. JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Eingelangt am 4. Juni 1957)

Als *Quelle* eines endlichen gerichteten Graphen G bezeichnen wir einen solchen Knotenpunkt von G, der für keine Kante von G als ein Endpunkt dient. Jeder zusammenhängende gerichtete Graph mit einer einzigen Quelle heisst ein *Wurzelgraph* (kurz *W-Graph*). Ist ein W-Graph ein Baum, dann sprechen wir von einem *W-Baume* (auch einen Graphen mit nur einem Knotenpunkte halten wir für einen W-Baum). Ist G ein endlicher gerichteter Graph, dann ist es möglich seine *W-Basis* H zu definieren: H sei ein solcher Teilgraph von G, der alle Knotenpunkte von G enthält und dessen jeder zusammenhängende Bestandteil ein W-Baum ist. In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns zuerst mit den W-Basen in azyklischen und wohlgerichteten Graphen. (Ein Graph ist *azyklisch*, wenn kein Teilgraph ein Zyklus ist. Ein Graph ist *wohlgerichtet*, wenn von jedem Knotenpunkt aus zu jedem anderen eine Bahn führt.) Folgende Sätze werden bewiesen:

Sei A ein azyklischer Graph und $w_1, w_2, \ldots, w_r$ $(r \geqq 1)$ alle seine Quellen; sei B ein solcher Teilgraph von A, dessen jeder zusammenhängende Bestandteil ein W-Baum ist. Dann existiert eine W-Basis von A, für die die Knotenpunkte $w_1, w_2, \ldots, w_r$ sämtliche Quellen sind und die B als Teilgraphen enthält (Satz 3).

Gibt es zu jedem Knotenpunkt w eines endlichen gerichteten Graphen G eine W-Basis von G mit der einzigen Quelle w, so ist G ein wohlgerichteter Graph (Satz 4).

Es sei G ein wohlgerichteter Graph und B ein (nicht leerer) Teilgraph von G, dessen jeder zusammenhängende Bestandteil ein W-Baum ist. Dann existiert eine W-Basis von G mit denselben Quellen wie B, die B als Teilgraphen enthält (Satz 5).

Aus diesen zwei Sätzen folgt, dass ein gerichteter Graph dann und nur dann wohlgerichtet ist, wenn zu jeder nicht leeren Untermenge P der Knotenpunktmenge von G eine W-Basis von G existiert, deren Quellen genau diejenige Knotenpunkte von P sind.

Der Begriff der W-Basis hat auch eine Anwendung in der Theorie der Determinanten.

Es sei G ein gerichteter Graph, dessen Knotenpunkte wir mit $1, 2, 3, \ldots, n$ $(n \geqq 2)$ bezeichnen wollen. Zu jeder Kante $\overrightarrow{ik}$ von G ordnen wir eine reelle Zahl u_{ik} zu. Jetzt sei zu diesem *bewerteten* Graphen eine n-reihige quadratische Matrix $\mathbf{A}_G = \|a_{ik}\|_1^n$ folgendermassen definiert:

I. Ist $i \neq k$, dann sei $a_{ik} = - u_{ik}$ dann und nur dann, falls in G die Kante $\overrightarrow{ik}$ existiert; anderenfalls sei $a_{ik} = 0$.

II. Für $k = 1, 2, \ldots, n$ sei $a_{kk} = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} u_{ik}$.

Es sei nun $A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ (mit $1 \leqq r < n$) diejenige Hauptunterdeterminante von $\mathbf{A}_G$, in der genau die Reihen und Spalten $i_1, i_2, \ldots, i_r$ fehlen. Ist ferner H ein bewerteter Graph, so sei mit $\pi\{H\}$ das Produkt von sämtlichen zur Bewertung der Kanten von H benützten Zahlen bezeichnet. Ist noch mit $\sum\limits_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ die Summe von $\pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ über sämtliche W-Basen $K(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ von G mit den festen Quellen $i_1, i_2, \ldots, i_r$ bezeichnet, so gilt (Satz 6):

$$A_G(i_1, i_2, \ldots, i_r) = \sum_G \pi\{K(i_1, i_2, \ldots, i_r)\} .$$

Zum Schluss sind noch einige Anwendungen dieses Satzes angeführt. So kann auf diese Weise die Anzahl (zusammenhängender) Gerüste eines nichtgerichteten Graphen bestimmt werden. Es wird gezeigt, dass der sog. *vollständige paare Graph* vom Typus (m, n), der $m + n$ Knotenpunkte von zwei Klassen der Mächtigkeit m bzw. n besitzt, wobei genau Knotenpunkte von verschiedenen Klassen durch Kanten verbunden sind, die Anzahl der Gerüste $m^{n-1} \cdot n^{m-1}$ hat.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA O ENDOMORFIZMOCH NA SVÄZOCH

JÁN JAKUBÍK, Košice

DT: 519.48

(Došlo dne 12. srpna 1957)

V poznámke je riešený problém, položený G. Birkhoffom ([1], problém 93).

Nech S je sväz. Zobrazenie f sväzu S do seba, pre ktoré platí

$$x, y \in S \Rightarrow f(x) \cup f(y) = f(x \cup y)\,,$$

sa nazýva endomorfizmus vzhľadom k operácii $\cup$ na sväze S.

Nech E je množina všetkých endonorfizmov vzhľadom k operácii $\cup$ na sväze S. Ak $f, g \in E$, položíme $f \leqq g$ vtedy a len vtedy, keď pre každé $x_0 \in S$ platí $f(x_0) \leqq g(x_0)$. Tým je na množine E definované čiastočné usporiadanie.

G. Birkhoff uvádza, že mu nie je známe, či E je sväz, ak sväz S nie je distributívny (pozri [1], str. 213) a špeciálne kladie otázku ([1], str. 209, problém 93):

Nech S je ľubovoľný sväz. Je čiastočne usporiadaná množina E semimodulárnym sväzom?

V tejto poznámke dokážeme tvrdenia:

1. *Nech sväz je úplný. Potom množina všetkých endomorfizmov vzhľadom k operácii $\cup$ tvorí úplný sväz.*

2. *Čiastočne usporiadaná množina E nemusí byť semimodulárnym sväzom (ani vtedy, keď sväz S je konečný).*

Dôkaz tvrdenia 1. Nech S je úplný sväz, nech $\{f_i; i \in M\} \subset E$, $M \neq \emptyset$. Položme pre každé $x \in S$

$$\bar{f}(x) = \cup f_i(x) \quad (i \in M)\,.$$

$$\bar{f}(x_1) \cup \bar{f}(x_2) = (\cup f_i(x_1)) \cup (\cup f_i(x_2)) = \cup (f_i(x_1) \cup f_i(x_2)) =$$
$$= \cup (f_i(x_1 \cup x_2)) = \bar{f}(x_1 \cup x_2)\,.$$

Z predošlej rovnosti vyplýva, že $\bar{f}$ je najmenšie horné ohraničenie množiny $\{f_i\}$,

$$\bar{f} = \cup f_i \quad (i \in M)\,.$$

Nech 0 je najmenší prvok sväzu S. Položme pre každé $x \in S$ $f_0(x) = 0$. Potom f_0 je zrejme najmenší prvok čiastočne usporiadanej množiny E. Podľa vety 2 kap. IV, [1] E je úplný sväz.

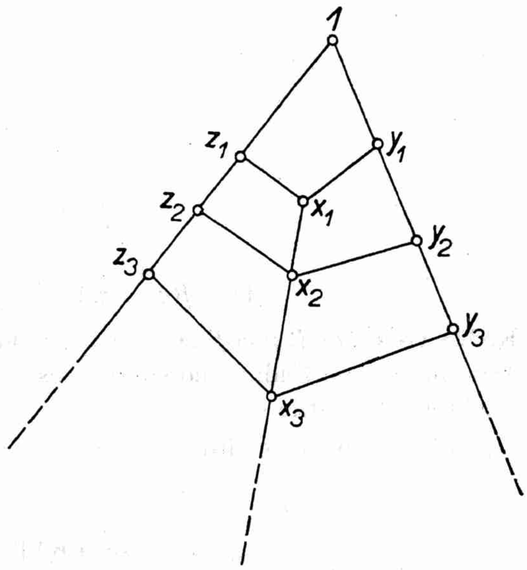
Dôkaz tvrdenia 2. Nech S je sväz, obsahujúci 5 prvkov, $S = \{0,1,2,3,4\}$, $0 < 2 < 4 < 1$, $0 < 3 < 1$, pričom prvok 3 je nezrovnateľný s každým z prvkov 2,4. Položme pre $i = 0, \ldots, 4$

$$f_i(0) = 0\,, \quad f_i(1) = f_i(2) = f_i(4) = 1\,, \quad f_i(3) = i\,.$$

Ľahko sa preverí, že každé zo zobrazení f_i $(i = 0, \ldots, 4)$ je endomorfizmus vzhľadom k operácii $\cup$ na sväze S. Z tvrdenia 1 vyplýva, že príslušný čiastočne usporiadaný systém E je sväz. Nech pre f, $g \in E$ symbol $f \prec g$ označuje, že prvok f je pokrytý prvkom g (t. j. platí $f < g$ a neexistuje prvok $h \in E$, pre ktorý by bolo $f < h < g$). Zrejme platí

$$f_0 \prec f_2 \prec f_4 \prec f_1\,, \quad f_0 \prec f_3 \prec f_1\,. \tag{1}$$

Z definície semimodulárnosti a zo vzťahov (1) vyplýva, že sväz E nie je semimodulárny.



Obr. 1.

Dodatok. V príklade 4, § 4, kap. XIII [1] (str. 208) je uvedené tvrdenie: „Endomorfizmy vzhľadom k operácii $\cup$ na ľubovolnom sväze L tvoria l-pologrupu". (Príslušná terminológia je uvedená v [1], str. 200—201.)

Vyšetrujme tento príklad:

Nech sú dané 4 množiny, z ktorých každé dve sú navzájom dizjunktné: $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $A_3 = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$, $A_4 = \{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$. Definujme na množine $L = \cup A_i$ $(i = 1, \ldots 4)$ operácie $\cap$, $\cup$ nasledovne: Pre každé $p \in L$ položme

a) $p \cap 1 = p$, $p \cup 1 = 1$.

Ak n, m sú prirodzená čísla, označme $u = \max(n, m)$, $v = \min(n, m)$.

Ak $p_n, p_m \in A_i$ $(i = 2, 3, 4)$, položme

b) $p_n \cap p_m = p_u\,, \quad p_n \cup p_m = p_v$.

Ďalej položme

c) $y_n \cap z_m = x_u\,, \quad y_n \cup z_m = 1\,,$

d) $x_n \cap p_m = x_u\,, \quad x_n \cup p_m = p_v\,,$

pričom p je ľubovoľný zo symbolov y, z. Množina L s operáciami $\cap$, $\cup$ je sväz (porov. obrázok).

Nech f_1 je identické zobrazenie množiny L na L. Nech f_2 je nasledujúce zobrazenie množiny L na L:

$$f_2(1) = 1,\ f_2(x_n) = x_n,\ f_2(y_n) = z_n,\ f_2(z_n) = y_n \quad (n = 1, 2, \ldots)\ .$$

Zrejme je f_1 aj f_2 endomorfizmus vzhľadom k operácii $\cup$ na sväze L. Predpokladajme, že f je endomorfizmus vzhľadom k operácii $\cup$ na sväze L a že platí $f \leqq f_1$, $f \leqq f_2$.

Potom musí byť pre $n = 1, 2, \ldots$

$$f(y_n) \leqq f_1(y_n) = y_n\ ,\quad f(y_n) \leqq f_2(y_n) = z_n\ ,\quad f(y_n) \leqq y_n \cap z_n = x_n$$

$$f(y_n) \leqq y_n \cap z_n = x_n$$

a analogicky

$$f(z_n) \leqq x_n\ ,$$

takže

$$f(1) = f(y_n \cup z_n) = f(y_n) \cup f(z_n) \leqq x_n\ .$$

Keďže vo sväze L množina A_2 nie je zdola ohraničená, došli sme ku sporu. Teda neexistuje žiadny endomorfizmus f vzhľadom k operácii $\cup$ na sväze L, pre ktorý by platilo $f \leqq f_1$, $f \leqq f_2$.

Z toho vyplýva, že citované Birkhoffovo tvrdenie je nesprávne.

LITERATÚRA

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory, revised ed., Amer. Math. Soc. Colloquium Publications vol. XXV, New York 1948.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ЭНДОМОРФИЗМАХ СТРУКТУР

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 12/VIII 1957 г.)

Отображение f структуры S в себя, для которого имеет место

$$x, y \in S \Rightarrow f(x) \cup f(y) = f(x \cup y)\ ,$$

называется $\cup$-эндоморфизом.

Пусть E — множество всех $\cup$-эндоморфизмов данной структуры S. Для f, $g \in S$ мы положим $f \leqq g$, если для каждого $x \in S$ $f(x) \leqq g(x)$.

Доказаны утверждения:

1. *Если структура S — полная, то E тоже является полной структурой.*

2. *Существует конечная структура S, для которой структура E не является полудедекиндовой. Существует структура, для которой E совсем не является структурой.*

Этим решен вопрос, поставленный Г. Биркгофом (см. [1], проблема 93).

Summary

NOTE ON THE ENDOMORPHISMS OF LATTICES

JÁN JAKUBÍK, Košice

(Received August 12, 1957)

A mapping f of a lattice S into S is called an $\cup$-endomorphism if

$$x, y \in S \Rightarrow f(x) \cup f(y) = f(x \cup y) .$$

Let E be the set of all $\cup$-endomorphisms of a given lattice S. If $f, g \in S$ we put $f \leqq g$ if for every $x \in S$ $f(x) \leqq g(x)$.

1. *If S is a complete lattice, then E is also a complete lattice.*

2. *There exists a finite lattice S such that the lattice E is not semi-modular. There exists a lattice S such that the set E is not a lattice at all.*

This solves a problem of G. Birkhoff ([1], Problem 93).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ÚVAHY Z LOGIKY V BOLZANOVĚ RUKOPISNÉ POZŮSTALOSTI[1])

KAREL RYCHLÍK, Praha

DT: 517.11

(Došlo dne 21. srpna 1957)

Autor článku zde podává překlad obsahu Bolzanovy práce „Von der mathematischen Lehrart“ a volný překlad § 8, výňatku z ní, který má obzvláštní význam pro matematickou logiku.[2])

BERNARD BOLZANO pracoval od r. 1830 na obsáhlém matematickém díle „Grössenlehre“, které zůstalo nedokončeno v rukopise. K tomuto dílu napsal Bolzano obšírný úvod, jehož druhý díl má název „Von der mathematischen Lehrart“ (v dalším ML). Tento spis se zabývá hlavně otázkami z logiky a to zejména se zřetelem na potřeby matematiky. Většina těchto otázek je již probrána v Bolzanově díle „Wissenschaftslehre“.[3]) Ve spise ML jsou však tyto otázky znovu a snad ještě lépe formulovány.

Rukopis Bolzanovy Grössenlehre je uložen v Národní knihovně ve Vídni; v Archivu Československé akademie věd (ČSAV) jsou uloženy fotografické kopie tohoto rukopisu opatřené M. JAŠKEM. Pořídil jsem opis kopie posledního, třetího, zpracování rukopisu ML. Rukopis sám byl psán neznámým písařem, avšak byl Bolzanem opravován a doplňován a řada stránek je psána vlastní rukou Bolzanovou. Rovněž je provedeno již Bolzanem rozdělení spisu na paragrafy a jejich očíslování.

---

[1]) Byl jsem pověřen první sekcí ČSAV provedením opisů dosud neuveřejněných Bolzanových rukopisů.

[2]) Srv. BOLZANO, Wissenschaftslehre, II, § 155–159.
Na význam Bolzanův v logice upozornili: W. DUBISLAV v pojednání „Bolzano als Vorläufer der mathematischen Logik“, Philos. Jahrbuch (Görres) *44*, 1931, 448–456; H. SCHOLZ v pojednání „Die Wissenschaftslehre Bolzano's“, Abh. d. Friesschen Schule, N. S. *6*, 1933, 399–472.
Viz též H. HERMES, H. SCHOLZ, Mathem. Logik, Enzyklop. d. mathem. Wiss., 2. vyd., Bd. I 1, Heft 1I.
Konečně viz V. FILKORN, Matematická logika I, Slovenský filozofický čas. *11*, 1956, č. 4, 352–368, hlavně str. 360–361.

[3]) Dr. B. Bolzano's Wissenschaftslehre, 4 sv., Sulzbach, 1837. Nový otisk (vydavatel W. Schulze) Lipsko 1929–1931.
Jiným výtahem z Bolzanovy Wissenschaftslehre vydaným ještě za života Bolzanova je „Bolzano's Wissenschaftslehre und Religionswissenschaft in einer beurtheilenden Übersicht“. Eine Schrift für Alle, die dessen wichtigste Ansichten kennen zu lernen wünschen. Sulzbach, 1841.

V rukopise jsou očíslovány listy; stránky jsou vyznačeny tak, že jsou na listech napsána písmena *a, b*. Červenými čísly jsou označeny stránky na fotokopiích opatřených M. Jaškem.

Obsah Bolzanova spisu M L

§ 1. Předběžné připomínky.
§ 2. Věty a pouhé představy o sobě.
§ 3. Jednoduché a složené představy.
§ 4. Předmětné a bezpředmětné představy.
§ 5. Vztahy mezi představami vzhledem k jejich rozsahu.
§ 6. Názory a pojmy.
§ 7. Věty pojmové a jiné.
§ 8. Vztahy mezi větami založené na předpokladu proměnnosti jistých částí.
§ 9. Dohody.
§ 10. Které pojmy a věty dlužno vyjádřit co nejzřetelněji.
§ 11. Jak se to má stát.
§ 12. Důkazy.
§ 13. Objektivní souvislost mezi pravdami o sobě.
§ 14. Je nutno usilovat o to, dokázat tuto souvislost.
§ 15. Pochopitelný postup.
§ 16. Apagogický (nepřímý) důkaz.
§ 17. Pořádek výkladu.
§ 18. Nadpisy.

Výňatek z Bolzanova spisu M L

§ 8. *Vztahy mezi větami založené na předpokladu proměnnosti jistých částí*
(str. 36^b—39^b, str. 44—50 v červeném očíslování)

1. Z rozličných vztahů, které mohou býti mezi větami, stačí se zmíniti jen o některých z těch, které vzniknou za předpokladu, že se ve větách vyskytnou proměnné součásti. Neboť není při porovnávání vět nic jednoduššího, než považovat za proměnnou některou součást v nich se vyskytující[4]) (buď podmět, nebo výrok, nebo součást vyskytující se v představě podmětové nebo výrokové) a zabývat se tím, jak se ony věty chovají vzhledem k pravdě, zaměníme-li ony části považované za proměnné libovolnými jinými.

[4]) Při tom musíme tutéž součást vyskytující se ve větách na několika různých místech nahradit touž proměnnou částí a jinou součást od předešlé různou považovat za proměnnou část od předešlé různou. (Pozn. překl.)

První zajímavý případ, který se zde může vyskytnout, nastává, mají-li věty $A, B, C, \ldots$, které spolu chceme porovnávat, a součásti v nich $i, j, k, \ldots$, které budeme považovat za proměnné, tu vlastnost, že existují představy, které dosazeny místo $i, j, k, \ldots$ činí věty $A, B, C, \ldots$ vesměs pravdivými. V tom případě řekneme, že věty $A, B, C, \ldots$ jsou konsistentní[5]) vzhledem k proměnným částem $i, j, k, \ldots$. Tak nazveme obě věty: „Číslo N je liché" a „Číslo N je čtverec (celého čísla)" konsistentními vzhledem k představě N, ježto lze snadno zvolit N tak, že obě věty vyslovují pravdu.

Kdyby nastal opačný případ, kdyby totiž měly věty $A, B, C, \ldots$ a součásti $i, j, k, \ldots$, které budeme považovat za proměnné, tu vlastnost, že by nebylo možno za $i, j, k, \ldots$ dosadit takové představy, aby věty $A, B, C, \ldots$ se pak staly vesměs pravdivými, řekli bychom, že ony věty jsou nekonsistentní.[6]) Tak jsou např. nekonsistentní věty: „Obrazec X je trojúhelník" a „Dva úhly v obrazci X jsou pravé" — je-li X jediná představa, kterou chceme v obou větách považovat za proměnnou.

2. Má-li být možno nazvat větu A (nebo více vět $A, B, C, \ldots$) konsistentní s větou M (nebo s více větami $M, N, P, \ldots$) vzhledem k součástem $i, j, k, \ldots$, musí být podle toho, co bylo řečeno, možno na místo součástí $i, j, k, \ldots$ klásti takové součásti, které činí pravdivými nejen věty $A, B, C, \ldots$, ale také věty $M, N, P, \ldots$. Případ obzvláště zajímavý nastane, když nejen některé, ale všechny představy, které dosazeny místo $i, j, k, \ldots$ činí pravdivými věty $A, B, C, \ldots$, činí také pravdivými všechny věty $M, N, P, \ldots$. V tomto případě řekneme, že věty $M, N, P, \ldots$ lze odvodit (dedukovat)[7]) z vět $A, B, C, \ldots$ (jsou k větám těm ve vztahu odvoditelnosti, deducibility) v širším slova smyslu vzhledem k proměnným částem $i, j, k, \ldots$.

V užším slova smyslu, a to ve smyslu, v jakém tohoto rčení budeme budoucně vždy užívat, řekneme, že větu M možno odvodit z vět $A, B, C, \ldots$ vzhledem k proměnným částem $i, j, k, \ldots$, jestliže každý souhrn představ, který po dosazení místo $i, j, k, \ldots$ činí pravdivými všechny věty $A, B, C, \ldots$, činí také pravdivou větu M, neplatí-li to však již o (skutečné) části souhrnu vět $A, B, C, \ldots$, tj., není-li věta M již také tehdy pravdivá, kdykoli je jen jistá (skutečná) část souhrnu vět $A, B, C, \ldots$ pravdivá.

Věty $A, B, C, \ldots$, z nichž lze jednu nebo více jiných vět $M, N, P, \ldots$ odvoditi, nazýváme také premisami (předpoklady)[8]) vedoucími k těmto větám, věty $M, N, P, \ldots$ pak samy nazveme důsledky (závěry)[9]) plynoucími z vět $A, B, C, \ldots$.

[5]) Bolzano užívá slova „einstimmig" nebo „verträglich".

[6]) U Bolzana: „unverträglich, stehen in dem Verhältnisse der Unverträglichkeit".

[7]) U Bolzana: „ableiten, stehen in dem Verhältnisse der Ableitbarkeit".

[8]) U Bolzana také „Vordersätze".

[9]) U Bolzana: „Schlusssätze".

Tak řekneme, že ze dvou vět

„Všechna i jsou j" a „Všechna j jsou k"

lze odvodit větu třetí: „Všechna i jsou k",

a to vzhledem k proměnným částem $i, j, k, \ldots$, ježto, kdykoliv na místo $i, j, k, \ldots$ klademe takové představy, že první dvě věty se stanou pravdivými, také třetí věta vyslovuje pravdu. Obyčejně se tento vztah deducibility mezi větami $A, B, C, \ldots$ na jedné straně a větami $M, N, P, \ldots$ na straně druhé vyslovuje slovy: „Je-li $A, B, C, \ldots$, je také $M, N, P, \ldots$"; např.: „Jsou-li i, j, k tři vrcholy trojúhelníku a je-li (pro strany) $ij = ik$, je také (pro úhly) $j = k$".

3. Abychom nahlédli, že mezi větani $A, B, C, \ldots$ na jedné straně a větami $M, N, P, \ldots$ na straně druhé (nebo také mezi větami $A, B, C, \ldots$ na jedné straně a jen jedinou větou M na straně druhé) je skutečný vztah deducibility, k tomu je třeba mít podle okolností často mnoho zvláštních předběžných vědomostí, mnohdy opět je to věc, která je ihned sama sebou patrná. Jen v tomto posledním případě, kdy tento vztah je na první pohled patrný a nespočívá na ničem jiném než na tom, co se nazývá logickou formou vět, označuje se názvem logický úsudek. Jsou-li premisy u takového logického úsudku toho druhu, jak jsme je právě vyslovili, tj., jsou-li při té vlastnosti jejich proměnných částí $i, j, k, \ldots$, kterou právě předpokládáme, pravdami, a to takovými pravdami, které jsou známé tomu, komu je k úvaze předkládáme, dá se čekat, že také závěr z nich plynoucí bude se jevit jako pravda, zvláště když bude následovat ihned za výkladem těchto premis. Nastane-li to skutečně, lze říci, že jsme sprostředkovali poznání pravdy M úsudkem z pravd již známých $A, B, C, \ldots$. Různým druhům úsudků, jichž můžeme k tomu účelu použít v očekávání příznivého výsledku, učí logika (v oné její části, která se nazývá sylogistikou), nebo aspoň má s nimi seznamovat. Uváděti je zde, vedlo by však příliš daleko.

4. Vztah deducibility mezi danými větami $A, B, C, \ldots$ a jinými danými větami $M, N, P, \ldots$ může být vzájemný, tj. věty $M, N, P, \ldots$ mohou být odvoditelné z vět $A, B, C, \ldots$ a tyto opět z vět $M, N, P, \ldots$ a to vzhledem k týmž částem $i, j, k, \ldots$ považovaným za proměnné. V tomto případě řekneme, že věty $A, B, C, \ldots$ jsou s větami $M, N, P, \ldots$ ekvivalentní (ekvipolentní).[10]) V tomto stavu ekvivalence jsou např. dvě věty: „V trojúhelníku ijk jsou strany $ij = kj$" a „λ je střed základny ik" s dvěma větami: „V trojúhelníku ijk jsou úhly $ij\lambda$ a $kj\lambda$ rovny" a „přilehlé úhly $j\lambda i$ a $j\lambda k$ jsou si rovny", při čemž považujeme za proměnné části představy i, j, k, λ.

5. Jsou-li věty $A, B, C, \ldots$ s jedné strany a věty $M, N, P, \ldots$ se strany druhé nekonsistentní (odst. 1) vzhledem k částem $i, j, k, \ldots$ pokládaným za proměnné, lze z věty: „Všechny věty $A, B, C, \ldots$ jsou pravdivé" odvodit větu: „Ne všechny věty $M, N, P, \ldots$ jsou pravdivé"; a z věty: „Všechny věty

[10]) U Bolzana: „gleichgeltend", „äquipolent".

$M, N, P, \dots$ jsou pravdivé", lze odvodit větu: „Ne všechny věty $A, B, C, \dots$ jsou pravdivé".

Někdy se však stane, že také naopak z věty: „Ne všechna $M, N, P, \dots$ jsou pravdivá", lze odvodit větu: „Všechna $A, B, C, \dots$ jsou pravdivá" a z věty: „Ne všechna $A, B, C, \dots$ jsou pravdivá", lze odvodit větu: „Všechna $M, N, P, \dots$ jsou pravdivá". V tomto zvláštním případě říkáme, že věty $A, B, C, \dots$ s jedné strany a věty $M, N, P, \dots$ se strany druhé jsou spolu ve vztahu kontradikce,[11]) v každém jiném případě jsou kontrární.[12]) Ve vztahu kontradikce jsou na př. obě věty: „Jsou-li i, j různé okamžiky, je i dříve než j" a „Jsou-li i a j různé okamžiky, je j dříve než i." Ve vztahu pouhé kontrárnosti jsou naproti tomu věty: „Veličina i je větší než j" a „Veličina i je menší než veličina j", považujeme-li ve všech případech i a j za proměnné části.

Poznámky

Místo příliš mnohoznačného slova věta (na př. věta v gramatice, věta ve smyslu poučka v matematice) navrhuji užívat slova výpověď.[13]) Výpověď je tedy buď pravdivá nebo nepravdivá. Místo výrazů proměnná představa, proměnná část nebo součást užívaných Bolzanem se říká prostě proměnná. Postupem popsaným v odst. 1 vzniknou z výpovědí výpovědní formy (funkce) jedné neb více proměnných. Z výpovědní formy možno tím, že za každou proměnnou dosadíme nějaký „výraz", dostat výpověď — pravdivou neb nepravdivou. V prvním případě se řekne, že výpovědní forma je verifikována, v druhém že je falsifikována.

Bolzano je první, kdo zavedl do logiky velmi důležitý pojem výpovědní formy. Tohoto pojmu pak užil k definici deducibility,[14]) odvoditelnosti, konsekvence, logické implikace (odst. 2) a ovšem i pojmu ekvivalence (odst. 4), který lze odtud snadno odvodit.

Pomocí deducibility lze také vyjádřit pojem důsledku (odst. 3).[15])

---

[11]) U Bolzana také „sind in dem Verhältniss des Widerspruches".

[12]) U Bolzana také „widerstreiten".

[13]) Něm. „Aussage". Pro predikát ve smyslu gramatickém se užívalo kdysi (na přelomu století) názvu „výrok", pak „přísudek" a nyní se opět užívá názvu „výrok". Vedlo by tedy užívání slova výrok ve smyslu Aussage k dvojznačnosti tohoto slova, která by ovšem mohla být na závadu. Patrně z tohoto důvodu užíval slova výpověď ve smyslu něm. Aussage Vorovka a užívá ho i V. Fiikorn v pojednání citovaném v pozn. pod č.[3]).

[14]) Podobně zavedl pojem ten (užívaje při tom pojmu modelu) nezávisle na Bolzanovi A. Tarski: Über den Begriff der logischen Folgerung, Actual. scient. et industr. *394*, Paříž 1936, 1—11.

[15]) Gentzenovu logiku konsekvencí lze interpretovat jako formalisaci tohoto pojmu. Viz Gentzen, Untersuchungen über das logische Schliessen, Math. Zeitschr. *39*, 1934, 176—210, 405—431.

Резюме

РАССУЖДЕНИЯ ПО ЛОГИКЕ В РУКОПИСНОМ НАСЛЕДСТВЕ БОЛЬЦАНО

КАРЕЛ РЫХЛИК, Karel Rychlík, Прага

(Поступило в редакцию 21/VIII 1957 г.)

Автором статьи здесь дается в переводе на чешский язык оглавление работы Больцано „*Von der mathematischen Lehrart*“, а также свободный перевод § 8 этой работы, имеющего особое значение для математической логики.

Zusammenfassung

BETRACHTUNGEN AUS DER LOGIK IM BOLZANO'S HANDSCHRIFTLICHEN NACHLASSE

KAREL RYCHLÍK, Praha

(Eingelangt am 21. August 1957)

Der Verfasser bringt in diesem Aufsatze die Übersetzung des Inhaltes Bolzanos Arbeit „Von der mathematischen Lehrart“ ins Tschechische und in freier Übersetzung den § 8 dieser Arbeit, einen Auszug, der für die mathematische Logik von besonderer Bedeutung ist.

ÚLOHY A PROBLÉMY

Poznámka k problému protínajících se lomených čar

(K řešení úlohy Jana Maříka)

Obsahem tohoto článku je důkaz věty uvedené v odst. 8. Bezprostředním důsledkem této věty je tvrzení, jehož důkaz (pokud možno elementárními prostředky) byl dán jako problém (č. 9) JANEM MAŘÍKEM v Časopise pro pěstování matematiky *81* (1956), 470.

1. Naše úvahy budeme provádět v rovině $\mathfrak{B}_2$, kde platí *absolutní geometrie*. Předpokládáme, že jsou známy pojmy: bod, úsečka, přímka, polopřímka, uspořádání bodů na přímce a na úsečce, polorovina, rovinný pás tvořený dvěma přímkami bez společných bodů a trojúhelník (jeho vnitřek a vnějšek). Trojúhelníkem budeme v celé práci rozumět jenom jeho obvod.

Mějme v rovině $\mathfrak{B}_2$ konečnou posloupnost bodů $A_0, A_1, \ldots, A_n$ $(n \geqq 0)$. Nechť

a) pro $n > 0$ platí $A_0 \neq A_n$,

b) pro $n > 1$ žádná trojice bodů A_{i-1}, A_i, A_{i+1} neleží v přímce $(i = 1, \ldots, n-1)$.

Potom sjednocení všech úseček $\bigcup_{i=1}^{n} a_i$ $(a_i = \overline{A_{i-1}A_i})$, pro $n > 0$, nebo bod A_0 pro $n = 0$, nazýváme *lomenou čarou* (spojující body A_0 a A_n) $L(A_0, A_n)$ (dále někdy jen l. č.). Bodům A_i $(i = 0, \ldots, n)$ říkáme *vrcholy* lomené čáry. Úsečkám a_i $(i = 1, \ldots, n)$ říkáme *strany* lomené čáry. (Je zřejmé, že pro $n = 0$ dostáváme nulovou úsečku a pro $n = 1$ dostáváme úsečku $\overline{A_0A_1}$).

Vrcholu lomené čáry L, kterým procházejí alespoň tři strany lomené čáry, říkáme *uzlový vrchol* lomené čáry. Vnitřnímu bodu jedné strany lomené čáry, kterým procházejí alespoň dvě strany, říkáme *vnitřní uzlový bod* lomené čáry. Uzlovým vrcholům a vnitřním uzlovým bodům lomené čáry budeme říkat *uzly* lomené čáry L. Uzel, který neleží na žádné úsečce, skládající se ze samých uzlů, nazveme *isolovaný*. Lomená čára, která nemá žádné uzly, se nazývá *jednoduchá lomená čára* (dále někdy jen j. l. č.).

Poznámka. Zřejmě nulová úsečka a úsečka jsou jednoduché lomené čáry.

2. Nechť A, B jsou dva různé body lomené čáry. Nechť $i(k)$ je nejmenší index strany, která prochází bodem $A(B)$. Říkáme, že *bod A leží před bodem B* $(A \prec B)$, jestliže $i < k$, nebo $i = k$ a bod A leží před bodem B v uspořádání bodů úsečky a_i, kde A_{i-1} je prvním a A_i posledním bodem. Zřejmě dostáváme uspořádání bodů lomené čáry.

Mějme dva body A, B jedné strany a_i lomené čáry. Nechť bod A leží před bodem B v uspořádání bodů úsečky a_i, kde A_{i-1} je prvním a A_i posledním bodem, potom zřejmě nemusí platit $A \prec B$ v uspořádání bodů celé lomené čáry. Platí to pro všechny dvojice bodů A, B pouze v případě jednoduché lomené čáry.

Mějme dvě lomené čáry L_1 a L_2. Nechť $L_1 \subset L_2$, potom každá strana lomené čáry L_1 se dá rozložit na konečný počet úseček a každá z těchto úseček je obsažena v některé straně lomené čáry L_2. Z toho vyplývá, že každý uzel lomené čáry L_1 je též uzlem lomené čáry L_2. Zřejmě každá část jednoduché lomené čáry, která je lomenou čarou, je jednoduchá.

Mějme v rovině $\mathfrak{V}_2$ konečný počet bodů $A_0, A_1, \ldots, A_n$ $(n > 1)$. Nechť $A_n \neq A_0$, $A_i \neq A_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Mějme lomené čáry $L_i(A_{i-1}, A_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Nechť sjednocení $L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ je též lomená čára (která spojuje bod A_0 s bodem A_n), potom budeme říkat, že l. č. L_i *skládají* l. č. L, nebo že l. č. L je *rozložena* na l. č. L_i. Zřejmě lomená čára L, skládající se z jednoduchých lomených čar L_i, které mají vlastnosti:

a) $L_i \cap L_k = \emptyset$ $(i \neq k; i \neq k + 1; i \neq k - 1; i, k = 1, \ldots, n)$,
b) $L_i \cap L_{i+1} = (A_i)$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$,

je jednoduchá. (Body A_i nemusí být nutně vrcholy lomené čáry $L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i(A_{i-1}, A_i)$.)

3. Lemma. *Každá lomená čára, spojující bod A_0 a A_n, obsahuje jako část jednoduchou lomenou čáru, která spojuje též body A_0 a A_n.*

Důkaz provedeme úplnou indukcí podle n. Z poznámky 1 vyplývá, že pro $n = 0$, 1 je L již sama j. l. č. Předpokládejme tedy, že lemma platí pro $n - 1$. Budiž L l. č., která spojuje body A_0 a A_n. Uzly této l. č. dostaneme jako společnou část několika stran, tedy obdržíme buď jeden (isolovaný) uzel nebo celou úsečku uzlů. Množinu $\mathfrak{M}$ všech uzlů této l. č. můžeme tedy rozložit na dvě disjunktní podmnožiny $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ $(\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \cup \mathfrak{M}_2)$, kde $\mathfrak{M}_1$ je konečná množina všech isolovaných uzlů a $\mathfrak{M}_2$ je sjednocení konečného počtu úseček uzlů. Nechť a_i je první strana, která obsahuje uzly. Nechť bod B je první uzel této úsečky. Zřejmě lomená čára $L_1(A_0, B) = \bigcup_{j=0}^{i-1} a_j \cup b$ $(a_0 = \emptyset;\ b = \overline{A_{i-1}B})$ je jednoduchou lomenou čarou, protože nemá žádný uzel a $L_1 \subset L$. Nechť a_k je poslední strana, která prochází bodem B. Zřejmě $i < k$, protože bodem B procházejí alespoň dvě strany. Vezměme lomenou čáru $L' = \bigcup_{j=k+1}^{n+1} a_j \cup c$ $(c = \overline{BA_k};\ a_{n+1} = \emptyset)$. Zřejmě $b \cap c = (B)$ a bod B není uzlem l. č. L'. Počet stran l. č. L' je menší než n, a tudíž podle indukčního předpokladu existuje jednoduchá lomená čára $L_2(B, A_n)$, která je obsažena v l. č. L'. Zřejmě $L_1 \subset L$, $L_2 \subset L' \subset L$, z čehož vyplývá, že $L_1 \cup L_2 \subset L$. Protože $b \cap c = (B)$, je sjednocení $L_1 \cup L_2$ opět lomená čára, a protože $L_1 \cap L_2 = (B)$ a L_1, L_2 jsou jednoduché, je opět $L_1 \cup L_2$ jednoduchá l. č. (která spojuje body A_0 a A_n).

4. Řekneme, že množina $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{V}_2$ má *vlastnost* V, jestliže každá úsečka, která má s ní alespoň jeden bod společný, má s ní společný konečný počet bodů a konečný počet úseček. Zřejmě přímka, úsečka, trojúhelník a lomená čára mají vlastnost V.

Lemma. *Každá jednoduchá lomená čára má s množinou $\mathfrak{M}$ vlastnosti* V *(mají-li alespoň jeden společný bod) společný konečný počet jednoduchých lomených čar, které jsou navzájem disjunktní.*

Důkaz. Každá strana j. l. č. L má s množinou $\mathfrak{M}$ vlastnosti V společný konečný počet bodů a konečný počet úseček. Pokládejme body za nulové úsečky. Nechť úsečky $\overline{A_iB_i}$ jsou všechny společné úsečky j. l. č. L a množiny $\mathfrak{M}$ a nechť v uspořádání bodů j. l. č. L platí

$$A_1 \precsim B_1 \precsim A_2 \precsim B_2 \precsim \ldots \precsim A_m \precsim B_m .$$

Nechť I je množina všech indexů $i = 1, \ldots, m - 1$, pro které platí $B_i \prec A_{i+1}$. Jestliže $I = \emptyset$, potom společná část j. l. č. L a množiny $\mathfrak{M}$ je jednoduchá lomená čára $L_1 = \bigcup_{i=1}^{m} a_i$, kde $a_i = \overline{A_i B_i}$. Jestliže $I \neq \emptyset$, potom obsahuje prvky $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ $(r < m)$ a společná část j. l. č. L a množiny $\mathfrak{M}$ je množina $\mathfrak{N} = \bigcup_{j=0}^{r} L_j$, kde $L_j = \bigcup_{l=i_j+1}^{i_{j+1}} a_l$ $(a_l = \overline{A_l B_l}$, $i_0 = 0$, $i_{r+1} = m)$. Zřejmě L_j jsou jednoduché lomené čáry, které jsou mezi sebou disjunktní (dále někdy jen d. j. l. č.).

5. Nechť $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}_2$. Řekneme, že množina $\mathfrak{M}$ je *vytvořující*, jestliže existuje rozklad množiny $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$ (kde $\mathfrak{N}_1 \neq \emptyset \neq \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 = \emptyset$), který má tyto vlastnosti:

a) Pro každé dva body $A, B \in \mathfrak{N}_i$ $(i = 1, 2)$ existuje l. č. L, která je spojuje a $L \subset \mathfrak{N}_i$.

b) Každá l. č. L, která spojuje body A a B $(A \in \mathfrak{N}_1, B \in \mathfrak{N}_2)$, má neprázdný průnik s množinou $\mathfrak{M}$.

Na základě lemmatu 3 stačí v definici uvažovat místo lomených čar jen jednoduché lomené čáry. (Zřejmě přímka a trojúhelník jsou množiny vytvořující.)

Mějme vytvořující množinu $\mathfrak{M}$ vlastnosti V, potom každá jednoduchá lomená čára L má s ní společný konečný počet d. j. l. č. $L_i(A_i, B_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Nechť j. l. č. L spojuje body A a B, které neleží v množině $\mathfrak{M}$. Nechť v uspořádání bodů j. l. č. L platí

$$A \prec A_1 \preceq B_1 \prec A_2 \preceq B_2 \prec \ldots \prec A_m \preceq B_m \prec B\,.$$

Zřejmě množina $\mathfrak{M}_i$ všech bodů X lomené čáry L, pro něž platí $B_i \prec X \prec A_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, m;\ B_0 = A;\ A_{m+1} = B)$, je podmnožinou buď množiny $\mathfrak{N}_1$ nebo množiny $\mathfrak{N}_2$.

Řekneme, že lomená čára $L_i(A_i, B_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ je *jednonásobnou* společnou lomenou čarou, jestliže množiny $\mathfrak{M}_{i-1}$, $\mathfrak{M}_i$ neleží v téže množině $\mathfrak{N}_k$ $(k = 1, 2)$. Řekneme, že lomená čára $L_i(A_i, B_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ je *dvojnásobnou* společnou lomenou čarou, jestliže obě množiny $\mathfrak{M}_{i-1}$, $\mathfrak{M}_i$ leží v jedné množině $\mathfrak{N}_k$ $(k = 1, 2)$.

Mějme množinu $\mathfrak{N}$ vlastnosti V, která je částí vytvořující množiny $\mathfrak{M}$ vlastnosti V, potom každou j. l. č. L', která je společnou částí j. l. č. L a množiny $\mathfrak{N}$, počítáme s tou násobností, s níž je počítána j. l. č. $L''(L' \subset L'')$, která je společnou částí množiny $\mathfrak{M}$ s j. l. č. L.

6. Lemma. *Každá vytvořující množina $\mathfrak{M}$ vlastnosti* V *má s jednoduchou lomenou čarou L, která spojuje body A a B, kde $A \in \mathfrak{N}_1$, $B \in \mathfrak{N}_2$ $(A, B \in \mathfrak{N}_1)$, společný lichý (sudý) počet lomených čar, které jsou navzájem disjunktní (počítáme-li společné lomené čáry s jejich násobností).*

Důkaz provedeme úplnou indukcí. Nechť tedy j. l. č. L nemá s množinou $\mathfrak{M}$ žádný společný bod, potom nutně body A, B leží v $\mathfrak{N}_k$ $(k = 1, 2)$ a počet společných j. l. č. je nula (tudíž číslo sudé). Jestliže j. l. č. L má s množinou $\mathfrak{M}$ jednu společnou j. l. č. (bez násobnosti), potom zřejmě bod A leží v téže množině $\mathfrak{N}_k$ $(k = 1, 2)$ jako body množiny $\mathfrak{M}_0$ a stejně tak bod B jako body množiny $\mathfrak{M}_1$, a tudíž lemma 6 je splněno.

Nechť tedy lemma 6 platí pro $m - 1$ společných j. l. č. (bez násobnosti). Mějme j. l. č. L, která má s množinou $\mathfrak{M}$ společných m d. j. č. l. (bez násobnosti). Zvolme v množině $\mathfrak{M}_{m-1}$ bod C a rozložme j. l. č. $L(A, B) = L_1(A, C) \cup L_2(C, B)$. Zřejmě j. l. č. L_1 má s množinou $\mathfrak{M}$ společných právě $m - 1$ d. j. l. č. (bez násobnosti) a j. l. č. L_2 s množinou $\mathfrak{M}$ právě jednu společnou j. l. č. (bez násobnosti). Jestliže $C, B \in \mathfrak{N}_1$, potom j. l. č. L_1 má společný sudý počet d. j. l. č. a j. l. č. L_2 má společnou dvojnásobnou j. l. č., a tudíž j. l. č. L má společný sudý počet d. j. l. č. s množinou $\mathfrak{M}$. Jestliže $C \in \mathfrak{N}_1$, $B \in \mathfrak{N}_2$, potom j. l. č. L_1 má společný sudý počet d. j. l. č. a j. l. č. L_2 má společnou jednonásobnou j. l. č., a tudíž j. l. č. L má společný lichý počet d. j. l. č. s množinou $\mathfrak{M}$. Stejným způsobem dokážeme platnost lemmatu 6 pro případy $C \in \mathfrak{N}_2$, $B \in \mathfrak{N}_1$ a $C, B \in \mathfrak{N}_2$.

7. V rovině $\mathfrak{B}_2$ buďtež dány dva body M, N. Označme $M\overline{N}$ $(N\overline{M})$ otevřenou polopřímku, která je opačná k polopřímce MN (NM). Buďiž $L(M, N)$ j. l. č., která spojuje body M a N a nemá s otevřenými polopřímkami $M\overline{N}$ a $N\overline{M}$ žádný společný bod. Sjednocení $L(M, N) \cup M\overline{N} \cup N\overline{M}$ nazveme *množinou* $\mathfrak{R}$.

Poznámka. Zřejmě v rovině $\mathfrak{B}_2$ existuje takový rovinný pás $\mathfrak{P}$, že platí $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}$ a přímka MN odděluje hranice rovinného pásu $\mathfrak{P}$. Též existuje taková polorovina $\mathfrak{P}'$, že průnik $\mathfrak{P}' \cap \mathfrak{R}$ je polopřímka.

Budiž M' (N') libovolný bod otevřené polopřímky $M\overline{N}$ ($N\overline{M}$). Zřejmě sjednocení $L(M, N) \cup \overline{MM'} \cup \overline{NN'}$ je j. l. č., která spojuje body M' a N'. Pomocí množiny $\mathfrak{R}$ můžeme v množině $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ definovat *relaci* ($\mathfrak{R}$). Řekneme, že $A \equiv B$ ($\mathfrak{R}$) ($A, B \in \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$), jestliže úsečka $\overline{AB}$ má s j. l. č. $L(M', N')$ ($L \subset \mathfrak{R}$) společný sudý počet d. j. l. č. (které jsou počítány s násobností podle definice 5, kde úsečku $\overline{AB}$ pokládáme za část přímky AB, která je vytvořující). Bod M' (N') je zvolen na otevřené polopřímce $M\overline{N}$ ($N\overline{M}$) tak, aby polopřímka opačná k polopřímce $M'M$ ($N'N$) neměla žádný společný bod s úsečkou $\overline{AB}$. (Zřejmě počet d. j. l. č. společných úsečce $\overline{AB}$ a j. l. č. $L(M', N')$ nezávisí na volbě bodů M', N'.)

Lemma. *Relace* ($\mathfrak{R}$), *určená definicí* 7, *je ekvivalencí, která množinu* $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ *dělí na dvě neprázdné disjunktní části* $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ *takové, že* $A, B \in \mathfrak{R}_i$ ($i = 1, 2$) *tehdy a jen tehdy, jestliže* $A \equiv B(\mathfrak{R})$.

Důkaz. Jestliže $A \in \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$, potom úsečka $\overline{AA}$ nemá žádný společný bod s množinou $\mathfrak{R}$, a tudíž $A \equiv A(\mathfrak{R})$.

Jestliže $A \equiv B(\mathfrak{R})$ ($A, B \in \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$), potom úsečka $\overline{AB}$ má sudý počet společných d. j. l. č. s j. l. č. $L(M', N')$, a tudíž i úsečka $\overline{BA}$ má s touto j. l. č. L společný sudý počet d. j. l. č., a tedy $B \equiv A(\mathfrak{R})$.

Jestliže $A \equiv B(\mathfrak{R})$, $B \equiv C(\mathfrak{R})$ ($A, B, C \in \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$), potom mohou nastati dva případy:

a) Body A, B, C leží v jedné přímce. Potom násobnost každé společné j. l. č. je počítána pomocí stejné vytvořující množiny (přímky AB). Jelikož úsečky $\overline{AB}$ a $\overline{BC}$ mají sudý počet společných j. l. č., tudíž i úsečka $\overline{AC}$ (která je buď součtem nebo rozdílem úseček $\overline{AB}$ a $\overline{BC}$) má společný sudý počet d. j. l. č., a platí tedy $A \equiv C(\mathfrak{R})$.

b) Body A, B, C tvoří trojúhelník. Potom násobnost každé společné j. l. č. se může též počítat pomocí trojúhelníka ABC, jakožto vytvořující množiny. Body M', N' j. l. č. $L(M', N') \subset \mathfrak{R}$ jsou zřejmě vnějšími body trojúhelníka ABC. Podle lemmatu 6 má j. l. č. $L(M', N')$ s trojúhelníkem ABC společný sudý počet d. j. l. č. Jelikož úsečky $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ mají s j. l. č. $L(M', N')$ společný sudý počet d. j. l. č., tudíž i úsečka $\overline{AC}$ má s j. l. č. L společný sudý počet d. j. l. č., a platí tedy $A \equiv C(\mathfrak{R})$.

Relace ($\mathfrak{R}$) je tedy ekvivalencí a ta na množině $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ definuje rozklad ($\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{R}_i$; $\mathfrak{R}_k \cap \mathfrak{R}_l = \emptyset$ $(k \neq l)$; $\mathfrak{R}_i \neq \emptyset$ $(i \in I)$; $A \equiv B(\mathfrak{R}) \Leftrightarrow A, B \in \mathfrak{R}_i$). Ukážeme, že tento rozklad má dva prvky. Vezměme tři body $A, B, C \in \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$, $A \not\equiv B(\mathfrak{R})$, $A \not\equiv C(\mathfrak{R})$, $B \not\equiv C(\mathfrak{R})$. Potom každá z úseček $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ má s j. l. č. $L(M', N')$ společný lichý počet d. j. l. č. a nastávající dva případy:

a) Body A, B a C leží v jedné přímce. Potom úsečka $\overline{AC}$ se rovná součtu (nebo rozdílu) úseček $\overline{AB}$ a $\overline{BC}$, které mají lichý počet společných d. j. l. č. s j. l. č. $L(M', N')$, a tudíž má společný sudý počet d. j. l. č., a to je spor.

b) Body A, B a C tvoří trojúhelník. Potom j. l. č. $L(M', N')$ má s trojúhelníkem ABC společný lichý počet d. j. l. č., ale body M', N' jsou vnějšími body, a to je spor.

Rozklad množiny $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ má tedy nanejvýše dva prvky.

Podle poznámky 7 existuje taková polorovina $\mathfrak{P}'$, že průnik $\mathfrak{P}' \cap \mathfrak{R}$ je polopřímka.

Zřejmě tato polopřímka dělí množinu $\mathfrak{P}' - \mathfrak{R}$ na dvě části, které jsou disjunktní a neprázdné a každá z nich je obsažena v jednom prvku rozkladu množiny $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ pomocí ekvivalence $(\mathfrak{R})$. Tím je lemma 7 dokázáno.

8. Podle poznámky 7 existuje takový rovinný pás $\mathfrak{P}$, který obsahuje $\mathfrak{R}$ a jehož hranice jsou odděleny přímkou MN. Množina $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{P}$ se rozpadá na dvě disjunktní otevřené poloroviny $\mathfrak{P}_i$ $(i = 1, 2)$ takové, že $\mathfrak{P}_i \subset \mathfrak{R}_i$, kde $\mathfrak{R}_i$ jsou prvky rozkladu množiny $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ pomocí ekvivalence $(\mathfrak{R})$.

Důkaz. Zřejmě platí $A \equiv B(\mathfrak{R})$ $(A, B \in \mathfrak{P}_i;\ i = 1, 2)$, protože úsečka $\overline{AB}$ nemá žádný společný bod s množinou $\mathfrak{R}$. Nechť tedy $A \in \mathfrak{P}_1$ a $B \in \mathfrak{P}_2$, potom úsečka $\overline{AB}$ má stejný počet společných d. j. l. č. s j. l. č. $L(M', N') \subset \mathfrak{R}$ jako přímka AB (počítané s násobností), ale přímka AB má s j. l. č. L lichý počet společných d. j. l. č., neboť body M', N' jsou přímkou AB odděleny, protože přímky AB a $M'N'$ se protínají. Odtud vyplývá, že $A \not\equiv B(\mathfrak{R})$.

Věta. *Nechť jsou dány dvě lomené čáry $L_1(M, N)$ a $L_2(A, B)$. Nechť $M\overline{N}$ $(N\overline{M})$ je opačná otevřená polopřímka k polopřímce MN (NM). Nechť lomená čára $L_2(A, B)$ nemá žádný společný bod s polopřímkami $M\overline{N}$ a $N\overline{M}$. Nechť bod A (B) leží v otevřené polorovině $\mathfrak{N}_1$ $(\mathfrak{N}_2)$ takové, že $\mathfrak{N}_i \cap L_1 = \emptyset$ $(i = 1, 2)$, $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 = \emptyset$ a hranice polorovin $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ jsou přímkou MN odděleny. Potom lomené čáry L_1 a L_2 mají alespoň jeden společný bod.*

Důkaz. Podle lemmatu 3 existuje j. l. č. $L_1'(M, N) \subset L_1(M, N)$. Označme $\mathfrak{R} = L_1'(M, N) \cup M\overline{N} \cup N\overline{M}$, potom podle lemmatu 7 se množina $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{R}$ rozpadá na dvě disjunktní, neprázdné části $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$. Podle poznámky 8 platí $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{R}_2$, a tudíž $A \not\equiv B(\mathfrak{R})$. Nechť body A_i $(i = 0, \ldots, n)$ $(A_0 = A,\ A_n = B)$ jsou vrcholy l. č. $L_2(A, B)$. Předpokládejme, že $L_2 \cap \mathfrak{R} = \emptyset$, potom $A_0 \equiv A_1 \equiv A_2 \equiv \ldots \equiv A_n(\mathfrak{R})$, a tudíž $A \equiv B(\mathfrak{R})$, a to je spor. Proto $L_2 \cap \mathfrak{R} \neq \emptyset$. Z předpokladu, že $L_2 \cap M\overline{N} = \emptyset = N\overline{M} \cap L_2$ vyplývá, že $L_2 \cap L_1' \neq \emptyset$, a tudíž $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Tím je věta dokázána.

Bedřich Pondělíček, Poděbrady

*

Jiné řešení téže úlohy Jana Maříka

Pro $b_1, b_2 \in E_2$ nechť $L(b_1, b_2)$ znamená uzavřenou úsečku o koncových bodech b_1, b_2 (pro $b_1 = b_2$ nechť $L(b_1, b_2)$ je množina, obsahující jediný bod b_1). Jestliže $b_i \in E_2$ $(i = 0, \ldots, n)$, položme $L(b_0, \ldots, b_n) = \bigcup_{i=1}^{n} L(b_{i-1}, b_i)$. Vzdálenost bodu a od bodu b (resp. vzdálenost bodu a od přímky p) označíme symbolem $\varrho(a, b)$ (resp. $\varrho(a, p)$).

Nechť $P = (a_0, \ldots, a_m)$, $Q = (b_0, \ldots, b_n)$ jsou konečné posloupnosti bodů z E_2. Symbolem $P|Q$ budeme rozumět, že platí zároveň a_i non $\in L(b_0, \ldots, b_n)$ pro $i = 0, \ldots, m$ a b_j non $\in L(a_0, \ldots, a_m)$ pro j $= 0, \ldots, n$. Nechť dále $\mathfrak{P}\{P; Q\}$ značí počet dvojic (i, j), pro něž $L(a_{i-1}, a_i) \cap L(b_{j-1}, b_j) \neq \emptyset$. Je-li kromě toho q přímka v E_2, pak nechť symbol $P|q$ znamená, že a_i non $\in q$ pro $i = 0, \ldots, m$, a $\mathfrak{P}\{P; q\}$ buď počet indexů i, pro něž $L(a_{i-1}, a_i) \cap q \neq \emptyset$. Zřejmě

$$\mathfrak{P}\{P; Q\} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{P}\{(a_{i-1}, a_i); Q\}\,, \tag{1}$$

$$\mathfrak{P}\{P; q\} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{P}\{(a_{i-1}, a_i); q\}\,. \tag{2}$$

Lemma 1. *Buď $P = (a_0, \ldots, a_m)$, $Q = (b_0, b_1, b_2, b_0)$, $P|Q$. Jestliže b_0, b_1, b_2 leží na přímce, pak platí*

$$\mathfrak{P}\{P; Q\} \equiv 0 \pmod 2\,. \tag{3}$$

Jestliže b_0, b_1, b_2 neleží na přímce, pak vztah (3) *platí právě tehdy, leží-li oba body a_0, a_m vně nebo oba uvnitř trojúhelníka o vrcholech b_0, b_1, b_2.*

Důkaz. Leží-li body b_0, b_1, b_2 na přímce, pak můžeme předpokládat, že bod b_1 leží mezi body b_0, b_2 (nebo že bod b_1 splyne s některým z bodů b_0, b_2). Potom je $\mathfrak{P}\{P; (b_0, b_2)\} = \mathfrak{P}\{P; (b_0, b_1)\} + \mathfrak{P}\{P; (b_1, b_2)\}$, takže $\mathfrak{P}\{P; Q\} = 2\mathfrak{P}\{P; (b_0, b_2)\} \equiv 0 \pmod 2$. Jestliže body b_0, b_1, b_2 neleží na přímce, je důkaz pro $m = 1$ snadný a pro libovolné m se tvrzení dokáže indukcí pomocí vztahu (1). Zcela obdobně se dokáže i následující lemma:

Lemma 2. *Buď $P = (a_0, \ldots, a_m)$; buď q přímka a nechť $P|q$. Potom platí $\mathfrak{P}\{P; q\} \equiv 0$* (mod 2) *právě tehdy, leží-li oba body a_0, a_m v téže polorovině, vyťaté přímkou q.*

Lemma 3. *Nechť $P = (a_0, \ldots, a_m)$, $Q = (b_0, b_1)$, $P|Q$. Potom existuje kladné číslo δ s touto vlastností: Je-li $b'_0 \in E_2$, $\varrho(b'_0, b_0) < \delta$ a položíme-li $Q' = (b'_0, b_1)$, pak platí $P|Q'$ a $\mathfrak{P}\{P; Q\} = \mathfrak{P}\{P; Q'\}$.*

Důkaz. Zvolme index i $(1 \leqq i \leqq m)$. Jestliže $L(a_{i-1}, a_i) \cap L(b_0, b_1) = \emptyset$, buď δ_i vzdálenost množin $L(a_{i-1}, a_i)$ a $L(b_0, b_1)$. Je-li $L(a_{i-1}, a_i) \cap L(b_0, b_1) \neq \emptyset$, je nutně $a_{i-1} \neq a_i$, $b_0 \neq b_1$; buď p (resp. q) přímka procházející body a_{i-1}, a_i (resp. b_0, b_1). Položme $\delta_i = \min(\varrho(a_{i-1}, q), \varrho(a_i, q), \varrho(b_0, p))$. Čtenář snadno dokáže, že pro každé $i = 1, \ldots, m$ je $\delta_i > 0$ a že $\mathfrak{P}\{(a_{i-1}, a_i); (b'_0, b_1)\} = \mathfrak{P}\{(a_{i-1}, a_i); (b_0, b_1)\}$, kdykoli $\varrho(b'_0, b_0) < \delta_i$. Stačí tedy položit $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_m)$.

Věta. *Nechť $P = (a_0, \ldots, a_m)$, $Q = (b_0, \ldots, b_n)$. Nechť $L(c_0, c_1, c_2, c_3, c_0)$ je obvod čtverce; buď q_i přímka, procházející body c_{i-1}, c_i $(i = 1, 2, 3, 4; c_4 = c_0)$. Nechť body a_0, a_m, b_0, b_n leží po řadě uvnitř úseček $L(c_0, c_1)$, $L(c_2, c_3)$, $L(c_1, c_2)$, $L(c_3, c_0)$ a nechť ostatní body z P (resp. z Q) leží uvnitř pásu, omezeného přímkami q_2, q_4 (resp. q_1, q_3). Potom je $L(a_0, \ldots, a_m) \cap L(b_0, \ldots, b_n) \neq \emptyset$.*

Důkaz. Jestliže neplatí $P|Q$, není co dokazovat. Stačí tedy dokázat, že za předpokladu $P|Q$ neplatí (3). To dokážeme indukcí podle n. Buď $n = 1$ a buď q přímka, procházející body b_0, b_1. Snadno se zjistí, že pro každé i platí $L(a_{i-1}, a_i) \cap q = L(a_{i-1}, a_i) \cap L(b_0, b_1)$ a tedy $\mathfrak{P}\{P; q\} = \mathfrak{P}\{P; Q\}$, takže podle lemmatu 2 vztah (3) neplatí. Buď nyní $n > 1$. Předpokládejme že naše tvrzení platí pro $n - 1$ a že posloupnosti P, Q splňují uvedené předpoklady. Na úsečce $L(c_1, c_2)$ leží jen konečný počet bodů b takových, že $a_i \in L(b, b_2)$ pro některé $a_i \in P$, ať již b_2 leží na q_2 či nikoliv. Podle lemmatu 3 tedy existuje uvnitř úsečky $L(c_1, c_2)$ bod b'_0, pro nějž platí

$$\mathfrak{P}\{P; (b'_0, b_1)\} = \mathfrak{P}\{P; (b_0, b_1)\}\,, \tag{4}$$
$$P|(b'_0, b_1)\,, \quad P|(b'_0, b_2)\,.$$

Položíme-li $Q' = (b'_0, b_1, \ldots, b_n)$, $Q^* = (b'_0, b_2, \ldots, b_n)$, máme především podle (4)

$$\mathfrak{P}\{P; Q\} = \mathfrak{P}\{P; Q'\}\,; \tag{5}$$

protože $P|Q^*$, je podle indukčního předpokladu

$$\mathfrak{P}\{P; Q^*\} \equiv 1 \pmod 2\,. \tag{6}$$

Protože $P|(b'_0, b_1, b_2, b'_0)$, platí podle lemmatu 1

$$\mathfrak{P}\{P; (b'_0, b_2)\} \equiv \mathfrak{P}\{P; (b'_0, b_1)\} + \mathfrak{P}\{P; (b_1, b_2)\} \pmod 2\,,$$

takže $\mathfrak{P}\{P; Q'\} \equiv \mathfrak{P}\{P; Q^*\} \pmod 2$. Odtud a z (5), (6) plyne $\mathfrak{P}\{P; Q\} \equiv 1 \pmod 2$, čímž je vše dokázáno.

Miloš Dostál, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

REFERÁTY

DOUSPOŘÁDÁNÍ ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH GRUP

(Referát autora o přednášce konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků“ dne 17. prosince 1956.)

Částečně uspořádaná grupa je grupa G, na které je definováno částečné uspořádání $\leqq$, svázané s grupovou operací $+$ podmínkou: $a, b, c, d \in G, a \leqq b \Rightarrow d + a + c \leqq d + b + c$.

Na téže grupě mohou být definována dvě různá částečná uspořádání; je-li třeba vytknout, že jde o grupu G s částečným uspořádáním $\leqq$, píšeme $(G \leqq)$.

Částečně uspořádaná grupa $(G \leqq)$ se dá *douspořádat* (je *douspořadatelná*), jestliže na grupě G existuje jednoduché uspořádání $\precsim$ takové, že $(G \precsim)$ je jednoduše uspořádaná grupa a platí-li: $a, b \in G$, $a \leqq b \Rightarrow a \precsim b$. Jednoduché uspořádání $\precsim$ nazýváme *douspořádáním* grupy $(G \leqq)$.

Částečně uspořádaná grupa $(G \leqq)$ je *reversibilně douspořadatelná*, jestliže k libovolné dvojici nesrovnatelných prvků $a, b \in G$ existují douspořádání $\precsim^1$, $\precsim^2$ grupy $(G \leqq)$ taková, že platí $a \precsim^1 b$, $b \precsim^2 a$.

Příklady. **1.** Přímý součet jednoduše uspořádaných grup je reversibilně douspořadatelný.

2. Příklad částečně uspořádané grupy, která se dá douspořádat právě jedním způsobem a není jednoduše uspořádaná. Nekonečnou cyklickou grupu $\{na\}$ částečně uspořádejme takto: $\ldots < -2a < 0 < 2a < \ldots, \ldots < -a < a < 3a < \ldots$. $(G \leqq)$ se dá douspořádat podle pravidla: $na \precsim (n + 1)\, a$ pro všechna celá n. Jiným způsobem se $(G \leqq)$ nedá douspořádat.

3. Částečně uspořádaná grupa, která obsahuje prvek $\neq 0$ konečného řádu, se nedá douspořádat (protože jednoduše uspořádaná grupa je bez torse).

p-ideálem na částečně uspořádané grupě G nazveme konvexní normální dělitel v G. Je-li H p-ideál v G, dá se faktorgrupa G/H částečně uspořádat (relací, kterou budeme zase značit $\leqq$) takto: pro $A \in G/H$ platí $A \geqq H \Leftrightarrow$ existuje $a \in A$ tak, že $a \geqq 0$. Faktorgrupa s tímto částečným uspořádáním je částečně uspořádanou grupou; nazýváme ji *p-faktorgrupou*. p-faktorgrupa G/H je *dokonale uspořádána*, když pro libovolné $A \in G/H$, $A > H$, platí $a > 0$ pro všechna $a \in A$.

Platí tyto věty:

Věta 1. *Částečně uspořádaná grupa G je douspořadatelná, když a jen když v G existuje jednoduše uspořádaný p-ideál H a když existuje subdirektní součet $\mathfrak{S}$ jednoduše uspořádaných grup a zobrazení p-faktorgrupy G/H na $\mathfrak{S}$, které je isotonní a isomorfní (v grupovém smyslu).*

Věta 2. *Částečně uspořádaná grupa G je reversibilně douspořadatelná, když a jen když v G existuje jednoduše uspořádaný p-ideál H takový, že p-faktorgrupa G/H je (v grupovém smyslu i co do uspořádání) isomorfní se subdirektním součtem jednoduše uspořádaných grup a že p-faktorgrupa G/H je dokonale uspořádána.*

Věta 3. *Částečně uspořádaná grupa G je douspořadatelná právě jedním způsobem, když a jen když v G existuje jednoduše uspořádaný p-ideál H, který má tyto dvě vlastnosti:*

1. *Existuje jednoduše uspořádaná grupa $\mathfrak{G}$ a*

(*) *existuje zobrazení p-faktorgrupy G/H na $\mathfrak{G}$, jež je isotonní a isomorfní (v grupovém smyslu).*

2. *Existuje-li subdirektní součet $\mathfrak{G}$ jednoduše uspořádaných grup s vlastností (*), pak uspořádání v $\mathfrak{G}$ je jednoduché.*

Některé z následujících charakterisací douspořadatelnosti pro abelovské grupy byly již dříve odvozeny jinými autory (a jinými metodami):

Věta 4. *Abelovská částečně uspořádaná grupa se dá douspořádat, když a jen když je bez torse.*

Věta 5. *Na abelovské částečně uspořádané grupě G jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *G se dá reversibilně douspořádat,*
2. *G je subdirektní součet jednoduše uspořádaných grup,*
3. *$a \in G$, $na \geqq 0$ pro nějaké přirozené $n \Rightarrow a \geqq 0$.*

Věta 6. *Na abelovské částečně uspořádané grupě G jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *G se dá douspořádat právě jedním způsobem,*
2. *jediná podgrupa nesrovnatelných prvků v G je nulová,*
3. *k libovolnému $a \in G$, $a \neq 0$, existuje n celé tak, že $na > 0$.*

František Šik, Brno

SUBDIREKTNÍ SOUČTY USPOŘÁDANÝCH GRUP

(Referát autora o přednášce konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 4. března 1957.)

Buď G l-grupa. Prvky $x, y \in G$ nazveme *disjunktními*, jestliže platí $|x| \wedge |y| = 0$. Množina A, $A \subset G$, se nazývá *komponentou*, jestliže existuje množina $B \subset G$ taková, že A je množina všech prvků z G, které jsou disjunktní s každým prvkem z B. Komponenta, která je normální podgrupou, se nazývá *normální komponenta*.

Budiž dán systém $\{G_\nu\}$ jednoduše uspořádaných grup. Označme $x(.)$ funkci na množině indexů ν takovou, že $x(\nu) \in G_\nu$. Množina všech těchto funkcí (s algebraickými operacemi — sčítáním, suprémem a infimem — zavedenými obvyklým způsobem) tvoří l-grupu, kterou nazýváme úplným přímým součtem systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$.

V dalším bude podána charakterisace různých typů l-podgrup úplného přímého součtu $\mathfrak{G}$ systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$.

1. *Subdirektním součtem* systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$ se nazývá l-podgrupa G v $\mathfrak{G}$, pro niž platí: k libovolnému $a_\nu \in G_\nu$ existuje $x(.) \in G$ tak, že $a_\nu = x(\nu)$.

Věta. *Následující podmínky jsou na l-grupě G ekvivalentní:*

1. *G je subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup;*

2. *v G existuje systém l-ideálů $\{J_\nu\}$ takový, že $\bigcap J_\nu = 0$ a že l-faktorgrupa G/J_ν je jednoduše uspořádána pro každé ν;*

3. *každá komponenta v G je normální.*

Označme $\overline{G}_\nu$ množinu všech prvků z $\mathfrak{G}$, pro něž platí $x(\mu) = 0$ pro $\mu \neq \nu$.

2. Subdirektní součet G systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$ se nazývá *β-subdirektní*, jestliže $G \cap \overline{G}_\nu = 0$ pro všechna ν.

Věta. *Následující podmínky jsou v l-grupě G ekvivalentní:*

1. *G je β-subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup;*
2. *v G existuje systém l-ideálů $\{J_\nu\}$ takový, že pro libovolné μ platí $\bigcap_{\nu \neq \mu} J_\nu = 0$ a že l-faktorgrupa G/J_ν je jednoduše uspořádána pro každé ν;*
3. *každá komponenta v G je normální a v G neexistuje maximální komponenta $\neq 0$.*

3. Subdirektní součet G systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$ se nazývá *α-subdirektní*, jestliže $G \cap \overline{G}_\nu \neq 0$, pokud $\overline{G}_\nu \neq 0$.

Věta. *Následující podmínky jsou na l-grupě G ekvivalentní:*

1. *G je α-subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup;*
2. *v G existuje systém l-ideálů $\{J_\nu\}$ takový, že $\bigcap J_\nu = 0$, pro libovolné μ platí $\bigcap_{\nu \neq \mu} J_\nu \neq 0$ a l-faktorgrupa G/J_ν je jednoduše uspořádána pro každé ν;*
3. *každá vlastní komponenta v G je částí maximální komponenty a každá maximální komponenta je normální.*

4. Subdirektní součet G systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$ se nazývá *úplně subdirektní*, jestliže $G \supset \overline{G}_\nu$ pro každé ν.

Věta. *Následující podmínky jsou na l-grupě G ekvivalentní:*

1. *G je úplně subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup;*
2. *v G existuje systém l-ideálů $\{J_\nu\}$ takový, že $\bigcap J_\nu = 0$, l-faktorgrupa G/J_ν je jednoduše uspořádána (pro každé ν) a pro libovolné μ platí $\bigcap_{\nu \neq \mu} J_\nu + J_\mu = G$;*
3. *každá nenulová komponenta v G obsahuje minimální přímý sčítanec l-grupy G.*

l-Grupa G je *redukovaným subdirektním součtem* systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}_{\nu \in N}$, jestliže platí:

ať $\mu, \nu \in N$; jestliže pro libovolný prvek $x(.) \in G$ platí $x(\nu) > 0 \Rightarrow x(\mu) \geq 0$, pak $\nu = \mu$.

Věta. *Nechť G je subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$. Pak existuje takový systém $\{H_\alpha\}$ jednoduše uspořádaných grup, že G je isomorfní s redukovaným subdirektním součtem systému jednoduše uspořádaných grup $\{H_\alpha\}$.*

Vyšetříne souvislost nahoře uvedených typů subdirektních součtů.

Nechť G je subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$. Grupu G_ν nazveme *α-složkou* resp. *β-složkou* tohoto součinu, jestliže $G \cap \overline{G}_\nu \neq 0$ resp. $G \cap \overline{G}_\nu = 0$. Označme A resp. B množinu indexů všech α-složek resp. β-složek tohoto součtu. Množinu všech prvků $x(.) \in G$, pro něž platí $x(\beta) = 0$ pro $\beta \in B$, nazveme *α-částí* a množinu všech prvků $x(.) \in G$, pro něž platí $x(\alpha) = 0$ pro $\alpha \in A$, nazveme *β-částí* tohoto součtu.

Věta. *Nechť l-grupa G je redukovaný subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$, nechť A resp. B značí množinu indexů α-složek resp. β složek. Pak průnik J množiny všech maximálních komponent v G je roven β-části daného součtu a je tedy isomorfní s β-subdirektním součtem systému jednoduše uspořádaných grup $\{H_\nu\}_{\nu \in B}$, kde $H_\nu \subset G_\nu$ pro $\nu \in B$; l-faktorgrupa G/J je isomorfní s α-subdirektním součtem jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}_{\nu \in A}$.*

Podáme ještě charakterisaci l-grup, jejichž každá komponenta je přímý sčítanec.

Věta. *Jestliže každá komponenta l-grupy G je přímým sčítancem, pak G je redukovaným subdirektním součtem systému jednoduše uspořádaných grup a v libovolné takové representaci je přímým součtem své α-části a β-části a obě části jsou l-grupy, v nichž každá komponenta je přímý sčítanec.*

Je-li l-grupa G redukovaný subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup, je-li přímým součtem své α-části a β-části a jsou-li obě tyto části l-grupy, jejichž každá komponenta je přímý sčítanec, pak v G je každá komponenta přímý sčítanec.

František Šik, Brno

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

RECENSE

Mieczysław Biernacki: **Geometria różniczkowa, II.** Panstwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa 1955, str. 248, cena 30 zl.

Druhá část díla Biernackého má šest kapitol a dodatek.

V první kapitole se probírají vlastnosti plochy, které závisí na první diferenciální formě plochy. Zvláštní pozornost věnuje autor různým zobrazením plochy na plochu, tj. korespondencím mezi plochami. Probírá obvyklá zobrazení (stejnoploché, konformní, isometrické a Čebyševovo) a ukazuje některé jednoduché lokální vlastnosti těchto korespondencí regulárních, hlavně pokud jsou závislé na okolí 1. řádu. Sem je zařazena věta Tissotova o existenci ortogonální sítě plochy, která se zobrazuje v ortogonální síť plochy druhé při regulární korespondenci.

Mnohé příklady ukazují speciální vlastnosti některých zobrazení speciálních ploch. Např. je dokázáno, že obecná šroubová plocha se dá isometricky zobrazit na rotační plochu, přičemž šroubovicím plochy šroubové odpovídají kružnice rotační plochy. (Upozorňuje se na obecnější výsledek W. C. Graunsteina, uvedený v jeho knize *Differential Geometry*, New York 1947, str. 179.) Kapitola má četné úlohy k cvičení, které látku vhodně doplňují.

Druhá kapitola je věnována základním aplikacím druhé kvadratické formy, tj. křivosti křivek na ploše, hlavnímu poloměru křivosti a křivosti plochy.

Třetí kapitola je věnována sdruženým směrům plochy (jsou definovány jako sdružené průměry Dupinovy indikatrice) a křivkám plochy, které s tím souvisí (křivky asymptotické, křivoznačné). Při studiu vlastností těchto křivek všímá si autor také speciálních korespondencí dvou ploch, při nichž si odpovídají křivky sdružené (str. 65) nebo křivky asymptotické (tvrzení obdobné Tissotovu, str. 69) nebo křivoznačné (str. 81).

Základní vzorce Weingartenovy a Gaussovy teorie ploch (pro prvé derivace normálového vektoru a druhé derivace průvodiče plochy) i rovnice Mainardi-Codazziho a Gaussův vzorec pro křivost plochy vyjádřený koeficienty první formy plochy jsou v kapitole čtvrté. Jejím hlavním výsledkem je věta Bonnetova o existenci plochy dané dvěma základními diferenciálními formami.

Pátá kapitola diferenciální geometrie (počítáno od počátku 2. dílu) Biernackého je věnována geodetickým křivkám a vlastnostem křivek a ploch, které s nimi úzce souvisí. Autor tu odvozuje řadu klasických výsledků o geodetické křivosti a torsi, o křivosti plochy, o geodetické kružnici pro plochy obecné i speciální, integrální vzorce Bonnetovy a Gaussovy aj. Na konci kapitoly je vyložen rovnoběžný posun tečného vektoru plochy podél křivky plochy podle Levi-Civity.

Poslední, šestá kapitola je vyplněna theorií speciálních ploch. Jsou probírány hlavní poznatky o plochách přímkových, plochy o stálé (záporné) Gaussově křivosti a jejich zobrazení na sebe, plochy translační a plochy minimální, římsové a Dupinovy cyklidy.

Dodatek druhého dílu je úvodem do studia kongruencí přímek.

Všechny kapitoly jsou doprovázeny úlohami k cvičení, jichž je v II. dílu 253. Látka se v nich procvičuje a také doplňuje a rozšiřuje. Výsledky a pokyny k řešení na 55 stranách pomáhají čtenáři při studiu.

Kniha Biernackého je učebnicí klasické diferenciální geometrie. Obsahuje běžné metody, jimiž pečlivě dokazuje klasické věty, a upozorňuje na všechny obtíže. Většinou se omezuje na plochy třídy C^2 a na body regulární, ale s touto basí předpokladů vystačí při jednoduchých přesných důkazech svých tvrzení, které někdy pro začátečníka budou tvrdým oříškem.

Dvousvazkové dílo Biernackého je velmi dobrou učebnicí a výborným úvodem k hlubšímu studiu diferenciální geometrie a lze je našim čtenářům vřele doporučit.

František Vyčichlo, Praha

Fritz Hohenberg: **Konstruktive Geometrie für Techniker,** Wien, Springer-Verlag 1956, 272 stran, 432 obrazů.

Kniha obsahuje autorovy přednášky z konstruktivní geometrie pro směr stavební a strojní na vysoké škole technické ve Štýrském Hradci. Konstruktivní geometrií rozumí se přitom ta část teorie promítání, teorie křivek a ploch a geometrie kinematické, kterou lze bezprostředně aplikovat v technické praxi. Obsah i výklad je praxi skutečně přiblížen, zejména redukcí teoretických partií na minimum a hojností aplikací. Po přečtení knihy je však patrno, že autor pečlivě zkoumal hranice mezi matematickou přesností, názorností a technickou upotřebitelností.

Po narychlo psané, ale originální učebnici J. L. Kramese (Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer, Wien, 1947), po pečlivé učebnici E. Stiefela (Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Basel, 1947) a stylového Kruppova přepracování Müllerovy učebnice (Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Leipzig-Berlin, 1936, resp. Wien, 1948) objevuje se tedy v knize Hohenbergově nový výběr látky i pojetí výkladu. Věcný obsah přednášek odpovídajících asi našim přednáškám z deskriptivní geometrie je jistě věcí diskuse, uvážíme-li, že na našich technikách je zařazeno též technické kreslení. Avšak způsob výkladu profesora Hohenberga je výtečný a může v mnohém posloužit našim učitelům deskriptivní geometrie. Též vnější úpravu knihy je třeba pochválit. Vyrýsování obrazů, kterých je 432, je provedeno precisně; tato precisnost pozná se nejlépe na obraze 394, str. 227, který jediný není zmenšen.

V části A je probráno *užití půdorysů, nárysů a bokorysů*, jsou studovány kolmé průměty přímky a roviny, kružnice a koule a jsou vyloženy základní vlastnosti kuželoseček. Dále je probrána kolmá, šikmá (speciálně tzv. frontální) axonometrie s větou Pohlkeovou. Zbytek části A je věnován lineární perspektivě, fotogrametrickým rekonstrukcím a stručným dodatkům (o křivých perspektivách, panoramě, reliefu ap.). Výklad je stále prokládán technickými ilustracemi.

Na několika místech je vhodně poukázáno na Eckhartovu zářezovou metodu, při níž se ze dvou paralelních průmětů daného objektu odvozuje jistým způsobem další paralelní průmět objektu (viz ku př. Klapka-Piska-Zezula, Deskriptivní geometrie II, SPN Praha 1953, str. 308—321). Větu Pohlkeovu dokazuje autor originálním způsobem (srv. El. d. Math. *10*, 1955, str. 40—42) užitím průmětu pomocné plochy kulové o jednotkovém poloměru. Myšlenkově jednodušší důkaz věty Pohlkeovy uvádí J. L. Krames ve své učebnici, citované na počátku této recense, a to na str. 159—160. Kramesův důkaz je asi dosud nejjednodušším důkazem věty Pohlkeovy. Autor má ovšem nepopiratelné právo použít důkazu, který sám uzná za vhodný. — Partie o lineární perspektivě je velmi zdařilá. Originální je zejména překreslování z jedné speciální perspektivy do druhé (viz též El. d. Math. *10*, 1955, str. 57—61).

V části B je pojednáno o technicky důležitých *křivkách a plochách*. Započato je s plochami druhého stupně. Po kuželových plochách je probrán jednodílný rotační hyperboloid a ostatní rotační kvadriky. Obvyklým způsobem se prostorovou afinitou přejde k obecným kvadrikám. Vtipně se přejde vhodnou prostorovou kolineací od jednodílného hyperboloidu k hyperbolickému paraboloidu. Je zde též stručná zmínka o užití hyperbolického paraboloidu při zastřešování. Diferenciálně-geometrické vlastnosti křivek a ploch jsou jen nahozeny. Je zaveden průvodní trojhran prostorové křivky, rozdělení regulárních bodů křivé plochy na eliptické, parabolické a hyperbolické, avšak Dupinova indikatrix již předmětem studia není. Rotačním plochám je věnováno dosti místa s ohledem na četné aplikace, zejména pokud jde o průnikovou čáru dvou rotačních ploch. Zdařile jsou též vyloženy plochy šroubové s osvědčenými konstrukcemi užívajícími otočených úběžníků či úběžnic (Drehflucht); v české literatuře se nazývají též póly a poláry šroubového pohybu. Z technických aplikací je nejznamenitější odstavec o frézování na str. 173—179. Následuje ve stručnosti partie o plochách přímkových, rourových a translačních. Část B je zakončena promítáním kótovaným, samozřejmě se zobrazením terénu a řešením výkopů a násypů při zřizování silnic a železnic.

Recensent má námitky proti důkazu o meridiánu nerozvinutelné rotační plochy na str. 138, řádek 13 zdola. Jde v podstatě o analogii důkazu z knihy Müller-Kruppa, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Leipzig-Berlin 1936, str. 178. Užívaje bodů dotyku na tečnách hyperboly, opírá autor tento důkaz o obalovou křivku hyperbol o pevných asymptotách; tato část důkazu je diskutabilní a je právě v Hohenbergově knize vynechána. — Příklad na str. 199 o ploše tvořící přechod mezi dvěma vozovkami je ukázkou příkladu, který má nesporný půvab technický i geometrický.

Část C je věnována *geometrii kinematické* a *teorii ozubení* s bohatými aplikacemi technickými, snad nejbohatšími v celé knize. Základní diferenciálně-geometrické úvahy jsou provedeny stručně a po zavedení pojmů okamžitý pól, hybná a pevná poloida ap. je probrán pohyb eliptický i kardioidický, pohyby při zařízeních kloubových a pohyb cykloidální. Konstrukce kružnic oskulačních pro poloidy daného pohybu jsou podány Kramesovou metodou bez užití projektivní geometrie. Využívá se přitom věty, že relativní okamžité póly při současném pohybu tří soumístných rovinných systémů (v každém okamžiku) leží na přímce. (Srv. učebnici Kramesovu, str. 187—188.) Této metody užil též profesor J. Klapka ve své učebnici Deskriptivní geometrie, Praha 1951, str. 335 a násl. — Dále je probrána teorie ozubení a konečně základy prostorové kinematiky s aplikacemi na prostorová ozubení.

Kniha je zakončena podrobným rejstříkem, rozděleným na část geometrickou a technickou.

Václav Havel, Brno

Robert R. Bush, Frederick Mosteller: **Stochastic Models for Learning.** John Wiley et Sons, New York 1955, stran XVI + 365, obrazů 49, tabulek 36.

Kniha je velmi zajímavá a podnětná jak pro matematika, tak pro psychologa. Pro matematika tím, že se v ní studuje jistý typ stochastických procesů, které před pracemi Bushe a Mostellera nebyly studovány, a tím, že se v knize vyskytuje řada matematických a statistických problémů, vzniklých ze studované teorie, které doposud nejsou rozřešeny. Pro psychologa pak tím, že ukazuje možnost koncisního zpracování experimentů o učení se, a obecněji tím, že do aplikací statistiky v psychologii zavádí moderní dynamické metody stochastických procesů. Kniha jest určena hlavně pro experimentální psychology a proto matematické úvahy jsou prováděny značně podrobně; u několika obtížnějších vět jsou formulovány pouze výsledky a důkazy jsou vynechány. Nicméně by bylo velmi užitečné, aby knihu četli i matematičtí statistici, neboť jenom ti by byli schopni řešit doposud nezpracované problémy uvedené teorie, z nichž některé se zdají být i značně obtížné.

Stochastický proces učení se je možno asi tímto způsobem srovnati s Markovovým řetězcem: Budiž dán systém o r stavech $A_1, A_2, \ldots, A_r$ a příslušný vektor absolutních pravděpodobností v k-tém kroku $\mathbf{p}_k = (p_{k1}, p_{k2}, \ldots, p_{kr})$. Vektor $\mathbf{p}_{k+1}$ dostaneme aplikováním jistého maticového operátoru $\mathbf{T}$ na vektor $\mathbf{p}_k$. U Markovova řetězce nehomogenního máme systém operátorů $\mathbf{T}_k$ (matice pravděpodobností přechodu), závisících na pořadovém čísle kroku k, u homogenního máme dokonce jediný operátor $\mathbf{T}$; podstatné však v našem srovnání je, že operátory u Markovova řetězce jsou pevné, nenáhodné. Naproti tomu u procesu učení se máme systém maticových operátorů $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_t$, které aplikujeme náhodně. (Obvykle však tyto uvedené operátory již nezávisí na pořadovém čísle kroku.) Nastane-li při k-tém kroku náhodný jev E_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$, aplikujeme na vektor $\mathbf{p}_k$ operátor $\mathbf{T}_i$.

Reálná interpretace je tato: Biologický subjekt (člověk nebo zvíře) je podroben řadě pokusů. Při každém pokusu se rozhoduje pro nějaké chování čili odpověď A_j $(j = 1, 2, \ldots, \ldots, r)$, a to při k-tém pokusu s pravděpodobností p_{kj}; základním předpokladem tedy je, že chování subjektu má pravděpodobnostní charakter. (Na př. krysa v bludišti se rozhoduje s nějakými pravděpodobnostmi pro cestu vpravo nebo vlevo a pod.) Při různých pokusech jsou některé odpovědi odměňovány a jiné trestány podle nějakého schematu. Tím se pravděpodobnosti odpovědí pro následující pokus změní, což odpovídá aplikaci nějakého operátoru $\mathbf{T}_i$.

Vektor pravděpodobností $\mathbf{p}_k$ je zřejmě sám náhodnou proměnnou; hlavním úkolem teorie je pak studovati rozložení pravděpodobností $\mathbf{p}_k$, resp. asymptotické rozložení. Autoři sice upozorňují, že považujeme-li vektor $\mathbf{p}_k$ za stav systému v k-tém kroku, dostaneme Markovův řetězec s nekonečným množstvím stavů, ale typických metod teorie Markovových řetězců se v knize nepoužívá a zdá se, že ani celkem jich není možno použíti.

Převážná většina knihy se zabývá nejjednodušším případem $r = 2$. Zde stačí studovat pouze rozložení p_{k1} (autoři píší jednoduše jenom p), a označíme-li užívané lineární operátory Q_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$, při realisaci jevu E_i máme $p_{k+1,1} = Q_i p_{k1} = \alpha_i p_{k1} + (1 - \alpha_i)\,\lambda_i$; λ_i se nazývá limitním bodem operátoru Q_i.

A nyní stručně o jednotlivých kapitolách knihy.

První část knihy se skládá z 8 kapitol a rozvíjí se v ní *matematická teorie* nahoře definovaných stochastických procesů a studují se některé jejich vlastnosti.

V úvodní kapitole 1 autoři popisují model učení se, kterého používají, a interpretují jej psychologicky.

Lineárních operátorů se užívá v knize jednak z důvodů matematické jednoduchosti, ale v kapitole 2 je ukázáno, že linearita vyplyne také z jistých psychologických úvah o stimulech a podmiňování.

V kapitole 3 jsou rozlišeny tři typy modelů. I. „Experimentátorem řízené jevy." Případ pevného, deterministického pořadí aplikovaných operátorů je jednoduchý a nepříliš zajímavý. Mnohem častěji se v experimentech vyskytuje případ, kdy experimentátor aplikuje operátory náhodně s pevnými pravděpodobnostmi. Výjimečně byly studovány též případy, kdy posloupnost operátorů je Markovovým řetězcem. II. „Subjektem řízené jevy." Odpověď A_i biologického subjektu v k-tém kroku je považována za jev E_i a aplikuje se tedy operátor $\mathbf{T}_i$. Tento typ modelu jest nejčastější v experimentech a jeho studiu je věnována velká část knihy. III. „Experimentátorem i subjektem řízené jevy." Jev E_i je kombinací odpovědi subjektu A_j a „výsledku" O_l, kde jednotlivá O_l volí experimentátor s danými pravděpodobnostmi.

Kapitola 4 se zabývá distribucemi pravděpodobností odpovědí a obsahuje základní teoretické výsledky. Jsou odvozeny rekurentní vzorce pro momenty těchto distribucí. Pro „experimentátorem řízené jevy" je z těchto vzorců explicitně vyjádřen první a druhý moment. Pro ostatní dva typy modelů nebylo možno vzorce explicitně rozřešit.

Za speciálních předpokladů, které se často v experimentech vyskytují, bylo možno řešit řadu různých problémů, poněvadž vzorce kapitoly 4 se zjednoduší. V kapitole 5 je studována podmínka sobě rovných α_i, v kapitole 7 operátory s limitními body $\lambda_i = 0$ nebo 1, v kapitole 8 případ komutativních operátorů.

Kapitola 6 obsahuje aproximativní metody pro výpočet průměrů distribucí: Monte Carlo metodu a analytickou metodu pro výpočet mezí pro průměry.

Druhá část knihy jest věnována *aplikacím.*

Kapitola 9 se zabývá odhady parametrů v modelech učení se a testy dobré shody. Tato tematika obsahuje zvláště mnoho neřešených problémů a řešení užitá autory jsou většinou provisorní. Zvláštní obtíž zde vyplývá z jakési „dvojstupňovitosti" výběru: Prvním stupněm je výběr z náhodných proměnných $p_{k1}, p_{k2}, \ldots, p_{kr}$ a v druhém stupni biologický subjekt vybírá své odpovědi s těmito pravděpodobnostmi. V experimentu můžeme však pozorovat teprve odpovědi subjektů, tj. souhrnný výsledek obou stupňů, nikoliv výsledky jednotlivých stupňů zvlášť.

V kapitole 10—14 jsou uvedeny různé aplikace ve zvířecí i lidské psychologii: učení se slovům, výcvik vyhýbání se nepříjemným podnětům, experimenty o napodobování, problémy symetrické volby, experimenty týkající se rychlosti běhu např. za potravou.

Kapitola 15 uzavírá knihu souhrnným zhodnocením modelů učení se. Autoři se vyjadřují zde vzácně kriticky o svém vlastním díle ukazujíce na řadu jeho nedostatků.

Dále kniha obsahuje ještě 4 *tabulky* pro usnadnění výpočtů při odhadech apod.

Některé výsledky a metody v knize uvedené jsou matematicky nepřesné, což ovšem nutně vyplynulo z toho, že modely učení se nejsou doposud dostatečně teoreticky propracovány. Autoři však jsou si toho velmi dobře vědomi a na každém místě výslovně na tyto nepřesnosti upozorňují a podotýkají, že jejich řešení jsou jen aproximativní, případně dokonce nedostatečná. Jinak je kniha psána velmi pečlivě; rovněž tiskových chyb je málo a čtenář si je snadno opraví sám.

Snad jest záhodno ještě podotknout, že Bush-Mostellerovy modely učení se pouze popisují tyto procesy a naprosto se nesnaží vniknouti do vnitřní podstaty jejich mechanismu, jako to činí některé psychologické teorie, případně i kybernetika. Přesto knihu považuji za velmi významnou, neboť otvírá nová pole bádání jak v teorii stochastických procesů, tak v psychologii. Autoři sami upozorňují na řadu nedostatků svých modelů; považují však tyto modely za první přiblížení, za počátek a podnět k další práci na tomto úseku, která snad vytvoří na jejich základě modely lepší, výstižnější a obsažnější.

Zbyněk Šidák, Praha

P. P. Korovkin: **Nerovnosti.** Přeložil Ing. *Milan Ullrich*. Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1957; 68 stran, 4 obrázky, cena 2,55 Kčs.

Ve známé knižnici „Populární přednášky o matematice", která je určena žákům a vyučujícím výběrových škol a posluchačům prvních semestrů na vysokých školách, vyšla nedávno už ve druhém vydání brožurka P. P. Korovkina „Nerovnosti". V pěti paragrafech tu autor doplňuje a prohlubuje tu část učiva, které je dnes podstatnou složkou středoškolských osnov matematiky. Na pojmu limity naznačuje též důležitost nerovností pro toho, kdo bude chtít dále studovat matematickou analysu. Knížku doplňuje 26 cvičení pro čtenáře, která jsou pak v závěru rozřešena.

Předností spisku je, že většina tvrzení je tu dokázána; jen tam, kde je potřebí obtížnějších vět z matematické analysy, se autor odvolává na odbornější literaturu či na názor.

Chyb a nedopatření je v knížce velmi málo. Tak na str. 17 bych definici mocninného průměru řádu α doplnil poznámkou $\alpha \neq 0$; případ $\alpha = 0$ je uvažován na str. 30 (totéž v originále). Překladatel užívá (doslovně podle originálu) někde názvu „monotonně rostoucí" veličina (posloupnost), ačkoliv je u nás vžit jednodušší název „rostoucí" posloupnost (který se ostatně v překladu též místy vyskytne).

Recensent se domnívá, že není třeba Korovkinovu knížku čtenářům ani zvlášť doporučovat, neboť okolnost, že v poměrně krátké době vychází ve druhém vydání, mluví o dostatečném zájmu našeho studentstva o tuto publikaci.

Jiří Sedláček, Praha

A. I. Markuševič: **Plochy a logaritmy.** Přeložil Ing. *Milan Ullrich*, vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1957, druhé vydání, 68 stran, 34 obrázků, cena 2,20 Kčs.

Tři roky po prvním vydání vychází v knižnici „Populární přednášky o matematice" druhé, upravené vydání Markuševičovy brožurky Plochy a logaritmy. Spisek je určen žákům jedenáctiletek, odborných škol a posluchačům nižších semestrů techniky. Předpokládá se v něm pouze znalost grafického znázorňování některých běžných funkcí a čtenář potřebuje znát věty o geometrických posloupnostech, jež se probírají na střední škole. S pojmem limity se zde pracuje propedenticky.

Autor definuje přirozený logaritmus jako integrál $\int_1^b x^{-1}\,dx$, při čemž čtenáře seznamuje s nejjednoduššími pojmy a větami integrálního počtu (aniž by ovšem zabíhal do subtilnějších existenčních otázek). V mnoha úvahách se bere na pomoc názor, takže výsledky mají jen informativní charakter.

Pokud se zpracování látky týče, nelze ovšem autorovi vytýkat neúplnost úvah, jestliže tím sleduje cíle popularisační a je-li z textu patrno, že jde jen o přibližnou informaci. Snad jen úvahy na str. 29 a 30 by mohly vzbudit u začátečníka nesprávnou představu: Autor tu zjišťuje, že vzorce

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k + 1}\,, \tag{1}$$

který byl odvozen pro celé číslo $k \geqq 0$, nelze použít pro $k = -1$, neboť pak na pravé straně dostáváme výraz, který nemá smysl. Užitečná by snad zde byla poznámka pod čarou, že vzorec (1) bychom nemohli použít ani tehdy, kdyby náhodou vyšel výsledek, který smysl dává, když vzorec (1) byl odvozen za jiných předpokladů.

Jiří Sedláček, Praha

DALŠÍ VYDANÉ KNIHY

A. J. Markuševič: **Důležité křivky.** Z ruštiny přeložil dr. *Karel Winkelbauer*, 2. vydání, Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1957, 37 stran a 33 obrázků, cena Kčs 1,05.

Nové vydání 7. svazku „Populárních přednášek o matematice" bez podstatných změn.

Knížka je určena širšímu okruhu čtenářů se vzděláním středoškolským. Obsahuje kromě výkladu základních vlastností nejjednodušších křivek, s nimiž se čtenář setkává velmi často v praxi, také teoretický základ přístrojů, kterými lze přímo rýsovat oblouky kuželoseček. Lze očekávat, že český překlad knížky povzbudí čtenáře k hlubšímu studiu geometrických problémů spojených s praxí.

*

I. P. Natanson: **Sčítání nekonečně malých veličin.** Z ruštiny přeložil Ing. *Milan Ullrich*, 2. vydání. Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1957, 74 stran a 26 obrázků, cena Kčs 2,50.

Nové, upravené vydání 11. svazku „Populárních přednášek o matematice" podle druhého ruského vydání z r. 1956 opraveného autorem.

Recensi prvního vydání najde čtenář v Časopise pro pěstování matematiky *81* (1956), 263—264.

Redakce

ZPRÁVY

NÁVŠTĚVY ZAHRANIČNÍCH MATEMATIKŮ V ČSR

Koncem srpna a začátkem září navštívil Prahu známý rumunský matematik akademik GHEORGHE VRĂNCEANU, který již několikráte předtím v Praze přednášel.

Dne 30. 8. 1957 přednesl referát na katedře matematiky a deskriptivní geometrie fakulty inženýrského stavitelství ČVUT o maximálně pohyblivých grupách v prostorech s afinní konexí. Dne 2. září 1957 přednášel v matematické obci pražské na téma „Prostory s afinní konexí lokálně eukleidovské a korespondence mezi afinními resp. projektivními prostory". Obě přednášky byly četně navštíveny a rozvinula se bohatá diskuse mezi přednášejícím a našimi specialisty v geometrii.

Fr. Nožička, Praha

*

Dipl. Phys. WALTER HOFFMANN se svou chotí byl při příležitosti své návštěvy III. čs. strojírenské výstavy v Brně ve dnech 16.—19. září 1957 hostem Ústavu matematických strojů ČSAV. W. Hoffmann je pracovníkem ústavu praktické matematiky vysoké školy v Darmstadtu (NSR). Přednesl v matematické obci ve dnech 16. a 17. září 1957 dvě přednášky.

Podrobný výtah z těchto přednášek najde čtenář v časopise Aplikace matematiky *3* (1958), č. 2.

Ivo Babuška, Praha

*

Ve dnech 2. až 11. října 1957 navštívil Prahu p. STEFAN ROLEWICZ, vědecký pracovník Matematického ústavu Polské akademie věd ve Varšavě. P. St. Rolewicz se zajímá především o funkcionální analysu; v Praze se seznámil s pracovníky matematicko-fysikální fakulty a Matematického ústavu ČSAV, navštívil některé semináře MÚ ČSAV a věnoval velkou pozornost pražským památkám a kulturnímu životu.

Jaroslav Kurzweil, Praha

*

Dne 13. října 1957 přijel do Prahy význačný francouzský matematik světového jména profesor MAURICE FRÉCHET, člen Francouzské akademie věd. Prof. M. Fréchet i jeho vnučka, která jej doprovázela, byli hosty Československé akademie věd.

Za svého čtrnáctidenního pobytu v Praze, Brně a Bratislavě přednesl prof. M. Fréchet několik přednášek z oboru pravděpodobnosti, funkcionální analysy a matematické statistiky, v nichž je vynikajícím odborníkem. Na shromážděních matematické obce pražské dne 16. a 21. října přednesl dva vědecké referáty na thema: „Určení korelační tabulky, jejíž okrajové hodnoty jsou předem dány" a „Paraanalytické funkce".

V prvé přednášce, která byla početně navštívena hlavně matematickými statistiky, dokázal autor existenci aspoň jedné korelační tabulky za předpokladu, že její okrajové hodnoty jsou předem dány. Ukázal, že odpovídající distribuční funkce je obsažena mezi dvěma distribučními funkcemi, jež jsou řešením problému a z nichž každá odpovídá funkčnímu monotonnímu nenáhodnému vztahu.

Ve druhé přednášce rozšířil autor definice a vlastnosti analytických funkcí na tzv. funkce paraanalytické. Uvažoval o případu, kdy funkce representuje trojrozměrný vektor a proměnná dvojrozměrný parametr. Vyvodil z toho definici ploch derivovatelných vzhledem k pravidlu o násobení a udal kanonické formy jejich rovnic.

Dne 19. října přednášel prof. M. Fréchet v Matematickém ústavu ČSAV o náhodných elementech jakékoli povahy. Zmínil se o tom, že počet pravděpodobnosti se zabýval postupně náhodnými čísly, náhodnými vektory, náhodnými funkcemi. Autor uvažoval obecněji o náhodných elementech jakékoliv povahy a ukázal, jak třeba zobecnit klasické definice a věty, ať už uvažované elementy jsou prvky Banachova prostoru nebo ještě obecnějšího prostoru metrického. Tato přednáška vzbudila pozornost a diskusi přítomných odborníků.

V Bratislavě měl prof. M. Fréchet přednášku o funkcích derivovatelných vzhledem k pravidlu o násobení. Dokázal např., že klasické řady, jimiž jsou definovány funkce e^v, $\cos v$, $\sin v$, mají smysl i když v je n-dimensionální vektor, avšak že jejich součet závisí na zavedeném pravidle o násobení.

Na přednášce v Brně položil prof. M. Fréchet dva důležité problémy. I. Je prostor, jehož prvky jsou křivky, Banachovým prostorem (volíme-li vhodným způsobem normu, skalární součin a součet)? II. Jsou prostory C a L_2 homeomorfní? Z jistých vět vyplývá, že není-li tomu tak, lze každý z nich rozložit na dvě disjunktní množiny $C = A_1 \cup B_1$ a $L_2 = A_2 \cup B_2$ tak, že A_k a B_k jsou homeomorfní ($k = 1, 2$). Jde o explicitní určení těchto dvou homeomorfismů.

Prof. M. Fréchet navázal už dávno před válkou styky s československými matematiky. Známý je jeho přátelský vztah k zesnulému prof. B. Hostinskému. V r. 1928 byl zvolen čestným členem Jednoty československých matematiků a fysiků. Za svého nynějšího pohybu v Československu projevil prof. M. Fréchet zájem o kulturní život v našich zemích, navštívil galerie a divadla; jeho přednášky i rozhovory daly cenné podněty našim mladým matematikům v jejich práci.

J. Novák, Praha

*

V době od 2. října do 31. října 1957 dlel v Praze na studijní cestě matematický statistik doc. Stefan Zubrzycki z Matematického ústavu Polské akademie věd ve Vratislavi. Za svého pobytu byl hostem Matematického ústavu ČSAV; dále navštívil pracovníky katedry statistiky matematicko-fysikální fakulty Karlovy university, matematickou skupinu Ústavu radiotechniky a elektroniky ČSAV, pracovníky oddělení matematické statistiky Výzkumného ústavu tepelné techniky a některé další výzkumné ústavy.

Doc. Zubrzycki se zajímal o teoretické práce a aplikace československých statistiků a informoval naše vědecké pracovníky o práci statistiků polských. Dne 23. října 1957 proslovil v matematické obci pražské přednášku na thema „Srovnání dvou výrobních postupů a pravidlo dualismu." V této přednášce referoval o své společné práci s prof. H. Steinhausem, která je připravena do tisku.

Jiří Vondráček, Praha

*

Koncem listopadu 1957 přibyla do ČSR na studijní zájezd řada významných sovětských odborníků z Ústavu automatiky a telemechaniky AV SSSR a Laboratoře telekomunikací AV SSSR. Delegace si prohlédla Ústav matematických strojů ČSAV, Laboratoř automatisace ČSAV a jiné ústavy v ČSR.

Mezi těmito odborníky byl významný pracovník v oboru synthesy hradlových obvodů prof. dr. techn. věd M. A. Gavrilov, vedoucí Laboratoře pro dálkové ovládání Ústavu automatiky a telemechaniky AV SSSR, pod jehož vedením se konala v říjnu 1957 v Moskvě konference o diskrétně („reléově“) pracujících strojích. Referát o této konferenci bude otištěn v časopise Aplikace matematiky. Z Laboratoře telekomunikací AV SSSR byl mezi hosty kandidát techn. věd V. N. Roginskij. Oba hosté přednesli v Matematické obci pražské dne 29. listopadu 1957 přednášky o některých nových výsledcích v oboru synthesy hradlových obvodů na tato témata: M. A. Gavrilov: Konstrukce můstkových reléových obvodů, V. N. Roginskij: Grafická metoda synthesy kontaktových obvodů.

František Svoboda, Praha

*

ZPRÁVY O POBYTU ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ V POLSKU

Ve dnech 1. až 10. října 1957 byl na studijním pobytu ve Vratislavi a v Poznani docent Karlovy university dr. Jan Mařík. Dostalo se mu velmi srdečného přijetí, a to zejména od mladých poznaňských matematiků. Dr. Mařík přednášel v Poznani napřed o jednom svém výsledku z funkcionální analysy; v dalším sdělení uvedl některé věty o řešení systému lineárních algebraických rovnic iterační metodou, k nimž došel společně s dr. V. Ptákem. Ve Vratislavi referoval o svém zobecnění jedné věty doc. dr. M. Zlámala o eliptických rovnicích. Kromě toho se dr. Mařík zúčastnil v Poznani a ve Vratislavi několika přednášek a seminářů.

Redakce

*

Na pozvanie Poľskej akadémie vied navštívil som v dňoch 12.—30. novembra 1957 rad matematických pracovísk v Poľsku. Vo Varšave som bol v dňoch 12.—16. novembra. V rámci Polskiego Towarzystwa Matematycznego (PTM) mal som prednášku na tému „O invariantnych mierach na kompaktných pologrupách“. Vo Varšave som okrem dôkladnej prehliadky znamenite vybudovanej knižnice Matematického ústavu Poľskej akadémie vied (PANIM) prezrel i niektoré iné vysokoškolské zariadenia.

V dňoch 17.—23. novembra som bol v Toruni, kde je nateraz centrum algebraického bádania v Poľsku. Je sídlom algebraickej skupiny PANIM. Jej vedúcim je prof. J. Łoś. Táto skupina sa teraz intenzívne zaoberá štúdiom abelových grúp. Tu som mal vo forme akéhosi seminára tri na seba naväzujúce prednášky z téorie pologrúp.

V Poznani som sa zdržiaval v dňoch 23.—26. novembra.

Nakoniec v dňoch 26.—29. novembra bol som vo Vratislavi. Dňa 28. novembra som mal prednášku v pracovnej skupine PANIM, vedenej prof. St. Hartmannom, na tému „Charaktery kompaktných pologrúp“.

Na prednáškach bývala diskúzia vždy veľmi živá. Okrem prednášok mal som rad konzultácií, menovite s mladšími vedeckými pracovníkmi.

Okrem vedeckého programu postarali sa poľskí hostitelia i o hodnotný kultúrny a spoločenský program.

Štefan Schwarz, Bratislava

*

Ve dnech 20. listopadu až 5. prosince 1957 byl na studijním pobytu v Polsku dr. František Nožička, docent matematiky na matematicko-fysikální fakultě Karlovy university.

Na Jagiellońské universitě v Krakově, kde je řada vynikajících odborníků v oboru analysy a diferenciální geometrie, studoval soudobou tamější problematiku v těchto důležitých matematických disciplinách. Součástí jeho programu bylo též studium organisace vědecké práce v matematice v tomto velkém kulturním a vědeckém středisku v Polsku, právě tak jako organisace výuky matematiky na universitě, Hornické akademii a technice v Krakově. Za svého pobytu v Krakově přednesl doc. Nožička tři vědecké matematické přednášky, a to z oborů diferenciální geometrie (O styku variet v lineárním afinním prostoru), z matematické ekonomie (O aktuálních problémech z teorie lineárního plánování) a z analytické mechaniky (O problému dvou těles v teorii relativity).

O matematice na Jagiellońské universitě vyjde později (v Pokrocích matematiky, fysiky a astronomie) jeho obšírnější referativní článek.

Redakce

*

OBHAJOBY DISERTAČNÍCH PRACÍ KANDIDÁTŮ VĚD

Na matematicko-fysikální fakultě KU v Praze obhájil dne 24. října 1957 kandidát fysikálně-matematických věd ILJA ČERNÝ disertační práci „O rozšiřování lineárních operátorů v topologických lineárních prostorech".

Při Matematickém ústavu ČSAV v Praze obhájil dne 13. prosince 1957 kandidát fysikálně-matematických věd FRANTIŠEK ZÍTEK disertační práci „Náhodné funkce s nezávislými přírůstky a stochastické diferenciální rovnice".

Na přírodovědecké fakultě MU v Brně obhájili disertační práce tito kandidáti fysikálně-matematických věd: Dne 27. listopadu 1957 dr. MILOŠ RÁB práci „Oscilační a asymptotické vlastnosti integrálů lineární diferenciální rovnice 3. řádu" a doc. dr. MARKO ŠVEC práci „O niektorych vlastnostiach integrálov diferenciálnych rovníc typu $y^{(n)} + Q(x)\,y = 0$"; dne 11. prosince 1957 VALTER ŠEDA práci „Transformácia integrálov obyčajných lineárných diferenciálnych rovníc 2. rádu v komplexnom obore".

Redakce

*

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

16. 10. 1957: *Maurice Fréchet* (Paříž), Détermination d'un tableau de corrélation dont les marges sont données.

21. 10. 1957: *Maurice Fréchet* (Paříž), Les surfaces dérivables relativement à une règle de multiplication.

23. 10. 1957: *Stefan Zubrzycki* (Vratislav): Srovnání dvou výrobních procesů a pravidlo dualismu.

4. 11. 1957: *Ivo Babuška*: Problém stability řešení eliptických diferenciálních rovnic (vzhledem k malým změnám definiční oblasti).

18. 11. 1957: *Karel Rychlík:* Teorie reálných čísel v Bolzanově rukopisné pozůstalosti.

29. 11. 1957: *M. A. Gavrilov* a *V. N. Roginskij* (Moskva): O výsledcích v oboru synthesy reléových obvodů v SSSR.

2. 12. 1957: *Rudolf Výborný:* Jednoznačnost některých okrajových úloh.

4. 12. 1957: *Jaromír Abrham:* Přibližná metoda pro nelineární programování.

9. 12. 1957: *Miroslav Fiedler:* O některých výsledcích a problémech z n-rozměrné eukleidovské geometrie.

Redakce

*

ČINNOST POBOČKY JEDNOTY ČS. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V BRNĚ

Pobočka Jednoty čs. matematiků a fysiků v Brně pokračovala ve své činnosti přednáškami a diskusemi o nových pracích matematických.

Konaly se tyto přednášky:

5. 9. 1957: *G. Vrănceanu* (Bukurešť): Propriétés globales des correspondances entre espaces affines.

17. 10. 1957: *A. Švec* (Liberec): O pobytu v ústavu pro geometrii v Bologni.

24. 10. 1957: *M. Fréchet* (Paříž): Sur quelques problèmes non résolus d'analyse fonctionnelle.

21. 11. 1957: *F. Balada:* O životě a díle profesora Karla Koutského.

2. 12. 1957: *J. Smolka* (Praha): O Prokopu Divišovi.

V „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" byly předneseny tyto referáty:

7. 10. 1957: *M. Ráb:* O diferenciální rovnici $y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + \omega(x)]\,y = 0$.

14. 10. 1957: *M. Sekanina:* Rozklady množiny celých čísel.

21. 10. 1957: *K. Čulík:* O lexikografickém součtu částečně uspořádaných množin.

4. 11. 1957: *M. Novotný:* O aplikaci úplných množinových okruhů v teorii částečně uspořádaných množin.

11. 11. 1957: *Z. Hustý:* O vlastnostech diferenciálních rovnic 5. řádu.

25. 11. 1957: *M. Sekanina:* O jistých rozkladech na rovině.

16. 12. 1957: *E. Barvínek:* O zaměnitelnosti dispersí a integrálů diferenciálních rovnic $-\{x, t\} + q(x)\,x'^2 = Q(t)$.

K. Svoboda, Brno

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958). — Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd, Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. — Administrace: Poštovní novinový úřad, Praha 3, Jindřišská 14. — Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky přijímá každý poštovní novinový úřad nebo doručovatel. — Tiskne a expeduje Knihtisk n. p., závod 05 (Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. — Vyšlo 20. V. 1958 — A-09377