ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

1

83

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 83 • Č. 1 • STR. 1—132 • PRAHA 18. II. 1958

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky“*)
SVAZEK 83 (1958)

OBSAH

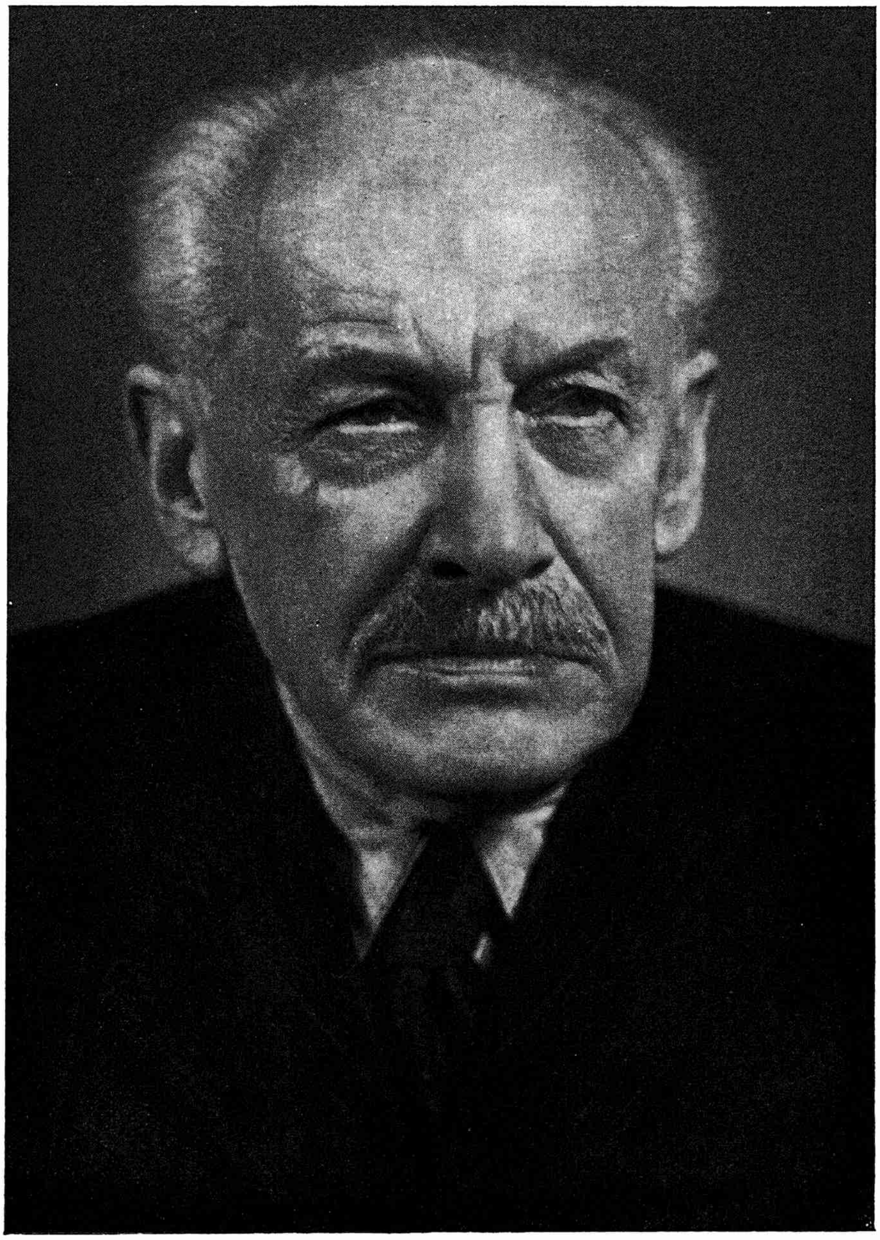
Články:

Různé:

Úlohy a problémy:

Referáty:

Recense:



ZDENĚK NEJEDLÝ
president Československé akademie věd
dožil se 10. II. 1958 80 let

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 83 * PRAHA, 18. II. 1958 * ČÍSLO 1

AUTOMORPHISMEN GEORDNETER MENGEN

FRANTIŠEK ŠIK, Brno

DT:519.52

(Eingelangt 9. Juni 1956)

In dem Artikel werden Gruppen der Automorphismen einer einfach geordneten Menge $\mathfrak{M}$ untersucht und es wird festgestellt, wie die Eigenschaften der Automorphismengruppe die Struktur der Menge $\mathfrak{M}$ beeinflussen und umgekehrt.

Einleitung

Ist eine einfach geordnete Menge $\mathfrak{M}$ gegeben, dann versteht man unter einem Automorphismus auf $\mathfrak{M}$ eine ähnliche Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}$. Die Menge $\mathfrak{G}$ aller Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ bildet in bezug auf die natürliche Ordnung eine Verbandsgruppe (eine l-Gruppe). In der Regel untersuchen wir nicht die Gruppe $\mathfrak{G}$, sondern irgendeine ihrer Untergruppen Γ und aus den vorausgesetzten Eigenschaften dieser Untergruppe leiten wir Eigenschaften der Menge $\mathfrak{M}$ und die Struktur der Untergruppe Γ ab.

In § 1 werden die Beziehungen der Eigenschaften der Gruppe Γ ohne Rücksicht auf die Struktur der Menge $\mathfrak{M}$ studiert.

Ist $x \in \mathfrak{M}$, $f \in \Gamma$, dann heisst die Vereinigung aller Intervalle mit den Endpunkten $f^n(x)$, $f^{-n}(x)$ (über alle natürlichen n) ein Zyklus des Automorphismus f. Der Zyklus heisst echt, wenn er mindestens zwei Elemente enthält. Die Gruppe Γ ist monozyklisch, wenn jedes Element $f \in \Gamma$ höchstens einen echten Zyklus besitzt. Unter $\mathfrak{M}(\Gamma)$ versteht man die Vereinigung aller echten Zyklen aller $f \in \Gamma$. Hat ein f einen echten Zyklus A, dann heisst der Automorphismus g, der $g(x) = f(x)$ für $x \in A$ und $g(x) = x$ für $x \bar{\in} A$ definiert ist, eine Phase des Automorphismus f. Die Gruppe Γ hat die Eigenschaft (α), wenn sie mit jedem Element f, $f \neq e$, eine von Null verschiedene Potenz mindestens einer seiner Phasen enthält. Die Gruppe Γ heisst divergent, wenn zu den beliebigen Elementen $x, y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, $x < y$, ein solches $f \in \Gamma$ existiert, dass $f(x) \geqq y$. Auf der l-Gruppe Γ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

a) Γ ist monozyklisch, b) Γ ist archimedisch geordnet und divergent, c) $\mathfrak{M}(\Gamma)$ ist ein Zyklus jedes Automorphismus $\neq e$ aus Γ, d) Γ ist einfach geordnet und hat die Eigenschaft (α) (Satz 3).

In § 2 beschäftigen wir uns vor allem mit den transitiven Gruppen der Automorphismen. Gegenstand der Betrachtungen ist besonders die Struktur der Menge $\mathfrak{M}$. Ist Γ eine transitive monozyklische Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ und enthält $\mathfrak{M}$ mindestens zwei Elemente, dann ist Γ ähnlich mit $\mathfrak{M}$ und je nach dem $\mathfrak{M}$ einen Sprung oder keinen Sprung und keine Lücke enthält, ist Γ isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller ganzen Zahlen oder aller reellen Zahlen (Satz 8).

In § 3 werden die intransitiven Automorphismengruppen studiert. Ist T ein System der Transitivität der Gruppe Γ, dann bedeutet Γ_T die Gruppe aller Automorphismen auf T, die auf T durch die Automorphismen der Gruppe Γ induziert sind und Γ^T bedeutet die Gruppe aller Automorphismen aus Γ, die die Elemente ausserhalb T fix lassen.

Γ sei eine archimedisch geordnete Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Dann sind alle echten Systeme der Transitivität T der Gruppe Γ untereinander und mit der einfach geordneten Menge Γ ähnlich und jede einfach geordnete Gruppe Γ_T (für die echten T) ist isomorph mit der einfach geordneten Gruppe Γ (Satz 12).

Ist Γ eine archimedische l-Gruppe, die genau zwei echte Systeme der Transitivität T, S besitzt, dann ist Γ dann und nur dann einfach geordnet, wenn $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$ (Satz 14).

Zum Schluss dieser Einleitung möchte ich den Herrn L. Rieger und M. Sekanina danken, die bei der definitiven Redaktion dieser Arbeit durch ihre Hinweise zur Vervollkomnung der Form und des Inhaltes derselben beigetragen haben [0]).

1

Die in dieser Arbeit benützten Begriffe der Theorie der l-Gruppen sind geläufig und insgesamt in [1], Kap. XIV, enthalten.

Unter $\mathfrak{M}$ verstehen wir immer eine einfach geordnete Menge, unter einem Automorphismus immer einen Automorphismus auf $\mathfrak{M}$ und unter Γ eine Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Die Elemente der Menge $\mathfrak{M}$ nennen wir Punkte. Die Verbandsoperationen und die Ordnung in $\mathfrak{M}$ und in $\mathfrak{G}$ (in der l-Gruppe aller Automorphismen auf $\mathfrak{M}$) bezeichnet man ohne Gefahr eines Missverständnisses gleich: $\vee$, $\wedge$, $\leqq$. Anstatt der Benennung „eine archimedisch einfach geordnete Gruppe" benützen wir die kürzere „eine archimedisch geordnete Gruppe".

---

[0]) Siehe Anmerkung [1]) zum Satze 3 und Anmerkung [3]) zum Satze 6.

Definition. *Unter einem Zyklus des Automorphismus f auf der Menge $\mathfrak{M}$ ist die folgendermassen definierte Menge $A \subset \mathfrak{M}$ zu verstehen: man wählt ein $x \in \mathfrak{M}$;*

a) *Ist $f(x) = x$, dann $A = (x)$;*

b) *Ist $f(x) > x$, dann* $A = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mathop{\mathrm{E}}_{y}[f^n(x) \leqq y < f^{n+1}(x); y \in \mathfrak{M}]$;

c) *Ist $f(x) < x$, dann* $A = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mathop{\mathrm{E}}_{y}[f^n(x) \leqq y < f^{n-1}(x); y \in \mathfrak{M}]$.

Es ist klar, dass für ein beliebiges $z \in A$ im Falle b) $f(z) > z$, c) $f(z) < z$ gilt und dass der Zyklus, der durch die oben eingeführte Methode mit Hilfe des Elementes $z \in A$ erzuegt wird, wiederum gleich A ist. Weiter ist offenbar, dass das System aller Zyklen des Automorphismus f eine Zerlegung auf $\mathfrak{M}$ bildet. Daraus folgt $f(A) = A$.

Wie bekannt, ist die Menge $\mathfrak{G}$ aller Automorphismen der einfach geordneten Menge $\mathfrak{M}$ eine l-Gruppe ([1], XIV, § 2, Auf. 4). Die teilweise Ordnung ist auf $\mathfrak{G}$ folgendermassen definiert $f \leqq g \Leftrightarrow f(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in \mathfrak{M}$. Für die Verbandsoperationen gilt also $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$, $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$.

Wenn im Weiteren von der Ordnung einer Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ gesprochen wird, werden wir darunter immer die oben eingeführte natürliche Ordnung verstehen.

Der Buchstabe $\mathfrak{G}$ wird in der ganzen Arbeit für die Gruppe aller Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ vorbehalten.

In den folgenden Betrachtungen beschäftigen wir uns stets mit den Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{G}$. Unter einer l-Gruppe Γ der Automorphismen versteht man immer eine l-Untergruppe in $\mathfrak{G}$, d. h. eine solche Untergruppe in $\mathfrak{G}$, für die gilt: $f, g \in \Gamma \Rightarrow f \vee g \in \Gamma, f \wedge g \in \Gamma$.

Γ sei eine Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$.

Definition. *Jeden Punkt $x \in \mathfrak{M}$, der ein Fixpunkt jedes Automorphismus aus Γ ist, wollen wir als einen stabilen Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ (in Bezug auf Γ) bezeichnen.*

Die um die stabilen Punkte (in bezug zu Γ) verkleinerte Menge $\mathfrak{M}$ bezeichnet man $\mathfrak{M}(\Gamma)$. Wir bemerken, dass $\mathfrak{M}(\Gamma)$ entweder leer ist oder wenigstens zwei Punkte enthält.

Definition. *Die Gruppe Γ ist transitiv auf der Menge $Q \subset \mathfrak{M}$, wenn zu jedem $x, y \in Q$ ein $f \in \Gamma$ existiert, so dass $f(x) = y$.*

Die Gruppe ist transitiv, wenn sie transitiv auf $\mathfrak{M}$ ist.

Wir bemerken, dass die Menge $\mathfrak{M}$ keine stabilen Punkte in bezug auf Γ besitzt, wenn Γ transitiv (auf $\mathfrak{M}$) und $\Gamma \neq (e)$ ist.

Definition. *Zwei Automorphismen f, g sind gleich orientiert, wenn für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$ gilt: $f(x) > x \Rightarrow g(x) \geqq x$; $g(x) > x \Rightarrow f(x) \geqq x$.*

Satz 1. *Die Gruppe Γ der Automorphismen sei transitiv auf $\mathfrak{M}(\Gamma)$. Γ ist dann und nur nur dann einfach geordnet, wenn die konjugierten Elemente aus Γ gleich orientiert sind.*

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend. Es sei f, $g \in \Gamma$, x ein solcher Punkt aus $\mathfrak{M}$, für den $f(x) > g(x)$. Es genügt zu zeigen, dass für ein beliebiges $y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ $f(y) \geqq g(y)$ ist. Es gilt $g^{-1} f(x) > x$. Weil x kein stabiler Punkt ist, existiert ein $h \in \Gamma$, so dass $h(x) = y$. Da das Element $h^{-1}g^{-1}fh$ gleich orientiert mit dem Elemente $g^{-1}f$ ist, gilt $h^{-1}g^{-1}fh(x) \geqq x$. Also $fh(x) \geqq gh(x)$, weiter $f(y) \geqq g(y)$ und endlich $f > g$. Eine ähnliche Erwägung gilt für $f(x) < g(x)$.

Notwendigkeit der Bedingung. Es sei $f \in \Gamma$. Für ein $x \in \mathfrak{M}$ sei $f(x) > x$. Es ist zu beweisen, dass für ein beliebiges $g \in \Gamma$ $g^{-1}fg(x) \geqq x$ gilt. Da $f > e$ ($e =$ das Einheitselement der Gruppe Γ), gilt $f(y) \geqq y$ für alle $y \in \mathfrak{M}$. Daher für $y = g(x)$ gilt $g^{-1}fg(x) \geqq g^{-1}g(x) = x$.

Es sei $g^{-1}fg(x) > x$ für ein $x \in \mathfrak{M}$. Dann ist $f[g(x)] > g(x)$. Weil Γ einfach geordnet ist, gilt $f > e$, also $f(x) > x$.

Korollar. *Die abelsche auf $\mathfrak{M}(\Gamma)$ transitive Gruppe Γ ist einfach geordnet.*

Satz 2. *Ist die Gruppe Γ einfach geordnet, dann sind zwei ihre Elemente dann und dann gleich orientiert, wenn beide $\geqq e$ oder beide $\leqq e$ sind.*

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend. Es sei f, $g \in \Gamma$, $f \geqq e$, $g \geqq e$. Daher $f(x) \geqq x$, $g(x) \geqq x$ für alle $x \in \mathfrak{M}$. f und g sind also gleich orientiert. Ist $f \leqq e$, $g \leqq e$, dann $f(x) \leqq x$, $g(x) \leqq x$ für alle $x \in \mathfrak{M}$. Offenbar sind f und g wieder gleich orientiert.

Notwendigkeit der Bedingung. Es seien f, $g \in \Gamma$ gleich orientiert.

1. Es sei $f > e$. Es ist zu beweisen, dass $g \geqq e$. Ist hingegen $g < e$, dann existiert ein $y \in \mathfrak{M}$, so dass $g(y) < y$. Dabei $f(y) = y$, denn teils $f > e \Rightarrow f(y) \geqq y$, teils $f(y) > y \Rightarrow g(y) \geqq y$. Bezeichnen wir mit B den das Element y enthaltenden Zyklus des Automorphismus g.

Für das Element $h = gf$ gilt: es existiert ein Punkt $x \in \mathfrak{M}$, so dass $f(x) > x$; daher $f[f(x)] > f(x)$; da f und g gleich orientiert sind, gilt $g[f(x)] \geqq f(x)$; also $h(x) > x$ und daher $h > e$. Für den erwähnten Punkt y gilt $h(y) = g[f(y)] = g(y) < y$, also $h < e$, was einen Widerspruch beinhaltet. Also $g \geqq e$.

2. Es sei $f < e$. Dann $g > e \Rightarrow f \geqq e$, was ein Widerspruch ist. Der Beweis ist ähnlich dem vorigen.

3. Ist $f = e$, so ist die Richtigkeit der Behauptung offenbar.

Definition. *Der Automorphismus f auf $\mathfrak{M}$ heisst monozyklisch, wenn er höchstens einen echten Zyklus besitzt.*

Die Gruppe Γ heisst monozyklisch, wenn jeder Automorphismus $f \in \Gamma$ monozyklisch ist.

Wir bemerken, dass die Menge Δ aller monozyklischen Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ keine Gruppe sein muss. Als ein Beispiel hierfür dient die Menge aller monozyklischen Automorphismen auf der einfach geordneten Menge aller reellen Zahlen.

Beweis. Sind α, β reelle Zahlen > 0, dann sind die Abbildungen f und g definiert: $f(x) = \alpha x$ für $x \leqq 0$, $f(x) = x$ für $x > 0$, $g(x) = x$ für $x \leqq 0$, $g(x) = \beta x$ für $x > 0$; es sind offenbar Automorphismen auf der einfach geordneten Menge aller reellen Zahlen. f und g sind monozyklisch, während fg es nicht ist.

Definition. *Unter Phase des Automorphismus f wollen wir einen solchen Automorphismus h verstehen, der auf einem einzigen echten Zyklus des Automorphismus f identisch mit f ist und der die übrigen Punkte festhält.*

Definition. *Die Gruppe der Automorphismen hat die Eigenschaft (α), wenn sie mit jedem Elemente $\neq e$ eine von Null verschiedene Potenz einer seiner Phasen besitzt.*

Definition. *Die Gruppe Γ der Automorphismen heisst divergent, wenn zu den beliebigen $x, y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, $x < y$, ein $f \in \Gamma$ so existiert, dass $f(x) \geqq y$.*

Satz 3. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe Γ der Automorphismen sind äquivalent:*

a) *Γ ist monozyklisch;*

b) *Γ ist archimedisch geordnet und divergent;*

c) *$\mathfrak{M}(\Gamma)$ ist ein (einziger echter) Zyklus jedes Elementes $f \in \Gamma$, $f \neq e$;*

d) *Γ ist einfach geordnet und hat die Eigenschaft (α).*[1]

Beweis. a $\Rightarrow$ b. 1. Jede monozyklische Gruppe ist einfach geordnet. Existiert nämlich ein $f \in \Gamma$, $f \parallel e$, dann existieren die Punkte $x, y \in \mathfrak{M}$, so dass $f(x) < x$, $f(y) > y$; der Automorphismus hat also mindestens zwei echte Zyklen, was ein Widerspruch ist.

2. Wenn Γ nicht archimedisch wäre, dann existierten Elemente f, $g \in \Gamma$, für die $e < f^n < g$ für alle natürlichen n gelten würde. Bezeichnen wir mit A den (einzigen) echten Zyklus des Automorphismus f. Nach der Voraussetzung gilt für jedes $y \in A$ $g(y) \bar{\in} A$; daraus folgt $fg(y) = g(y)$, $g^{-1}fg(y) = y$, also ist $g^{-1}fg$ auf A fix.

Der echte Zyklus C des Automorphismus $g^{-1}fg$ ($g^{-1}fg \neq e$!) muss also ausserhalb A liegen. Das widerspricht aber der Tatsache, dass Γ monozyklisch ist; z. b. der Automorphismus $g^{-1}fgf$ hat zwei echte Zyklen und zwar C und A (der Automorphismus f lässt C, der Automorphismus $g^{-1}fg$ lässt A punktweise fix). Dieser Widerspruch beweist, dass Γ archimedisch ist.

3. Die Gruppe Γ ist divergent. Wenn nämlich für zwei gewisse Punkte $x, y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, $x < y$, $h(x) < y$ für alle $h \in \Gamma$ gelten würde, dann würden offenbar solche Automorphismen f, $g \in \Gamma$ existieren, dass f resp. g fest im Punkte y

[1]) Die Behauptung a $\Rightarrow$ b hat L. Rieger abgeleitet.

resp. x und nicht im Punkte x resp. y sein würde; mindestens einer der Automorphismen fg, fg^{-1} hat dann zwei echte Zyklen; das ist ein Widerspruch.

b $\Rightarrow$ c. Da die Automorphismen f, f^{-1} dieselbe Zyklenzerlegung besitzen, kann man sich auf die Automorphismen $> e$ beschränken. Es sei also $f > e$, $g > e$. Es existieren solche natürliche Zahlen m, n, dass $f^m > g$, $g^n > f$; also gilt $f^{km} > g^k$, $g^{kn} > f^k$ für jedes natürliche k. Es gilt also $f^{km}(x) \geqq g^k(x)$, $g^{kn}(x) \geqq f^k(x)$ für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$ und die umgekehrten Ungleichungen für die negativen ganzen Zahlen k. Daher haben die Automorphismen f, g und also alle Automorphismen $\neq e$ dieselbe Zyklenzerlegung. Aus der Divergenz und aus dem vorher gesagten folgt, dass $\mathfrak{M}(\Gamma)$ der gemeinsame echte Zyklus aller Automorphismen $\neq e$ ist.

c $\Rightarrow$ d. Γ ist nach der Voraussetzung monozyklisch, also einfach geordnet (siehe den Anfang des Beweises a $\Rightarrow$ b). Die Gruppe Γ hat die Eigenschaft (α), denn jeder Automorphismus $\neq e$ aus Γ ist offenbar seine einzige eigene Phase.

d $\Rightarrow$ a. Es sei $f \in \Gamma$, f habe zwei echte Zyklen. g sei eine Phase des Automorphismus f und für ein ganzes $n \neq 0$ sei $g^n \in \Gamma$. Bezeichnen wir mit A den echten Zyklus des Automorphismus g, mit B den echten Zyklus des Automorphismus f, für den $A \cap B = \emptyset$. Der Automorphismus $h = g^n f^n g^{-n}$ hat zwei echte Zyklen A, B (denn $f^n g^{-n}$ resp. g^n lässt A resp. B punktweise stehen); das ist ein Widerspruch.

Anmerkung. In dem Beweise b $\Rightarrow$ c wurde die folgende Behauptung erwiesen:

In der archimedisch geordneten Gruppe Γ haben alle Automorphismen $\neq e$ dieselbe Zyklenzerlegung.

2

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit den transitiven Gruppen der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$.

Definition. *Γ sei eine Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$.*

a) *$\mathfrak{M}$ ist von oben schwach vollständig bezüglich Γ, wenn zu jeder von oben beschränkten Menge der Automorphismen $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ der Punkt $\bigvee_\nu [f_\nu(x)]$ für jedes $x \in \mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}$ existiert.*

b) *$\mathfrak{M}$ ist von unten schwach vollständig bezüglich Γ, wenn zu jeder von unten beschränkten Menge der Automorphismen $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ der Punkt $\bigwedge_\nu [f_\nu(x)]$ für jedes $x \in \mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}$ existiert.*

c) *$\mathfrak{M}$ ist schwach vollständig bezüglich Γ, wenn sie von oben und von unten schwach vollständig bezüglich Γ ist.*

d) *$\mathfrak{M}$ ist (von oben, von unten) schwach vollständig, wenn sie (von oben, von unten) schwach vollständig bezüglich der Gruppe $\mathfrak{G}$ aller Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ ist.*

Es ist offenbar, dass die bedingt vollständige Menge $\mathfrak{M}$ schwach vollständig ist. Die Umkehrung muss nicht gelten. Als ein Beispiel dient die Menge $\mathfrak{M}$ vom Typus $\omega \oplus \omega^*$. Der einzige Automorphismus auf $\mathfrak{M}$ ist der identische. Also ist $\mathfrak{M}$ offenbar schwach vollständig. Sie ist aber nicht bedingt vollständig, denn die Menge vom Typus ω resp. ω^* ist eine von oben resp. von unten beschränkte Untermenge in $\mathfrak{M}$ und trotzdem existiert ihr Supremum resp. Infimum in $\mathfrak{M}$ nicht.

Anmerkung A. *Γ sei eine transitive und einfach geordnete Gruppe. $\mathfrak{M}$ ist bezüglich Γ (von oben, von unten) schwach vollständig dann und nur dann, wenn $\mathfrak{M}$ lückenlos ist.*

Beweis. $\mathfrak{M}$ sei z. B. von oben schwach vollständig bezüglich Γ. $\mathfrak{M}$ habe eine Lücke A, B. Wählen wir $b \in B$; zu dem beliebigen $a \in A$ existiert ein $f_a \in \Gamma$ so, dass $f_a(b) = a$. Da $a < b$, ist $f_a < e$, also ist das System aller f_a von oben beschränkt. Also existiert $\bigvee_{a \in A} [f_a(b)] = \bigvee_{a \in A} a$. Dann aber hat die Menge A das Supremum, was ein Widerspruch ist.

$\mathfrak{M}$ habe keine Lücke und sei $\{f_\nu\} \subset \Gamma$, $f_\nu \leqq f$ für alle ν. Wählen wir $x \in \mathfrak{M}$. Hat das System $\{f_\nu(x)\}$ kein Supremum, dann ist die Menge aller $b \in \mathfrak{M}$, für die $f_\nu(x) \leqq b$ für alle ν, nicht leer $[f_\nu(x) \leqq f(x)]$ und bildet die obere Klasse eines Schnittes, die eine Lücke ist, was einen Widerspruch ergibt. Der Beweis der Anmerkung A ist erbracht.

Bemerken wir noch, dass die Nichtexistenz der Lücken in $\mathfrak{M}$ äquivalent mit der bedingten Vollständigkeit der einfach geordneten Menge $\mathfrak{M}$ ist.

Hilfssatz 1. *f sei ein Automorphismus auf einem Verbande S, $\{x_\nu\} \subset S$. Wenn $\bigvee x_\nu$ existiert, dann existiert $\bigvee[f(x_\nu)]$ und es gilt $f(\bigvee x_\nu) = \bigvee[f(x_\nu)]$. Der duale Satz gilt auch.*

Beweis. Wenn $\bigvee x_\nu$ existiert, dann gilt $f(\bigvee x_\nu) \geqq f(x_\nu)$ für alle ν. Wenn $\bigvee[f(x_\nu)]$ existiert, dann gilt $f(\bigvee x_\nu) \geqq \bigvee[f(x_\nu)] \Rightarrow \bigvee x_\nu \geqq f^{-1}\{\bigvee[f(x_\nu)]\} \geqq$ $\geqq \bigvee[f^{-1}f(x_\nu)] = \bigvee x_\nu$, also $f(\bigvee x_\nu) = \bigvee[f(x_\nu)]$.

Wenn $\bigvee[f(x_\nu)]$ nicht existiert, dann folgt aus der Relation $f(\bigvee x_\nu) \geqq f(x_\nu)$ für alle ν die Existenz eines solchen Elementes $y \in S$, dass $f(\bigvee x_\nu) > y > f(x_\nu)$ für alle ν. Daher ist $\bigvee x_\nu > f^{-1}(y) > f^{-1}f(x_\nu)$ für alle ν. Also $\bigvee x_\nu > f^{-1}(y) \geqq \bigvee x_\nu$; was einen Widerspruch bedeutet. Der Satz ist bewiesen. Den dualen Satz beweist man ähnlich.

Satz 4. *Ist eine der folgenden Bedingungen 1, 2, 3 für jede von oben beschränkte Teilmenge $\{f_\nu\}$ der Gruppe Γ der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ erfüllt, dann sind auch die übrigen Bedingungen erfüllt. Γ ist eine vollständige l-Gruppe und für die in den Bedingungen 1 und 2 definierten Abbildungen s und t gilt $s = \bigvee f_\nu$, $t = \bigwedge f_\nu^{-1}$.*

Die Bedingungen 1, 2, 3 *lauten:*

1. $\mathfrak{M}$ *ist von oben schwach vollständig bezüglich* Γ *und die Abbildung* $s(x) = \bigvee_{\nu}[f_\nu(x)]$ *ist ein Automorphismus auf* $\mathfrak{M}$.

2. $\mathfrak{M}$ *ist von unten schwach vollständig bezüglich* Γ *und die Abbildung* $t(x) = \bigwedge_{\nu}[f_\nu^{-1}(x)]$ *ist ein Automorphismus auf* $\mathfrak{M}$.

3. $\mathfrak{M}$ *ist schwach vollständig bezüglich* Γ *und es gilt* $\bigvee_{\nu}\{f_\nu(\bigwedge_{\mu}[f_\mu^{-1}(x)])\} \geqq \bigwedge_{\nu}\{f_\nu^{-1}(\bigvee_{\mu}[f_\mu(x)])\}$ *für ein beliebiges* $x \in \mathfrak{M}$.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Wir beweisen, dass $s = \bigvee f_\nu$. Nach der Definition des $s(x)$ gilt nämlich $s \geqq f_\nu$ für alle ν. Ist für ein $f \in \Gamma$ $f \geqq f_\nu$ für alle ν, dann gilt für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$ $f(x) \geqq f_\nu(x)$, also $f(x) \geqq \bigvee[f_\nu(x)] = s(x)$. Daher ist $f \geqq s$; also $s = \bigvee f_\nu$. Γ ist also eine vollständige l-Gruppe und es gilt $s = \bigvee f_\nu$.

Die Menge $\{f_\nu^{-1}\}$ ist von unten beschränkt. Wir beweisen, dass $\bigwedge_{\nu}[f_\nu^{-1}(x)]$ für jedes $x \in \mathfrak{M}$ existiert und dass für die Abbildung $t(x) = \bigwedge_{\nu}[f_\nu^{-1}(x)]$ $t = \bigwedge f_\nu^{-1}$ gilt. Bezeichnen wir $q = \bigwedge f_\nu^{-1}$. Dann gilt $q(x) \leqq f_\nu^{-1}(x)$ für alle ν und alle $x \in \mathfrak{M}$. Wenn $\bigwedge_{\nu}[f_\nu^{-1}(x)]$ für ein $x = x_0$ nicht existiert, dann existiert ein solches $y \in \mathfrak{M}$, dass $q(x_0) < y < f_\nu^{-1}(x_0)$ für alle ν ist. Daher $x_0 < q^{-1}(y) = s(y)$ und weiter $f_\nu(y) < x_0$ für alle ν, also $s(y) = \bigvee[f_\nu(y)] \leqq x_0$. Daher $x_0 < s(y) \leqq x_0$, was ein Widerspruch ist. $\bigwedge[f_\nu^{-1}(x)]$ existiert also für alle $x \in \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}$ ist von unten schwach vollständig bezüglich Γ. Es bleibt zu beweisen, dass $q = t$. Es gilt $q(x) \leqq \bigwedge[f_\nu^{-1}(x)]$ für alle $x \in \mathfrak{M}$. Ist $q(x_0) < \bigwedge[f_\nu^{-1}(x_0)]$ für ein $x = x_0$, dann gilt $x_0 = q^{-1}[q(x_0)] = (\bigwedge f_\nu^{-1})^{-1}[q(x_0)] < (\bigvee_{\nu} f_\nu)\{\bigwedge_{\mu}[f_\mu^{-1}(x_0)]\} = \bigvee_{\nu}\{f_\nu(\bigwedge_{\mu}[f_\mu^{-1}(x_0)])\} = \bigvee_{\nu}\bigwedge_{\mu}[(f_\nu f_\mu^{-1})(x_0)] \leqq x_0$. Die letzte Gleichung folgt aus dem Hilfssatze 1. Die letzte Ungleichung folgt daraus, dass $\bigwedge_{\mu}[(f_\nu f_\mu^{-1})(x_0)] \leqq x_0$ für jedes ν gilt, weil $(f_\nu f_\mu^{-1})(x_0) = x_0$ ist. Der Widerspruch, zu welchem wir gelangt sind, bestätigt, dass $q(x) = \bigwedge[f_\nu^{-1}f(x)] = t(x)$ für alle $x \in \mathfrak{M}$ ist. Daher gilt $t = \bigwedge f_\nu^{-1}$.

So ist die Gültigkeit der Bedingung 2 bestätigt. Gleichzeitig sieht man auch die Gültigkeit der Behauptungen von der Vollständigkeit der l-Gruppe Γ und von den Abbildungen s und t. Schliesslich ist bewiesen, dass $\mathfrak{M}$ schwach vollständig bezüglich Γ ist.

$2 \Rightarrow 1$. Man beweist dual.

$1 \Rightarrow 3$. Vorher wurde bewiesen, dass aus der Voraussetzung 1 die schwache Vollständigkeit der Menge $\mathfrak{M}$ bezüglich Γ, die Vollständigkeit der l-Gruppe Γ und die Relationen $s = \bigvee f_\nu$, $t = \bigwedge f_\nu^{-1} = s^{-1}$ folgen. Wir erhalten für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$: $x = s[t(x)] = \bigvee_{\nu}\{f_\nu(\bigwedge_{\mu}[f_\mu^{-1}(x)])\}$, $x = t[s(x)] = \bigwedge_{\nu}\{f_\nu^{-1}(\bigvee_{\mu}[f_\mu(x)])\}$. Dadurch ist die Bedingung 3 bestätigt.

$3 \Rightarrow 1$. Aus dem Hilfssatze 1 folgt für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$

$$x \geqq \bigvee_{\nu}\{\bigwedge_{\mu}[(f_\nu f_\mu^{-1})(x)]\} = \bigvee_{\nu}\{f_\nu(\bigwedge_{\mu}[f_\mu^{-1}(x)])\} \geqq \bigwedge_{\nu}\{f_\nu^{-1}(\bigvee_{\mu}[f_\mu(x)])\} =$$

$= \bigwedge_{\nu}\{\bigvee_{\mu}[(f_\nu^{-1}f_\mu)(x)])\} \geqq x$. Daher ist $\bigvee_{\nu}\{f_\nu(\bigwedge_{\mu}[f_\mu(x)])\} = x = \bigwedge_{\nu}\{f_\nu^{-1}(\bigvee_{\mu}[f_\mu(x)])\}$ für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$. Die Abbildungen $s(x) = \bigvee_{\nu}[f_\nu(x)]$ und $t(x) = \bigwedge_{\mu}[f_\mu^{-1}(x)]$ bilden $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}$ ab. Nach dem vorher gesagten ist $s[t(x)] = x = t[s(x)]$. Die Abbildungen s und t sind eineindeutig: ist z. B. $t(x) = t(y)$, dann ist $x = s[t(x)] = s[t(y)] = y$. Ähnlich für s. Weil s und t offenbar zwei isotone Abbildungen sind, wird der Beweis der Behauptung erbracht werden, wenn wir beweisen, dass $s(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$, $t(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$. Aus der für alle $x \in \mathfrak{M}$ geltenden Beziehung $x = s[t(x)]$ folgt $\mathfrak{M} = s[t(\mathfrak{M})]$. Also bildet s die Menge $t(\mathfrak{M})$ auf $\mathfrak{M}$ ab. Daraus folgt, dass s die Menge $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}$ abbildet, d. h. $s(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$. Weil s eineindeutig ist, muss $t(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ gelten. Also sind s und t Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ und die Behauptung $3 \Rightarrow 1$ ist bewiesen. Dadurch ist der Beweis des Satzes 4 erbracht.

Satz 5. *Eine einfach geordnete Menge $\mathfrak{M}$ mit einem Sprung ist vom Typus $\omega^* \oplus \omega$ dann und nur dann, wenn auf $\mathfrak{M}$ eine archimedisch geordnete transitive Gruppe Γ von Automorphismen existiert.*[2])

Beweis. $\mathfrak{M}$ sei vom Typus $\omega^* \oplus \omega$. Repräsentieren wir $\mathfrak{M}$ mit Hilfe der einfach geordneten Menge aller ganzen Zahlen. Die Menge aller ganzen Translationen hat offenbar die verlangten Eigenschaften.

Umgekehrt sei die Bedingung des Satzes erfüllt. $\mathfrak{M}$ habe einen Sprung $b < a$ $(a, b \in \mathfrak{M})$. Wählen wir ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$. Ein $f \in \Gamma$ existiert so, dass $f(b) = x$; dann ist $f(a) = y > x$. Die Punkte x und y sind benachbart. Also hat ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$ einen unmittelbaren Nachfolger. Ähnlich beweist man, dass x einen unmittelbaren Vorgänger besitzt. Daraus folgt, dass die Menge $\mathfrak{M}$ kein erstes und kein letztes Element besitzt. Wenn zwischen irgendwelchen zwei Punkten $x, y \in \mathfrak{M}$ $(x < y)$ eine unendliche Punktfolge existierte, dann könnte man eine unendliche Folge nacheinander gehender Punkte $x < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < y$ und solche Automorphismen f, $g \in \Gamma$ finden, dass $f(x) = x_1$, $g(x) = y$ gelten würde; daraus folgt $f^n(x) = x_n$, $f^n < g$ für ganze $n > 0$, also gilt $f = e$, was einen Widerspruch ergibt. Also ist $\mathfrak{M}$ vom Typus $\omega^* \oplus \omega$.

Mit τ bezeichnet man den Typus einer einfach geordneten Menge, auf der eine transitive Gruppe von Automorphismen existiert.

Satz 6. *Eine einfach geordnete Menge $\mathfrak{M}$ mit einem Sprung ist vom Typus $\tau \bigcirc (\omega^* \oplus \omega)$ dann und nur dann, wenn auf $\mathfrak{M}$ eine transitive Gruppe Γ von Automorphismen existiert.*[2]) [3])

[2]) $\oplus$ resp. $\bigcirc$ ist das Zeichen der Ordinalsumme resp. des Ordinalproduktes, [1], I, § 8.

[3]) Der Autor des Satzes 6 ist M. Sekanina.

Beweis der Notwendigkeit. $\mathfrak{T}$ sei eine einfach geordnete Menge vom Typus τ, $\mathfrak{R}$ vom Typus $\omega^* \oplus \omega$ und $\mathfrak{M}$ vom Typus $\tau \bigcirc (\omega^* \oplus \omega)$. $\mathfrak{M}$ ist die Menge der geordneten Paare (X, x), wo $X \in \mathfrak{T}$, $x \in \mathfrak{R}$ ist. Δ resp. Γ sei eine transitive Gruppe von Automorphismen auf $\mathfrak{T}$ resp. auf $\mathfrak{R}$. Wir konstruieren eine auf $\mathfrak{M}$ transitive Gruppe von Automorphismen. Es sei $(X, x) \in \mathfrak{M}$, $(Y, y) \in \mathfrak{M}$. Ein $F \in \Delta$ und ein $f \in \Gamma$ existiert derart, dass $F(X) = Y$ und $f(x) = y$. Definieren wir auf $\mathfrak{M}$ eine Abbildung (F, f): $(F, f)(X, x) = (F(X), f(x)) = (Y, y)$. (F, f) ist offenbar ein Automorphismus auf $\mathfrak{M}$ und die Menge aller (F, f) ist die transitive Gruppe von Automorphismen auf $\mathfrak{M}$.

Die Bedingung ist hinreichend. Ähnlich wie in dem Satze 5 beweist man, bass jeder Punkt in $\mathfrak{M}$ einen unmittelbaren Nachfolger und einen unmittel-daren Vorgänger hat. Definieren wir auf $\mathfrak{M}$ eine Äquivalenz $\sim : x \sim y \Leftrightarrow$ das Intervall zwischen den Elementen x, y ist eine endliche Menge. Die Menge $\mathfrak{M}$ zerfällt offenbar in konvexe Klassen insgesamt vom Typus $\omega^* \oplus \omega$. Diese auf eine ersichtliche Weise geordnete Zerlegung (bezeichnet man sie $\overline{\mathfrak{M}}$) besitzt eine transitive Gruppe der Automorphismen, wie wir beweisen. Jedes $f \in \Gamma$ induziert auf $\overline{\mathfrak{M}}$ einen Automorphismus F: ist für $x, y \in \mathfrak{M}$ $f(x) = y$, $x \in X \in \overline{\mathfrak{M}}$, $y \in Y \in \overline{\mathfrak{M}}$, definieren wir $F(X) = Y$. F ist eine Abbildung. Ist nämlich $x_1 \in X$, $f(x_1) = y_1$, dann ist $y_1 \in Y$, weil zwischen x und x_1 eine endliche Zahl der Punkte aus $\mathfrak{M}$ liegt, also ist auch zwischen y und y_1 nur eine endliche Zahl der Punkte aus $\mathfrak{M}$. Es ist klar, dass F ein Automorphismus auf $\overline{\mathfrak{M}}$ ist und dass die Menge aller F eine transitive Gruppe von Automorphismen auf $\overline{\mathfrak{M}}$ bildet. Ist $\overline{\mathfrak{M}}$ vom Typus τ, dann ist $\mathfrak{M}$ offenbar vom Typus $\tau \odot (\omega^* \oplus \omega)$.

Im Weiteren benutzen wir die folgenden Eigenschaften der Gruppe Γ der Automorphismen:

a) *Γ ist monozyklisch;*

b) *Γ ist archimedisch geordnet;*

c) *$\mathfrak{M}(\Gamma)$ ist ein (einziger echter) Zyklus jedes Elementes $\neq e$;*

d) *Γ ist einfach geordnet und besitzt die Eigenschaft (α);*

e) *Γ ist kommutativ und transitiv auf $\mathfrak{M}(\Gamma)$.*

Anmerkung B. Hat die Gruppe Γ irgendeine von den Eigenschaften a) bis e), dann gilt für $f, g \in \Gamma : f(x) = g(x)$ für ein $x \in \mathfrak{M}(\Gamma) \Rightarrow f = g$.

Beweis. Die Eigenschaften a), c), d) sind nach dem Satze 3 äquivalent. Nach c) hat kein Element $\neq e$ einen Fixpunkt in $\mathfrak{M}(\Gamma)$. Daraus und aus der Beziehung $g^{-1}f(x) = x$ für einen Punkt $x \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ folgt $g^{-1}f = e$. Also ist $f = g$.

Besitzt Γ die Eigenschaft b), dann haben nach der Anmerkung hinter dem Satze 3 alle Elemente $\neq e$ aus Γ dieselbe Zyklenzerlegung, also liegt in $\mathfrak{M}(\Gamma)$ kein Fixpunkt des Elementes $\neq e$ aus Γ. Weiter wie in c).

Hat Γ die Eigenschaft e), zeigen wir, dass $f \in \Gamma$, $f \neq e$, in $\mathfrak{M}(\Gamma)$ keinen Fixpunkt besitzt. Ist nämlich $f(x) = x \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, dann existiert für $y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ ein solches $g \in \Gamma$, dass $g(x) = y$. Dann gilt $gf(x) = g(x)$; aus der Kommutativität folgt weiter $fg(x) = g(x)$, so dass $f(y) = y$ gilt; offenbar gilt $f(y) = y$ für $y \bar{\in} \mathfrak{M}(\Gamma)$, so dass $f = e$. Der Rest des Beweises stimmt mit dem Falle c) überein.

Hilfssatz 2. *Ist eine abelsche Gruppe Γ transitiv auf $\mathfrak{M}(\Gamma)$, dann ist Γ (bezüglich der Ordnung) ähnlich zu $\mathfrak{M}(\Gamma)$.*

Beweis. Wählen wir ein festes $x \in \mathfrak{M}(\Gamma)$. Ist $f \in \Gamma$, dann ist die Abbildung ψ_x, die durch die Gleichung $\psi_x(f) = f(x)$ definiert ist, nach der Anmerkung B die gesuchte Ähnlichkeit. (Ein ausführlicherer Beweis: ψ_x ist eineindeutig: $f(x) = \psi_x(f) = \psi_x(g) = g(x) \Rightarrow f = g$; ψ_x bildet Γ auf $\mathfrak{M}(\Gamma)$ ab: zu jedem $y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ existiert ein $f \in \Gamma$ so, dass $f(x) = y$ gilt, also gilt $\psi_x(f) = y$; ψ_x ist isoton: $f \geqq g \Rightarrow f(x) \geqq g(x) \Rightarrow \psi_x(f) \geqq \psi_x(g)$.)

Hilfssatz 3. *H sei eine Untergruppe der additiven Gruppe aller reellen Zahlen G. Hat H keinen Sprung und keine Lücke, dann ist $H = G$.*

Der Beweis ist ersichtlich.

Definition. *Die Gruppe Γ hat die Eigenschaft* (β), *wenn: $f,\ g \in \Gamma,\ f \neq g$, $f(x) = g(x)$ für ein $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow f(x) = x = g(x)$ gilt.*

Anmerkung C. Die Gruppe Γ hat die Eigenschaft (β), wenn sie eine von den Eigenschaften a) bis e) besitzt.

Die Behauptung folgt aus der Anmerkung B.

Satz 7. *Γ sei eine transitive einfach geordnete Gruppe von Automorphismen mit der Eigenschaft* (β). *$\mathfrak{M}$ sei lückenlos und besitze mindestens zwei Punkte. Dann ist Γ isomorph der einfach geordneten additiven Gruppe aller ganzen Zahlen bzw. aller reellen Zahlen, je nach dem, ob $\mathfrak{M}$ einen Sprung bzw. keinen Sprung hat. In beiden Fällen ist Γ (bezüglich der Ordnung) ähnlich zu $\mathfrak{M}$. Für eine beliebige von oben beschränkte Menge $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ und für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$ gilt $(\bigvee f_\nu)(x) = \bigvee[f_\nu(x)]$, $(\bigwedge f_\nu^{-1})(x) = \bigwedge[f_\nu^{-1}(x)]$.*

Beweis. $\{f_\nu\}$ sei eine von oben beschränkte Untermenge der Gruppe Γ und es sei $f_\nu \leqq h \in \Gamma$ für alle ν. Wir beweisen die Existenz des Supremums der Menge $\{f_\nu\}$ in Γ. Wählen wir ein beliebiges $y \in \mathfrak{M}$. Bezeichnen wir $f_\nu^{-1}(y) = x_\nu$. Weil $h^{-1} \leqq f_\nu^{-1}$ gilt, existiert $\bigwedge[f_\nu^{-1}(y)] = \bigwedge x_\nu = x_0$. Aus der Transitivität folgt die Existenz des Elementes $g_y \in \Gamma$, so dass $g_y(x_0) = y$ ist.

Ist $x_0 < x_\nu$ für ein ν, dann gilt $g_y^{-1}(y) = x_0 < x_\nu = f_\nu^{-1}(y)$, also ist $g_y^{-1} < f_\nu^{-1}$, d. h. $g_y > f_\nu$ für das zugehörige ν.

Ist $x_0 = x_\mu$ für ein μ, dann ist $f_\mu(x_0) = g_y(x_0) = y$, also folgt aus der Eigenschaft (β) für das betreffende μ: entweder ist $f_\mu = g_y$ oder ist x_0 $(= y)$ ein Fixpunkt für f_μ (und selbstverständlich auch für g_y).

Bezeichnen wir mit M die Menge aller μ, für die $x_0 = x_\mu$, $f_\mu > g_y$ gilt.

Ist $M = \emptyset$, dann ist $g_y \geqq f_\mu$ für alle μ. (1)

Ist $M \neq \emptyset$, dann haben f_μ und g_y den Punkt y $(= x_0)$ als Fixpunkt (für alle $\mu \in M$). (2)

I. Existiert ein f_ν, $f_\nu \geqq e$, dann ist es möglich — wenn wir die Existenz des Supremums der Menge $\{f_\nu\}$ untersuchen — sich nur auf die f_ν zu beschränken, für die $f_\nu \geqq e$ ist. Es sei also $f_\nu \geqq e$ für alle ν.

Ia. Ist $f_\nu = e$ für alle ν, dann gilt offenbar $\bigvee f_\nu = e$.

Ib. Existiert ein $f_\nu > e$, dann kann man voraussetzen, dass $f_\nu > e$ für alle ν. Wählen wir beliebig (aber fest) ein $y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$. Wir beweisen zuerst, dass $g_y \geqq f_\nu$ für alle ν gilt. Weil $f_\nu > e$ für alle ν, so gilt $x_0 \leqq x_\nu = f_\nu^{-1}(y) \leqq y$. Tritt der Fall (2) (d. h. $M \neq \emptyset$) ein, dann ist $y = x_0$, also ist der Punkt y $(= x_\nu = x_0)$ ein Fixpunkt für alle ν. Aber das widerspricht der Wahl des Punktes y. Also tritt nur der Fall (1) ein (d. h. $M = \emptyset$), also gilt $g_y \geqq f_\nu$ für alle ν.

Wir zeigen, dass $g_y = \bigvee f_\nu$ ist. Es sei $f \geqq f_\nu$ für alle ν. Dann ist $f^{-1} \leqq f_\nu^{-1}$, also gilt $f^{-1}(y) \leqq f_\nu^{-1}(y) = x_\nu$; daher ist $f^{-1}(y) \leqq \bigwedge x_\nu = x_0$, d. h. $f(x_0) \geqq y$.

Ist $f(x_0) > y = g_y(x_0)$, dann ist $f > g_y$.

Ist $f(x_0) = y = g_y(x_0)$, dann ist nach (β) entweder $f = g_y$ oder f und g_y haben in x_0 einen Fixpunkt (und selbstverständlich ist $x_0 = y$). In dem zweiten Fall gilt $x_0 \leqq x_\nu = f_\nu^{-1}(y) \leqq y = x_0$ für alle ν, also ist $f_\nu(y) = y$, d. h. alle f_ν besitzen in y einen Fixpunkt. Aber das widerspricht der Wahl des Punktes y. Also ist immer $f \geqq g_y$. Daher gilt $g_y = \bigvee f_\nu$.

II. Es sei $f_\nu < e$ für alle ν. Dann ist $x_\nu = f_\nu^{-1}(y) \geqq y$, also gilt $x_0 = \bigwedge x_\nu \geqq y$.

Wählen wir einen echten Zyklus von jedem Elemente f_ν und bezeichnen mit Π den Durchschnitt dieser Zyklen.

Ist $\Pi = \emptyset$ bei beliebiger Wahl der Zyklen, dann gilt $e = \bigvee f_\nu$. Existiert nämlich ein solches $f < e$, dass $f_\nu \leqq f$ für alle ν ist, dann wählen wir den Punkt $x \in A$ (A = ein echter Zyklus des Automorphismus f). Es gilt $f(x) < x$ und daher $f_\nu(x) \leqq f(x) < x$; also ist x der gemeinsame Punkt der echten Zyklen aller f_ν und das ist unmöglich. Daher gilt $e = \bigvee f_\nu$.

Ist bei einer Wahl der Zyklen $\Pi \neq \emptyset$, dann gilt für ein beliebiges $y \in \Pi$, dass kein f_ν in y den Fixpunkt hat. Für dieses y kann der Fall (2) nicht eintreten, also tritt der Fall (1) ein und daher ist $g_y \geqq f_\nu$ für alle ν.

Wir beweisen, dass $\bigvee f_\nu$ existiert.

IIa. Wenn ein $f \in \Gamma$, $e > f \geqq f_\nu$ für alle ν, nicht existiert, dann gilt offenbar $e = \bigvee f_\nu$.

IIb. Setzen wir die Existenz eines solchen Elementes $f \in \Gamma$ voraus, dass $e > f \geqq f_\nu$ für alle ν ist. Wählen wir einen echten Zyklus A des Automorphismus f. Für ein beliebiges $x \in A$ und für alle ν gilt offenbar $f^k(x) \geqq f_\nu^k(x)$ für ein beliebiges ganzes positives k und $f^k(x) \leqq f_\nu^k(x)$ für ein beliebiges ganzes negatives k. Daraus folgt, dass jeder Automorphismus f_ν einen echten Zyklus A_ν hat, für den $A_\nu \supset A$. Daraus folgt, dass für ein Π die Relation $\Pi \supset A$ gilt. Wählen wir ein $y \in A$.

Für alle ν gilt $f \geqq f_\nu \Rightarrow f^{-1} \leqq f_\nu^{-1} \Rightarrow f^{-1}(y) \leqq f_\nu^{-1}(y) = x_\nu$; also ist $f^{-1}(y) \leqq \bigwedge x_\nu = x_0$. Daher ist $f(x_0) \geqq y$. Ist $f(x_0) > y = g_y(x_0)$, dann gilt $f > g_y$. Ist $f(x_0) = y = g_y(x_0)$, dann gilt nach (β) entweder $f = g_y$ oder f und g_y haben in x_0 $(= y)$ einen Fixpunkt. Der zweite Fall kann nicht eintreten, weil f keinen Punkt seines Zyklus A und also auch nicht y für einen Fixpunkt hat. Also ist immer $f \geqq g_y$. So ist auch im Falle IIb bestätigt, dass $g_y = \bigvee f_\nu$ gilt.

Es ist bewiesen, dass Γ eine vollständige einfach geordnete Gruppe ist. Also ist Γ archimedisch und nach dem Hahnschen Satze (siehe [3]) isomorph mit einer Untergruppe der einfach geordneten additiven Gruppe reeller Zahlen. Nach dem Hilfssatze 2 ist Γ ähnlich zu $\mathfrak{M}$.

Hat $\mathfrak{M}$ (und also auch Γ) einen Sprung, dann ist nach dem Satze 5 $\mathfrak{M}$ (und also auch Γ) vom Typus $\omega^* \oplus \omega$. Wie man leicht beweist (siehe z. B. [4], Theorem 2.4), ist Γ isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller ganzen Zahlen.

Wenn $\mathfrak{M}$ (und also auch Γ) keinen Sprung besitzt, dann ist $\mathfrak{M}$, nach dem Hilfssatze 3, isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller reellen Zahlen.

Wenn wir die Bezeichnungen aus dem Beweise des Hilfssatzes 2 benützen, gilt für eine von oben beschränkte Untermenge $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ und für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M} : \bigvee_\nu [f_\nu(x)] = \bigvee_\nu [\varphi_x(f_\nu)] = \varphi_x(\bigvee f_\nu) = (\bigvee f_\nu)(x)$ (siehe auch den Hilfssatz 1). Aus dem Satze 4 folgt dann $\bigwedge_\nu [f_\nu^{-1}(x)] = (\bigwedge f_\nu^{-1})(x)$. Der Satz 7 ist bewiesen.

Wesentlich ist im Satze 7 die Forderung der Lückenlosigkeit des $\mathfrak{M}$. Ein Beispiel gibt die einfach geordnete Menge $\mathfrak{M}$ aller rationalen Zahlen. Die Gruppe Γ aller rationalen Translationen auf $\mathfrak{M}$ ist einfach geordnet und weil sie abelsch und transitiv ist (die Eigenschaft e)), so hat sie auch die Eigenschaft (β) (siehe die Anmerkung C). Aber $\mathfrak{M}$ ist nicht ähnlich zu der einfach geordneten Menge aller reellen Zahlen, wie aus dem Satze 7 folgen würde, wäre die Lückenlosigkeit von $\mathfrak{M}$ im Satze 7 nicht vorausgesetzt.

Satz 8. *Γ sei eine transitive Gruppe mit einer der Eigenschaften* a) *bis* d). *$\mathfrak{M}$ enthälte mindestens zwei Punkte. Besitzt $\mathfrak{M}$ einen Sprung, dann ist Γ isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller ganzen Zahlen. Besitzt $\mathfrak{M}$ keinen Sprung und keine Lücke, dann ist Γ isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller reellen Zahlen. In beiden Fällen ist Γ ähnlich mit der einfach geordneten Menge $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Nach dem Hilfssatze 2 ist Γ ähnlich mit $\mathfrak{M}$, also auch einfach geordnet. Hat $\mathfrak{M}$ keinen Sprung und keine Lücke, dann ist die Behauptung eine Folgerung des Satzes 7, denn die Gruppe mit einer der Eigenschaften a) bis d) hat die Eigenschaft (β) (s. Anmerkung C).

$\mathfrak{M}$ habe nun einen Sprung. Nach dem Satze 3 ist Γ archimedisch, also ist $\mathfrak{M}$ (und also auch Γ) nach dem Satze 5 vom Typus $\omega^* \oplus \omega$, so dass Γ isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller ganzen Zahlen ist (s. z. B. [4], Theorem 2.4). Dadurch ist der Satz 8 bewiesen.

Es sei bemerkt, dass im Satze 8 der Fall, dass $\mathfrak{M}$ eine Lücke hat, nicht untersucht ist. Die Hypothese, dass in diesem Fall Γ isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller rationalen Zahlen ist, ist falsch, wie das folgende Beispiel der Gruppe Γ bezeugt, die die verlangten Eigenschaften und die Mächtigkeit des Kontinuums hat.

Es sei M die um ein Element verkleinerte Hammelsche Base in der additiven Gruppe aller reellen Zahlen. Dann hat die von der Menge M erzeugte Gruppe $\mathfrak{M}$ die Mächtigkeit des Kontinuums.

Die Menge Γ aller von den Elementen der Menge $\mathfrak{M}$ erzeugten Translationen bildet offensichtlich eine transitive archimedisch geordnete Gruppe von Automorphismen auf der einfach geordneten Menge $\mathfrak{M}$. Die Menge $\mathfrak{M}$ hat eine Lücke: $\mathfrak{M}$ enthält nicht alle reellen Zahlen, also hat $\mathfrak{M}$ nach dem Hilfssatze 3 einen Sprung oder eine Lücke. Die erste Möglichkeit ist aber durch den Satz 5 ausgeschlossen. Durch dieses Beispiel ist die Hypothese widerlegt.

Korollar 1. *$\mathfrak{M}$ sei eine einfach geordnete, keine Lücke und keinen Sprung enthaltende Menge. Dann ist $\mathfrak{M}$ ähnlich mit der einfach geordneten Menge aller reellen Zahlen dann und nur dann, wenn auf $\mathfrak{M}$ eine transitive von* (e) *verschiedene Gruppe der monozyklischen Automorphismen existiert.*

Korollar 2. *Eine einfach geordnete Menge $\mathfrak{M}$, die keinen Sprung enthält, ist ähnlich mit der einfach geordneten Menge aller reellen Zahlen dann und nur dann, wenn auf $\mathfrak{M}$ eine vollständige transitive von* (e) *verschiedene l-Gruppe der Automorphismen existiert.*

Beweis der Notwendigkeit. Die einfach geordnete Gruppe aller reellen Translationen auf $\mathfrak{M}$ hat die verlangten Eigenschaften.

Die Bedingung ist hinreichend. Die vollständige l-Gruppe ist abelsch und archimedisch, so dass, nach dem Hilfssatze 2, Γ archimedisch geordnet ist. Der Rest der Behauptung folgt aus dem Satze 8.

3

In diesem Absatze werden die intransitiven Gruppen von Automorphismen studiert.

Γ sei eine Gruppe von Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Bezeichnen wir mit T ein System der Transitivität der Gruppe Γ. Es ist klar, dass jedes $f \in \Gamma$ die Menge T auf T abbildet. Also induziert jedes $f \in \Gamma$ auf T den Automorphismus f_T, der folgendermassen definiert ist: $f_T(x) = f(x)$ für ein beliebiges $x \in T$. Wir nennen f_T die Komponente des Automorphismus f auf T.

Das System aller f_T ($f \in \Gamma$) ist eine auf T transitive Gruppe. Es gilt nämlich offenbar $f, g \in \Gamma \Rightarrow (fg)_T = f_T g_T$, $(f^{-1})_T = f_T^{-1}$. Die Transitivität folgt unmittelbar aus der Definition des Transitivitätssystems.

Wir bezeichnen mit Γ_T und nennen die transitive Komponente der Gruppe Γ (auf dem Systeme der Transitivität T) die Gruppe aller f_T. Es ist klar, dass Γ_T eine teilweise geordnete Gruppe ist und aus dem vorhergehenden folgt, dass die Abbildung ψ_T, die einem Elemente $f \in \Gamma$ das Element $f_T \in \Gamma_T$ zuordnet, eine homomorphe Abbildung der teilweise geordneten Gruppe Γ auf die teilweise geordnete Gruppe Γ_T ist. Der Homomorphismus bezieht sich auf die Gruppenoperation und auch auf die teilweise Ordnung.

Ist Γ eine l-Gruppe, dann ist — wie man leicht erkennt — die erwähnte Abbildung ψ_T ein Homomorphismus der l-Gruppe (d. h. der Gruppe und des Verbandes) Γ auf die l-Gruppe Γ_T.

Zusammenfassung der bisherigen Betrachtungen:

Hilfssatz 4. *Ist Γ eine teilweise geordnete Gruppe (l-Gruppe) von Automorphismen auf $\mathfrak{M}$, T ihr System der Transitivität, dann ist die Abbildung ψ_T, die einem beliebigen $f \in \Gamma$ das Element $\psi_T(f) = f_T \in \Gamma_T$ zuordnet, ein Homomorphismus der teilweise geordneten Gruppe (der l-Gruppe) Γ auf die teilweise geordnete Gruppe (die l-Gruppe)Γ_T.*

Hilfssatz 5. *Ist T ein System der Transitivität der Gruppe Γ, $f \in \Gamma$ und ist A ein Zyklus des Elementes f (auf $\mathfrak{M}$), für den $T \cap A \neq 0$, dann ist $T \cap A$ ein Zyklus des Elementes f_T (auf T).*

Die Behauptung ist klar.

Satz 9. 1. *Die teilweise geordnete Gruppe Γ ist ein subdirektes Produkt aller ihrer transitiven Komponenten (teilweise geordneter Gruppen) Γ_T.*

2. *Die l-Gruppe Γ ist ein subdirektes Produkt aller ihrer transitiven Komponenten (l-Gruppen) Γ_T.*

Anmerkung. *Eine teilweise geordnete Gruppe (l-Gruppe) Γ ist ein subdirektes Produkt eines Systems teilweise geordneter Gruppen (l-Gruppen) $\{\Gamma_T\}$, wenn Γ isomorph mit einer Untergruppe (l-Untergruppe) Γ' des vollständigen direkten ($\equiv$ kartesischen $\equiv$ kardinalen) Produktes $\tilde{\Pi}\, \Gamma_T$ des Systems $\{\Gamma_T\}$ ist und wenn die Menge solcher Komponenten der Elemente aus Γ', die zu Γ_T gehören, gleich Γ_T ist* ([1], VI, § 6). Der in dieser Definition erforderte Isomorphismus bezieht sich auf die Gruppenoperation und auch auf die teilweise Ordnung (auf die Verbandsoperationen).

Für die ungeordneten Gruppen Γ ist die Behauptung bekannt. Den leichten Beweis des Ordnungsisomorphismus (Verbandsisomorphismus) ergänzen wir.

Beweis. Jedem $f \in \Gamma$ ordnet man das System $\{f_T\}$ aller seiner Komponenten zu; die zugehörige Abbildung φ ist eineindeutig: für $f, g \in \Gamma$ sei $f_T = g_T$ für alle T, d. h. $\{f_T\} = \{g_T\}$. Wählen wir ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$; es gilt $x \in T$ für ein

System der Transitivität T. Dann ist $f(x) = f_T(x) = g_T(x) = g(x)$. Also gilt $f = g$. Mit Rücksicht darauf, dass die algebraischen Operationen und Relationen auf dem vollständigen direkten Produkte $\tilde{\Pi}\, \Gamma_T$ komponentenweise durchgeführt werden, ist die Abbildung φ ein Isomorphismus der teilweise geordneten Gruppe Γ in die l-Gruppe $\tilde{\Pi}\, \Gamma_T$. Ist Γ eine l-Gruppe, so ist $\varphi(\Gamma)$ offenbar eine l-Untergruppe in $\tilde{\Pi}\, \Gamma_T$ (denn $\{f_T\} \vee \{g_T\} = \{f_T \vee g_T\} = \{(f \vee g)_T\} = \varphi(f \vee g)$). Die Isotonie der Abbildung φ^{-1} ist auch klar. Im Falle 1. und 2. ist es klar, dass f_T die ganze Gruppe Γ_T durchläuft, wenn f die ganze Γ durchläuft.

Satz 10. *T sei ein Transitivitätssystem der Gruppe Γ der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Ist die Gruppe Δ aller Automorphismen auf T eine abelsche, dann ist $\Gamma_T = \Delta$.*

Beweis. Wenn T nur einen Punkt enthält, dann gilt $\Delta = (e_T) = \Gamma_T$. Nun enthälte T mindestens zwei Punkte. Es gilt $\Gamma_T \subset \Delta$. Weil Γ_T transitiv auf T ist, ist Δ transitiv auf T.

Es sei $t \in \Delta$, $x \in T(\Delta)$ $(= T)$. Weil Γ_T transitiv auf T ist, existiert ein $f_T \in \Gamma_T$ so, dass $t(x) = f_T(x)$ gilt; aus der Anmerkung B, die auf Δ angewendet wird, folgt $t = f_T$. Also ist $\Delta \subset \Gamma_T$. Zusammen mit der Relation $\Delta \supset \Gamma_T$ bekommt man $\Delta = \Gamma_T$.

Satz 11. *T sei ein Transitivitätssystem einer monozyklischen Gruppe Γ der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Die Menge*[4]*) aller monozyklischen Automorphismen auf T sei eine Gruppe. Dann ist $\Gamma_T = \Delta$.*

Beweis. Wenn T nur einen Punkt enthält, dann gilt $\Delta = (e_T) = \Gamma_T$.

Nun enthälte T mindestens zwei Punkte. Nach dem Hilfssatze 5 gilt $\Gamma_T \subset \Delta$. Also ist Δ transitiv auf T. Es sei $t \in \Delta$, $x \in T(\Delta)$ $(= T)$. Weil Γ_T transitiv auf T ist, existiert ein solches $f_T \in \Gamma_T$, dass $t(x) = f_T(x)$. Nach der Anmerkung B, die auf Δ angewendet wird[5]), gilt $t = f_T$, also $\Gamma_T \supset \Delta$. Daraus die Behauptung.

Satz 12. *Γ sei eine archimedisch geordnete Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Dann sind alle echten*[6]*) Transitivitätssysteme T der Gruppe Γ ähnlich mit der einfach geordneten Menge Γ und jede einfach geordnete Gruppe Γ_T (für ein echtes T) ist isomorph mit der einfach geordneten Gruppe Γ.*

Beweis. Γ_T ist offenbar einfach geordnet und nach dem Hilfssatze 2 ist Γ_T ähnlich mit T.

T sei ein echtes Transitivitätssystem der Gruppe Γ. Bezeichnen wir ψ_T die Abbildung, die dem Elemente $f \in \Gamma$ das Element $f_T \in \Gamma_T$ zuordnet. Die Abbildung ψ_T ist nach dem Hilfssatze 4 ein Homomorphismus der Gruppe und des Verbandes Γ auf Γ_T.

---

[4]) Siehe die Anmerkung hinter der Definition des monozyklischen Automorphismus.

[5]) Die monozyklische Gruppe Δ ist nach dem Satze 3 archimedisch geordnet, also abelsch.

[6]) Ein System der Transitivität heisst echt, wenn es mindestens zwei Punkte enthält.

Wir zeigen, dass sie eineindeutig ist. Es sei f, $g \in \Gamma$, $\psi_T(f) = \psi_T(g)$. Dann gilt für alle $x \in T$ $f(x) = g(x)$. Weil $T \subset \mathfrak{M}(\Gamma)$ offenbar gilt, ist nach der Anmerkung B $f = g$. Also sind die einfach geordneten Gruppen Γ_T und Γ isomorph. Die Ähnlichkeit der einfach geordneten Mengen T und Γ folgt aus der Ähnlichkeit der einfach geordneten Mengen T, Γ_T und Γ_T, Γ.

Analog zum Begriffe des subdirekten Produktes teilweise geordneter Gruppen führen wir den Begriff des subdirekten Produktes teilweise geordneter Mengen ein:

Eine teilweise geordnete Menge Γ ist ein subdirektes Produkt des Systems $\{T\}$ von teilweise geordneten Mengen, wenn sie der Untermenge Γ' des Kardinalproduktes des Systems $\{T\}$ ähnlich ist und wenn die Menge der Komponenten der Elemente aus Γ', die in T liegen, gleich T ist.

Satz 13. *Γ sei eine abelsche Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Dann ist die teilweise geordnete Menge Γ ein subdirektes Produkt aller Transitivitätssysteme der Gruppe Γ.*

Beweis. Gemäss dem Hilfssatze 2 ist die teilweise geordnete Menge Γ_T ähnlich mit T. Nach dem Satze 9 ist Γ ein subdirektes Produkt des Systems aller seiner transitiven Komponenten. Daraus die Behauptung.

T sei ein Transitivitätssystem der l-Gruppe Γ von Automorphismen.

Bezeichnen wir mit Γ^T die Menge aller solcher $f \in \Gamma$, dass $f(x) = x$ für $x \in \mathfrak{M} - T$ gilt.

Hilfssatz 6. *Γ^T ist ein l-Ideal in der l-Gruppe Γ.*

Beweis. Γ^T ist offenbar eine Untergruppe in Γ. Es sei $f \in \Gamma^T$, $g \in \Gamma$. Wählt man ein beliebiges $x \in \mathfrak{M} - T$, dann ist $g(x) \in \mathfrak{M} - T$, also gilt $g^{-1}fg(x) = g^{-1}g(x) = x$, daher ist $g^{-1}fg \in \Gamma^T$, d. h. Γ^T ist ein Normalteiler in Γ. Es sei nun $f \in \Gamma^T$, $g \in \Gamma$, $|f| \geqq |g|$.[7]) Für $x \in \mathfrak{M} - T$ gilt offensichtlich $|f|(x) = (f \vee f^{-1})(x) = f(x) \vee f^{-1}(x) = x$, so dass $x = |f|(x) \geqq |g|(x) = (g \vee g^{-1})(x) = g(x) \vee g^{-1}(x)$ ist. Ist $g(x) > x$, dann ist $g^{-1}(x) < x$, also gilt $g(x) \vee g^{-1}(x) > x$, was ein Widerspruch ist. Ist $g(x) < x$, dann ist $g^{-1}(x) > x$, also ist $g(x) \vee g^{-1}(x) > x$. Aus diesem Widerspruch folgt $g(x) = x$. Also gilt $g \in \Gamma^T$. Γ^T ist also ein l-Ideal in der l-Gruppe Γ.

Hilfssatz 7. *Wenn die Zerlegung auf die Transitivitätssysteme der l-Gruppe Γ genau zwei echte Systeme T, S enthält, und wenn Γ_T, Γ_S einfach geordnet sind, dann ist $J = \Gamma^T\Gamma^S$ ein solches l-Ideal in Γ, dass die l-Faktorgruppe Γ/J einfach geordnet ist.*

Beweis. Ist ψ_T die Abbildung aus dem Hilfssatze 4, bezeichnet man $\psi_T(\Gamma^T) = \Gamma_T^T$. Unter der Voraussetzung, dass Γ_T^T ein l-Ideal in Γ_T ist, wird bewiesen, dass $\Gamma/\Gamma^T\Gamma^S \cong \Gamma_T/\Gamma_T^T$ gilt. ψ_T bildet die l-Gruppe Γ homomorph auf die l-Gruppe Γ_T ab. Die natürliche Abbildung χ bildet die l-Gruppe Γ_T

[7]) $|f|$ bezeichnet den absoluten Wert des Elementes f und zwar $|f| = f \vee f^{-1}$.

auf die l-Gruppe Γ_T/Γ_T^T ab. Der Kern der Abbildung χ (die Menge aller Urbilder des Einheitselementes in der Abbildung χ) ist Γ_T^T, der Kern der Abbildung ψ_T ist Γ^S. Weil $\psi_T(\Gamma^T) = \Gamma_T^T$ gilt, ist $\Gamma^T\Gamma^S$ der Kern der Abbildung $\chi\psi_T$. Daher gilt $\Gamma/\Gamma^T\Gamma^S \cong \Gamma_T/\Gamma_T^T$. Weil Γ_T einfach geordnet ist, ist Γ_T/Γ_T^T und auch $\Gamma/\Gamma^T\Gamma^S$ einfach geordnet. Wir beweisen, dass Γ_T^T ein l-Ideal in Γ_T ist. Γ_T^T ist ein Normalteiler in Γ_T, weil ψ_T homomorph Γ auf Γ_T, Γ_T auf Γ_T^T abbildet und Γ^T ein Normalteiler in Γ ist. Man zeigt weiter, dass Γ_T^T konvex in Γ_T ist: Es sei $h_T \in \Gamma_T$, $f_T, g_T \in \Gamma_T^T$, $f_T \geqq h_T \geqq g_T$. Es existieren solche $f, g \in \Gamma^T$, $h \in \Gamma$, dass $\psi_T(f) = f_T$, $\psi_T(g) = g_T$, $\psi_T(h) = h_T$ ist. Ist $h_S \geqq e_S$ (e_S = das Einheitselement in Γ_S, $h_S = \psi_S(h)$), dann gilt für $x \in \mathfrak{M} - T$ (wir bemerken, dass $\mathfrak{M}(\Gamma) = T \cup S$) $(f \wedge h)(x) = f(x) \wedge h(x) = x \wedge h(x) = x$, also $f \wedge h \in \Gamma_T$, also gilt $\Gamma_T^T \ni (f \wedge h)_T = f_T \wedge h_T = h_T$. Ist $e_S \geqq h_S$, dann gilt für $x \in \mathfrak{M} - T$ $(g \vee h)(x) = g(x) \vee h(x) = x \vee h(x) = x$, also $g \vee h \in \Gamma^T$, also $\Gamma_T^T \ni (g \vee h)_T = g_T \vee h_T = h_T$. In beiden Fällen ist daher $h_T \in \Gamma_T^T$. So ist bewiesen, dass Γ_T^T ein l-Ideal in Γ_T ist und der Beweis des Hilfssatzes ist erbracht.

Satz 14. *Γ sei eine archimedische l-Gruppe, Γ habe genau zwei echte Transitivitätssysteme T, S. Dann ist Γ dann und nur dann einfach geordnet, wenn $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$.*

Beweis. Γ sei eine archimedische l-Gruppe; Γ habe genau zwei echte Transitivitätssysteme T, S.

1. Γ sei einfach geordnet. Nach der Anmerkung hinter dem Satze 3 besitzen alle Elemente $\neq e$ aus Γ dieselbe Zyklenzerlegung. Daraus folgt, dass jedes echte Transitivitätssystem der Gruppe Γ ein Teil eines echten Zyklus A ist. Ist $T, S \subset A$, dann ist Γ monozyklisch und offenbar $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$.

Ist $T \subset A$, $S \subset B$, wo A, B zwei verschiedene Zyklen sind, dann ist offenbar $T = A$, $S = B$. Dann gilt aber wieder $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$, weil kein $f \in \Gamma$, $f \neq e$, fix auf A ($= T$) bzw. auf B ($= S$) ist.

2. Umgekehrt sei $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$. Weil die l-Gruppe Γ archimedisch ist, ist sie abelsch, also sind Γ^T bzw. Γ^S abelsch; da sie transitiv (auf T bzw. auf S) sind, sind sie nach dem Korollar des Satzes 1 einfach geordnet. Gemäss Hilfssatz 7 ist Γ/J, wo $J = \Gamma^T\Gamma^S$, einfach geordnet. Da aber $J = \Gamma^T\Gamma^S = (e)$ gilt, ist Γ einfach geordnet.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *G. Birkhoff:* Lattice Theory, New York, rev. ed. 1948.

[2] *A. H. Clifford:* Note on Hahn's theorem on ordered abelian groups, Proc. Am. Math. Soc. *5* (1954), 860—863.

[3] *H. Hahn:* Über nichtarchimedische Grössensysteme, Sitzber. d. Ak. d. Wiss. Wien, *116* (1907), Abt. IIa, Heft 3.

[4] *F. Loonstra:* Discrete groups, Indagationes math. *13* (1951), 162—168.

[5] *L. Rieger:* O uspořádaných a cyklicky uspořádaných grupách I—III, Věstník Král. č. spol. nauk, tř. mat.-přír. I *6* (1946), 1—31; II *7* (1947), 1—33; III *8* (1948), 1—26.

Výtah

AUTOMORFISMY USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN

FRANTIŠEK ŠIK, Brno

(Došlo dne 9. června 1956)

1. $\mathfrak{M}$ všude znamená jednoduše uspořádanou množinu, Γ nějakou grupu automorfismů na $\mathfrak{M}$. Grupa Γ vzhledem k přirozenému uspořádání ($f \leqq g \Leftrightarrow f(x) \leqq g(x)$ pro všechna $x \in \mathfrak{M}$) tvoří částečně uspořádanou grupu.

Prvky f, $g \in \Gamma$ nazveme *stejně orientovanými*, jestliže pro libovolné $x \in \mathfrak{M}$ platí: $f(x) > x \Rightarrow g(x) \geqq x$; $g(x) > x \Rightarrow f(x) \geqq x$.

V práci jsou dokázány tyto hlavní věty:

Věta 1. *Transitivní grupa Γ automorfismů na $\mathfrak{M}$ je jednoduše uspořádána, když a jen když konjugované prvky jsou stejně orientovány.*

Je-li $x \in \mathfrak{M}$, $f \in \Gamma$, pak sjednocení (přes všechna přirozená n) intervalů s koncovými body $f^n(x)$, $f^{-n}(x)$ se nazývá *cyklus* automorfismu f. Obsahuje-li cyklus aspoň dva prvky z $\mathfrak{M}$, nazývá se *vlastní*. Grupa Γ je *monocyklická*, jestliže každý prvek $f \in \Gamma$ má nejvýš jeden vlastní cyklus. Pod $\mathfrak{M}(\Gamma)$ rozumíme sjednocení všech vlastních cyklů všech $f \in \Gamma$. Má-li automorfismus f vlastní cyklus A, pak automorfismus g, definovaný $x \in A \Rightarrow g(x) = f(x)$, $x \bar{\in} A \Rightarrow g(x) = x$, se nazývá *fáze* automorfismu f. Grupa Γ automorfismů má vlastnost (α), jestliže s každým prvkem $f \in \Gamma$, $f \neq e$, obsahuje nenulovou mocninu aspoň jedné jeho fáze. Grupa Γ je *divergentní*, existuje-li k libovolným $x, y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, $x < y$, takové $f \in \Gamma$, že $f(x) \geqq y$.

Věta 3. *Na grupě Γ jsou ekvivalentní následující vlastnosti:* a) *monocykličnost,* b) *archimedovské uspořádání a divergence,* c) *$\mathfrak{M}(\Gamma)$ je cyklem každého automorfismu $\neq e$ z Γ,* d) *jednoduché uspořádání a vlastnost* (α).

2. Množina $\mathfrak{M}$ je *shora* (*zdola*) *slabě úplná* vzhledem ke Γ, když ke každé shora (zdola) omezené množině automorfismů $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ existuje v $\mathfrak{M}$ prvek $\bigvee[f_\nu(x)]$ ($\bigwedge[f_\nu(x)]$) pro libovolné $x \in \mathfrak{M}$.

$\mathfrak{M}$ je *slabě úplná* vzhledem ke Γ, je-li shora i zdola slabě úplná vzhledem ke Γ.

Věta 4. *Je-li některá z následujících podmínek* 1, 2, 3 *splněna pro libovolnou shora omezenou část $\{f_\nu\}$ grupy Γ automorfismů na $\mathfrak{M}$, pak jsou splněny i ostatní, Γ je úplná l-grupa a pro zobrazení s a t níže definovaná platí* $s = \bigvee f_\nu$, $t = \bigwedge f_\nu^{-1}$.

1. $\mathfrak{M}$ *je shora slabě úplná vzhledem ke* Γ *a zobrazení* $s(x) = \bigvee_\nu [f_\nu(x)]$ *je automorfismus na* $\mathfrak{M}$;

2. $\mathfrak{M}$ *je zdola slabě úplná vzhledem ke* Γ *a zobrazení* $t(x) = \bigwedge_\nu [f_\nu^{-1}(x)]$ *je automorfismus na* $\mathfrak{M}$;

3. $\mathfrak{M}$ *je slabě úplná vzhledem ke* Γ *a pro libovolné* $x \in \mathfrak{M}$ *platí*

$$\bigvee_\nu \{f_\nu(\bigwedge_\mu [f_\mu^{-1}(x)])\} \geqq \bigwedge_\nu \{f_\nu^{-1}(\bigvee_\mu [f_\mu(x)])\}.$$

Věta 8. *Ať* Γ *je transitivní grupa automorfismů s některou z vlastností* a) *až* d) *z věty* 3 (*vlastnost* b) *bez divergence*). *Ať* $\mathfrak{M}$ *obsahuje aspoň dva prvky. Pak* Γ *je isomorfní s jednoduše uspořádanou aditivní grupou všech celých čísel resp. všech reálných čísel podle toho, má-li* $\mathfrak{M}$ *skok resp. nemá-li skok ani mezeru. V obou případech je* Γ (*co do uspořádání*) *podobná s jednoduše uspořádanou množinou* $\mathfrak{M}$.

Důsledek 2. *Jednoduše uspořádaná množina* $\mathfrak{M}$ *bez skoků je podobná s jednoduše uspořádanou množinou všech reálných čísel, když a jen když na* $\mathfrak{M}$ *existuje úplná transitivní l-grupa automorfismů, různá od* (e).

Věta 5. *Jednoduše uspořádaná množina* $\mathfrak{M}$ *se skokem je typu* $\omega^* \oplus \omega$, *když a jen když na* $\mathfrak{M}$ *existuje archimedovsky uspořádaná transitivní grupa automorfismů.*

3. Je-li T systém transitivity grupy Γ, pak pod Γ_T rozumíme grupu všech automorfismů na T indukovaných na T automorfismy grupy Γ a pod Γ^T grupu všech automorfismů z Γ, jež jsou fixní vně T.

Věta 10. *Ať* T *je systém transitivity grupy* Γ *automorfismů na* $\mathfrak{M}$. *Ať grupa* Δ *všech automorfismů na* T *je abelovská; pak* $\Gamma_T = \Delta$.

Věta 12. *Ať* Γ *je archimedovsky uspořádaná grupa automorfismů na* $\mathfrak{M}$. *Pak všechny vlastní systémy transitivity* T *grupy* Γ *jsou podobné s jednoduše uspořádanou množinou* Γ *a každá jednoduše uspořádaná grupa* Γ_T (*pro* T *vlastní*) *je isomorfní s jednoduše uspořádanou grupou* Γ.

Věta 14. *Ať* Γ *je archimedovská l-grupa, ať* Γ *má právě dva vlastní systémy transitivity* T, S. *Pak* Γ *je jednoduše uspořádaná, když a jen když* $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$.

Резюме

АФТОМОРФИЗМЫ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

ФРАНТИШЕК ШИК, Брно

(Поступило в редакцию 9/VI 1956 г.)

1. $\mathfrak{M}$ означает просто упорядоченное множество, Γ — какую-нибудь группу афтоморфизмов на $\mathfrak{M}$. Естественное упорядочение ($f \leqq g \Leftrightarrow f(x) \leqq g(x)$ для всех $x \in \mathfrak{M}$) превращает группу Γ в частично упорядоченную группу. Два элемента $f, g \in \Gamma$ называются одинаково ориентированными, если для любого $x \in \mathfrak{M}$ $f(x) > x \Rightarrow g(x) \geqq x$; $g(x) > x \Rightarrow f(x) \geqq x$.

В работе доказаны следующие главные теоремы.

Теорема 1. *Транзитивная группа Γ афтоморфизмов на $\mathfrak{M}$ просто упорядочена тогда и только тогда, если сопряженные элементы одинаково ориентированы.*

Если $x \in \mathfrak{M}$, $f \in \Gamma$, то соединение (для всех натуральных n) интервалов, ограниченных точками $f^n(x)$, $f^{-n}(x)$, называется *циклом* афтоморфизма f. Если цикл содержит по крайней мере два элемента из $\mathfrak{M}$, то он называется *истинным циклом.* Группа Γ — *моноциклическая*, если каждый элемент $f \in \Gamma$ обладает самое больше одним истинным циклом. Под $\mathfrak{M}(\Gamma)$ подразумевается соединение всех инстинных циклов всех $f \in \Gamma$. Если афтоморфизм f обладает истинным циклом A, то афтоморфизм g называется *фазой* афтоморфизма f, если он обладает следующим свойством: $x \in A \Rightarrow g(x) = f(x)$; $x \,\bar{\in}\, A \Rightarrow g(x) = x$. Группа Γ афтоморфизмов обладает свойством (α), если с каждым элементом $f \in \Gamma$, $f \neq e$, содержит от нуля отличную степень по крайней мере одной его фазы. Группа Γ *дивергентна*, если к любым $x, y \in \mathfrak{M}$, $x < y$, существует такое $f \in \Gamma$, что $f(x) \geqq y$.

Теорема 3. *На группе Γ эквивалентны следующие свойства* а) *моноцикличность*, б) *архимедово простое упорядочение и дивергенция*, в) $\mathfrak{M}(\Gamma)$ *является циклом каждого афтоморфизма $\neq e$ из Γ*, д) *простое упорядочение и свойство* (α).

2. Множество $\mathfrak{M}$ — *сверху* (*снизу*) *слабо полное* относительно Γ, если для каждого сверху (снизу) ограниченного множества афтоморфизмов $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ существует в $\mathfrak{M}$ элемент $\bigvee_\nu[f_\nu(x)]$ ($\bigwedge_\nu[f_\nu(x)]$) для любого $x \in \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ — слабо полное относительно Γ, если $\mathfrak{M}$ — сверху и снизу слабо полное относительно Γ.

Теорема 4. *Если некоторое из условий* 1, 2, 3 *выполнено для любого сверху ограниченного подмножества $\{f_\nu\}$ группы Γ афтоморфизмов на $\mathfrak{M}$, то выполнены тоже остальные, Γ — полная l-группа, и для определенных в условиях* 1 *и* 2 *преобразований s и t* $s = \bigvee f_\nu$, $t = \bigwedge f_\nu^{-1}$.

1. $\mathfrak{M}$ — *сверху слабо полное относительно* Γ, *и преобразование* $s(x) = \bigvee_{\nu}[f_{\nu}(x)]$ *является афтоморфизмом на* $\mathfrak{M}$;

2. $\mathfrak{M}$ — *снизу слабо полное относительно* Γ, *и преобразование* $t(x) = \bigwedge_{\nu}[f_{\nu}^{-1}(x)]$ *является афтоморфизмом на* $\mathfrak{M}$;

3. $\mathfrak{M}$ — *слабо полное относительно* Γ, *и для любого* $x \in \mathfrak{M}$ *имеет место* $\bigvee_{\nu}\{f_{\nu}(\bigwedge_{\mu}[f_{\mu}^{-1}(x)])\} \geqq \bigwedge_{\nu}\{f_{\nu}^{-1}(\bigvee_{\mu}[f_{\mu}(x)])\}$.

Теорема 8. *Пусть* Γ — *транзитивная группа афтоморфизмов, обладающая некоторым из свойств* а)—д) *из теоремы* 3 (*свойство* б) *без дивергенции*). *Пусть* $\mathfrak{M}$ *содержит по крайней мере два элемента. Тогда* Γ *изоморфна просто упорядоченной аддитивной группе всех целых чисел, соотв. всех действительных чисел, смотря по тому, обладает ли* $\mathfrak{M}$ *скачком, соотв. не обладает ли* $\mathfrak{M}$ *ни скачком ни просветом. В обоих случаях* Γ *подобна просто упорядоченному множеству* $\mathfrak{M}$.

Следствие 2. *Просто упорядоченное множество* $\mathfrak{M}$ *без скачков подобно просто упорядоченному множеству всех действительных чисел тогда и только тогда, если существует на* $\mathfrak{M}$ *полная транзитивная* l*-группа афтоморфизмов, отличная от* (e).

Теорема 5. *Просто упорядоченное множество* $\mathfrak{M}$, *обладающее скачком, является множеством типа* $\omega^* \oplus \omega$ *тогда и только тогда, если существует на* $\mathfrak{M}$ *архимедова просто упорядоченная транзитивная группа афтоморфизмов.*

3. Если T — система транзитивности группы Γ, то под Γ_T подразумевается группа всех афтоморфизмов на T, индуцированных на T афтоморфизмами группы Γ, а под Γ^T — группа всех афтоморфизмов из Γ, для которых точки вне T неподвижны.

Теорема 10. *Пусть* T — *система транзитивности группы* Γ *афтоморфизмов на* $\mathfrak{M}$. *Пусть группа* Δ *всех афтоморфизмов на* T *абелева. Тогда* $\Gamma_T = \Delta$.

Теорема 12. *Пусть* Γ — *архимедова просто упорядоченная группа афтоморфизмов на* $\mathfrak{M}$. *Тогда каждая истинная система транзитивности* T *группы* Γ *подобна просто упорядоченному множеству* Γ, *и каждая просто упорядоченная группа* Γ_T (*для истинных* T) *изоморфна просто упорядоченной группе* Γ.

Теорема 14. *Пусть* Γ — *архимедова* l*-группа, пусть* Γ *обладает двумя истинными системами транзитивности* T, S. *Группа* Γ *просто упорядочена тогда и только тогда, если имеют место равенства* $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA K THEORII RIEMANNOVA INTEGRÁLU

KAREL DRBOHLAV, Praha

DT:517.65

(Došlo dne 12. června 1956)

V článku je dokázán vzorec $\int\limits_{\Phi(\alpha)}^{\overline{\Phi(\beta)}} F(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F[\Phi(t)]\,\Phi'(t)\,dt$ za předpokladu, že funkce Φ má v každém bodě intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ nezápornou derivaci a že existuje Riemannův integrál $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi'(x)\,dx$. Předpoklad existence tohoto integrálu nelze nahradit předpokladem omezenosti funkce Φ'.

Budiž f libovolná omezená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li D libovolné dělení tohoto intervalu určené dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, pak označme symbolem $S(f, D)$ příslušný horní součet a symbolem $s(f, D)$ příslušný dolní součet. Jak známo, je Riemannův horní integrál $\int\limits_{a}^{\overline{b}} f$ definován jako infimum množiny všech horních součtů funkce f. Podobně je definován Riemannův dolní integrál $\int\limits_{\underline{a}}^{b} f$ a platí $\int\limits_{\underline{a}}^{b} (-f) = -\int\limits_{a}^{\overline{b}} f$.

Věta 1. *Budiž f omezená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, φ nezáporná funkce v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ s Riemannovým integrálem $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi = b - a$. Definujme funkce Φ, g předpisem $\Phi(t) = a + \int\limits_{\alpha}^{t} \varphi$, $g(t) = f[\Phi(t)]\,\varphi(t)$. Potom platí*

$$\int\limits_{a}^{\overline{b}} f = \int\limits_{\alpha}^{\overline{\beta}} g\,. \tag{1}$$

Důkaz. Budiž D libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots \ldots < x_n = b\}$, a budiž M_i supremum funkce f v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Ze spojitosti funkce Φ a ze vztahů $\Phi(\alpha) = a$, $\Phi(\beta) = b$ vyplývá, že existují body $t_i \in \langle\alpha, \beta\rangle$ takové, že platí $\Phi(t_i) = x_i$, $t_0 = \alpha$, $t_n = \beta$. Pro $t \in \langle t_{i-1}, t_i\rangle$ jest $\Phi(t) \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a tedy $g(t) \leq M_i\varphi(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Odtud plyne $\int\limits_{\alpha}^{\overline{\beta}} g = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{\overline{t_i}} g \leq \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f, D)$ a tedy

$$\int\limits_{\alpha}^{\overline{\beta}} g \leq \int\limits_{a}^{\overline{b}} f\,. \tag{2}$$

Vezměme nyní libovolné dělení D_0 intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ a zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Označme písmenem M supremum funkce $|f|$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Z existence $\int_\alpha^\beta \varphi$ plyne, že je možno najít takové dělení D_1 intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, pro které $M[S(\varphi, D_1) - s(\varphi, D_1)] \leqq \varepsilon$. Budiž $D_2 = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ společné zjemnění obou dělení D_0, D_1 a označme symbolem μ_i (resp. ν_i) supremum (resp. infimum) funkce φ v intervalu $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$. Budiž ještě $x_i = \Phi(t_i)$, M_i supremum funkce f v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $\eta = \varepsilon(b - a)^{-1}$. Zřejmě existují čísla ξ_i taková, že $x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$, $f(\xi_i) \geqq M_i - \eta$; dále existují čísla τ_i taková, že $t_{i-1} \leqq \tau_i \leqq t_i$, $\Phi(\tau_i) = \xi_i$. Protože $x_i - x_{i-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi = \varrho_i(t_i - t_{i-1})$, kde $\nu_i \leqq \varrho_i \leqq \mu_i$, platí

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^n f[\Phi(\tau_i)]\, \varphi(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| = \\
&= \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[\varphi(\tau_i) - \varrho_i](t_i - t_{i-1})\right| \leqq \sum_{i=1}^n M(\mu_i - \nu_i)(t_i - t_{i-1}) = \\
&= M[S(\varphi, D_2) - s(\varphi, D_2)] \leqq M[S(\varphi, D_1) - s(\varphi, D_1)] \leqq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Odtud plyne $S(g, D_0) \geqq S(g, D_2) \geqq \sum_{i=1}^n f[\Phi(\tau_i)]\, \varphi(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \geqq$

$$\geqq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon \geqq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \eta(b - a) - \varepsilon \geqq \overline{\int_a^b} f - 2\varepsilon,$$

takže $\overline{\int_\alpha^\beta} g \geqq \overline{\int_a^b} f - 2\varepsilon$. Ježto ε bylo libovolné, platí

$$\overline{\int_\alpha^\beta} g \geqq \overline{\int_a^b} f. \tag{3}$$

Vzorec (1) plyne srovnáním (2) a (3).

Věta 2. *Budiž f omezená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, φ nekladná funkce v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ s Riemannovým integrálem $\int_\alpha^\beta \varphi = a - b$. Definujme funkce Φ, g předpisem $\Phi(t) = b + \int_\alpha^t \varphi$, $g(t) = f[\Phi(t)] \cdot |\varphi|$. Potom platí vztah* (1).

Důkaz. Definujme funkce ψ, Ψ předpisem $\psi = -\varphi$, $\Psi(t) = a + \int_\alpha^t \psi$. Platí $\Psi(t) + \Phi(t) = a + b$. Ze zřejmého vztahu $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(a + b - x)\,dx$ plyne podle věty 1 $\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_\alpha^\beta} f[a + b - \Psi]\, \psi = \overline{\int_\alpha^\beta} f[\Phi]|\varphi| = \overline{\int_\alpha^\beta} g$.

Poznámka 1. Klademe-li ve vztahu (1) funkci $-f$ místo f, dostaneme za předpokladů věty 1 nebo věty 2 rovnost

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_\alpha^\beta} g. \tag{4}$$

Jestliže tedy jeden z integrálů $\int_a^b f$, $\int_\alpha^\beta g$ existuje, existuje i druhý a oba jsou si rovny.

Poznámka 2. Má-li funkce Φ v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ nezápornou derivaci a existuje-li $\int_\alpha^\beta \Phi'$ jakožto Riemannův integrál, potom podle věty 1 platí

$$\overline{\int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)}} F(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_\alpha^\beta} F[\Phi(t)]\,\Phi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

pro libovolnou omezenou funkci F v intervalu $\langle \Phi(\alpha), \Phi(\beta) \rangle$. Analogický vzorec dostaneme z věty 2 pro případ $\Phi' \leqq 0$.

Poznámka 3. Ukážeme ještě, že předpoklad existence integrálu $\int_\alpha^\beta \Phi'$ v poznámce 2 nelze nahradit požadavkem omezenosti funkce Φ'. Jsou známy příklady funkcí f s omezenou derivací v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ takových, že neexistuje Riemannův integrál $\int_\alpha^\beta f'$. Na př. v [1], str. 143—144, cvičení 18, je taková funkce f sestrojena; při tom je $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle 0, 1 \rangle$, $|f'| < 2$. Platí tedy alespoň jeden ze vztahů a) $\overline{\int_0^1} f' \neq f(1) - f(0)$, b) $\underline{\int_0^1} f' \neq f(1) - f(0)$. V případě a) položme $\Phi(x) = 2x + f(x)$, v případě b) $\Phi(x) = 2x - f(x)$. Jest vždy $0 < \Phi' < 4$, při čemž platí $\overline{\int_0^1} \Phi' \neq \Phi(1) - \Phi(0)$, jak je možno dokázati jednoduchým výpočtem. Položíme-li ještě $F = 1$, vidíme, že vzorec (5) v našem případě neplatí.

LITERATURA

[1] *Jan Mařík:* Základy theorie integrálu v Euklidových prostorech, Časopis pro pěstování matematiky, 77 (1952), 125—145.

Резюме

ЗАМЕТКА К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

КАРЕЛ ДРБОГЛАВ (Karel Drbohlav), Прага

(Поступило в редакцию 12/VI 1956 г.)

Пусть $\varphi(t) \geqq 0$ для всех $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Если существует интеграл Римана $\int_\alpha^\beta \varphi$, то

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_\alpha^\beta} f[a + \int_\alpha^t \varphi]\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_\alpha^\beta} f[a + \int_\alpha^t \varphi]\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

где a — любое число, $b = a + \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi$ и f — произвольная ограниченная в $\langle a, b \rangle$ функция (Теорема 1). Для случая $\varphi(t) \leqq 0$ нетрудно доказать видоизменение этой теоремы (Теорема 2). Далее, имеет место, напр., следующая формула:

$$\int\limits_{\Phi(\alpha)}^{\overline{\Phi(\beta)}} F(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha}^{\bar{\beta}} F[\Phi(t)]\,\Phi'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

где $\Phi'(t) \geqq 0$ для всех $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, F — произвольная ограниченная в $\langle \Phi(\alpha), \Phi(\beta) \rangle$ функция, при условии, что существует интеграл Римана $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi'$. Это условие нельзя заменить условием ограниченности функции Φ'.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ZUR THEORIE DES RIEMANNSCHEN INTEGRALS

KAREL DRBOHLAV, Praha

(Eingelangt am 12. Juni 1956)

Sei $\varphi(t) \geqq 0$ für alle $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Existiert das Riemannsche Integral $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi$, dann gilt

$$\int\limits_{a}^{\bar{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha}^{\bar{\beta}} f[a + \int\limits_{\alpha}^{t} \varphi]\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\underline{\alpha}}^{\beta} f[a + \int\limits_{\alpha}^{t} \varphi]\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

wo a eine beliebige Zahl bedeutet, $b = a + \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi$ gesetzt wird und f eine beliebige, in $\langle a, b \rangle$ beschränkte Funktion ist (Satz 1). Für den Fall $\varphi(t) \leqq 0$ lässt sich eine leichte Modifikation beweisen (Satz 2). Ferner gilt z. B. die Formel

$$\int\limits_{\Phi(\alpha)}^{\overline{\Phi(\beta)}} F(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha}^{\bar{\beta}} F[\Phi(t)]\,\Phi'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

wo $\Phi'(t) \geqq 0$ für alle $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ ist, F eine beliebige, in $\langle \Phi(\alpha), \Phi(\beta) \rangle$ beschränkte Funktion bedeutet, vorausgesetzt, dass das Riemannsche Integral $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi'$ existiert. Diese Bedingung kann nicht durch die Beschränktheit der Funktion Φ' ersetzt werden.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ROZKLAD KONEČNÉHO PRAVIDELNÉHO GRAFU NEPÁRNEHO STUPŇA NA DVA FAKTORY

ANTON KOTZIG. Bratislava

DT:513.19.001

(Došlo dne 8. října 1956)

V článku odvodzuje sa nutná a postačujúca podmienka pre existenciu rozkladu konečného pravidelného grafu $(2n + 1)$-ého stupňa na dva faktory a to na faktor n-tého a faktor $(n + 1)$-ého stupňa pri ľubovolnom prirodzenom čísle n.

1

Najstaršie problémy z teorie konečných grafov[1]), ktoré boli riešené, sú problémy tohoto druhu: aké podmienky musí splňovat graf G, aby v G existoval uzavretý ťah (nazývaný tiež eulerovskou čiarou) obsahujúci všetky hrany grafu G. Už L. EULER v r. 1736 dokázal, že nutnou podmienkou pre existenciu takéhoto ťahu je táto podmienka: G je súvislý graf, v ktorom každý uzol je uzlom párneho stupňa. Dôkaz, že uvedená podmienka je tiež postačujúca, vykonal HIERHOLZER r. 1873. Iný základný problém z teorie grafov rieši známa Listingova veta z r. 1847 o rozklade grafu na systém otvorených ťahov (jej dôkaz podal až LUCAS v r. 1882), ktorá hovorí, že v súvislom grafe G, ktorý má $2m$ $(m > 0)$ uzlov nepárneho stupňa, existuje vždy taký systém otvorených ťahov $\mathfrak{S} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, že každá hrana grafu G je hranou práve jedného ťahu $\in \mathfrak{S}$ a systém $\mathfrak{S}$ s touto vlastnosťou obsahuje najmenej m otvorených ťahov. Systému $\mathfrak{S}$ otvorených ťahov s uvedenou vlastnosťou, ktorý má práve m ťahov, budeme ďalej hovoriť *Listingov systém ťahov.*

Vzhľadom na to, že počet uzlov nepárneho stupňa v ľubovoľnom grafe je párny (dôkaz tohoto tvrdenia vykonal už EULER r. 1736), pripomenuté vety riešia úplne problém existencie takého rozkladu súvislého grafu na minimálny počet ťahov, že každá hrana grafu je hranou práve jednoho ťahu (odkazy na príslušnú literatúru najde čitateľ v [1]).

Na možnosti použitia týchto dávno známych poznatkov pri riešení niektorých problémov z teorie pravidelných grafov poukázal som v nedávno uverejnených článkoch (Poznámky k Listingovej vete o rozkladoch grafu na ťahy,

[1]) V celom článku pod grafom rozumie sa vždy konečný graf.

Časopis pro pěst. mat. *81* (1956), 396—404 a práca [2]). V tomto článku odvodím — vychádzajúc z pripomenutých poznatkov a naväzujúc na oba svoje články — nutnú a postačujúcu podmienku pre existenciu rozkladu pravidelného grafu $(2n + 1)$-ého stupňa na faktor n-tého a faktor $(n + 1)$-ého stupňa pri ľubovoľnom prirodzenom čísle n.

Chcem tak ukázať, že štúdium ťahov (otvorených i uzavrených, najmä eulerovských čiar) z rôznych hľadísk skrýva ešte veľa možností rozvoja teórie grafov i keď niektoré zo základných otázok v tomto smere sú už dávno zodpovedané.

Poznamenajme, že napr. o podmienkach pre existenciu rozkladu pravidelného grafu nepárného stupňa aspoň na dva faktory — až na malé výnimky — nie je takmer nič známe. Výnimku tu tvoria pravidelné grafy tretieho stupňa neobsahujúce mosty, o ktorých dokázal PETERSEN v r. 1891, že sa dajú vždy rozložiť na dva faktory a tak zvané párne pravidelné grafy (pod párnym grafom sa rozumie graf, ktorý neobsahuje žiadnu kružnicu s nepárnym počtom hrán), o ktorých je známe (pozri [1]), že sa dajú vždy rozložiť na n lineárnych faktorov. Pokiaľ ide o ostatné pravidelné grafy nepárneho stupňa, dali sa skoro všetky doteraz známe poznatky o možnostiach ich rozkladu na dva faktory zhrnúť do niekoľko málo poznámok (ako to urobil napr. König v [1], str. 195) týkajúcich sa najmä úlohy, ktorú hrajú mosty pri takýchto rozkladoch. Domnienka Petersenova z r. 1891, podľa ktorej pravidelný graf nepárneho stupňa nedá sa rozložiť na faktory (t. j. takýto graf je primitívny) len vtedy, keď obsahuje mosty, nebola doteraz ani vyvrátená, ani potvrdená, ačkoľvek už dlhú dobu púta pozornosť mnohých matematikov.

2

Dokážme platnosť tejto vety:

Pravidelný graf $(2n + 1)$-ého stupňa G (kde n je ľubovoľné prirodzené číslo) o $2m$ uzloch dá sa rozložiť na faktor n-tého a faktor $(n + 1)$-ého stupňa práve vtedy, keď v G existuje Listingov systém ťahov, ktorého každý ťah má nepárny počet hrán

Dôkaz. I. Nech v G existuje Listingov systém ťahov $\mathfrak{S} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, v ktorom každý ťah má nepárny počet hrán, a nech ťah $P_i \in \mathfrak{S}$ je popísaný touto postupnosťou prvkov $\in G$:

$$P_i = u_1(i), h_{1,2}(i), u_2(i), \ldots, h_{2r_i-1,2r_i}(i), u_{2r_i}(i)\,; \quad (i = 1, 2, \ldots, m)\,,$$

kde $u_x(i)$ sú uzly, $h_{x,x+1}(i)$ sú hrany a hrana $h_{x,x+1}(i)$ je incidentná s uzlami $u_x(i) \neq u_{x+1}(i)$ $(x = 1, 2, \ldots, 2r_i - 1)$.

V grafe $\overline{G}$, ktorý pozostáva z prvkov a len prvkov istého otvoreného ťahu grafu G, sú koncové uzly ťahu uzlami nepárneho stupňa v $\overline{G}$ a ostatné uzly $\in \overline{G}$ sú uzlami párneho stupňa v $\overline{G}$. Pretože ľubovoľný uzol $u \in G$ je uzlom nepárneho stupňa v G a ľubovoľná hrana $\epsilon\, G$ patrí práve do jedného ťahu Listingovho systému, je každý uzol $\epsilon\, G$ nepárny počet krát (tedy najmenej raz) koncovým uzlom ťahov $\epsilon\, \mathfrak{S}$. Ak označíme ϱ_t počet uzlov $\epsilon\, G$, ktoré sú koncové práve v t ťahoch, platí $\varrho_0 = 0$ a ďalej: $2m = \sum_{r=0}^{\infty} r \,.\, \varrho_r = (\sum_{r=0}^{\infty} \varrho_r) + \varrho_2 + 2\varrho_3 + + 3\varrho_4 + \ldots$; avšak $\sum_{r=0}^{\infty} \varrho_r = 2m$, preto $\varrho_r = 0$ pre $r > 1$. Výsledok $\varrho_1 = 2m$. Ľubovoľný uzol $u \,\epsilon\, G$ je koncovým uzlom práve jedného ťahu $\epsilon\, \mathfrak{S}$.

Medzi symbolmi $u_x(i)$, kde $i \,\epsilon\, \{1, 2, \ldots, m\}$, $x \,\epsilon\, \{2, 3, \ldots, 2r_i - 1\}$ musí byť práve n takých, ktoré označujú uzol u, lebo každý iný uzol otvoreného ťahu než koncový uzol súsedí s dvoma hranami v postupnosti P_i, s ktorými je incidentný, a pretože $u \,\epsilon\, G$ je uzlom $(2n + 1)$-ého stupňa v G, musí byť (okrem toho, že je raz koncovým uzlom) práve n-krát vnútorným uzlom ťahov $\epsilon\, \mathfrak{S}$.

Rozdeľme hrany grafu G do tried H_0, H_1 takto: do triedy H_1 zaraďme všetky hrany $h_{2x-1,2x}(i)$, kde $i = 1, 2, \ldots, m$; $x = 1, 2, \ldots, r_i$, a do triedy H_0 zaraďme všetky ostatné hrany $\epsilon\, G$.

Ľubovoľný uzol $u \,\epsilon\, G$ je incidentný práve s n hranami triedy H_0, lebo vnútorný uzol ťahu $\epsilon\, \mathfrak{S}$ je incidentný práve s jednou hranou ťahu patriacou do H_0 a hrana ťahu $\epsilon\, \mathfrak{S}$, s ktorou je incidentný koncový uzol ťahu, patrí do H_1 (vieme už, že ľubovoľný uzol $u \,\epsilon\, G$ je $n$krát vnútorným uzlom ťahov $\epsilon\, \mathfrak{S}$). Množina hrán H_0 je preto množinou hrán istého faktora n-tého stupňa G_0 grafu G. Množina H_1 ostatných hrán grafu G je množinou hrán faktora G_1, ktorý je zrejme faktorom $(n + 1)$-ého stupňa grafu G.

Ak teda existuje v G Listingov systém ťahov $\mathfrak{S}$, v ktorom každý ťah má nepárny počet hrán, potom G se dá rozložiť na dva faktory G_0, G_1, z ktorých G_0 je n-tého, G_1 je $(n + 1)$-ého stupňa.

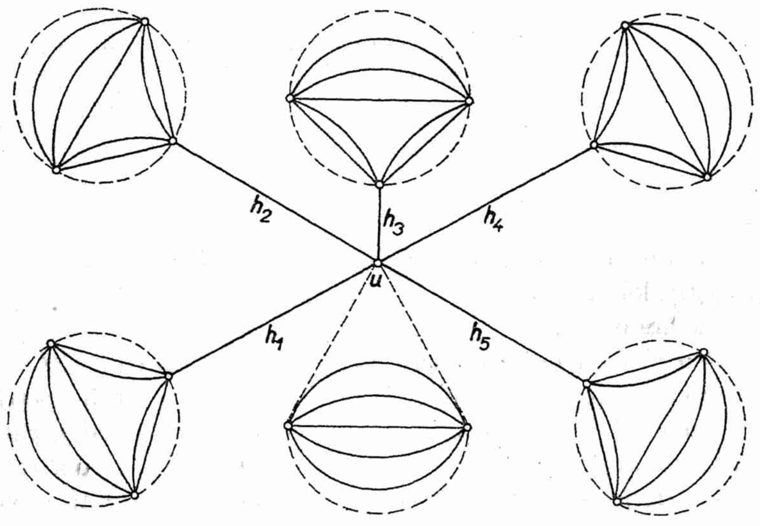
II. Nech existuje rozklad grafu G na faktory G_0, G_1, pričom G_0 je faktorom n-tého stupňa v G (a teda G_1 je faktorom $(n + 1)$-ého stupňa v G).

Označme znakom H_0 resp. H_1 množinu hrán faktora G_0 resp. G_1. Označme uzly grafu G znakmi $u_1, u_2, \ldots, u_{2m}$ a utvorme graf G' z grafu G tak, že spojíme novou hranou h'_i uzly u_i, u_{i+m} pre všetky $i \,\epsilon\, \{1, 2, \ldots, m\}$. Označenie uzlov $\epsilon\, G$ voľme pritom tak, aby graf G' bol súvislý. Toho vždy možno docieliť, lebo G má najviac m komponent a ku G pridávame m nových hrán; teda dvojice uzlov, ktoré spájame, možno voliť tak, aby G' bol súvislý graf.

Položme $H'_0 = H_0 + \{h'_1, h'_2, \ldots, h'_m\}$; $H'_1 = H_1$. Platí: graf G' má tie isté uzly ako graf G a ľubovoľný uzol $u \,\epsilon\, G'$ je incidentný práve s $(n + 1)$ hranami $\epsilon\, H'_0$ a je incidentný práve s $(n + 1)$ hranami $\epsilon\, H'_1$. Pretože množiny H'_0, H'_1 sú zrejme disjunktné, sú tieto množiny množinami hrán faktorov G'_0, G'_1, ktoré sú oba faktormi $(n + 1)$-ého stupňa v G'.

V práci [2] som dokázal, že v grafe G' existuje taká eulerovská čiara E, že ak obiehame po jej hranách, striedavo prechádzame cez hranu $\epsilon\, H'_0$ a cez hranu $\epsilon\, H'_1$.

Všetky hrany h'_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, ktoré sme pridali ku grafu G, aby vznikol graf G', patria do H'_0. Teda medzi dvoma po sebe idúcimi prechodmi cez hrany $\epsilon \{h'_1, h'_2, \ldots, h'_m\}$ pri obiehaní po eulerovskej čiare E prejdeme nepárny počet hrán $\epsilon\, G$. Ak preto zrušíme v E všetky hrany $\epsilon \{h'_1, h'_2, \ldots, h'_m\}$, rozpadne sa eulerovská čiara E na m otvorených ťahov, z ktorých každý: 1. obsahuje len



Obr. 1.

prvky $\epsilon\, G$; 2. má nepárny počet hrán (že sú to otvorené ťahy je zrejmé z toho, že každý uzol $\epsilon\, G$ je incidentný práve s jednou hranou $\epsilon \{h'_1, h'_2, \ldots, h'_m\}$). Pretože ľubovoľná hrana $\epsilon\, G$ vyskytuje sa práve v jednom z týchto ťahov, uvedeným spôsobom konštruovaný systém otvorených ťahov je Listingovým systémom ťahov, v ktorom každý ťah má nepárny počet hrán.

Ak teda v G existuje rozklad na faktor n-tého a faktor $(n + 1)$-ého stupňa, potom existuje v G Listingov systém ťahov, v ktorom každý ťah má nepárny počet hrán.

Rozklad grafu G na faktor n-tého a faktor $(n + 1)$-ého stupňa existuje práve vtedy, keď v G existuje Listingov systém ťahov, v ktorom každý ťah má nepárny počet hrán. Dôkaz vety je vykonaný.

Poznámka. Ak v pravidelnom grafe $(2n + 1)$-ého stupňa G neexistuje taký Listingov systém ťahov, v ktorom každý ťah má nepárny počet hrán, neznamená to ešte, že G je primitívny graf. Graf G znázornený na obrázku 1 je pravidelný graf siedmeho stupňa, ktorý se dá rozložiť na faktor piateho a faktor druhého stupňa (hrany faktora piateho stupňa sú znázornené plnými čiarami, hrany kvadratického faktora čiarami prerušovanými, v. obr. 1); teda G nie je primitívny graf. Avšak G nedá sa rozložiť na faktor tretieho a faktor štvrtého stupňa (z toho podľa našej vety vyplýva, že neexistuje v G taký Listingov systém ťahov, v ktorom každý ťah má neparný počet hrán), lebo G obsahuje uzol u, ktorý je incidentný s piatimi mostami h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, a je známe, že faktor nepárneho stupňa ľubovoľného pravidelného grafu obsahuje všetky mosty grafu (pozri [1] str. 195). Podobný graf pre $n > 3$ si čitateľ snadno zostrojí sám.

LITERATÚRA

[1] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[2] *A. Kotzig:* Eulerovské čiary a rozklady pravidelného grafu párneho stupňa a na dva faktory rovnakého stupňa, Mat. fyz. časopis 1956, č. 3.

Резюме

РАЗЛОЖЕНИЕ КОНЕЧНОГО ПРАВИЛЬНОГО ГРАФА НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ НА ДВА МНОЖИТЕЛЯ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава

(Поступило в редакцию 3/X 1956 г.)

В работе выводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы существовало разложение конечного правильного графа $(2n + 1)$-ой степени на два множителя (n-той и $(n + 1)$-ой степени). Доказана следующая теорема:

Пусть G — конечный правильный граф $(2n + 1)$-ой степени (где n — произвольное натуральное число), имеющий $2m$ вершин. Граф G разлагается на два множителя (n-той и $(n + 1)$-ой степени) тогда и только тогда, если в G существует система $\mathfrak{S}$, состоящая из открытых ветвей $Z_1, Z_2, \ldots, \ldots, Z_m$, причем

1. *Каждое из ребер графа G принадлежит точно одной ветви из $\mathfrak{S}$,*
2. *Каждая ветвь имеет нечетное число ребер.*

Zusammenfassung

DIE ZERLEGUNG EINES ENDLICHEN REGULÄREN GRAPHEN UNGERADEN GRADES IN ZWEI FAKTOREN

ANTON KOTZIG, Bratislava

(Eingelangt 8. X. 1956)

In der Arbeit wird die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Zerlegung eines endlichen regulären Graphen $(2n + 1)$-en Grades

in zwei Faktoren (n-ten und $(n + 1)$-en Grades) abgeleitet. Folgender Satz wird bewiesen:

Es sei G ein beliebiger endlicher regulärer Graph $(2n + 1)$-en Grades (n ist eine beliebige ganze positive Zahl), welcher $2m$ Knotenpunkte enthält. Der Graph G zerfällt in zwei Faktoren (n-ten und $(n + 1)$-en Grades) dann und nur dann, wenn in G ein System $\mathfrak{S}$ von offenen Zügen $\mathfrak{S} = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$ mit den Eigenschaften

1. *jede Kante des Graphen G gehört genau zu einem Zuge aus $\mathfrak{S}$,*

2. *jeder Zug besitzt eine ungerade Anzahl von Kanten, existiert.*

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ALGEBRAICKÉ KORESPONDENCE

JAN BÍLEK, Praha

(Došlo dne 26. října 1956) DT:513.6.001

Základní vlastnosti algebraické korespondence mezi dvěma algebraickými varietami definovanými nad tělesem charakteristiky 0 jsou běžně známy. (Viz WAERDEN, Einführung in die alg. Geometrie nebo HODGE - PEDOE, Methods of algebraic Geometry, díl II.) V této práci jest uvažována algebraická korespondence mezi algebraickými varietami nad tělesem libovolné charakteristiky. K studiu této korespondence se užívá methody, jež je rozšířením methody, která ve speciálním případě biracionální korespondence je popsána v knize A. WEIL, Foundations of algebraic geometry, 1946. Specialisací tělesa koeficientů do tělesa charakteristiky 0 dostaneme z našich výsledků výsledky uvedené v citovaných knihách.

V tomto pojednání budeme považovati za známé větu 26 a větu 27 z § 7 na str. 105 z knihy A. WEIL: Foundations of algebraic geometry, 1946 (v dalším značeno W). Tyto dvě věty zde uvedeme pod čísly 1, 2.

Věta 1. *Nechť U je podvarieta součinu variet $V \times W$ a nechť U' je její projekce na V. Nechť Z je podvarieta variety U s projekcí Z' na V. Potom Z je obsažena v $U \cap (Z' \times W)$; každá komponenta $\bar{Z}$ průniku $U \cap (Z' \times W)$ obsahující Z má Z' za projekci na V; když r, r', s' jsou dimense variet U, U', Z', potom každá komponenta $\bar{Z}$ má alespoň dimensi $r + s' - r'$.*

Věta 2. *Nechť U je podvarieta součinu variet $V \times W$ mající touž dimensi jako její projekce U' na V. Nechť k je těleso z definice pro U a nechť P' je obecný bod ϵ U' nad k. Potom U je konečná nad P'; body ϵ U s projekcí P' na V jsou všechny k sobě konjugované nad $k(P')$, a když P je jeden z těchto bodů, pak máme $[k(P) : k(P')] = [U : U']$.*

Poznámka. Definici U je konečná nad P' a definici symbolu $[U : U']$ viz W, 106.

Nechť $U \subset (V \times W)$, k těleso z definice pro U, U' projekce U na V a U, U' nemají touž dimensi. Nechť $P' = (x)$ je obecný bod U' nad k. Na U nemůže existovat konečný počet bodů P, které mají bod P' za projekci na V. Body P musí tedy vytvořiti alespoň jednu varietu $Z \subset U$, při čemž $\dim (Z) \neq 0$.

Věta 3. *Nechť $U \subset (V \times W)$, U' projekce U na V a nechť dimense variety U je r, dim. variety U' je r' a nechť $r \neq r'$ a k je společné těleso z definice pro U, V, W. Nechť P je obecný bod $\in U'$ nad k. Potom maximální podvariety $Z \subset U$, jež mají za projekci na V bod P, jsou konjugované obrazy nad $k(P)$.*

Pod maximální podvarietou Z rozumíme, že neexistuje varieta $X \subset U$ taková, aby $Z \subset X$ a aby projekce Z na V a X na V byly rovny bodu P.

D ů k a z. Nechť tedy $Z \subset U$ je taková, že má za projekci na V bod P. Pak je $Z \subset U \cap (P \times W)$. Podle věty 1 každá komponenta $\bar{Z}$ průniku $U \cap (P \times \times W)$, jež obsahuje Z, má také za projekci na V bod P. Poněvadž $\bar{Z} \subset U$, musí nutně $Z = \bar{Z}$. Z je tedy nějaká komponenta průniku $U \cap (P \times W)$. Podle theoremu 8, W, 89 existuje soustava (bunch) variet B, která je normálně algebraická nad společným tělesem z definice variet U a $P \times W$. Bodu P jako nuldimensionální varietě nad tělesem $k(P)$ přísluší těleso z definice $k(P)$ a za těleso z definice pro U i W můžeme vzíti $k(P)$, neboť $k \subset k(P)$. Součin variet $P \times W$ má těleso z definice podle theoremu 5, W, 79 také těleso $k(P)$. Je tedy zmíněná soustava variet normálně algebraická nad tělesem $k(P)$. Každá komponenta soustavy variet B je algebraická nad $k(P)$ a je proto Z varieta algebraická nad $k(P)$.

Je-li nyní M obecný bod $\in Z$ nad $\overline{k(P)}$, pak je $M = (P \times Q)$, kde Q je nějaký bod $\in W$. Potom každá obecná specialisace bodu M nad $k(P)$ je obecný bod nad $\overline{k(P)}$ jediného konjugovaného obrazu nad $k(P)$ (theorem 4, W, 76). Každá obecná specialisace bodu M nad $k(P)$ má tvar $M' = (P \times Q')$, kde Q' je bod $\in W$ a M' je obecný bod konjugovaného obrazu Z' nad $k(P)$ variety Z (th. 4, W, 76). Projekce variety Z' na V je bod P. Konjugovaný obraz Z' nad $k(P)$ variety Z je také komponenta soustavy B (th. 8. W, 89).

Musíme ještě dokázat, že soustava variet $B = U \cap (P \times W)$ obsahuje jen tyto komponenty a žádné jiné. Nechť tedy B obsahuje komponentu Z_1, která je různá od všech konjugovaných obrazů nad $k(P)$ k varietě Z. Obecný bod $\in Z_1$ nad $\overline{k(P)}$ je tvaru $P \times Q_1$, kde bod $Q_1 \in W$. Označme d_1 dimensi variety Z_1 nad $\overline{k(P)}$. Potom podle věty 1 dostáváme $d_1 \geqq r - r'$. Dimense Z_1 nad $\overline{k(P)}$ je $\dim_{\overline{k(P)}} (P \times Q_1) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q_1) = \dim_{k(P)}(Q_1) = d_1$. Avšak

$$\dim_k(P, Q_1) = \dim_k(P) + \dim_{k(P)}(Q_1) = r' + d_1 .$$

Poněvadž bod $(P, Q_1) \in U$, plyne z toho, že $\dim_k(P, Q_1) \leqq r$. Proto $r \geqq r' + d_1$, a poněvadž dříve jsme dokázali, že $d_1 \geqq r - r'$, plyne z těchto dvou vztahů, že $r = r' + d_1$ a tudíž bod $(P \times Q_1)$ je obecný bod $\in U$ nad k. Stejným způsobem bychom dokázali, že bod $(P \times Q)$ je obecný bod $\in U$ nad k. Proto bod $(P \times Q)$ má za obecnou specialisaci nad k bod $(P \times Q_1)$ a tudíž bod $(P \times Q)$

má za obecnou specialisaci nad $k(P)$ bod $(P \times Q_1)$ (W, 29, věta 2). Potom podle th. 4, W, 76 plyne, že Z_1 splyne s některým konjugovaným obrazem variety Z, což je proti předpokladu. Tím je věta 3 dokázána.

Věta 4. *Všechny maximální variety Z ve větě 3, jež mají za projekci na V bod P, mají stejnou dimensi.*

Důkaz. To plyne z toho, že obecné body variet Z, Z' jsou obecné specialisace nad $k(P)$ a tudíž mají stejnou dimensi (th. 3. W. 28). Rovněž platí, že $\dim_{\overline{k(P)}}(Q) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q')$. $P \times Q$ je obecný bod $\in Z$ nad $\overline{k(P)}$, $\dim_{k(P)}(P \times Q) = \dim_{k(P)}(Q) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q)$. $P \times Q'$ je obecný bod $\in Z'$ nad $\overline{k(P)}$, $\dim_{k(P)} \cdot (P \times Q) = \dim_{k(P)}(P \times Q') = \dim_{k(P)}(Q') = \dim_{\overline{k(P)}}(Q')$. $\dim_{\overline{k(P)}}(Q) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q')$.

Věta 5. *Maximálních variet $Z \subset U$* (viz větu 4), *jež mají za projekci na V obecný bod P nad k z variety U', je konečný počet a je roven $[k_1 : k(P)]_s$.*

Důkaz. Ze všech těles z definice pro nějakou komponentu Z, která obsahují těleso $k(P)$, existuje jedno nejmenší — označíme je k_1 — a toto těleso k_1 je algebraické rozšíření tělesa $k(P)$ a počet různých konjugovaných obrazů variety Z nad $k(P)$ je právě roven $[k_1 : k(P)]_s$. (Věta 5, W, 76.) Symbol $[k_1 : k(P)]_s$ viz W, 9.

Poznámka. Konečný počet variet Z plyne také z definice soustavy variet (W, 84).

Definice 1. *Podvarietu $T \subset (V \times W)$ jmenujeme algebraickou korespondencí mezi varietami V a W, když projekce T na V je rovna V a projekce T na W je rovna W.*

Nechť k je společné těleso variet T, V, W. Nechť P je obecný bod variety V nad tělesem k. Potom podle věty 3, 4, 5 existuje na T $\alpha = [k_1 : k(P)]_s$ konjugovaných variet L_i $(i = 1, \ldots, \alpha)$ nad $k(P)$, které jsou stejné dimense nad $\overline{k(P)}$. Projekce těchto L_i variet na W označme L_i^W a tyto variety vezmeme za odpovídající variety bodu $P \in V$ na W. Podobně existuje na T $\beta = [k'_1 : k(Q)]_s$ konjugovaných variet M_j $(j = 1, \ldots, \beta)$ nad $k(Q)$, které jsou stejné dimense nad $\overline{k(Q)}$, a bod Q je obecný bod $\in W$ nad k. Projekce těchto M_j variet na V označme M_j^V a tyto variety vezmeme za odpovídající variety bodu $Q \in W$ na varietě V.

Věta 6. *Buď $T \subset (V \times W)$ algebraická korespondence mezi varietami V a W, k společné těleso z definice pro T, V, W. Nechť P je obecný bod $\in V$ na k a L_i^W jemu odpovídající variety na W. Nechť dále Q je obecný bod $\in W$ nad k a M_j^V jemu odpovídající variety na V. Potom všechny variety L_i^W (M_j^V) jsou algebraické nad $k(P)$ $(k(Q))$ a jsou konjugovanými obrazy nad $k(P)$ $(k(Q))$. Všechny variety L_i^W mají stejnou dimensi nad tělesem $\overline{k(P)}$ a podobně všechny variety M_j^V mají stejnou dimensi nad tělesem $\overline{k(Q)}$.*

Důkaz. Z věty 3 plyne, že všechny variety L_i jsou konjugované obrazy nad $k(P)$. Z theoremu 6, W, 81 plyne, že všechny L_i^W jsou algebraické nad tělesem $k(P)$. Je-li nyní $P \times Q_i$ obecný bod $\in L_i$ nad $\overline{k(P)}$, je Q_i obecný bod $\in L_i^W$ nad $\overline{k(P)}$. Je-li $P \times Q_{i_1}$, $i \neq i_1$, obecný bod $\in L_{i_1}$ nad $\overline{k(P)}$, je Q_{i_1} obecný bod $\in L_{i_1}^W$ nad $\overline{k(P)}$. Poněvadž $P \times Q_{i_1}$ je obecnou specialisací bodu $P \times Q_i$ nad $k(P)$, je také Q_{i_1} obecnou specialisací bodu Q_i nad $k(P)$ a mají tedy L_i^W a $L_{i_1}^W$ nad $\overline{k(P)}$ touž dimensi a podle th. 4 W., 76 je Q_i obecným bodem nad $\overline{k(P)}$ jediného konjugovaného obrazu variety L_i^W nad $k(P)$ a je tedy $L_{i_1}^W$ konjugovaný obraz variety L_i^W nad $k(P)$. Podobně provedeme důkaz pro variety M_j^V. Označíme-li nyní dimensi variety L_i^W nad $\overline{k(P)}$ d a dimensi variety M_j^V nad $\overline{k(Q)}$ δ, můžeme algebraickou korespondenci T nad k mezi V a W značit $T(\delta_\beta, d_\alpha)$.

Věta 7. *Nechť T je alg. korespondence mezi V a W a nechť k je těleso z definice pro T. Nechť $P \times Q$ je obecný bod $\in T$ nad k. Potom P je obecný bod $\in V$ nad k a Q obecný bod $\in W$ nad k.*

Důkaz. Nechť $P \times Q$ je obecný bod $\in T$ nad k, potom podle theoremu 6, W 81 P, Q jsou obecné body $\in V$ a $\in W$ nad k a tedy také nad každým jiným tělesem z definice.

Věta 8. *Nechť T^t je alg. korespondence mezi V^r a W^s a nechť k je těleso z definice pro T. Nechť P je obecný bod $\in V$ nad k. Nechť bod P je projekcí maximální variety $L \subset T$ na V a bod $P \times Q$ její obecný bod nad $\overline{k(P)}$. Potom bod $P \times Q$ je obecným bodem algebraické korespondence T nad k.*

Varieta $L \subset T$ je jeden z konjugovaných obrazů variet nad $k(P)$, které mají za svou projekci na V bod P. Projekce L^W variety L na W má bod Q za obecný nad $\overline{k(P)}$. Podle věty 1 dimense variety L nad $\overline{k(P)}$ je $d \geqq t - r$, neboť $k(P) \cdot (P \times Q) = k(P)\,(Q)$ a podobně $\overline{k(P)}\,(P \times Q) = \overline{k(P)}\,(Q)$. $\mathrm{Dim}_{k(P)}(Q) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q)$ podle věty 2, W, 3. Bod $P \times Q$ je však bod z variety T, proto jeho dimense nad k je $\leqq t$. Poněvadž $\dim_k(P \times Q) = \dim_{k(P)}(Q) + \dim_k(P) = d + r$, dostáváme $t \geqq d + r$. Máme $t \leqq d + r$ a $t \geqq d + r$, čili $t = d + r$. Obecný bod $P \times Q \in L$ nad $\overline{k(P)}$ má nad k dimensi t a tedy je obecným $\in T$ nad k. Projekce tohoto bodu je obecný bod $\in W$ nad k podle věty 7. Stejná úvaha pro obecný bod $R \in W$ nad k vede k rovnici $t = s + \delta$ a proto $r + d = s + \delta$. Poslední rovnice vyjadřuje tak zvaný princip sčítání konstant v algebraické korespondenci, který vyslovíme větou:

Když v t dimensionální alg. korespondenci T^t mezi varietami V^r a W^s o společném tělese z definice k obecnému bodu P nad $k \in W$ odpovídá na W α d-dimensionálních nad $k(P)$ konjugovaných variet a obráceně obecnému bodu Q nad $k \in W$ odpovídá na V β δ-dimensionálních nad $k(Q)$ konjugovaných variet, pak je $t = r + d = s + \delta$.

Z předchozího plyne, že v algebr. korespondenci T^t mezi V^r a W^s o společném tělese z definice k obecnému bodu P nad k z variety V odpovídá na W α

$(t - r)$-dimensionálních nad $k(P)$ konjugovaných variet a obecnému bodu Q nad $k \in W$ odpovídá β $(t - s)$-dimensionálních nad $k(Q)$ konjugovaných variet.

Věta 9. *Buď $T \subset (V \times W)$ alg. korespondence mezi varietami V a W, k společné těleso z definice pro T, V, W. Když obecnému bodu $\in V$ nad k odpovídají d-dimensionální variety L_i^W, tak každému bodu $\in V$ odpovídají nejméně d-dimensionální variety na W. Podobný výsledek platí pro body variety W.*

Důkaz. Nechť P' je nějaký bod $\in V$. Pak komponenty průniku $T \cap (P' = \times \times W)$, které mají za projekci na V bod P', mají podle věty 1 dimensi aspoň $t - r = d$. Podobně pro body variety W.

Věta 10. *Nechť V a W jsou dvě variety definované nad tělesem k; nechť P, Q jsou obecné body $\in V$ a $\in W$ nad k. Potom existuje alg. korespondence T, definovaná nad k mezi V a W taková, že bod $P \times Q$ je obecný bod nad $k \in T$, když a jen když $k(P, Q)$ je regulární rozšíření nad k.*

Důkaz. Když $k(P, Q)$ je regulární rozšíření nad k, pak bod $P \times Q$ má locus T nad k, a poněvadž $P \times Q \in V \times W$, je $T \subset V \times W$. $P \times Q$ je obecný bod $\in T$ nad k. Projekce T na V a W je zase V a W, tedy podle definice 1 je T algebraická korespondence nad k mezi V a W.

Obráceně, když $P \times Q$ je obecný bod nad k z alg. korespondence $T \subset V \times W$, pak T je locus bodu $P \times Q$ nad k a rozšíření $k(P, Q)$ je regulární nad k (W, 68).

Poznámka. Jestliže bod P je obecný bod $\in V$ nad k a Q je obecný bod $\in W$ nad k, které jsou nezávislé nad k, pak algebraická korespondence $T = V \times W$, v níž každému bodu $\overline{P} \in V$ odpovídá celá varieta W a každému bodu $\overline{Q} \in W$ odpovídá celá varieta V. Takovouto alg. korespondenci mezi varietami V a W nad k nazýváme triviální. Jestliže tedy mezi varietami V a W, které jsou definovány nad tělesem k, existuje netriviální alg. korespondence nad k, pak obecný bod $P \in V$ nad k a obecný bod $Q \in W$ nad k jsou takové, že $k(P, Q)$ je regulární rozšíření tělesa k a body P, Q jsou závislé nad k. (Definici nezávislých bodů viz W, 3.)

Definice 2. *Nechť $T^t \subset V^r \times W^s$ je alg. korespondence nad k mezi V^r a W^s. Pak bod $P \in V$, $(Q \in W)$ nazýváme regulární bod korespondence, když mu na varietě W, (V) odpovídají variety dimense $t - r$, $(t - s)$.*

Z definice 2 a z věty 8 plyne, že každý obecný bod nad $k \in V$ (nad $k \in W$) je regulární pro alg. korespondenci T.

Věta 11. *Nechť $T \subset V \times W$ je alg. korespondence nad k mezi V a W. Nechť P a P' jsou dva body $\in V$ takové, že P' je regulární bod $\in T$ a že P' je specialisací bodu P nad k. Potom P je také regulární bod $\in T$.*

Tato věta je bezprostředním důsledkem věty 12.

Věta 12. *Nechť $T \subset V \times W$ je alg. korespondence nad k mezi V a W. Nechť P a P' jsou dva body $\in V$ takové, že P' je konečnou specialisací bodu P nad tělesem*

k. Potom ke každé varietě odpovídající bodu P existuje aspoň jedna varieta odpovídající bodu P', která má větší nebo stejnou dimensi.

Důkaz. Označme $W(P)$ množinu všech bodů $\epsilon\ W$, které v korespondenci T odpovídají bodu $P \epsilon V$, a podobně $W(P')$ pro bod P'. $W(P)$ dostaneme, když soustavu variet $T \cap (P \times W)$ promítneme na varietu W a podobně $W(P')$ dostaneme, když promítneme na varietu W soustavu variet $T \cap (P' \times W)$. Soustava $T \cap (P \times W)$ je normálně algebraická nad $k(P)$ a soustava $T \cap$ $\cap (P' \times W)$ je normálně algebraická nad $k(P')$. Nechť C je libovolná komponenta soustavy $T \cap (P \times W)$, která má obecný bod (P, Q) nad $\overline{k(P)}$. Nechť nyní (P', Q') je konečná specialisace bodu (P, Q) nad k a taková, že bod Q' je nějakou isolovanou specialisací bodu Q nad specialisací $P \to P'$ nad k. Pak podle věty 13 (W, 65) $\dim_{k(P')}(Q') \geqq \dim_{k(P)}(Q)$. Projekce bodu (P', Q') na varietu V je rovna bodu P'; proto bod $(P', Q') \epsilon T \cap (P' \times W)$. Bod (P', Q') leží tedy aspoň na jedné komponentě soustavy variet $T \cap (P' \times W)$. Označme jednu takovou z nich C', takže $(P', Q') \epsilon C'$. Nechť obecný bod nad $\overline{k(P')}$ variety C' je $P' \times \overline{Q}$. Potom $\dim_{\overline{k(P')}}(P', \overline{Q}) \geqq \dim_{\overline{k(P')}}(P', Q')$. Z poslední relace plyne, $\dim_{k(P')}(P', \overline{Q}) \geqq \dim_{k(P')}(P', Q')$. Vzhledem k dříve dokázané relaci $\dim_{k(P')}(Q') \geqq \dim_{k(P)}(Q)$, dostáváme $\dim_{k(P')}(P'\overline{Q}) \geqq \dim_{k(P)}(Q)$. Označme $\overline{C}, \overline{C}'$ projekce variety C, C' na varietu W. Poněvadž $\dim_{\overline{k(P)}}(P, Q) =$ $= \dim_{\overline{k(P)}}(Q) = \dim_{\overline{k(P)}}\overline{C}$ a podobně $\dim_{\overline{k(P')}}(P', \overline{Q}) = \dim_{\overline{k(P')}}(\overline{Q}) = \dim_{k(P')}(\overline{Q}) =$ $= \dim_{\overline{k(P')}}\overline{C}'$, plyne odtud, že $\dim_{\overline{k(P')}}\overline{C}' \geqq \dim_{k(P)}\overline{C}$.

Nechť $T \subset V \times W$ je alg. korespondence nad k mezi V a W a nechť T a V mají touž dimensi nad k. Potom obecnému bodu P nad $k \epsilon V$ odpovídá α bodů na W, jež jsou algebraické nad $k(P)$. Obecnému bodu Q nad $k \epsilon W$ odpovídá β variet, jež jsou algebraické nad $k(Q)$. T je konečná nad P (W, 106), což plyne z věty 2.

Definice 3. *$T \subset V \times W$ jmenujeme algebraickou korespondencí (β, α)-značnou nad tělesem k mezi varietami V, W, když projekce T na V rovná se V a projekce T na W rovná se W a když T je konečná nad P a nad Q, kde P je obecný bod nad $k \epsilon V$ a Q je obecný bod nad $k \epsilon W$.*

Zavedeme-li ještě pojem „*projekce z T k V a z T k W je regulární*", dostáváme se tak k definici biracionální korespondence T na k mezi varietami V a W. (W, 190.) Vlastnosti biracionálních korespondencí nalezne čtenář ve W, 109 a násl.

Jako příklady na užití principu sčítání konstant dokážeme následující věty.

Věta 13. *Nechť V^r $(r > 0)$ je varieta definovaná nad tělesem k v prostoru S^n. Pak komponenty průniku obecné nadroviny $(u_1, \ldots, u_n)$ prostoru S^n a variety V^r jsou $(r - 1)$-dimensionální variety, algebraické nad $k(u_1, \ldots, u_n)$ a jsou konjugovanými obrazy nad tělesem $k(u_1, \ldots, u_n)$.*

Důkaz. Nechť (ξ) je obecný bod $\epsilon\ V$ nad tělesem $k(u_1, \ldots, u_{n-1})$. Uvažujme všechny nadroviny z prostoru S^n, které tímto bodem procházejí, což je vyjádřeno rovnicí $u_1\xi_1 + \ldots + u_n\xi_n + 1 = 0$. Poněvadž (ξ) je obecný bod ϵV nad $k(u_1, \ldots, u_{n-1})$, plyne z toho, že $k(\xi, u_1, \ldots, u_{n-1})$ je regulární rozšíření nad k. Ukážeme nyní, že existuje alg. korespondence s obecným bodem $(\xi, u_1, \ldots$ $\ldots, u_n)$ nad k mezi V a S^n, kde $u_n = -(1 + u_1\xi_1 + \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1}) : \xi_n$. Soustavu souřadnicovou jsme volili tak, že $\xi_n \neq 0$ a ξ_n je transcend. nad k. Musíme proto dokázat, že bod $(\xi, u_1, \ldots, u_n)$ má locus T nad k, t. j., že $k(\xi, u_1, \ldots$ $\ldots, u_n)$ je regulární rozšíření nad k a že projekce T na V je V a projekce T na S^n je S^n.

Dosadíme-li do $k(\xi, u_1, \ldots, u_n)$ za $u_n = -(1 + u_1\xi_1 + \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1}) : \xi_n$, dostaneme, že $k(\xi, u_1, \ldots, u_{n-1}) = k(\xi, u_1, \ldots, u_n)$, a poněvadž $k(\xi, u_1, \ldots, u_{n-1})$ je regulární rozšíření, je takové také $k(\xi, u)$ a bod (ξ, u) má tedy locus nad k, který jsme označili T. Projekce T na V je zase zřejmě V. Projekce T na S^n je také S^n, neboť $u_1, \ldots, u_n$ je množina n nezávislých veličin nad k. Předpokládejme, že $u_1, \ldots, u_n$ jsou algebraicky závislé nad k, pak u_n je algebraické nad $k(u_1, \ldots, u_{n-1})$. Potom $f(u_n) = u_n^\alpha + a_1 u_n^{\alpha-1} + \ldots + a_\alpha = 0$, kde $f(x) \epsilon k[u_1, \ldots$ $\ldots, u_{n-1}] [x]$ je irreducibilní polynom. Dosadíme-li za $u_n = -(1 + u_1\xi_1 + \ldots$ $\ldots + u_{n-1}\xi_{n-1}) : \xi_n$, dostaneme

$$[-(1 + u_1\xi_1 + \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1}) : \xi_n]^\alpha + a_1[\ldots]^{\alpha-1} + \ldots = 0\,.$$

Po vynásobení ξ_n^α dostaneme

$$[-(1 + u_1\xi_1 + \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1})]^\alpha + a_1\xi_n[\ldots]^{\alpha-1} + \ldots = 0\,.$$

Poněvadž $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ jsou algebraicky nezávislé nad $k(\xi)$, musí koeficienty u všech monomů v $u_1, \ldots, u_{n-1}$ býti rovny nule. Tato vlastnost platí i pro koeficient u monomu nultého stupně, z čehož plyne $(-1)^\alpha + a_{10}(-1)^{\alpha-1}\xi_n + \ldots$ $\ldots + a_{\alpha 0}\xi_n^\alpha = 0$, kde $a_{i0} \epsilon k$. Poněvadž ξ_n je algebraicky nezávislé nad k, musí všechny koeficienty v poslední rovnici býti rovny nule, což vede ke sporu, neboť $(-1)^\alpha \neq 0$. Podle principu konstant platí $r + n - 1 = n + \delta$, odtud plyne $\delta = r - 1$. Tedy obecné nadrovině ϵS^n odpovídají $(r-1)$-dimensionální variety algebraické nad $k(u_1, \ldots, u_n)$ a jsou konjugovanými obrazy nad tímto tělesem.

Úplně stejně bychom dokázali větu 14.

Věta 14. *Nechť $V^r (r > 0)$ je varieta definovaná nad tělesem k v S^n. Pak komponenty průniku obecné nadplochy v prostoru S^n a variety V jsou $(r-1)$-dimensionální variety, které jsou algebraické nad $k(u)$ a jsou konjugovanými obrazy nad tělesem $k(u)$. [(u) je množina koeficientů nějaké obecné nadplochy.]*

Věta 15. *Nechť $V^r (r > 0)$ je varieta definovaná nad tělesem k v S^n a Π^{n-1} varieta nad týmž tělesem. Potom $V^r \cap \Pi^{n-1} = V^r$ nebo $V^r \cap \Pi^{n-1}$ je soustava variet, jejíž každá komponenta má dimensi $r - 1$ a všechny komponenty jsou algebraicky konjugované nad k.*

Důkaz plyne takřka bezprostředním užitím věty 14 a věty 9.

Poznámka. Věta 15 je bezprostředním důsledkem th. 7, W, 86.

Резюме

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ СООТВЕТСТВИЕ

ЯН БИЛЕК (Jan Bílek), Прага

(Поступило в редакцию 26/X 1956 г.)

Основные свойства алгебраического соответствия между двумя алгебраическими многообразиями, определенными над полем, имеющим характеристику 0, хорошо известны. (См. B. L. van der WAERDEN, Einführung in die algebraische Geometrie, HODGE-PEDOE, Methods of algebraic Geometry, том II.)

В настоящей работе рассматривается алгебраическое соответствие между двумя алгебраическими многообразиями над полем с произвольной характеристикой. В изучении этого соответствия используется метод, являющийся расширением метода, описанного для частного случая — бирационального соответствия — в книге A. WEIL, Foundations of algebraic geometry, 1946. Если же, в частности, поле коэффициентов заменим полем, имеющим характеристику 0, то из полученных нами результатов получатся результаты, приведенные в цитированных работах.

Summary

THE ALGEBRAIC CORRESPONDENCES

JAN BÍLEK, Praha

(Received November 26, 1956)

The fundamental properties of algebraic correspondences between two algebraic varieties defined over the field of zero characteristic are well known (see B. L. van der WAERDEN: Einführung in die algebraische Geometrie, HODGE-PEDOE, Methods of algebraic geometry, vol. II.).

The present paper considers the algebraic correspondence between algebraic varieties over a field of an arbitrary characteristic. To study this correspondence, an extended method is used, which is described in A. WEIL, Foundations of Algebraic Geometry, 1946, for the special case of the birational correspondence. On specialization of the coefficients field into the field of the zero characteristic, the present results are transformed to those shown in the above-cited books.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

SINGULÁRNÍ VSTUPNÍ PROUDY

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Došlo dne 27. října 1956)

DT: 381.5
381.741.001.2

Práce se zabývá podrobnějším studiem singulárních vstupních proudů (viz [6]), zejména některých jednodušších zvláštních případů. Jsou odvozeny výsledky analogické základním výsledkům platným pro regulární proudy (viz [5], kap. 1—5), je zaveden pojem singulárních aproximací regulárního proudu a ukázány některé jejich vlastnosti. Použití je ilustrováno jednoduchým příkladem z theorie hromadné obsluhy.

1. Úvod

Význam theorie vstupních proudů tkví s praktického hlediska především v její souvislosti s theorií hromadné obsluhy. Dobrý i když zdaleka ne úplný přehled o problematice tohoto oboru lze získat z monografie [5], kde je možno se též poučiti o užitečnosti a upotřebitelnosti těchto theorií. Monografie [5] tvoří spolu s prací [6] výchozí bod této práce; proto také budeme pokud možno zásadně užívati pojmů, termínů a označení zavedených v [5].

Typ vstupního proudu je jednou ze základních charakteristik systému hromadné obsluhy. Jeho studiu byla již věnována řada prací. S matematického hlediska lze na vstupní proudy nahlížeti především jako na stochastické procesy jistého, dosti speciálního druhu; toto hledisko bylo také přijato v [5]. Vstupní proud je pak charakterisován stochastickým procesem $x(t)$, $t \geqq 0$, udávajícím počet „zákazníků", kteří přišli během časového intervalu $(0, t\rangle$. Náhodné funkce $x(t)$ mají tyto vlastnosti: jsou (skoro jistě) neklesající, zprava spojité, nabývají jen celočíselných hodnot a platí $\mathbf{P}(x(0) = 0) = 1$. Při pevném t je tedy $x(t)$ náhodná proměnná se zákonem rozložení pravděpodobností

$$v_k(t) = \mathbf{P}(x(t) = k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,; \tag{1.1}$$

přitom pro každé $t \geqq 0$ platí $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) = 1$. Vzhledem k uvedeným vlastnostem procesu jsou funkce $v_k(t)$ zprava spojité a součty

$$V_k(t) = \sum_{j=0}^{k} v_j(t) \tag{1.2}$$

jsou neklesající a zprava spojité funkce argumentu t, kromě toho platí $V_0(0) = v_0(0) = 1$.

V některých souvislostech je výhodné uvažovati místo procesu $x(t)$ jeho přírůstky

$$\xi(t_1, t_2) = x(t_2) - x(t_1), \quad t_1 < t_2 ; \tag{1.3}$$

v obvyklé terminologii znamená $\xi(t_1, t_2)$ počet zákazníků, kteří přišli v intervalu $(t_1, t_2\rangle$, specielně tedy $\xi(0, t) = x(t)$. Zákon rozložení pravděpodobností náhodné proměnné $\xi(t_1, t_2)$ budiž při pevných t_1, t_2 dán výrazy

$$v_k(t_1, t_2) \doteq \mathbf{P}(x(t_2) - x(t_1) = k) , \; k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

Dále označíme

$$M(t) = \mathbf{E}x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kv_k(t) ; \tag{1.5}$$

zřejmě je $M(t)$ pro $t \geqq 0$ neklesající, zprava spojitá funkce argumentu t, platí rovněž

$$\mathbf{E}\xi(t_1, t_2) = M(t)_2 - M(t_1) . \tag{1.6}$$

Funkci $M(t)$ nazveme shodně s [6] *řídící funkcí* proudu; její derivace $\bar{\mu}(t) = M'(t)$, která existuje skoro všude (viz na př. [7], str. 193), bývá obvykle nazývána intensitou proudu. My však budeme užívati tohoto termínu v poněkud jiném smyslu.

Analogicky s [5] a [6] nazveme vstupní proud

a) *finitním*, jestliže pro všechna $t \geqq 0$ jest $M(t) < \infty$;

b) *regulárním*, je-li $M(t)$ spojitá pro $t \geqq 0$;

c) *singulárním*, jestliže $M(t)$ je konstantní až na spočetný počet bodů nespojitosti, v nichž má skok;

d) *stacionárním*, jestliže pravděpodobnosti (1.4) závisí vedle k jen na rozdílu $(t_2 - t_1)$, je-li tedy $x(t)$ proces se stacionárními přírůstky;

e) *nezávislým*, jestliže náhodné proměnné $\xi(t_1, t_2)$ a $\xi(t_3, t_4)$ jsou nezávislé, když intervaly $(t_1, t_2\rangle$ a $(t_3, t_4\rangle$ jsou disjunktní.

Jak ukázal Chinčin v [6], lze každý finitní nezávislý proud rozložiti na dva vzájemně nezávislé proudy, z nichž jeden je regulární a druhý singulární. Pro řídící funkci proudu odpovídá tomuto rozkladu známý rozklad na spojitou složku a funkci skoků (viz na př. [7], str. 194, věta 7).[1])

V dalších paragrafech se budeme zabývati převážně zevrubným studiem finitních singulárních proudů. Přitom budeme v **2—6** předpokládati, že body nespojitosti řídící funkce jsou celá nezáporná čísla; pro naše účely nebude toto omezení na závadu. Ježto $x(t)$ je v tomto případě nutně konstantní v inter-

[1]) Určité dosti obecné podmínky finitnosti proudu vyplývají m. j. ze zajímavých výsledků M. Fisze [4].

valech tvaru $\langle n, n+1)$ (přesněji řečeno: skoro jistě konstantní), stačí uvažovati jen posloupnost $x_n = x(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; obdobně pro $\xi_n = x_n - x_{n-1}$, $\xi_0 = x_0$ a také pro funkce v_k, V_k, atd. Vlastnosti d) a e) můžeme pak vyjádřiti jednodušeji jako

d') náhodné proměnné ξ_n mají stejné rozložení pravděpodobností;

e') libovolné dva součty $\sum_{j=k_1}^{k_2} \xi_j$ a $\sum_{j=k_3}^{k_4} \xi_j$ jsou stochasticky nezávislé, jestliže $k_2 < k_3$ nebo $k_4 < k_1$.

Pro regulární proudy byl v [5] zaveden ještě také pojem *ordinárnosti*, vyjádřené vztahem

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - v_0(t, t+h) - v_1(t, t+h)}{h} = 0 . \tag{1.7}$$

Analogicky nazveme *singulární* proud *ordinárním*, jestliže pro všechna $n \geqq 0$ platí $\mathbf{P}(\xi_n > 1) = 0$. Rovněž podobně jako v [5] nazveme singulární proud *jednoduchým*, jestliže je stacionární, nezávislý a ordinární.

V theorii regulárních proudů hrají důležitou úlohu veličiny zvané *parametr* a *intensita* proudu. Parametr $\lambda(t)$ proudu je definován jako

$$\lambda(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1 - v_0(t, t+h)}{h} \tag{1.8}$$

a intensita $\bar{\mu}(t)$ jako

$$\bar{\mu}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbf{E}\, [x(t+h) - x(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M(t) . \tag{1.9}$$

V případě singulárních proudů budeme nazývati parametrem proudu přímo pravděpodobnost

$$\lambda_n = \mathbf{P}(\xi_n \geqq 1) \tag{1.10}$$

a intensitou střední hodnotu

$$\mu_n = \mathbf{E}\xi_n . \tag{1.11}$$

2. Jednoduchý singulární proud

Studium singulárních proudů začneme nejjednodušším případem t. zv. jednoduchého proudu. Posloupnost $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ je v tomto případě posloupností nezávislých náhodných proměnných nabývajících pouze hodnot 0 a 1, a to s konstantními pravděpodobnostmi q a p, $p + q = 1$. Náhodné proměnné x_n mají tudíž binomické rozložení pravděpodobností

$$v_k(n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} . \tag{2.1}$$

Ježto jednoduchý proud je stacionární, je i jeho parametr konstantní, totiž

$$\lambda_n = \mathbf{P}(\xi_n = 1) = p . \tag{2.2}$$

Obdobně také intensita proudu bude rovna

$$\mu_n = \mathbf{E}\xi_n = p = M(n) - M(n-1)\,. \tag{2.3}$$

Z (2.3) vidíme, že řídící funkce $M(t)$ jednoduchého singulárního proudu má v bodech $t = 1, 2, \ldots$ skoky rovné p, jinak je konstantní. Současně vyplývá z (2.2) a (2.3), že podobně jako v regulárním případě mají i zde intensita a parametr touž hodnotu.

Na vstupní proud jest ovšem možno se dívati také s hlediska časových intervalů mezi příchody jednotlivých po sobě následujících zákazníků. Označíme-li obecně z_i délku intervalu (v případě singulárního proudu nutně celočíselného) mezi příchodem zákazníka i-tého a $(i+1)$ho, $i = 1, 2, 3, \ldots$, snadno se přesvědčíme, že pro jednoduchý singulární proud platí

$$\mathbf{P}(z_i = k) = pq^{k-1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots\,, \tag{2.4}$$

t. j. že délky z_i mají Pascalovo rozložení. Jsou rovněž stochasticky nezávislé a platí $\mathbf{E}z_i = p^{-1}$.

3. Stacionární nezávislý singulární proud

Tento obecnější druh vstupních proudů je o to složitější, že náhodné proměnné ξ_n mohou nabývati i hodnot větších než 1. Jejich společný zákon rozložení budiž dán pravděpodobnostmi

$$v_k = \mathbf{P}(\xi_n = k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{3.1}$$

Pro pravděpodobnosti $v_k(n)$ pak dostaneme výrazy:

$$v_0(n) = v_0^n\,, \quad v_1(n) = nv_1v_0^{n-1}\,, \quad v_2(n) = nv_2v_0^{n-1} + \binom{n}{2} v_1^2 v_0^{n-2} \text{ atd.}$$

Mezi parametrem $\lambda = 1 - v_0$ a intensitou $\mu = M(n) - M(n-1)$ platí ovšem týž vztah jako v regulárním případě

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k\,.\,v_k \geqq \sum_{k=1}^{\infty} v_k = 1 - v_0 = \lambda\,. \tag{3.2}$$

Současně je z (3.2) zřejmá i platnost analogie známé věty (viz [5], § 11):

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby stacionární nezávislý vstupní proud byl jednoduchý, je rovnost $\mu = \lambda$.

Všimněme si ještě mezipříchodových intervalů. Délka nenulových intervalů má opět Pascalovo rozložení

$$\mathbf{P}(z = k \,/\, z > 0) = (1 - v_0)\, v_0^{k-1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Označme pro zjednodušení $\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{k}$. Pro pravděpodobnost $\mathbf{P}(z = 0)$ dostaneme snadnou úvahou[2]) výraz

$$\mathbf{P}(z = 0) = 1 - \frac{\nu}{1 - v_0}, \tag{3.4}$$

takže odtud a z (3.3) vyplývá

$$\mathbf{P}(z = k) = \nu v_0^{k-1}, \ k = 1, 2, \dots; \tag{3.5}$$

formulemi (3.4) a (3.5) je zákon rozložení pravděpodobností délek mezipříchodových intervalů určen. Pro střední hodnotu délky dostaneme $\mathbf{E}[z / z > 0] = (1 - v_0)^{-1}$ a

$$\mathbf{E}z = \frac{\nu}{(1 - v_0)^2}. \tag{3.6}$$

4. Ordinárnost stacionárních proudů

Pro regulární stacionární proudy je známa věta Koroljukova (viz [5], § 11, [8]), která udává podmínky ordinárnosti proudu. V případě singulárního proudu můžeme ihned vysloviti obdobnou větu; její důkaz je o to jednodušší, že na rozdíl od regulárních proudů má parametr λ singulárního proudu vždy konečnou hodnotu, neboť $\lambda \leqq 1$.

Věta. *Singulární stacionární proud je ordinární tehdy a jen tehdy, jestliže* $\mu = \lambda$.

Důkaz. I. Je-li proud ordinární, pak $v_k = 0$ pro $k > 1$, tedy

$$\mu = \mathbf{E}\xi_n = 1 \, . \, v_1 = 1 - v_0 = \lambda \, .$$

II. Nechť $\mu = \lambda$, tedy $\sum_{k=1}^{\infty} k v_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$, odtud však plyne $\sum_{k=2}^{\infty} (k - 1) \, v_k = 0$, vzhledem k nezápornosti všech členů platí tedy nutně $v_k = 0$ pro $k \geqq 2$, c. b. d.

Poznámka. Zcela obdobně jako pro regulární proudy lze také pro singulární stacionární ordinární proudy zavésti t. zv. *Palmovy funkce* $\varphi_k(n)$ vztahy

$$\varphi_k(n) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}(\xi_1 = 1, \sum_{j=2}^{n+1} \xi_j = k) \, , \, n = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots \tag{4.1}$$

specielně tedy $\varphi_0(0) = 1$. Znamená tudíž $\varphi_k(n)$ podmíněnou pravděpodobnost toho, že v n po sobě následujících okamžicích přišlo právě k zákazníků za

---

[2]) $\mathbf{P}(z = 0)$ je pravděpodobnost toho, že uvažovaný zákazník je jeden z k ($k \geqq 1$) současně přišlých zákazníků, a to nikoliv poslední, tedy $\mathbf{P}(z = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{1 - v_0} \cdot \frac{k - 1}{k}$.

předpokladu, že bezprostředně před uvažovanou n-ticí okamžiků přišel zákazník. Z (4.1) můžeme snadno odvoditi formule (pro $n < k$ je $\varphi_k(n) = 0$)

$$v_0(n) = 1 - \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_0(j) \tag{4.2}$$

a

$$v_k(n) = \lambda \sum_{j=k-1}^{n+1} [\varphi_{k-1}(j) - \varphi_k(j)],\ k = 1, 2, \ldots, \tag{4.3}$$

analogické formulím (10.8) monografie [5].

5. Stacionární proudy s omezenou závislostí

Nazveme tak proudy (které obecně nemusí být nezávislé) takové, že délky mezipříchodových intervalů jsou nezávislé náhodné proměnné. V singulárním případě nabývají tyto náhodné proměnné opět jenom nezáporných celých hodnot, v případě ordinárních proudů jenom kladných. Pro stacionární ordinární proudy je požadavek omezené závislosti slabší než požadavek nezávislosti proudu, t. j. každý jednoduchý proud je také proudem s omezenou závislostí, naopak však existují stacionární ordinární proudy s omezenou závislostí, které nejsou nezávislé; jako příklad může sloužiti singulární proud určený posloupností ξ_n tvořící Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a \neq c,\ b \neq d,\ abcd \neq 0 \tag{5.1}$$

a se stacionárním rozložením absolutních pravděpodobností

$$v_0 = \frac{c}{b+c},\quad v_1 = \frac{b}{b+c}. \tag{5.2}$$

Poznámka. Není-li ordinární nezávislý proud stacionární, nemusí být proudem s omezenou závislostí, ač by bylo možno při povrchním čtení takto rozuměti tvrzení na počátku § 13 a v poznámce pod čarou na str. 42 v [5]. Lze snadno sestrojiti příklady singulárních i regulárních nestacionárních vstupních proudů, které jsou sice ordinární a nezávislé, kde však již prvé dva mezipříchodové intervaly jsou stochasticky závislé.

Singulární proud, který je stacionární, ordinární a s omezenou závislostí, nazveme proudem typu $\mathbf{P}$. Tyto proudy mají některé jednoduché vlastnosti, analogické vlastnostem regulárních proudů tohoto typu. Použijeme-li Palmových funkcí, odvodíme snadno, že pro rozložení pravděpodobností délek mezipříchodových intervalů platí (viz [5], str. 43)

$$\mathbf{P}(z_i \leqq n) = 1 - \varphi_0(n)\ ;\ i = 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.3}$$

$$\mathbf{P}(z_0 \leqq n) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_0(k)\,. \tag{5.4}$$

Obě tyto formule lze odvodit též přímo ze vzorců § 4.

V důsledku stacionarity proudu typu P nezávisí jeho vlastnosti na volbě počátku časové osy, t. j. z posloupnosti $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ můžeme vynechati libovolný — avšak pevný — počet počátečních členů, aniž tím změníme stochastickou strukturu proudu. Vynecháme-li jich však *náhodný* počet, a to tak, aby poslední vynechaný člen ξ byl roven 1, pak změníme stochastický charakter posloupnosti, proud přestane být proudem typu P. Uvažujme nyní v takto modifikovaném proudu jev $E \equiv (\xi = 1)$, tento jev je rekurentním jevem ve smyslu Fellerových definicí (viz FELLER [1], kap. XII; [2]). Fellerovým pravděpodobnostem f_k odpovídají v našem označení (platném pro původní nemodifikovanou posloupnost $\{\xi_n\}$) pravděpodobnosti

$$f_k = \mathbf{P}(z_i = k) = \varphi_0(k-1) - \varphi_0(k)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.5}$$

pravděpodobnostem u_j pak podmíněné pravděpodobnosti

$$u_j = \mathbf{P}(\xi_{j+1} = 1 \,/\, \xi_1 = 1)\,, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{5.6}$$

Nyní již můžeme pro náš proud využíti všech výsledků odvozených Fellerem: střední doba návratu jevu E bude

$$\sum_{k=1}^{\infty} k[\varphi_0(k-1) - \varphi_0(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_0(k)\,, \tag{5.7}$$

konstanta f je rovna

$$f = 1 - \lim_{n\to\infty} \varphi_0(n)\,, \tag{5.8}$$

jev E je tedy jistý tehdy a jen tehdy, platí-li $\lim_{n\to\infty} \varphi_0(n) = 0$. Konverguje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} k\varphi_0(k)$, lze aplikovati rovněž výsledky Fellerovy týkající se asymptotické normality součtů $S_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$ i počtu zákazníků N_r.

6. Nestacionární nezávislý ordinární proud

V tomto paragrafu si jen velmi stručně všimneme proudu tohoto speciálního typu. Jest ovšem $\mathbf{P}(\xi_n > 1) = 0$, takže $\mathbf{P}(\xi_n = 1) = \lambda_n$ je „okamžitá" hodnota parametru. Rovněž „okamžitá" hodnota intensity je $\mu_n = \mathbf{E}\xi_n = \lambda_n$; takže platí zřejmě

Věta. *Nezávislý singulární proud je ordinární tehdy a jen tehdy, jestliže $\mu_n = \lambda_n$ pro všechna n.*

Náhodné proměnné

$$\xi_{n,m} = x_{n+m} - x_n = \sum_{i=1}^{m} \xi_{n+i} \tag{6.1}$$

mají t. zv. zobecněné binomické rozložení (viz na př. [3], str. 107). Platí zejména

$$\mathbf{E}\xi_{n,m} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{n+i}\,; \tag{6.2}$$

řídící funkce $M(t)$ má tedy v bodech $t = n$ skoky rovné λ_n; střední hodnota (6.2) je stejná, jako by byla v případě stacionárního proudu s průměrným parametrem

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \lambda_{n+1} . \tag{6.3}$$

Pro pravděpodobnosti $v_0(n, n + m) = \mathbf{P}(\xi_{n,m} = 0)$ dostaneme snadno rekurentní vztah

$$\begin{aligned} v_0(n, n + m + 1) &= v_0(n, n + m) \,.\, v_0(n + m, n + m + 1) = \\ &= v_0(n, n + m) \,.\, (1 - \lambda_{n+m+1}) , \end{aligned} \tag{6.4}$$

takže

$$v_0(n, n + m) = \prod_{i=1}^{m} (1 - \lambda_{n+i}) ; \tag{6.5}$$

podobně lze odvodit diferenční rovnici

$$v_k(n, n + m + 1) - v_k(n, n + m) = - \lambda_{n+m+1} [v_k(n, n + m) - v_{k-1}(n, n + m)] , \tag{6.6}$$

charakterisující zobecněné binomické rozložení.

7. Singulární p-aproximace regulárních proudů

Budiž dán regulární vstupní proud $x(t)$. Singulární proud $x^{(r)}(t)$ definovaný vztahem

$$x^{(r)}(t) = x\left(\frac{[2^r \,.\, t]}{2^r}\right) \tag{7.1}$$

nazveme r-tou *singulární p-aproximací* (regulárního) proudu $x(t)$. Pro příslušné pravděpodobnosti $v_k^{(r)}$, $V_k^{(r)}$ platí zřejmě

$$v_k^{(r)}(t) = v_k\left(\frac{[2^r \,.\, t]}{2^r}\right) \tag{7.2}$$

a

$$V_k(t) \leqq V_k\left(\frac{[2^r \,.\, t]}{2^r}\right) = V_k^{(r)}(t) \leqq V_k(t + 2^{-r}) . \tag{7.3}$$

Ježto regulární proud je stochastický proces spojitý podle pravděpodobnosti, platí pro každé $t \geqq 0$

$$\lim_{h \to 0} \mathbf{P}(x(t + h) > x(t)) = 0 , \tag{7.4}$$

odtud však vyplývá

$$\lim_{r \to \infty} V_k^{(r)}(t) = V_k(t) , \quad t \geqq 0 , \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{7.5}$$

Obdobně lze dále dokázati, že posloupnost $\{x^{(r)}(t)\}_{r=0}^{\infty}$ konverguje k $x(t)$ ve smyslu Bernoulliově.

Ze spojitosti podle pravděpodobnosti procesu $x(t)$ a z definice $x^{(r)}(t)$ však nadto vyplývá i konvergence $x^{(r)}(t)$ k $x(t)$ podle pravděpodobnosti pro každé $t \geqq 0$; je to důsledek předpokládané monotonie funkcí $x(t)$:

$$x(t - 2^{-r}) \leqq x\left(\frac{[2^r t]}{2^r}\right) = x^{(r)}(t) \leqq x(t)\,, \tag{7.6}$$

takže

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{P}(x(t) - x^{(r)}(t) > 0) = 0\,. \tag{7.7}$$

S praktického hlediska znamená přechod k r-té singulární p-aproximaci, že se počet zákazníků zjišťuje jen v určitých ekvidistantních časových okamžicích $t = j \,.\, 2^{-r}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, takže je znám vždy jen souhrnný počet zákazníků přišlých v intervalech délky 2^{-r}, nikoli však přesné okamžiky příchodu jednotlivých zákazníků.

Vlastnosti stacionarity, nezávislosti a finitnosti se zachovávají při přechodu od regulárního proudu k jeho p-aproximacím; naproti tomu ordinárnost proudu obecně není zachována.

Vztah mezi rozložením pravděpodobností přírůstků ξ_n regulárního proudu a jeho singulárních p-aproximací si snadno odvodíme ze vzorců (7.2), (7.3), resp. z definice (7.1). Všimněme si ještě podrobněji parametru a intensity proudu. Z (1.8) máme

$$\mathbf{P}(x(t+h) > x(t)) = h \,.\, \lambda(t) + o(h)\,, \tag{7.8}$$

avšak

$$\lambda_j^{(r)} = \mathbf{P}\left(x\left(\frac{j}{2^r}\right) > x\left(\frac{j-1}{2^r}\right)\right), \tag{7.9}$$

tedy

$$\lambda_j^{(r)} = 2^{-r} \,.\, \lambda(j2^{-r}) + o(2^{-r})\,, \tag{7.10}$$

takže při $r \to \infty$, $j \to \infty$, $j \,.\, 2^{-r} \to t$ dostáváme

$$\lim 2^r \,.\, \lambda_j^{(r)} = \lambda(t)\,, \tag{7.11}$$

pokud parametr $\lambda(t)$ je spojitou funkcí argumentu t, speciálně tedy platí (7.11) v případě stacionárního proudu $x(t)$.

Obdobně máme pro intensitu proudu z (1.9) a z

$$\mu_j^{(r)} = \mathbf{E}\left[x\left(\frac{j}{2^r}\right) - x\left(\frac{j-1}{2^r}\right)\right] \tag{7.12}$$

rovnost

$$\mu_j^{(r)} = 2^{-r} \,.\, \bar{\mu}(t) + o(2^{-r})\,, \tag{7.13}$$

takže znovu při $r \to \infty$, $j \to \infty$, $j \,.\, 2^{-r} \to t$ platí

$$\lim 2^r \mu_j^{(r)} = \bar{\mu}(t)\,. \tag{7.14}$$

Poznámka. Je zřejmé, že volba posloupnosti $\{2^{-r}\}_{r=0}^{\infty}$ není pro definici a vlastnosti singulárních p-aproximací regulárního proudu nijak podstatná. Místo ní by bylo možno použít i libovolné jiné vhodné posloupnosti konvergující k nule.

8. Singulární *B*-aproximace

Mějme opět dán regulární proud $x(t)$. Posloupnost $\{x^{(r)}(t)\}_{r=0}^{\infty}$ singulárních proudů nazveme *posloupností singulárních B-aproximací* proudu $x(t)$, jestliže $\lim_{r\to\infty} x^{(r)}(t) = x(t)$ v Bernoulliově smyslu. Je zřejmé z (7.7), že posloupnost p-aproximací regulárního proudu je také posloupností jeho B-aproximací. Přitom se můžeme (pro naše účely bez újmy obecnosti) omeziti jen na takové posloupnosti B-aproximací, jejichž r-tý člen má řídící funkci konstantní v intervalech tvaru $\langle j \,.\, 2^{-r}, (j+1) \,.\, 2^{-r})$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Všimněme si, že na rozdíl od p-aproximací, má o B-aproximacích smysl mluvit jen jako o celých posloupnostech; r-tá B-aproximace nám sama o sobě ještě nic neříká o aproximovaném regulárním proudu, kdežto r-tá p-aproximace ano.

Ježto hodnoty parametru a intensity proudu, ať již regulárního či singulárního, závisí pouze na zákonech rozložení pravděpodobností procesu $x(t)$, platí vztahy (7.11) a (7.14) za jistých podmínek i tehdy, jde-li o posloupnost B-aproximací. Odtud, z věty § 4 a z věty 3 v [8] vyplývá

Věta. *Jestliže k danému finitnímu regulárnímu proudu $x(t)$ existuje posloupnost stacionárních ordinárních singulárních B-aproximací taková, že platí* (7.11) a (7.14), *pak $x(t)$ je rovněž stacionární a ordinární proud.*

Kromě parametru a intensity existují ovšem i jiné důležité vlastnosti závislé jen na zákonu rozložení pravděpodobností, které se mohou zachovati při limitním přechodu v posloupnosti B-aproximací regulárního proudu. Pro ilustraci si v dalším paragrafu ukážeme na jednoduchém příkladě využití singulárních B-aproximací k řešení některých úloh theorie hromadné obsluhy. Účelem jest ovšem jen ilustrace možností, nikoliv systematické odvozování nových výsledků; jde totiž o případ vstupního proudu, který byl vyšetřován již v samých začátcích theorie systémů hromadné obsluhy.

9. Obsluha jednoduchého proudu

Budeme uvažovati jednoduchý singulární vstupní proud $x_n = x(n)$. Zákazníci nechť vytvářejí jednoduchou frontu obsluhovanou jediným obsluhujícím, délky d_i trvání obsluhy buďtež nezávislé náhodné proměnné s týmž zákonem rozložení Pascalova typu daným pravděpodobnostmi

$$\mathrm{P}(d_i = k) = \beta(1-\beta)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots; 0 < \beta < 1 \,. \tag{9.1}$$

Poznámka. Pascalovo rozložení je diskretní analogií exponenciálního rozložení v tom smyslu, že podobně jako pro exponenciálně rozložené spojité veličiny platí

$$\mathrm{P}(d = k + n \,/\, d \geqq n) = \mathrm{P}(d = k)\,. \tag{9.2}$$

Předpokládáme, že obsluha dalšího zákazníka může začíti v témž (celočíselném) okamžiku, kdy předcházející byla ukončena.

Budeme rozlišovati tři případy podle osudu zákazníků přišlých v okamžiku, kdy obsluhující je zaměstnán.

I. *Zákazníci, kteří nemohou být ihned obslouženi, čekají po neomezenou dobu v neomezené frontě.*

Označíme-li η_n počet zákazníků ve frontě (včetně právě obsluhovaného) v okamžiku n, tvoří náhodné proměnné η_n Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P} = (p_{ij})$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$ tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ \beta(1-\lambda) & \beta\lambda + (1-\beta)(1-\lambda) & (1-\beta)\lambda & 0 & \ldots \\ 0 & \beta(1-\lambda) & \beta\lambda + (1-\beta)(1-\lambda) & (1-\beta)\lambda & \ldots \\ 0 & 0 & \beta(1-x) & \beta\lambda + (1-\beta)(1-\lambda) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Stacionární rozložení absolutních pravděpodobností $P_k = \mathrm{P}(\eta_n = k)$ získáme známými methodami řešením rovnic

$$P_k = \sum_{j=0}^{\infty} P_j p_{jk}\,; \tag{9.3}$$

dostaneme tak — v podstatě zcela stejnými úpravami jakých je použito pro regulární proudy v [5] —

$$P_k = \frac{\lambda^k(1-\beta)^{k-1}}{\beta^k(1-\lambda)^k} \cdot P_0\,, \tag{9.4}$$

což spolu s normující podmínkou $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ dává

$$P_0 = \frac{\beta - \lambda}{\beta}\,; \tag{9.5}$$

vzorci (9.4) a (9.5) jsou P_k úplně určena. Vidíme, že podobně jako v regulárním případě musíme předpokládat $\lambda < \beta$, aby stacionární řešení existovalo. Ježto délky obsluhy d_i jsou nezávislé náhodné proměnné, dostáváme z (9.1), (9.4) a (9.5) pro celkovou dobu γ, po kterou zákazník musí čekat na obsluhu, pravděpodobnosti

$$\mathrm{P}(\gamma = n) = \sum_{k=1}^{n} P_k \cdot \binom{n-1}{n-k} \beta^k(1-\beta)^{n-k}\,,\quad n = 1, 2, \ldots, \tag{9.6}$$

a

$$\mathbf{P}(\gamma = 0) = P_0 = \frac{\beta - \lambda}{\beta}. \tag{9.7}$$

Z (9.6) pak vyplývá

$$\mathbf{P}(\gamma = n) = \frac{\beta - \lambda}{\beta} \cdot \frac{\lambda(1 - \beta)^{n-1}}{(1 - \lambda)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{9.8}$$

a

$$\mathbf{P}(\gamma > n) = \frac{\lambda}{\beta} \cdot \frac{(1 - \beta)^n}{(1 - \lambda)^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9.9}$$

Tím je problém obsluhy daného singulárního proudu v podstatě rozřešen.

Uvažujme nyní posloupnost jednoduchých singulárních proudů $\{x^{(r)}(t)\}_{r=0}^{\infty}$ tvořící posloupnost B-aproximací jednoduchého finitního regulárního proudu $x(t)$. Nechť platí

$$\lim_{r \to \infty} 2^r \,.\, \lambda^{(r)} = \bar{\lambda}, \tag{9.10}$$

kde $\bar{\lambda}$ je parametr proudu $x(t)$ a $\lambda^{(r)}$ parametr proudu $x^{(r)}(t)$. Nechť zároveň veličina β z (9.1) konverguje k nule, a to tak, že

$$\lim_{r \to \infty} 2^r \,.\, \beta^{(r)} = \bar{\beta}, \quad \bar{\lambda} \,.\, \bar{\beta}^{-1} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{9.11}$$

Pro pravděpodobnost $\mathbf{P}(\gamma > t)$ toho, že čekací doba při obsluze regulárního proudu $x(t)$ bude větší než t (za předpokladu stejné čekací disciplíny ve frontě a exponenciálního zákona rozložení délky obsluhy, k němuž (9.1) konverguje) dostaneme

$$\mathbf{P}(\gamma > t) = \lim \frac{\lambda^{(r)}}{\beta^{(r)}} \cdot \left(\frac{1 - \beta^{(r)}}{1 - \lambda^{(r)}}\right)^{[2^r t]}; \tag{9.12}$$

tedy

$$\mathbf{P}(\gamma > t) = \alpha \,.\, \mathrm{e}^{-(\bar{\beta} - \bar{\lambda})t} \tag{9.13}$$

a specielně

$$\mathbf{P}(\gamma > 0) = \alpha, \tag{9.14}$$

což je pravděpodobnost čekání vůbec. Uvedené vzorce (9.13) a (9.14) se shodují se vzorci odvozenými pro regulární proud $x(t)$ přímo (viz [5], § 34 a 35).

II. *Zákazníci, kteří nemohou být ihned obslouženi, jsou odmítáni a odpadají z obsluhy.*

Proměnné η_n nabývají tu pouze hodnot 0 a 1, matice $\boldsymbol{P}$ má tvar

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda \\ \beta(1 - \lambda) & \beta\lambda + (1 - \beta) \end{pmatrix}$$

(zde již nemusí být $\lambda < \beta$), takže rovnice pro P_k má tvar

$$P_0 = P_0(1 - \lambda) + P_1 \,.\, \beta(1 - \lambda); \tag{9.15}$$

odtud

$$P_0 = \frac{\beta - \beta\lambda}{\beta + \lambda - \beta\lambda}, \quad P_1 = \frac{\lambda}{\beta + \lambda - \beta\lambda}, \tag{9.16}$$

P_1 je pravděpodobnost odmítnutí. Provedeme-li limitní přechod ve stejném smyslu jako v odstavci I, dostaneme

$$\lim P_0 = \frac{1}{1 + \alpha}, \quad \lim P_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \tag{9.17}$$

ve shodě s výsledky v [5], § 20, str. 67.

III. Nakonec uvažujme ještě případ t. zv. smíšeného systému:

Je-li jeden zákazník obsluhován, může ještě jeden další čekat, ostatní jsou odmítáni a odpadají.

Pro matici $\boldsymbol{P}$ (tentokráte třířádkovou, neboť η_n nabývají hodnot 0,1 a 2), máme

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda & 0 \\ \beta(1 - \lambda) & \beta\lambda + (1 - \beta)(1 - \lambda) & (1 - \beta)\lambda \\ 0 & \beta(1 - \lambda) & \beta\lambda + (1 - \beta) \end{pmatrix},$$

takže rovnice pro P_k jsou

$$\begin{aligned} P_0 &= P_0(1 - \lambda) + P_1(\beta - \beta\lambda), \\ P_1 &= P_0\lambda + P_1(1 - \lambda - \beta + 2\beta\lambda) + P_2(\beta - \beta\lambda), \\ P_2 &= P_1(\lambda - \beta\lambda) + P_2(1 - \beta + \beta\lambda). \end{aligned} \tag{9.18}$$

Odtud pak dostaneme opět stejnými obraty výrazy pro P_k, které po obvyklém limitním přechodu dávají

$$\lim P_k = \frac{\alpha^k}{1 + \alpha + \alpha^2}, \quad k = 0, 1, 2; \quad 0 < \alpha < \infty, \tag{9.19}$$

což se shoduje s výsledky (4) a (5) práce [9]. Rozložení čekací doby je v tomto jednoduchém případě ovšem triviální: zákazník je obsloužen bez čekání s pravděpodobností P_0, musí čekat s pravděpodobností P_1, v tom případě má pak γ exponenciální rozložení jako přímou limitu Pascalova rozložení (9.1).

LITERATURA

[1] *W. Feller*: An introduction to probability theory and its applications I., New York 1950.

[2] *W. Feller*: Fluctuation theory of recurrent events; TAMS *67* (1949), 98—119.

[3] *M. Fisz*: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna; Warszawa 1954.

[4] *M. Fisz*: Realizations of some stochastic processes; Studia Mathematica *15* (1956), 359—364.

[5] *А. Я. Хинчин*: Математические методы теории массового обслуживания; Труды Матем. Института им. В. А. Стеклова *49*, Москва 1955.

[6] *А. Я. Хинчин:* Потоки случайных событий без последействия; Теория вероятностей *1* (1956), 3—18.

[7] *И. П. Натансон:* Теория функций вещественной переменной; Москва-Ленинград, 1950.

[8] *F. Zítek:* Заметка к одной теореме Королюка; Чехосл. Мат. Журнал *7* (*82*), 1957, 318—319.

[9] *F. Zítek*: Příspěvek k theorii smíšených systémů hromadné obsluhy; Aplikace matematiky *2* (1957), 154—159.

Резюме

СИНГУЛЯРНЫЕ ВХОДЯЩИЕ ПОТОКИ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

(Поступило в редакцию 27/X 1956 г.)

После первого параграфа послужившего в качестве введения (большинство определений и обозначений принято из [5] и [6]), изучаются в первой части работы (§§ 2—6) сингулярные входящие потоки вызовов (см. [6]), следуя при этом вообще исследованиям главы 1 монографии [5].

Во второй части (§§ 7—9) введено понятие сингулярных аппроксимаций регулярных потоков. Если $x(t)$ — финитный регулярный поток, то последовательность $\{x^{(r)}(t)\}_{r=0}^{\infty}$ сингулярных потоков, определенных равенством (7.1), называется последовательностью p-аппроксимаций потока $x(t)$. Изучаются некоторые свойства p-аппроксимаций, и после этого переходится в параграфе 8 к исследованию B-аппроксимаций, называя так элементы последовательностей сингулярных потоков, сходящихся к $x(t)$ в смысле Бернулли.

В последнем параграфе использованы установленные результаты в случае одного простого примера из теории обслуживания. Методом аппроксимаций получаются результаты, совпадающие с результатами, полученными прямым методом для непрерывного случая (см. [5] и [9]).

Résumé

COURANTS D'ENTRÉE SINGULIERS

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 27 octobre 1956)

Après le premier paragraphe qui sert d'introduction (la plupart des définitions et notations sont celles des travaux [5] et [6]), on étudie, dans la première partie du présent travail (§§ 2—6), les courants d'entrée singuliers (voir [6]) en suivant à peu près parallèlement le développement du chapitre 1 de [5].

Dans la seconde partie (§§ 7—9) on introduit la notion d'approximations singulières de courants réguliers. Un courant régulier $x(t)$ étant donné, la suite $\{x^{(r)}(t)\}_{r=0}^{\infty}$ de courants singuliers définis par (7.1) est appelée suite d'approximations-p du courant $x(t)$. Après avoir établi quelques propriétés des approximations-p, on passe, au paragraphe 8, à l'étude des approximations-B, en appelant ainsi les éléments de toute suite de courants singuliers convergeant vers $x(t)$ au sens de Bernoulli.

Au dernier paragraphe les résultats établis sont, à titre d'illustration, employés dans le cas d'un exemple simple de problèmes d'attente. En procédant par la méthode d'approximation on arrive à des résultats conformes à ceux obtenus directement pour le cas continu (voir [5] et [9]).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

CHARAKTERISTICKÁ FUNKCE KENDALLOVA KOEFICIENTU KORELACE POŘADÍ

MARCEL JOSÍFKO, Praha

DT: 519.272.1

(Došlo dne 21. prosince 1956)

V poznámce je odvozena charakteristická funkce náhodné veličiny S (čitatele ve výrazu (1)) pro Kendallův koeficient korelace pořadí v případě nezávislosti. Charakteristické funkce je použito k jednoduchému odvození známých vlastností Kendallova koeficientu korelace pořadí.

Buď $\{(x_\nu, y_\nu)\}_{\nu=1}^n$ náhodný výběr o rozsahu n z dvojrozměrné populace charakterisované náhodnou veličinou (X, Y) se spojitým rozložením. Přiřaďme každému prvku tohoto náhodného výběru dvojici přirozených čísel (i, q_i) tak, že i značí pořadí prvku ve výběru uspořádaném podle rostoucích hodnot x a q_i značí pořadí tohoto prvku ve výběru uspořádaném podle rostoucích hodnot y. Symbolem R pak označme minimální počet inversí, jimiž se permutace $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ převádí na přirozenou posloupnost $(1, 2, \ldots, n)$. Kendallův koeficient korelace pořadí se pro tento náhodný výběr definuje vzorcem

$$\tau = 1 - \frac{2R}{\binom{n}{2}} = \frac{S}{\binom{n}{2}} . \tag{1}$$

Za předpokladu, že náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, jsou všechny permutace $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ stejně pravděpodobné (pořadí podle y nezávisí na uspořádání výběru podle rostoucích hodnot x). Označíme-li symbolem $f(s; n)$ počet těch permutací $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, které vedou k téže hodnotě s náhodné veličiny S ze vzorce (1), můžeme psát:

$$P_n(S = s) = \frac{f(s; n)}{n!} . \tag{2}$$

Vidíme snadno, že je $f(s; n) > 0$ pouze pro hodnoty $s = \binom{n}{2} - 2k$, kde $k = 0, 1, \ldots, \binom{n}{2}$; pro ostatní s je $f(s; n) = 0$.

Jednoduchou úvahou se odvodí rekurentní vzorec pro výpočet hodnot $f(s; n)$ (Viz na př. [1] str. 403):

$$f(s; n + 1) = \sum_{k=0}^{n} f(s + n - 2k; n) ,$$
$$f(0; 1) = 1 . \tag{3}$$

Pomocí vzorce (3) dostaneme pro charakteristickou funkci náhodné veličiny S tyto vztahy

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_s e^{its} . f(s; n) ,$$

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_s e^{its} \sum_{k=0}^{n} f(s + n - 2k; n) ,$$

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{n+1} \cdot \varphi_n(t) \cdot \sum_{k=0}^{n} e^{it(2k-n)} .$$

Sečtením geometrické řady v posledním výrazu a elementární úpravou dospíváme k jednoduché rekurentní formuli pro charakteristickou funkci $\varphi_n(t)$

$$\varphi_{n+1}(t) = \varphi_n(t) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin [(n+1) t]}{\sin t} . \tag{4}$$

Odtud

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin (\nu t)}{\sin t} . \tag{5}$$

Ke stejnému výsledku dospějeme úpravou vytvořujícího polynomu pro γ-rozdělení (viz [2]).

Uvedená charakteristická funkce umožňuje snadné odvození momentů náhodné veličiny S a důkaz konvergence jejího rozložení k rozložení normálnímu. K tomu účelu vztah (5) upravíme použitím známého vyjádření sinu ve tvaru nekonečného součinu

$$\sin z = z . \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 j^2}\right) . \tag{6}$$

V našem případě je

$$\varphi_n(t) = \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\nu^2 t^2}{\pi^2 j^2}\right) \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 j^2}\right)^{-1} .$$

V okolí nuly můžeme psát

$$\log \varphi_n(t) = - \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t^2}{j^2 \pi^2}\right)^k . (\nu^{2k} - 1) .$$

Je hned vidět, že pro $|t| \leqq n^{-1}$ platí

$$\log \varphi_n(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k} . \sum_{\nu=1}^{n} (\nu^{2k} - 1) . \frac{1}{\pi^{2k}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2k}} .$$

Uvážíme-li, že $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$, dostáváme pro charakteristickou funkci $\varphi_n(t)$ tento výraz

$$\varphi_n(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{3} \sum_{\nu=1}^{n} (\nu^2 - 1) - \sum_{k=2}^{\infty} t^{2k} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} (\nu^{2k} - 1)}{k \cdot \pi^{2k}} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2k}}\right\},$$

$$|t| \leqq n^{-1}. \tag{7}$$

Odtud přímo určíme rozptyl náhodné veličiny S

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{3} \sum_{\nu=1}^{n} (\nu^2 - 1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{18}. \tag{8}$$

Standardisovaná náhodná veličina

$$U = \frac{S}{\sigma_S} \tag{9}$$

má, jak je ihned patrné z (7) a (8), tyto kumulanty:

$$\varkappa_2 = 1, \quad \varkappa_{2k} = O(n^{-k+1}) \quad \text{pro } k = 2, 3, \ldots$$

Liché kumulanty jsou vesměs rovny nule.

Náhodná veličina U má tedy charakteristickou funkci

$$\psi_n(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + O(n^{-1})\right\}.$$

Platí tedy $\lim \psi_n(t) = \psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ pro každé pevné t, takže náhodná veličina U má asymptoticky normální rozložení $N(0, 1)$.

Kendallův koeficient korelace pořadí τ má tedy rovněž, za předpokladu nezávislosti náhodných veličin X a Y, asymptoticky normální rozložení s průměrem 0 a rozptylem

$$\sigma_\tau^2 = \frac{2n + 5}{9 \cdot \binom{n}{2}};$$

$2k$-tý kumulant náhodné veličiny τ je

$$\varkappa_{2k}(\tau) = \frac{(2k)!}{k \cdot \pi^{2k}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2k}} \cdot \binom{n}{2}^{-2k} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} (\nu^{2k} - 1).$$

LITERATURA

[1] *M. G. Kendall:* The advanced theory of statistics I. (1948).

[2] *J. Hájek:* Některá pořadová rozdělení a jejich použití. Čas. pro pěst. mat. *80* (1955), 17—31.

Резюме

СОБСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА КЕНДАЛЛА КОРРЕЛЯЦИИ РАНГОВ

МАРЦЕЛЬ ИОСИФКО (Marcel Josífko), Прага

(Поступило в редакцию 21/XII 1956 г.)

В статье выводится собственная функция случайной величины S (числителя в выражении (1)) для коэффициента Кендалла корреляции рангов в случае независимости. Собственная функция используется для простого вывода известных уже свойств коэффициента Кендалла корреляции рангов.

Summary

THE CHARACTERISTIC FUNCTION OF THE KENDALL'S RANK CORRELATION COEFFICIENT

MARCEL JOSÍFKO, Praha

(Received December 21, 1956)

The characteristic function for the random variable S (the numerator of Kendall's coefficient of rank correlation (1)) in the case of independence is given. The characteristic function is applied to the simple derivation of cumulants and asymptotic distribution of Kendall's τ.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ASYMPTOTICKÉ VLASTNOSTI INTEGRÁLŮ HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE ČTVRTÉHO ŘÁDU

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

DT: 517.934

(Došlo dne 11. ledna 1957)

V práci jsou uvedeny některé postačující podmínky pro ohraničenost integrálů diferenciální rovnice (1,2). Dále je ukázáno, jak lze v některých případech odvodit asymptotické vzorce pro fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (1,2) pomocí známých asymptotických vzorců pro fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (1,5).

1. Diferenciální rovnici

$$w'''' + 4a_3w''' + 6a_2w'' + 4a_1w' + a_0w = 0\,, \tag{1,1}$$

kde a_3''', a_2'', a_1', a_0 jsou spojité funkce v intervalu $J \equiv \langle x_0, \infty)$, můžeme převést transformací $w = e^{-\int a_3 dx} y$ na první kanonický tvar

$$y'''' + 10Ay'' + (10A' + \omega)\, y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\, y = 0\,, \tag{1,2}$$

kde ω (ω_1) je invariant (semiinvariant) rovnice (1,1), $A = \frac{3}{5}(a_2 - a_3^2 - a_3')$, viz [6]. Funkce ω', ω_1, A'' jsou spojité v intervalu J.

V případě $\omega \equiv 0$ pro všechna $x \in J$ je

$$y'''' + (10Ay')' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\, y = 0 \tag{1,3}$$

samoadjungovanou rovnicí. Rovnice

$$y'''' + (10Ay')' + 3(3A^2 + A'')\, y = 0 \tag{1,4}$$

je iterovaná a její fundamentální systém řešení tvoří funkce u^3, u^2v, uv^2, v^3, jestliže u, v jsou lineárně nezávislé integrály diferenciální rovnice

$$u'' + Au = 0\,. \quad \text{Viz na př. [9]}\,. \tag{1,5}$$

Má-li rovnice (1,5) integrál $u_1(x)$, který nemá v J ani jeden nulový bod, pak můžeme (1,2) transformovat substitucí

$$y = \frac{v[\xi(x)]}{[\xi'(x)]^{\frac{3}{2}}}\,, \quad \xi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_1^2(t)}\, dt \tag{1,6}$$

na druhý kanonický tvar

$$\frac{d^4v}{d\xi^4} + \frac{1}{\xi'^3}\,\omega\,\frac{dv}{d\xi} + \frac{1}{\xi'^4}\left(\omega_1 - \frac{3}{2}\,\frac{\xi''}{\xi'}\,\omega\right)v = 0\,, \quad \text{viz [6]}\,. \tag{1,7}$$

Každý integrál $y(x)$ rovnice (1,2) vyhovuje integrální rovnici

$$y(x) = z(x) - \frac{1}{6}y(\bar{x}_0)\,\omega(\bar{x}_0)\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(\bar{x}_0) & v(\bar{x}_0)\end{vmatrix}^3 + \tag{1,8}$$

$$+ \frac{1}{6}\int_{\bar{x}_0}^{x} y(t)\left\{[\omega_1(t) - \omega'(t)]\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t)\end{vmatrix}^3 - 3\omega(t)\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t)\end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(t) & v'(t)\end{vmatrix}\right\} dt\,,$$

kde $z(x)$ je integrál rovnice (1,4) splňující v bodě $\bar{x}_0 \geqq x_0$ stejné počáteční podmínky jako $y(x)$ a $u(x)$, $v(x)$ jsou integrály rovnice (1,5), jejichž wronskien je roven 1, viz [8].

2. Dále uvedeme některé postačitelné podmínky pro ohraničenost integrálů diferenciální rovnice (1,2). Kvůli stručnějšímu vyjadřování zavedeme tyto definice:

a) Řekneme, že integrál $y(x)$ diferenciální rovnice má vlastnost

(O_i) $\Rightarrow |y^{(i)}(x)| \leqq M$ pro všechna $x \in J$; $\quad i = 0, 1, 2, 3$;

(O_{01}) $\Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| \leqq M$ pro všechna $x \in J$;

$\vdots$

$(O_{0123}) \Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| + |y''(x)| + |y'''(x)| \leqq M$ pro všechna $x \in J$;

(o_0) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$;

(o_{01}) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$; $M = \text{konst} > 0$.*)

b) Řekneme, že diferenciální rovnice má některou z vlastností odst. a), když každé její řešení má tutéž vlastnost.

2,1. Nechť

$$\int^{\infty} |\omega|\, dx < \infty\,, \quad \int^{\infty} |\omega_1|\, dx < \infty\,. \tag{2,1}$$

Jestliže rovnice (1,4) má vlastnost (O_{0123}), pak rovnice (1,2) má vlastnost (O_{0123}), viz [1], T. 6, str. 55.

Poznámka 2,1. Rovnice (1,4) má vlastnost (O_{0123}), jestliže rovnice (1,5) má vlastnost (O_{01}), při čemž $|A| + |A'| \leqq M$.

Poznámka 2,2. Rovnice (1,5) má vlastnost (O_{01}), jestliže

$$\lim_{x\to\infty} |A + a| = 0,\ \int^{\infty} |A + a|\, dx < \infty,\ a = \text{konst} < 0,$$

viz [1], II, T. 7, str. 56, nebo

$$\lim_{x\to\infty} |A + a| = 0,\ \int^{\infty} |A'|\, dx < \infty,\ a = \text{konst} < 0,$$

viz [1], VI, T. 1, str. 133.

*) V dalším textu budeme vždy písmenem M označovat vhodnou kladnou konstantu.

2,2. Nechť
$$\int^{\infty} |\omega_1 - \omega'| \, dx < \infty , \quad \int^{\infty} |\omega| \, dx < \infty . \tag{2,2}$$
Jestliže rovnice (1,5) má vlastnost (O_{01}), pak rovnice (1,2) má vlastnost (O_0).

Podle (1,8) je vzhledem k předpokladu $|u(x)| \leqq M$, $|v(x)| \leqq M$, $|u'(x)| \leqq M$, $|v'(x)| \leqq M$
$$|y(x)| \leqq M^3(|c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4| + c_5) + \frac{4}{3} M^6 \int_{\bar{x}_0}^{x} |y|[|\omega_1 - \omega'| + 3|\omega|] \, dt ,$$
kde jsme použili vztahů
$$z(x) = c_1 u^3(x) + c_2 u^2(x) \, v(x) + c_3 u(x) \, v^2(x) + c_4 v^3(x) ,$$
$$c_5 = \frac{1}{6} |y(\bar{x}_0) \, \omega(\bar{x}_0)| \, . \, [|u(\bar{x}_0)| + |v(\bar{x}_0)|]^3 .$$
Podle Bellmanovy nerovnosti, viz [1], str. 46, je
$$|y(x)| \leqq c \exp\left\{\frac{4}{3} M^6 \int_{\bar{x}_0}^{x} [|\omega_1 - \omega'| + 3|\omega|] \, dt\right\}, \quad c = M^3 \sum_{i=1}^{5} |c_i| ,$$
odkud s ohledem na (2,2) plyne tvrzení.

Poznámka 2,3. Nechť platí (2,2). Jestliže rovnice (1,5) má vlastnost (O_{01}), při čemž $|A| + |A'| \leqq M$, pak rovnice (1,2) má vlastnost (O_{0123}).

2,3. Nechť platí předpoklady:

a) $A \geqq$ konst > 0, $A^{-\frac{1}{4}}$ je konvexní pro $x \in \langle x_0, \infty)$,

b) $\displaystyle\int^{\infty} \frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt{A^3}} \, dx < \infty , \quad \int^{\infty} \frac{|\omega|}{A} \, dx < \infty .$

Pak rovnice (1,2) má vlastnost (O_{01}).

Podle předpokladu a) je
$$|u(x)| \leqq \frac{M}{\sqrt[4]{A}} \geqq |v(x)| , \quad |u'(x)| \leqq M\sqrt[4]{A} \geqq |v'(x)| , \tag{2,3}$$
viz *Zlámal* [3], str. 85. Podle (1,8) je
$$|y(x)| \leqq \frac{c}{\sqrt[4]{A^3(x)}} + \frac{4}{3} \frac{M^6}{\sqrt[4]{A^3(x)}} \int_{\bar{x}}^{x} |y| \left[\frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt[4]{A^3(t)}} + \frac{3|\omega|}{\sqrt[4]{A(t)}}\right] dt ,$$
$$|y(x) \sqrt[4]{A^3(x)}| \leqq c + \frac{4}{3} M^6 \int_{\bar{x}_0}^{x} |y\sqrt[4]{A^3(t)}| \left[\frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt{A^3(t)}} + \frac{3|\omega|}{A(t)}\right] dt , \tag{2,4}$$

kde c je vhodná kladná konstanta. Jestliže aplikujeme na (2,4) Bellmanovu nerovnost, snadno podle předpokladu b) dojdeme k závěru, že integrál $y(x)$ je ohraničený.

Derivací (1,8) s ohledem na (2,3) obdržíme odhad

$$|y'(x)\sqrt[4]{A(x)}| \leqq \bar{c} + 4M^6 \int_{x_0}^{x} |y\sqrt[4]{A^3(t)}| \left[\frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt[4]{A^3(t)}} + \frac{3|\omega|}{A(t)}\right] dt\,,$$

kde $\bar{c} > 0$ je vhodná konstanta. Integrál na pravé straně podle předpokladu konverguje, neboť funkce $y\sqrt[4]{A^3(x)}$ je podle (2,4) ohraničena.

Poznámka 2,4. Jestliže platí předpoklady odst. 2,7 a $\lim_{x\to\infty} A(x) = \infty$, pak rovnice (1,2) má vlastnost (o_{01}).

Přesněji

$$y(x) = O\left[\frac{1}{\sqrt[4]{A^3(x)}}\right], \quad y'(x) = O\left[\frac{1}{\sqrt[4]{A(x)}}\right].$$

3

3,1. Nechť $|A + a| \to 0$ pro $x \to \infty$, $\int^{\infty}|A'(x)|\,dx < \infty$, $\int^{\infty}|\omega|\,dx < \infty$, $\int^{\infty}|\omega_1 + 3A''|\,dx < \infty$. Pak existuje fundamentální systém řešení rovnice (1,2) tvaru

$$y_k^{(i)} = \exp\left[\int_{x_0}^{x}\lambda_k(t)\,dt\right][c_{ki} + o(1)]\,, \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, 3, 4, \\ i = 0, 1, 2, 3, \end{array}$$

kde $\lambda_{1,2}(t) = \pm\sqrt{-A(t)}$, $\lambda_{3,4}(t) = \pm 3\sqrt{-A(t)}$, c_{ki} jsou konstanty nezávislé na x, x_0. Viz [1], II, T. 8, str. 64.

3,2. Nechť $|A + a| \to 0$ pro $x \to \infty$, $a =$ konst., $\int^{\infty}|A'(x)|\,dx < \infty$. Potom

$$u_1^{(i)} = e^{-\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\,dt}[c_{1i} + o(1)]\,, \quad u_2^{(i)} = e^{\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\,dt}[c_{2i} + o(1)]\,, \quad i = 0, 1, \tag{3,1}$$

kde c_{ki} jsou konstanty nezávislé na x, x_0; u_1, u_2 jsou nezávislé integrály rovnice (1,5). Viz [1], II, T. 8, str. 64.

Důsledek.

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-3\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\,dt}[1 + o(1)]\,, & y_2 &= e^{-\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\,dt}[1 + o(1)]\,, \\ y_3 &= e^{\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\,dt}[1 + o(1)]\,, & y_4 &= e^{3\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\,dt}[1 + o(1)]\,, \end{aligned} \tag{3,2}$$

kde $y_i = u_1^{4-i} \cdot u_2^{i-1}$, $i = 1, 2, 3, 4$, jsou nezávislé integrály rovnice (1,4).

3,3. Předpokládejme, že rovnice (1,5) má integrál $u_1(x)$, který nemá v intervalu J žádný nulový bod a $\int^{\infty} \frac{1}{u_1^2(x)}\, dx = +\infty$. Potom můžeme rovnici (1,2) transformovat substitucí (1,6) na tvar (1,7), při čemž $\lim_{x\to\infty} \xi(x) = \infty$.

Nechť

$$\int^{\infty} \frac{\xi^2}{\xi'^2} |\omega|\, dx < \infty\,, \quad \int^{\infty} \frac{\xi^3}{\xi'^3} \left|\omega_1 - \frac{3}{2}\frac{\xi''}{\xi'}\omega\right| dx < \infty\,. \tag{3,3}$$

Integrály rovnice (1,7) jsou podle Ghizettiho věty (viz [7]) asymptoticky rovny integrálům rovnice $v^{(4)} = 0$. Přesněji, rovnice (1,7) má fundamentální systém tvaru

$$v_i = \xi^{i-1}[1 + o(1)]\,, \quad i = 1, 2, 3, 4\,.$$

Důsledek. Integrály rovnice (1,2) jsou podle Ghizettiho věty asymptoticky rovny integrálům rovnice (1,4). Přesněji, rovnice (1,2) má fundamentální systém tvaru $y_i = u_1^{4-i} \,.\, u_2^{i-1}[1 + o(1)]$, kde u_1, u_2 jsou vhodné lineárně) nezávislé integrály rovnice (1,5).

3,4. Nechť rovnice (1,5) má integrál $u_2(x)$ (nezávislý na $u_1(x)$) takový, že $\int^{\infty} \frac{1}{u_2^2(x)} < \infty$.

Jestliže integrály

$$\int^{\infty} \varphi^2(x)\, |\omega|\, dx\,, \quad \int^{\infty} \psi(x)\, \varphi^2(x)\, |\omega|\, dx\,, \quad \int^{\infty} \varphi^3(x)\, |\omega_1|\, dx \tag{3,4}$$

konvergují, kde

$$\begin{aligned} u_1 \,.\, u_2 &= O[\varphi(x)]\,, \\ u_1' \,.\, u_2 &= O[\psi(x)]\,, \end{aligned} \tag{3,5}$$

pak platí tvrzení odstavce 3,3. Ukažme, že je splněna podmínka (3,3).

$$\int^{\infty} \frac{\xi^2}{\xi'^2} |\omega|\, dx = \int^{\infty} u_1^4 \left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_1^2}\, dt\right)^2 |\omega|\, dx = \int^{\infty} \left[u_1\left(c_1 u_2 + c_2 u_2 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_2^2}\, dt\right)\right]^2 |\omega|\, dx \leqq$$

$$\leqq N_1 \int^{\infty} (u_1 u_2)^2\, |\omega|\, dx, \quad \text{kde} \quad \left(c_1 + c_2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{u_2^2}\, dt\right)^2 \leqq N_1, \ c_1, c_2 \text{ jsou konst.}$$

Podobně zjistíme, že

$$\int^{\infty} \frac{\xi^3}{\xi'^3} \left|\omega_1 - \frac{3}{2}\frac{\xi''}{\xi'}\omega\right| dx \leqq N_2 [\int^{\infty} |(u_1 u_2)^3 \omega_1|\, dx + \int^{\infty} |(u_1^3)'\, u_2^3 \omega|\, dx]\,,$$

kde N_2 je vhodná konstanta > 0.

Všechny tři integrály, které se vyskytují na pravých stranách obou nerovností, podle předpokladů (3,4), (3,5) konvergují.

3,5. Nechť platí předpoklady odstavce 3,2 pro $a > 0$. Jestliže integrály $\int^{\infty}|\omega|\,dx$, $\int^{\infty}|\omega_1|\,dx$ konvergují, má rovnice (1,2) fundamentální systém (3,2). Podle (3,1) je $\varphi(x) = \psi(x) = 1$.

4. G. Sansone ve své práci [2] dokazuje následující dvě věty o diferenciální rovnici

$$[\vartheta_2 y'']'' - [\vartheta_1 y']' - \omega y' + \vartheta_0 y = 0\,. \tag{4,1}$$

Věta 1. *Nechť v rovnici* (4,1) *jsou* ϑ_2'', ϑ_1', ϑ_0, ω' *spojité funkce pro všechna* $x \geqq a$ *a nechť platí tyto předpoklady*:

$$\begin{aligned} &L \geqq \vartheta_2 > 0\,, \quad \vartheta_2' \geqq 0\,, \quad M \geqq \vartheta_1 \geqq m > 0\,, \quad \vartheta_1 \geqq \vartheta_2'\,, \quad \vartheta_1' \geqq \omega\,, \\ &\vartheta_0 + \tfrac{1}{2}\omega' \geqq \tfrac{1}{2}[\vartheta_1' - \omega]\,, \quad \vartheta_0 + \tfrac{1}{2}\omega' \geqq \tau > 0\,, \ (L, M, m, \tau \text{ jsou konst.}). \end{aligned} \tag{4,2}$$

Jestliže $y(x)$ *je řešení rovnice* (4,1), *pak mohou nastat tyto případy:*

i) $y(x)$ *neosciluje* [*má v intervalu* $\langle a, \infty)$ *konečný počet kořenů*]; *pak je buď* $\lim\limits_{x\to\infty} |y(x)| = 0$ *nebo* $\lim\limits_{x\to\infty} |y(x)| = \infty$;

ii) $y(x)$ *osciluje a není* $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$; *pak*

$$\int_a^{\infty} [y^2(x) + y'^2(x)]\,dx = +\infty\,,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} y'^2(x_n) = \infty$ [$\{x_n\}$ *je posloupnost nulových bodů integrálu* $y(x)$], $y'(x_n)\,.$ $.\,y''(x_n) > 0$ *pro dosti velká* n.

Věta 2. *Nechť platí předpoklady věty* 1. *Nechť je dále pro všechna* $x \geqq a$

$$|\vartheta_1' - \omega| \leqq H_1\,, \quad |\vartheta_0 + \omega'| \leqq H_2\,, \quad (H_1, H_2 \text{ jsou kladné konstanty})\,. \tag{4,3}$$

iii) *Jestliže integrál* $y(x)$ *rovnice* (4,1) *je ohraničený, pak* $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Poznámka 4,1. K důkazu obou vět používá Sansone identity

$$U(x) = U(a) - \int_a^x [\vartheta_2 y''^2 + \vartheta_1 y'^2 + \tfrac{1}{2}(\omega' + \vartheta_0)\, y^2]\,dx\,, \tag{4,4}$$

kde

$$U(x) = y[\vartheta_2 y'']'' - \vartheta_2 y' y'' - \vartheta_1 y y' - \tfrac{1}{2}\omega y^2\,,$$

viz [2], str. 15.

Tvrzení obou vět platí beze změny pro diferenciální rovnici (1,2), jenom místo (4,2) event. (4,3) musíme předpokládat

$$\begin{gathered} -M \leqq A \leqq -m < 0\,, \quad \omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega' \geqq n > 0\,, \\ 0 \leqq A' + \tfrac{1}{2}\omega \leqq \omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega'\,, \end{gathered} \tag{4,2'}$$

event.

$$|\omega - 10A'| \leqq H_1\,, \quad |3(3A^2 + A'') + \omega_1 - \omega'| \leqq H_2 \tag{4,3'}$$

(M, m, n, H_1, H_2 jsou kladné konstanty).

Ovšem k důkazu musíme použít místo (4,4) identity

$$U(x) = U(a) - \int_a^x [(3Ay + y'')^2 + (\omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega')\, y^2 - 4y'^2 A]\, \mathrm{d}t\,,$$

kde

$$U(x) = y'''y - y''y' + 4Ayy' + 3A'y^2 + \tfrac{1}{2}\omega y^2\,.$$

Poznámka 4,2. Jestliže platí předpoklady (4,2'), pak každý integrál $y(x)$ rovnice (1,2), který pro všechna $x \geqq a \in J$ vyhovuje podmínce

$$U(x) = y'''y - y''y' + 4Ayy' + 3A'y^2 + \tfrac{1}{2}\omega y^2 \geqq 0\,,$$

má vlastnost (o_0), viz [2], str. 16—18.

LITERATURA

[1] *R. Bellmann:* Stability theory od differential equations. Ruský překlad, Moskva 1954.

[2] *G. Sansone:* Le equazioni differenziali lineari, omogenee, del quarto ordine, nel campo reale. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. XI, Fašc. III—IV, 1942, 151—196.

[3] *M. Zlámal:* Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Чехосл. мат. журнал, Praha, *6(81)* 1956, 75—93.

[4] *M. Ráb:* Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen dritter Ordnung. Spisy přírodovědecké fakulty MU, Brno, čís. 374, 1956, 177—184.

[5] *M. Ráb:* Asymptotické vlastnosti integrálů diferenciální lineární rovnice 3. řádu. Spisy přírodovědecké fakulty MU, Brno, čís. 379, 1956, 441—454.

[6] *Z. Hustý:* O některých vlastech homogenní lineární diferenciální rovnice 4. řádu. Časopis pro pěst. mat. *83* (1958), č. 2.

[7] *A. Ghizetti:* Un teorema sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari omogenee. Rendiconti di matematica e delle sul applicazioni (*5*), *8*, (1949), 28—42.

[8] *З. Густы:* Колебательные свойства однородного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка. Чех. мат. ж. *8* (1958), č. 1.

[9] *Z. Hustý:* O iteraci homogenních lineárních diferenciálních rovnic. Sborník lesnické fakulty, Brno 1956, 133—148.

Резюме

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

ЗДЕНЕК ГУСТЫ (Zdeněk Hustý), Брно

(Поступило в редакцию 11/I 1957 г.)

В предлагаемой работе исследуются достаточные условия ограниченности решений дифференциального уравнения

$$y'''' + 10Ay'' + (10A' + \omega)\, y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\, y = 0\,, \qquad (1)$$

A'', ω', ω_1 непрерывны в $J \equiv \langle x_0, \infty)$, и выводятся некоторые асимптотические формулы для фундаментальной системы. В целях краткости обозначений были введены следующие определения:

а) Мы скажем, что интерал $y(x)$ дифференциального уравнения обладает свойством

$$
\begin{aligned}
&(O_i) && \Rightarrow |y^{(i)}(x)| \leqq M = \text{konst.} > 0\ , \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ ,\\
&(O_{01}) && \Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| \leqq M\ ,\\
&\vdots\\
&(O_{0123}) && \Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| + |y''(x)| + |y'''(x)| \leqq M\ ,\\
&(o_0) && \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = 0\ ,\\
&(o_{01}) && \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y'(x) = 0\ .
\end{aligned}
$$

б) Мы скажем, что дифференциальное уравнение обладает некоторым из свойств пункта а), если каждое его решение обладает этим свойством.

Уравнение (1) обладает свойством (O_{0123}), если уравнение

$$y'' + Ay = 0 \tag{2}$$

обладает свойством (O_{01}), $|A| + |A'| \leqq M = \text{konst.} > 0$, $\int^{\infty} |\omega|\, \mathrm{d}x < \infty$, $\int^{\infty} \omega_1\, \mathrm{d}x < \infty$.

Уравнение (1) обладает свойством (O_0), если уравнение (2) обладает свойством (O_{01}), $\int^{\infty} |\omega_1 - \omega'|\, \mathrm{d}x < \infty$, $\int^{\infty} |\omega|\, \mathrm{d}x < \infty$.

Пусть $A \geqq \text{konst.} > 0$, $A^{-\frac{1}{4}}$ — выпукло,

$$\int^{\infty} \frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt{A^3}}\, \mathrm{d}x < \infty,\ \int^{\infty} \frac{|\omega|}{A}\, \mathrm{d}x < \infty.$$

Тогда уравнение (1) обладает свойством (O_{01}). Если $\lim\limits_{x\to\infty} A(x) = \infty$, то уравнение (1) обладает свойством (o_{01}).

Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} |A + a| = 0$, $a = \text{konst.}$, $\int^{\infty} |A'|\, \mathrm{d}x < \infty$, $\int^{\infty} |\omega|\, \mathrm{d}x < \infty$. Тогда фундаментальная система решений уравнения (1) имеет вид

$$y_{1,2} = e^{\pm 3 \int_{x_0}^{x} \sqrt{-A(t)}\, \mathrm{d}t} [1 + o(1)]\ , \quad y_{3,4} = e^{\pm \int_{x_0}^{x} \sqrt{-A(t)}\, \mathrm{d}t} [1 + o(1)]\ .$$

Дж. Сансоне в своей работе [2] доказывает две теоремы об асимптотических свойствах интегралов дифференциального уравнения

$$[\vartheta_2 y'']'' - [\vartheta_1 y']' - \omega y' + \vartheta_0 y = 0\ .$$

В настоящей работе приводятся условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения (1), для того, чтобы обе теоремы Сансоне были справедливы и для уравнения (1).

Resumé

ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN LINEARER HOMOGENER DIFFERENTIALGLEICHUNG DER VIERTEN ORDNUNG

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingelangt am 11. I. 1957)

In der vorgelegten Arbeit werden hinreichende Bedingungen für die Begrenztheit der Lösungen der Differentialgleichung

$$y'''' + 10Ay'' + (10A' + \omega)\,y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\,y = 0\,, \qquad (1)$$

A'', ω', ω_1, sind stetige Funktionen von $x \in J \equiv \langle x_0, \infty)$ eingeführt und einige asymptotische Formeln für das Fundamentalsystem abgeleitet. Wegen der Möglichkeit von kürzerer Ausdrückung wurden folgende Definitionen eingeführt:

a) Man sagt, dass die Lösung $y(x)$ einer Differentialgleichung folgende Eigenschaft besitzt

$$\begin{aligned}
&(O_i) &&\Rightarrow |y^{(i)}(x)| \leqq M = \text{konst.} > 0\,,\ i = 0, 1, 2, 3\,,\\
&(O_{01}) &&\Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| \leqq M\,,\\
&\ \ \vdots && \ \ \vdots\\
&(O_{0123}) &&\Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| + |y''(x)| + |y'''(x)| \leqq M\,,\\
&(o_0) &&\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = 0\,,\\
&(o_{01}) &&\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = 0\,,\quad \lim_{x\to\infty} y'(x) = 0\,.
\end{aligned}$$

b) Man sagt, dass die Differentialgleichung eine der Eigenschaften des Absatzes a) besitzt, falls jede ihre Lösung dieselbe Eigenschaft besitzt.

Die Differentialgleichung (1) besitzt die Eigenschaft (O_{0123}), wenn die Differentialgleichung

$$y'' + Ay = 0 \qquad (2)$$

die Eigenschaft (O_{01}) besitzt, $|A| + |A'| \leqq M = \text{konst.} > 0$, $\int^\infty |\omega|\,dx < \infty$, $\int^\infty |\omega_1|\,dx < \infty$.

Die Differentialgleichung (1) besitzt die Eigenschaft (O_0), wenn die Differentialgleichung (2) die Eigenschaft (O_{01}) besitzt,

$$\int^\infty |\omega_1 - \omega'|\,dx < \infty\,,\quad \int^\infty |\omega|\,dx < \infty\,.$$

Es sei $A \geqq \text{konst.} > 0$ und die Funktion $A^{-\frac{1}{4}}$ sei konvex,

$$\int^\infty \frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt{A^3}}\,dx < \infty\,,\quad \int^\infty \frac{|\omega|}{A}\,dx < \infty\,.$$

Dann besitzt die Differentialgleichung (1) die Eigenschaft (O_{01}). Wenn $\lim\limits_{x \to \infty} A(x) = \infty$, so besitzt die Differentialgleichung (1) die Eigenschaft (o_{01}).

Im Falle dass, $\lim\limits_{x \to \infty} |A + a| = 0$, $a =$ konst., $\int^{\infty} |A'| \, dx < \infty$, $\int^{\infty} |\omega| \, dx < \infty$, $\int^{\infty} |\omega_1| \, dx < \infty$, dann besitzt die Differentialgleichung (1) das Fundamentalsystem

$$y_{1,2} = e^{\pm 3 \int_{x_0}^{x} \sqrt{-A(t)} \, dt} [1 + o(1)] , \quad y_{3,4} = e^{\pm \int_{x_0}^{x} \sqrt{-A(t)} \, dt} [1 + o(1)] .$$

G. Sansone beweist in seiner Arbeit [2] zwei Sätze über die asymptotischen Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung

$$[\vartheta_2 y'']'' - [\vartheta_1 y']' - \omega y' + \vartheta_0 y = 0 .$$

In dieser Arbeit werden die Voraussetzungen, die die Koefizienten der Differentialgleichung (1) erfüllen müssen, eingeführt, sollten beide Sansons' Sätze auch für die Differentialgleichung (1) gelten.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O ROZKLADECH EUKLEIDOVSKÝCH PROSTORŮ

MILAN SEKANINA, Brno

DT: 519.51

(Došlo dne 23. ledna 1957)

Věta 1 následujícího článku se zabývá rozkladem eukleidovského prostoru E_n, $n \geqq 2$, na podmnožiny o mohutnosti menší než daná mohutnost $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$. Věta 2 se zabývá rozkladem prostoru E_{2k+1}, $k \geqq 0$, na podmnožiny přímo shodné s podmnožinami z prostoru E_k.

1

Nechť E_n značí n-rozměrný eukleidovský prostor.[1]) Eukleidovským pohybem neboli shodností v E_n rozumíme isometrické zobrazení E_n na sebe. Je známo, že v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic je eukleidovský pohyb vyjádřen soustavou rovnic

$$y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + d_1 \,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = a_{1n}x + \ldots + a_{nn}x_n + d_n \,,$$

kde $\|a_{ik}\|$ je reálná orthogonální matice, $d_1, \ldots, d_n$ jsou reálná čísla. Je-li determinant $|a_{ik}| = 1$, nazveme daný eukleidovský pohyb eukleidovským pohybem 1. druhu (nebo též přímou shodností), je-li $|a_{ik}| = -1$ eukleidovským pohybem 2. druhu (nepřímou shodností). O dvou množinách $M_1, M_2 \subset E_n$ řekneme, že jsou shodné, existuje-li eukleidovský pohyb S tak, že $S(M_1) = M_2$, a píšeme též $M_1 \cong M_2$. Existuje-li S 1. druhu mající tuto vlastnost, píšeme též $M_1 \doteq M_2$ a říkáme, že množiny M_1 a M_2 jsou přímo shodné. Rozkladem na množině M rozumíme systém neprázdných disjunktních podmnožin z M, jehož sjednocení je rovno M.

Definice 1. *Budiž $M \subset E_n$. Řekneme, že $M_1 \subset E_n$ je rozkladová množina na M, když existuje rozklad $\boldsymbol{R}$ na množině M v množiny M_ι, pro něž $M_\iota \cong M_1$. Existuje-li $\boldsymbol{R}$ tak, že platí dokonce $M_\iota \doteq M_1$, řekneme, že M_1 je přímou rozkladovou množinou na M.*

Bezprostředním důsledkem definice 1 je

---

[1]) Definice základních pojmů z analytické geometrie viz na př. E. Čech: Základy analytické geometrie I, Praha 1951. 0-rozměrným eukleidovským prostorem rozumíme prostor složený z jediného bodu.

Lemma 1. *Nechť $M_1, M_2, M_3 \subset E_n$. Nechť M_1 je rozkladovou množinou na M_2, nechť M_2 je rozkladovou množinou na M_3. Potom M_1 je rozkladovou množinou na M_3. Tvrzení platí, zaměníme-li pojem „rozkladová množina" za pojem „přímá rozkladová množina".*

2

Věta 1. *Budiž $n \geqq 2$, $\mathfrak{m}$ mohutnost menší než $2^{\aleph_0}$ různá od 0, $\mathfrak{S}$ systém o mohutnosti $2^{\aleph_0}$ neprázdných podmnožin M_ι z E_n, pro něž platí $\overline{\overline{M}}_\iota \leqq \mathfrak{m}$ ($\overline{\overline{M}}$ = mohutnost množiny M). Potom existuje systém $\mathfrak{S}'$ podmnožin M_ι, pro něž platí:*

$$1.\ M^\iota \doteq M_\iota . \quad 2.\ \mathfrak{S}' \text{ je rozklad na } E_n .$$

Důkaz. Nechť V_n značí zaměření prostoru E_n. Je-li v E_n dán souřadnicový systém S, určený bodem o a ortogonálními vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, potom shodnost prostoru E_n definovanou rovnicemi

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos\varphi \,.\, x_1 - \sin\varphi \,.\, x_2 \,, \\ y_2 &= \sin\varphi \,.\, x_1 + \cos\varphi \,.\, x_2 \,, \\ y_3 &= x_3 \,, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= x_n \,, \end{aligned}$$

kde $0 \leqq \varphi < 2\pi$, y_i resp. x_i jsou souřadnice bodu y resp. x v S, označme (S, φ) [tedy $(S, \varphi)(x) = y$]. Budiž Ω počáteční ordinální číslo patřící k mohutnosti $2^{\aleph_0}$. Uspořádejme body prostoru E_n v transfinitní posloupnost

$$x_0, x_1, \ldots, x_\tau, \ldots, \tau < \Omega \,.$$

Rovněž $\mathfrak{S}$ uspořádejme v transfinitní posloupnost typu Ω (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že množina indexů ι je množinou ordinálních čísel menších než Ω):

$$M_0, \ldots, M_\tau, \ldots, \tau < \Omega \,.$$

Věta bude dokázána, když sestrojíme transfinitní posloupnost podmnožin z E_n

$$M^0, M^1, \ldots, M^\tau, \ldots, \tau < \Omega \,, \tag{2.1}$$

takovou, že platí

$$1.\ \tau < \Omega \Rightarrow M^\tau \doteq M_\tau \,, \tag{2.2}$$

$$2.\ 0 \leqq \sigma < \tau < \Omega \Rightarrow M^\tau \cap M^\sigma = \emptyset \,, \tag{2.3}$$

$$3.\ x_\tau \in \bigcup_{\sigma \leqq \tau} M^\sigma \,. \tag{2.4}$$

V dalším sestrojíme posloupnost (2.1) s vlastnostmi (2.2) až (2.4) transfinitní indukcí.

Nechť $x \in M_0$. Nechť T je translace, pro niž platí $T(x) = x_0$. Označme $T(M_0) = M^0$. (2.2)—(2.4) je triviálně splněno. Budiž nyní $\nu < \Omega$, $\nu \geqq 1$. Předpokládejme, že pro $\sigma < \nu$ je definováno M^σ s vlastnostmi (2.2) až (2.4). Položme $N_\nu = \bigcup_{\sigma<\nu} M^\sigma$. Poněvadž $\overline{\overline{M^\sigma}} \leqq \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, $\bar{\nu} < 2^{\aleph_0}$, je $E_n - N_\nu \neq \emptyset$. Nechť ν_1 je prvý index $\varkappa$, pro nějž platí $x_\varkappa \in E_n - N_\nu$. Z (2.4) plyne, že $\nu_1 \geqq \nu$. Zvolme $x \in M_\nu$ a proveďme translaci T, pro niž $T(x) = x_{\nu 1}$. Položme $M^*_\nu = T(M_\nu)$. Nyní ukážeme, že existuje lineární podprostor dimense $n - 2$ (označíme jej U) takový, že

$$x_{\nu_1} \in U \quad \text{a} \quad U \cap N_\nu = \emptyset\,. \tag{2.5}$$

Nechť nejprve $n = 2$. Potom za U položíme bod x_{ν_1}. Nechť $n > 2$. Označme podprostor, skládající se jen z bodu x_{ν_1}, jako U^0. Potom U^0 je dimense 0 a platí pro U^0 (2.5). Předpokládejme, že existuje lineární podprostor dimense $k < n - 2$ U^k tak, že splňuje (2.5). Nechť V^k značí zaměření prostoru U^k, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ nechť je base ve V^k, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ base ve V_n, která vznikne doplněním base $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ (pro $k = 0$ je množina těchto vektorů prázdná). Nechť γ je reálné číslo. Položme

$$U_\gamma = \mathop{\mathrm{E}}_{y}[y = x_{\nu_1} + (\mathbf{v}_{k+2} + \gamma\mathbf{v}_{k+1})\,\lambda + \mathbf{v}_k\lambda_k + \ldots + \mathbf{v}_1\,.\,\lambda_1,\ \lambda, \lambda_k, \ldots, \lambda_1 \ \text{reálná čísla}]\,.$$

Nechť $\gamma \neq \gamma'$ a $y \in U_\gamma \cap U_{\gamma'}$. Je

$$y = x_{\nu_1} + (\mathbf{v}_{k+2} + \gamma\mathbf{v}_{k+1})\,\lambda + \mathbf{v}_k\lambda_k + \ldots + \mathbf{v}_1\lambda_1\,,$$
$$y = x_{\nu_1} + (\mathbf{v}_{k+2} + \gamma'\mathbf{v}_{k+1})\,\lambda' + \mathbf{v}_k\lambda'_k + \ldots + \mathbf{v}_1\lambda'_1\,.$$

Odtud $\lambda = \lambda'$, $\gamma\lambda = \gamma'\lambda'$, z čehož plyne $\lambda = \lambda' = 0$, tedy $y \in U^k$. Když $\gamma \neq \gamma'$, $y \in N_\nu$, $y \in U_\gamma$, potom je y non $\in U_{\gamma'}$. Poněvadž $\overline{\overline{N_\nu}} < 2^{\aleph_0}$, existuje γ_1 tak, že $U_{\gamma_1} \cap N_\nu = \emptyset$. Položíme $U^{k+1} = U_{\gamma'}$. U^{k+1} zřejmě splňuje (2.5). Odsud plyne existence podprostoru U dimense $n - 2$ s vlastností (2.5). Nechť $\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \ldots, \mathbf{w}_n$ tvoří orthonormální basi v U (pro $n = 2$ je množina těchto vektorů prázdná). Existují vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ tak, že $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \ldots, \mathbf{w}_n$ tvoří orthonormální basi v E_n. Souřadnicový systém S budiž určen bodem x_{ν_1} jako počátkem a vektory $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$. Označme nyní transformaci (S, φ) jako R_φ, $R_\varphi(M^*_\nu)$ označme kratčeji $M^*_{\nu,\varphi}$. Budiž nyní $x = (x_1, \ldots, x_n) \in N_\nu$. Protože x non $\in U$, je $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Připusťme, že existuje φ_1 tak, že $x \in M^*_{\nu,\varphi_1}$. Potom existuje $x' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in M^*_\nu$ tak, že $R_{\varphi_1}(x') = x$. Je

$$x_1 = \cos\varphi_1\,.\,x'_1 - \sin\varphi\,.\,x'_2\,, \quad x_2 = \sin\varphi_1\,.\,x'_1 + \cos\varphi\,.\,x'_2\,. \tag{2.6}$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} x_1x'_1 + x_2x'_2 &= \cos\varphi_1[(x'_1)^2 + (x'_2)^2]\,,\\ x_1x'_2 - x_2x'_1 &= -\sin\varphi_1[(x'_1)^2 + (x'_2)^2]\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Je $(x'_1)^2 + (x'_2)^2 \neq 0$ (plyne z (2.6)). Tedy rovnicemi (2.6) a (2.7) je $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ jednoznačně určeno. Odtud plyne, že $x \in N_\nu$ je prvkem maximálně $\overline{\overline{M_\nu}}$ množin $M^*_{\nu,\varphi}$. Poněvadž $\overline{\overline{M_\nu}} < 2^{\aleph_0}$ a $\overline{\overline{N_\nu}} < \mathfrak{m}\,.\,\bar{\nu} < 2^{\aleph_0}$, je mohutnost množiny těch φ, pro něž $M^*_{\nu,\varphi} \cap N_\nu \neq \emptyset$, menší než $2^{\aleph_0}$, existuje tedy $\varphi' \in [0, 2\pi)$ tak, že $M^*_{\nu,\varphi'} \cap \cap N_\nu = \emptyset$. Nechť $M^\nu = M^*_{\nu,\varphi}$. Je $M^\nu \doteq M_\nu$, $M^\nu \cap M^\sigma = 0$ pro $\nu > \sigma$, podle definice ν_1 je $x_\nu \in \bigcup_{\sigma \leqq \nu} M^\sigma$. Tedy M^ν splňuje (2.2)—(2.4). Tím je věta dokázána.

Důsledek věty 1. *Každá podmnožina $M \subset E_n$, $n \geqq 2$, pro níž $0 < \overline{\overline{M}} < 2^{\aleph_0}$, je přímá rozkladová množina na E_n.*

3

Lemma 2. *Budiž $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$. Budiž v $(2k + 1)$-rozměrném eukleidovském prostoru E_{2k+1} $(k \geqq 0)$ dáno $\mathfrak{m}$ lineárních podprostorů E_k^ι (ι probíhá množinu I o mohutnosti $\mathfrak{m}$) dimense k. Budiž $\iota_1 \in I$, budiž x libovolný, ale pevně zvolený prvek z E_k' takový, že x non $\in E_k^\iota$, $\iota \in I$, $\iota \neq \iota_k$. Potom existuje k-rozměrný podprostor E_k^ι, pro nějž platí:*

1. $E_k' \subset E_{2k+1}$, 2. $E_k' \cap E_k^{\iota_1} = \{x\}$, 3. $E_k' \cap E_k^\iota = \emptyset$ *pro* $\iota \in I$, $\iota \neq \iota_1$.

Důkaz. Pro $k = 0$ je tvrzení triviální, nechť tedy dále $k > 0$. Nechť V_k^ι značí zaměření prostoru E_k^ν. Nechť (E_k^ι, x) je nejmenší (ve smyslu množinové inkluse) z lineárních prostorů z E_{2k+1} obsahujících E_k^ι i x. Poněvadž $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$ a E_{2k+1} nemůže být sjednocením množiny o mohutnosti menší než $2^{\aleph_0}$ lineárních prostorů dimense nanejvýš rovné $k + 1$, existuje $x_1 \in E_{2k+1} - \bigcup_{\iota \in I} (E_k^\iota, x)$. Tedy speciálně $x_1 \neq x$. Body x_1 a x určují přímku p_1 (její zaměření nechť má basi $\mathfrak{p}_1$), která má tyto vlastnosti:

α) $p_1 \cap E_k^{\iota_1} = \{x\}$.
β) $\mathfrak{p}_1$ non $\in V_k^\iota$, $\iota \in I$.
γ) $p_1 \cap E_k^\iota = \emptyset$, $\iota \in I$, $\iota \neq \iota_1$.

Ad α) Kdyby $x \neq y \in p_1 \cap E_k^{\iota_1}$, potom $p_1 \subset E_k^{\iota_1}$, tedy $x_1 \in E_k^{\iota_1}$, což je spor s volbou x_1.

Ad β). Připusťme, že $\mathfrak{p}_1 \in V_k^\iota$, $\iota \in I$. Potom $x + \alpha \,.\, \mathfrak{p}_1 \in (E_k^\iota, x)$, α reálné číslo. Tedy $x_1 \in (E_k^\iota, x)$, což je spor s volbou x_1.

Ad γ). Připusťme, že $z \in p_1 \cap E_k^\iota$, $\iota \neq \iota_k$. Potom vektor určený body z a x patří do zaměření prostoru (E_k^ι, x) a odtud jako v ad β) $x_1 \in (E_k^\iota, x)$, což je spor.

Nechť $\varkappa$ je přirozené číslo splňující nerovnost $0 < \varkappa < k$. Předpokládejme, že v E_{2k+1} existují přímky $p_1, \ldots, p_\varkappa$ (base v jejich zaměřeních nechť tvoří vektory $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa$) s těmito vlastnostmi:

$1^\varkappa$. $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa$ jsou lineárně nezávislé vektory.

$2^\varkappa$. Pro lineární prostor $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$ určený vektory $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa$ a bodem x platí:

a) $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x) \cap E_k^{\iota_1} = \{x\}$,
b) $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$, $\cap E_k^\iota = \emptyset$, $\iota \in I$, $\iota \neq \iota_1$.

$3^\varkappa$. Pro vektorový prostor $(\mathfrak{p}_k, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa)$ určený vektory $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa$ platí $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa) \cap V_k^\iota = \{\mathbf{o}\}$, $\iota \in I$, $\mathbf{o}$ je nulový vektor.

p_1 splňující shora uvedené podmínky α) až γ) splňuje též zřejmě 1^1, 2^1, 3^1. $(E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$ budiž nejmenší lineární podprostor v E_{2k+1}, obsahující E_k^ι a x a jehož zaměření obsahuje vektory $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa$. Dimense prostoru $(E_k^\iota, \mathfrak{p}_k, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$ je $k + \varkappa + 1$ pro $\iota \neq \iota_1$, $k + \varkappa$ pro ι_1. Poněvadž těchto podprostorů je m a $k + \varkappa + 1 < 2k + 1$, existuje $x_{\varkappa+1} \in E_{2k+1} - \bigcup_{\iota \in I} (E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$. Body $x_{\varkappa+1}$ a x určují přímku $p_{\varkappa+1}$ (basi v jejím zaměření označme $\mathfrak{p}_{\varkappa+1}$), pro niž platí:

$1^{\varkappa+1}$. Vektory $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}$ jsou lineárně nezávislé.

$2^{\varkappa+1}$. Pro lineární prostor $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}, x)$ určený bodem x a vektory $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}$ platí:

a) $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}, x) \cap E_k^{\iota_1} = \{x\}$,

b) $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}. x) \cap E_k^\iota = \emptyset$, $\iota \in I$, $\iota \neq \iota$.

$3^{\varkappa+1}$. Pro vektorový prostor $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+k})$ platí

$$(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}) \cap V_k^\iota = \{\mathbf{o}\}\,.$$

Ad $1^{\varkappa+1}$. Připusťme, že $l_1\mathfrak{p}_1 + \ldots + l_\varkappa\mathfrak{p}_\varkappa + l_{\varkappa+1}\mathfrak{p}_{\varkappa+1} = \mathbf{o}$, $\sum_{i=1}^{\varkappa+1} l_k^2 \neq 0$. Poněvadž podle $1^\varkappa$ $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}^\varkappa$ jsou nezávislé vektory, je $l_{\varkappa+1} \neq 0$. Potom $\mathfrak{p}_{\varkappa+1}$ je prvkem zaměření lineárního prostoru $(E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$ a tedy $x_{\varkappa+1} \in (E_\varkappa^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$, což je spor.

Ad $2^{\varkappa+1}$. a) Připusťme, že $x \neq y \in (\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}, x) \cap E_k^{\iota_1}$. Nechť vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_1$ tvoří basi ve $V_k^{\iota_1}$. Potom platí $l_1\mathfrak{p}_1 + \ldots + l_{\varkappa+1}\mathfrak{p}_{\varkappa+1} = h_1\mathbf{v}_1 + \ldots + h_k\mathbf{v}_k$ pro vhodná reálná čísla $l_1, \ldots, l_{\varkappa+1}, h_1, \ldots, h_k$, kde $\sum_{i=1}^{\varkappa+1} l_i^2 \neq 0$. Protože platí $3^\varkappa$, je $l_{\varkappa+1} \neq 0$. Tedy $\mathfrak{p}_{\varkappa+1}$ patří do zaměření prostoru $(E_k^{\iota_1}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$, odkud plyne $x_{\varkappa+1} \in (E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$, což je spor.

b) Připusťme, že $y \in (\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}, x) \cap E_k^\iota$ pro jisté $\iota \neq \iota_1$. Potom $y = x + l_1\mathfrak{p}_1 + \ldots + l_{1+1}\mathfrak{p}_{\varkappa+k}$. Z $2^\varkappa$ b) plyne, že $l_{\varkappa+1} \neq 0$. Tedy $\mathfrak{p}_{\lambda+1}$ je prvkem zaměření prostoru $(E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$, tedy $x_{\varkappa+1} \in (E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$, což je spor.

Ad $3^{\varkappa+1}$. Připusťme, že $\mathbf{o} \neq \mathbf{v} \in (\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}) \cap V_k^\iota$ pro jisté ι. Z $3^\varkappa$ plyne, že potom je $\mathfrak{p}_{\varkappa+1}$ prvkem zaměření prostoru $(E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$. Odtud plyne, že $x_{\varkappa+1} \in (E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$, což je spor.

Položíme-li $\varkappa = k - 1$, zjistíme podle 1^k, 2^k, 3^k, že prostor $(x, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k)$ splňuje vlastnosti 1, 2, 3 uvedené ve znění lemmatu.

Věta 2. *Budiž I množina indexů, $\bar{\bar{I}} = 2^{\aleph_0}$. Nechť ke každému $\iota \in I$ je přiřazena množina M_ι, $\emptyset \neq M \subset E_k \subset E_{2k+1}$ ($k \geqq 0$). Potom existuje systém $\mathfrak{S}$ podmnožin M^ι z E_{2k+1} takový, že*

1. *$M^\iota \simeq M_\iota$,* 2. *$\mathfrak{S}$ je rozklad na E_{2k+1}.*

Důkaz. Uspořádejme body z E_{2k+1} v posloupnost typu Ω

$$x_0, x_1, \ldots, x_\tau, \ldots, \tau < \Omega .$$

Můžeme předpokládati, že množina indexů I je množina ordinálních čísel menších než Ω. Ukážeme, že lze sestrojit posloupnost

$$M^0, M^1, \ldots, M^\tau, \ldots, \tau < \Omega , \tag{3.1}$$

podmnožin z E_{2k+1} tak, že platí:

1. $M^\tau \simeq M_\tau$, $M^\tau \cap M^\sigma = \emptyset$, $\sigma < \lambda$.

2. Ke každému $\tau < \Omega$ je přiřazen k-rozměrný lineární podprostor $E_k^\tau \subset E_{2k+1}$ tak, že platí:

$$M^\tau \subset E_k^\tau , \quad E_k^\tau \cap E_k^\sigma \subset \bigcup_{\nu' \leqq \tau} M^{\nu'} , \quad \tau > \sigma . \tag{3.2}$$

3. $x_\tau \in \bigcup_{\sigma \leqq \tau} M^\sigma$.

Posloupnost (3.1) s vlastnostmi (3.2) sestrojíme transfinitní indukcí. Zvolme $x \in M_0$ a nechť T je translace prostoru E_{2k+1}, pro niž $T(x) = x_0$. Položme $T(M_0)$ rovno M^0, $E_k^0 = T(E_k)$. Vlastnosti (3.2) jsou pro M^0 a E_k^0 zřejmě splněny. Nechť $0 < \nu < \Omega$ a nechť jsou definovány M^τ, E_k^τ pro $\tau < \nu$. Protože $\bigcup_{\tau<\nu} M^\tau \neq E_{2k+1}$, existuje bod x_{ν_1}, kde ν_1 je první index $\varkappa$, pro nějž platí $x_\varkappa$ non $\in \bigcup_{\tau<\nu} M^\tau$. Podle vlastnosti (3) je $\nu_1 \geqq \nu$. Mohou nastat dva případy

a) x_{ν_1} non $\in \bigcup_{\tau<\nu} E_k^\tau$,

b) $x_{\nu_1} \in \bigcup_{\tau<\nu} E_k^\tau$.

Definujme nyní E^ν a $\mathfrak{M}_\nu$ takto:

V případě a) nechť E^ν je libovolně, ale pevně zvolený k-rozměrný lineární podprostor v E_{2k+1} takový, že $x_{\nu_1} \in E^\nu$. Systém všech E_k^τ, $\tau < \nu$, označme $\mathfrak{M}_\nu$.

V případě b) existuje právě jedno τ_1 tak, že $x_{\nu_1} \in E_k^{\tau_1}$, jak plyne z 2. Položme $E^\nu = E_k^{\tau_1}$ a systém $\{E_k^\tau\}_{\tau<\nu} - \{E_k^{\tau_1}\}$ označme $\mathfrak{M}_\nu$.

Podle lemmatu 2 existuje k-rozměrný lineární podprostor E' v E_{2k+1} tak, že

1'. $x_{\nu_1} \in E'$,

2'. $E' \cap E = \emptyset$, $E \in \mathfrak{M}_\nu$,

3'. $E^\nu \cap E' = \{x_{\nu_1}\}$.

Zvolme $x \in M_\nu$. Existuje přímá shodnost T' v E_{2k+1} tak, že $T'(x) = x_{\nu_1}$, $T'(E_k) = E'$. Nechť $M^\nu = T'(M_\nu)$, $E_k^\nu = E'$. Ukážeme, že pro M^ν, E_k^ν platí (3.2).

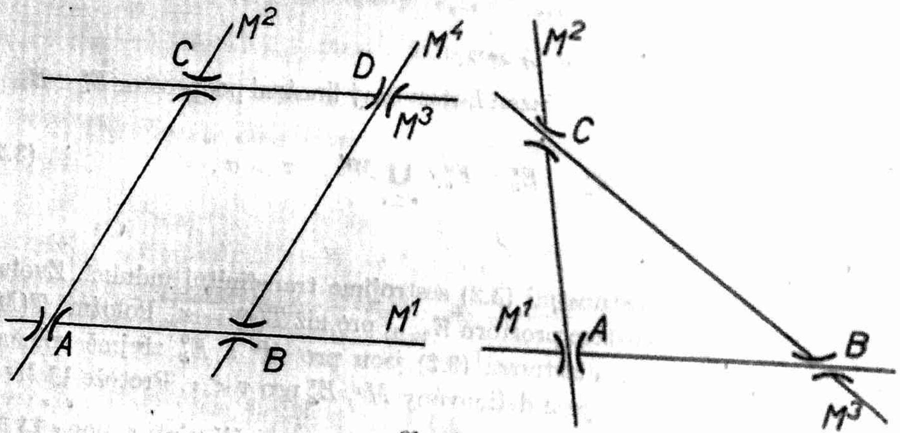
Ad 1. $M^\nu \simeq M_\nu$ plyne ihned z definice M^ν. $M^\nu \cap M^\sigma = \emptyset$ pro $\nu > \sigma$ plyne z inklusí $M^\sigma \subset E_k^\sigma$ pro $\sigma \leqq \nu$, z definice E_k^ν a z vlastností 1', 2', 3' pro E_k^ν.

Ad 2. Plyne z 2' a 3'.

Ad 3. Plyne ihned z definice bodu x_{ν_i}.

Tím je dokázána existence posloupnosti (3.1). Vlastnosti 1 a 3 ukazují, že množiny této posloupnosti tvoří rozklad na E_{2k+1} s žádanými vlastnostmi.

Důsledek věty 2. *Budiž $\emptyset \neq M \subset E_2 \subset E_{2k+1}$. Potom M je přímá rozkladová množina prostoru E_{2k+1}.*



Obr. 1.

Ukažme ještě, že existuje neprázdná podmnožina přímky, která není rozkladovou množinou na rovině. Příkladem takové množiny je množina, kterou dostaneme, když z přímky vypustíme bod. Označme tuto množinu jako M. Připusťme, že existuje rozklad na rovině E_2 na množiny shodné s M. Potom nastane jeden z případů naznačených na obrázku 1. Zvolíme-li bod X uvnitř rovnoběžníka $ABCD$, resp. trojúhelníka ABC, vidíme, že pro každou $M' \cong M$, pro niž $X \in M'$, je aspoň jeden z průniků $M' \cap M^i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ neprázdný. To je spor. M tedy není rozkladová množina roviny.

4

Věta 1 pro $n = 1$ neplatí. To se ihned zjistí na př. v případě, že se $\mathfrak{E}$ skládá z množin přímo shodných s množinou $\{0, 1, 3\}$ (pokládáme E_1 za číselnou osu).[2])

Pro přímku platí na př. tato věta:

Věta 3. *Budiž M množina bodů na číselné ose, $\overline{\overline{M}} \geq \aleph_0$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom existuje $N \supset M$ tak, že $\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{M}}$, N je přímou rozkladovou množinou na přímce a $d(N) \leq d(M) + \varepsilon$ ($d(M)$ značí průměr množiny M).*

[2]) Rozkladovými množinami na přímce se zabývá připravovaný článek Koutský-Sekanina: O rozkladových množinách na přímce.

Důkaz. Položme $M_1 = M$ v případě, že M je neohraničená, $M_1 = M \cup \{d(M) + \varepsilon\}$, je-li M ohraničená. Nechť N' značí aditivní grupu vytvořenou množinou M_1. Je $\overline{N'} = \overline{M}$. Třídy mod N' v aditivní grupě všech reálných čísel jsou množiny přímo shodné s N. Je-li M neohraničené, položíme $N = N'$. Budiž M ohraničená množina. Položme $A = N' \cap [\inf M - \frac{\varepsilon}{2}, \sup M + \frac{\varepsilon}{2})$. Nechť T je translace, pro niž $T(0) = d(M) + \varepsilon$. Poněvadž $d(M) + \varepsilon \in N'$, je $T^k(A) \subset N'$ pro k celé (T^k značí k-tou mocninu translace T v grupovém slova smyslu, při čemž násobení je definováno jako skládání zobrazení). Je zřejmě $T^{k_1}(A) \cap T^{k_2}(A) = \emptyset$ pro $k_1 \neq k_2$. Konečně pro $x \in N'$ existuje k tak, že $x \in T^k(A)$. Tvoří tedy $\{T^k(A)\}$, k celé, rozklad na N'. Je tedy A přímou rozkladovou množinou na N a, podle lemmatu 1, je též přímou rozkladovou množinou na přímce. Můžeme položit $N = A$. Jest zřejmé, že $d(A) \leqq d(M) + \varepsilon$. Tím je věta dokázána.

Ukažme ještě na Cantorově množině, že tvrzení věty 3 nelze v podstatě zesílit. Cantorova množina C je množina reálných čísel c s triadickým rozvojem $c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}$, kde $c_i = 0$ nebo 2.

Je dobře známo, že $\mu(C) = 0$.[3]) H. Steinhaus dokázal následující větu:[4])

(S) *Ke každému číslu $0 \leqq \alpha \leqq 1$ existují v C čísla x, y tak, že*

$$x - y = \alpha . \tag{4.1}$$

Z (S) plyne

Lemma 3. *Nechť $\alpha \in [-1, 1]$. Nechť T je translace reálné osy o číslo α. Nechť $M \supset C$. Potom $M \cap T(M) \neq \emptyset$.*

Důkaz. Z (4.1) plyne, že existují $x, y \in C$ tak, že $x - y = \alpha$. Poněvadž $0 \in C$, je $0 \in M$ a $T(0) = \alpha \in T(M)$ a též $\alpha + y \in T(M)$. Poněvadž $\alpha + y = x$, je $x \in T(M) \cap M$.

Na základě lemmatu 3 dokážeme toto tvrzení:

Věta 4. *Nechť $M \supset C$ je přímá rozkladová množina na číselné ose. Potom*

$$1.\ d(M) > 1, \qquad 2.\ \mu^*(M) \geqq 1.$$

Důkaz. Nechť $M \supset C$, M je přímá rozkladová množina na číselné ose. Existuje rozklad $\boldsymbol{R} = \{T_\iota(M)\}$, kde T_ι je translace, ι probíhá jistou množinu I. Nechť $t_\iota = T_\iota(0)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $M \in \boldsymbol{R}$.

Ad 1. Připusťme, že $d(M) = 1$. Potom $M \subset [0, 1]$. Protože interval $[0, 1]$ není rozkladovou množinou na přímce, existuje $z \in [0, 1]$ tak, že z non $\in M$. Existuje

[3]) $\mu(M)$ značí Lebesgueovu míru množiny M, $\mu^*(M)$ vnější Lebesgueovu míru množiny M.

[4]) H. Steinhaus: Nowa własność mnogości G. Cantora, Wektor 7 (1917), citováno dle Fortschritte d. Math. XLVI, 1. díl, s. 300 (1916–18).

$M_{\iota_1} \neq M$ tak, že $z \in M_{\iota_1}$. Poněvadž předpokládáme, že $d(M) = 1$ a je $M_{\iota_1} \cap [0, 1] \neq \emptyset$, je $t_{\iota_1} \in [-1, 1]$. Podle lemmatu 3 je $M_{\iota_1} \cap M \neq \emptyset$, což je spor.

Ad 2. Připusťme, že existují $\mu, \varkappa \in I$, $\mu \neq \varkappa$ tak, že $|t_\mu - t_\varkappa| \leqq 1$. Potom systém množin $\{T_\mu^{-1} T_\iota(M)\}$, $\iota \in T$ je opět rozklad přímky E_1 na množiny přímo shodné s M. Označme jej $\boldsymbol{R}_1$. Je $T_\mu^{-1}\, T_\mu(M) = M \in \boldsymbol{R}_1$ a $T_\mu^{-1}\, T_\varkappa(M) \in \boldsymbol{R}_1$. Je dále $T_\mu^{-1}\, T_\varkappa(0) = t_\varkappa - t_\mu \in [-1, 1]$. Podle lemmatu 3 je $T_\mu^{-1}\, T_\varkappa(M) \cap M \neq \emptyset$, což je spor. Je tedy pro $\mu \neq \varkappa$

$$|t_\mu - t_\varkappa| > 1\,. \tag{4.2}$$

Odtud plyne, že $\overline{\overline{I}} \leqq \aleph_0$. Kdyby tomu totiž tak nebylo, existoval by hromadný bod množiny $\{t_1\}$, $\iota \in I$, což je ve sporu s (4.2). Nechť $N_\iota = M_\iota \cap [0, 1]$. Uvažme o systému podmnožin $T_\iota^{-1}(N_\iota)$ (kteréžto množiny leží v M). Nechť I_ι značí průnik všech intervalů (z množiny intervalů otevřených) uzavřených i polootevřených) obsahujících $T_\iota^{-1}(N_\iota)$. Z (4.2) plyne, že $I_\mu \cap I_\varkappa = \emptyset$ pro $\mu \neq \varkappa$. Odtud již snadno dostaneme

$$\mu^*(M) \geqq \sum_{\iota \in I} \mu^*[T_\iota^{-1}(N_\iota)] = \sum_{\iota \in I} \mu^*(N_\iota) \geqq 1\,,$$

odkud $\mu^*(M) \geqq 1$, c. b. d.

Резюме

РАЗЛОЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

МИЛАН СЕКАНИНА (Milan Sekanina), Брно

(Поступило в редакцию 23/I 1957 г.)

Пусть E_n означает n-мерное евклидово пространство, $M_1, M_2 \subset E_n$; $M_1 \doteq M_2$ значит, что существует движение 1-го рода в E_n T такое, что $T(M_1) = M_2$. В работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $n \geqq 2$, $0 < \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, $\mathfrak{S}$ — *система непустых множеств* M_ι *из* E_n, $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} = 2^{\aleph_0}$, $\overline{\overline{M}}_\iota \leqq \mathfrak{m}$. [$\overline{\overline{\mathfrak{S}}}$ ($\overline{\overline{M}}_\iota$) *означает мощность множества* $\mathfrak{S}$ (M_ι)]. *Тогда существует система* $\mathfrak{S}'$ *множеств* M^ι, *для которой* 1. $M^\iota \doteq M_\iota$, 2. $\mathfrak{S}'$ *является разложением пространства* E_n.

Теорема 2. *Пусть* I — *множество индексов*, $\overline{\overline{I}} = 2^{\aleph_0}$. *Пусть к каждому* $\iota \in I$ *соответствует* $M_\iota \neq \emptyset$, $M_\iota \subset E_k \subset E_{2k+1}$. *Тогда существует система* $\mathfrak{S}$ *множеств* M^ι *из* E_{2k+1}, *для которой*: 1. $M^\iota \doteq M_\iota$, 2. $\mathfrak{S}$ *является разложением пространства* E_{2k+1}.

Теоремы 3 и 4 касаются разложения прямой:

Summary

DECOMPOSITIONS OF THE EUCLIDEAN SPACES

MILAN SEKANINA, Brno

(Received January 23, 1957)

E_n means n-dimensional euclidean space. M_1, $M_2 \subset E_n$, $M_1 \doteq M_2$ means, that there exists a movement of the 1. sort in E_n T, so that $T(M_1) = M_2$. In the present article following theorems are proved:

Theorem 1. *Let $n \geqq 2$, $0 < \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, let $\mathfrak{S}$ be a system of the subsets M_ι ($\neq \emptyset$) of E_n, $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} = 2^{\aleph_0}$, $\overline{\overline{M}}_\iota \leqq \mathfrak{m}$ [$\overline{\overline{\mathfrak{S}}}$ ($\overline{\overline{M}}_\iota$) means the cardinal number of $\mathfrak{S}$ (M_ι)]. Then there exists a system $\mathfrak{S}'$ of the subsets M^ι of E_n with the following properties*: 1. $M^\iota \doteq M_\iota$, 2. *$\mathfrak{S}'$ is a decomposition of E_n.*

Theorem 2. *Let I be a set of indices, $\overline{\overline{I}} = 2^{\aleph_0}$. Let to every $\iota \in I$ belong $M_\iota \neq \emptyset$, $M_\iota \subset E_k \subset E_{2k+1}$. Then there exists a system $\mathfrak{S}$ of the subsets M^ι of E_{2k+1} with following properties*: 1. $M^\iota \doteq M_\iota$, 2. *$\mathfrak{S}$ is a decomposition of E_{2k+1}.*

Theorems 3 and 4 are dealing with the decomposition of the straight line.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA O ŘEŠENÍCH ROVNICE $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ CELÝMI NEZÁPORNÝMI ČÍSLY

LADISLAV KOSMÁK, Brno

DT: 519 1

(Došlo dne 16. února 1957)

Článek pojednává o jistých extremálních vlastnostech t. zv. hlavního řešení rovnice (1) (srv. práci [1]).

V článku [1] se K. ČULÍK zabývá otázkou, pro která nezáporná celá čísla $r_1, r_2, \dots, r_k$, jež vyhovují rovnici

$$\sum_{i=1}^{k} r_i = n \quad (k, n \text{ přirozená čísla}), \tag{1}$$

nabude součet $\sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$ ($c \geqq 0$ celé) minimální hodnoty. Dokazuje, že to nastane pro t. zv. hlavní řešení $h_1, h_2, \dots, h_k$ rovnice (1), které je definováno tak, že z čísel $h_1, h_2, \dots, h_k$ je $k - n + k\left[\frac{n}{k}\right]$ rovno $\left[\frac{n}{k}\right]$ a ostatní jsou rovna $\left[\frac{n}{k}\right] + 1$; toto řešení je (viz [1]) charakterisováno vztahem

$$\max_{1\leqq i\leqq k} h_i - \min_{1\leqq i\leqq k} h_i \leqq 1 .$$

Při důkazu používá Čulík pomocných vztahů mezi celými nezápornými čísly c, p, r:

$$2\binom{r}{c} \leqq \binom{p}{c} + \binom{2r-p}{c} \quad (\text{při } p \leqq 2r), \tag{2}$$

$$\binom{r}{c} + \binom{r+1}{c} \leqq \binom{p}{c} + \binom{2r-p+1}{c} \quad (\text{při } p \leqq 2r+1). \tag{3}$$

V této poznámce je podán jednoduchý důkaz těchto vztahů, který zároveň umožňuje zesílit tvrzení uvedené věty.

Pišme nerovnost (2) ve tvaru

$$\binom{r}{c} - \binom{p}{c} \leqq \binom{2r-p}{c} - \binom{r}{c};$$

pro důkaz můžeme předpokládat, že $p < r$. Označme $b_t = \binom{t}{c}$ pro $t = 0, 1, \ldots$; posloupnost $\{b_t\}_{t=0}^{\infty}$ zřejmě neklesá a pro $c > 0$ vybraná posloupnost $\{b_{t+c-1}\}_{t=0}^{\infty}$ roste. Položme $d_t = b_{t+1} - b_t$, $t = 0, 1, \ldots$, takže $d_t = \binom{t}{c-1}$. Pak je

$$\binom{2r-p}{c} - \binom{r}{c} = b_{2r-p} - b_r = d_{2r-p-1} + d_{2r-p-2} + \ldots + d_r \geqq$$
$$\geqq d_{r-1} + d_{r-2} + \ldots + d_p = b_r - b_p = \binom{r}{c} - \binom{p}{c}.$$

Ostrá nerovnost platí právě tehdy, když $p \neq r$, $2 \leqq c \leqq \max\{p, 2r - p\}$. Obdobně se dokáže (3), kde ostrá nerovnost platí právě tehdy, je-li $p \neq r$, $p \neq r + 1$, $2 \leqq c \leqq \max\{p, 2r - p + 1\}$. Odtud plyne (viz důkaz věty 2 v citované Čulíkově práci):

Nechť $h_1, h_2, \ldots, h_k$ je hlavní řešení rovnice (1) *a nechť $r_1, r_2, \ldots, r_k$ je libovolné další řešení (různé od hlavního). Pak nerovnost*

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} < \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$$

platí právě tehdy, když $2 \leqq c \leqq \max\limits_{1 \leqq i \leqq k} r_i$; jinak je

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} = \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$$

pro každé řešení $r_1, r_2, \ldots, r_k$ rovnice (1).

LITERATURA

[1] *K. Čulík:* O jedné vlastnosti nezáporných celočíselných řešení rovnice $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$, Čas. pro pěstování matematiky, *82* (1957), 353–359.

Резюме

ЗАМЕТКА О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ В ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

ЛАДИСЛАВ КОСМАК (Ladislav Kosmák), Брно

(Поступило в редакцию 16/II 1957 г.)

Пусть k, n — натуральные числа и пусть $h_1, h_2, \ldots, h_k$ — целые неотрицательные числа, определенные условиями $\sum_{i=1}^{k} h_i = n$, $\max\limits_{1 \leqq i \leqq k} h_i - \min\limits_{1 \leqq i \leqq k} h_i \leqq 1$;

пусть $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — произвольные целые неотрицательные числа, для которых $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$. В работе доказывается **теорема** (см. Чулик [1]):

Неравенство $\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} < \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$ *справедливо тогда и только тогда, если* $2 \leqq c \leqq \max_{1 \leqq i \leqq k} r_i > 1 + \min_{1 \leqq i \leqq k} r_i$; *в противном случае* $\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} = \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ÜBER DIE NICHTNEGATIVEN GANZZAHLIGEN LÖSUNGEN DER GLEICHUNG $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$

LADISLAV KOSMÁK, Brno

(Eingelangt 16. 2. 1957)

Es seien k, n beliebige natürliche Zahlen und $h_1, h_2, \ldots, h_k$ die nichtnegativen ganzen Zahlen, welche durch die Bedingungen $\sum_{i=1}^{k} h_i = n$, $\max_{1 \leqq i \leqq k} h_i - \min_{1 \leqq i \leqq k} h_i \leqq 1$ bestimmt werden; ferner seien $r_1, r_2, \ldots, r_k$ beliebige nichtnegative ganze Zahlen, für welche $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ gilt. In der vorliegenden Arbeit wird folgender Satz bewiesen (vgl. Čulík [1]):

Die Ungleichung $\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} < \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$ *gilt dann und nur dann, wenn* $2 \leqq c \leqq \max_{1 \leqq i \leqq k} r_i > 1 + \min_{1 \leqq i \leqq k} r_i$; *sonst ist* $\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} = \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O JISTÝCH TŘÍDÁCH FUNKCÍ SPOJITÝCH

MILOSLAV JŮZA, Praha

DT: 517.131

(Došlo dne 6. března 1957)

V článku je přímou konstrukcí proveden důkaz věty 1, kterou dokázali AUERBACH a BANACH v práci [1] methodou kategorií. Ke konstruktivnímu důkazu je užito methody, použité E. STEINITZEM v práci [3]. Jako snadný důsledek věty 1 se dostane věta 2.

Slovem číslo se v tomto článku všude, pokud není výslovně řečeno jinak, rozumí vždy reálné číslo; slovem funkce se všude rozumí funkce jedné reálné proměnné.

Věta 1. *Budiž $0 < \sigma < \tau \leq 1$. Potom existuje funkce $f(x)$, která splňuje Lipschitzovu podmínku řádu σ,*[1] *ale pro každé číslo x_0 jest*

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\tau} = \infty . \tag{1}$$

Existenci takové funkce po prvé dokázali AUERBACH a BANACH v práci [1] methodou kategorií. V tomto článku dokážeme větu 1 přímou konstrukcí takové funkce.

Budiž tedy $0 < \sigma < \tau \leq 1$. Položme $n = [3^{\frac{\sigma\tau}{\tau - \sigma}}] + 1$. Potom jest $n > 3^{\frac{\sigma\tau}{\tau - \sigma}}$, takže $n^{\frac{\tau - \sigma}{\sigma\tau}} > 3$, $n^{\frac{1}{\tau}} > 3^{\frac{\sigma}{\tau - \sigma}} > 1$, tedy

$$n^{\frac{1}{\sigma}} - n^{\frac{1}{\tau}} = n^{\frac{1}{\tau}}(n^{\frac{\tau - \sigma}{\sigma\tau}} - 1) > 2 .$$

Tedy existuje nejmenší přirozené číslo m takové, že

$$n^{\frac{1}{\tau}} < m < n^{\frac{1}{\sigma}} \tag{2}$$

a že m má touž paritu jako n. Protože jest $m > n^{\frac{1}{\tau}} \geq n$, jest číslo $\frac{1}{2}(m + n)$ celé kladné a menší než m.

[1]) T. j. existují čísla $\delta > 0$, $K > 0$ tak, že pro $|x - x_0| < \delta$ je $|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|^\sigma$

Budeme definovat čísla $\Delta_{k,lm+i}$, k přirozené, l celé, $i = 1, 2, \ldots, m$, takto:

$$\Delta_{1,lm+i} = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(m+n);$$
$$\Delta_{1,lm+i} = -\frac{1}{n}, \quad i = \tfrac{1}{2}(m+n) + 1, \ldots, m; \tag{3}$$
$$\Delta_{k+1,(l-1)m+i} = \Delta_{k,l} \cdot \Delta_{1,i}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Zřejmě pro l celé, $k = 1, 2, \ldots$, platí

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_{k+1,(l-1)m+i} = \Delta_{k,l}, \quad \sum_{i=1}^{m^k} \Delta_{k+1,i} = 1, \tag{4}$$

$$|\Delta_{k,l}| = \frac{1}{n^k}. \tag{5}$$

Budiž A_m množina všech čísel tvaru $\frac{l}{m^k}$, l celé, k přirozené. Budeme definovat na množině A_m funkci $\varphi(x)$ předpisem

$$\varphi\left(l_0 + \frac{l}{m^k}\right) = l_0 + \sum_{i=1}^{l} \Delta_{k,i}, \quad l_0 \text{ celé}, \quad l = 0, 1, \ldots, m^k - 1; \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Protože platí (4), je funkce $\varphi(x)$ tímto předpisem na množině A_m jednoznačně určena.

Buďtež p, q celá čísla, $p > q$, k přirozené, $\left[\frac{p}{m^k}\right] = \left[\frac{q}{m^k}\right]$. Potom platí

$$\left|\varphi\left(\frac{p}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{q}{m^k}\right)\right| \leqq \frac{p-q}{n^k}. \tag{7}$$

Neboť nechť $\frac{p}{m^k} = \left[\frac{p}{m^k}\right] + \frac{p_1}{m^k}$, $\frac{q}{m^k} = \left[\frac{q}{m^k}\right] + \frac{q_1}{m^k}$; potom podle (6) a (5) platí

$$\left|\varphi\left(\frac{p}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{q}{m^k}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{p_1} \Delta_{k,i} - \sum_{i=1}^{q_1} \Delta_{k,i}\right| =$$
$$= \left|\sum_{i=q_1+1}^{p_1} \Delta_{k,i}\right| \leqq \sum_{i=q_1+1}^{p_1} |\Delta_{k,i}| = \frac{p_1 - q_1}{n^k} = \frac{p-q}{n^k}.$$

Dále pro každé celé l a každé přirozené k platí

$$\left|\varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{l}{m^k}\right)\right| = \frac{1}{n^k}. \tag{8}$$

Neboť není-li $\frac{l+1}{m^k}$ celé, pak $\left[\frac{l+1}{m^k}\right] = \left[\frac{l}{m^k}\right] = l_0$, $\frac{l}{m^k} = l_0 + \frac{l_1}{m^k}$, $\frac{l+1}{m^k} = l_0 + \frac{l_1+1}{m^k}$ a podle (6) a (5) máme

$$\left|\varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{l}{m^k}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{l_1+1} \Delta_{k,i} - \sum_{i=1}^{l_1} \Delta_{k,i}\right| = |\Delta_{k,l_1+1}| = \frac{1}{n^k}.$$

Je-li však $\frac{l+1}{m^k} = l_0$ celé, potom $\frac{l}{m^k} = (l_0 - 1) + \frac{m^k - 1}{m^k}$ a podle (6), (4) a (5) dostaneme

$$\left|\varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{l}{m^k}\right)\right| = \left|l_0 - \left(l_0 - 1 + \sum_{i=1}^{m^k-1} \Delta_{k,i}\right)\right| =$$

$$= \left|1 - \sum_{i=1}^{m^k-1} \Delta_{k,i}\right| = |\Delta_{k,m^k}| = \frac{1}{n^k}.$$

Je-li $\frac{l_0}{m^k} \leqq x \leqq \frac{l_0+1}{m^k}$, l_0 celé, k přirozené, $x \in A_m$, potom

$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l_0}{m^k}\right)\right| < \left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right)\frac{1}{n^k},$$

$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l_0+1}{m^k}\right)\right| < \left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right)\frac{1}{n^k}. \tag{9}$$

To plyne ihned z (8), je-li $x = \frac{l_0+1}{m^k}$. Jestliže $x < \frac{l_0+1}{m^k}$, pak existují $\lambda, l_1, l_2, \ldots, l_\lambda$, $0 \leqq l_\iota \leqq m - 1$ pro $\iota = 1, \ldots, \lambda$, tak, že $x = \sum_{\iota=0}^{\lambda} \frac{l_\iota}{m^{k+\iota}}$ a podle (7) platí

$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l_0}{m^k}\right)\right| = \left|\varphi\left(\sum_{\iota=0}^{\lambda}\frac{l_\iota}{m^{k+\iota}}\right) - \varphi\left(\frac{l_0}{m^k}\right)\right| \leqq \sum_{\mu=1}^{\lambda}\left|\varphi\left(\sum_{\iota=0}^{\mu}\frac{l_\iota}{m^{k+\iota}}\right) - \varphi\left(\sum_{\iota=0}^{\mu-1}\frac{l_\iota}{m^{k+\iota}}\right)\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\mu=1}^{\lambda}\frac{l_\mu}{n^{k+\mu}} < (m-1)\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+\mu}} = \frac{m-1}{n-1}\frac{1}{n^k};$$

z této nerovnosti a z (8) dále plyne

$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l_0+1}{m^k}\right)\right| \leqq \left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l_0}{m^k}\right)\right| + \left|\varphi\left(\frac{l_0}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{l_0+1}{m^k}\right)\right| <$$

$$< \left(\frac{m-1}{n-1} + 1\right) \cdot \frac{1}{n^k},$$

což je druhá z nerovností (9).

Nyní dokážeme, že funkce $\varphi(x)$ splňuje na množině A_m Lipschitzovu podmínku řádu σ. Budiž totiž $x \in A_m$, $y \in A_m$, $0 < y - x < \frac{1}{m}$. Existuje přirozené číslo γ a celé číslo l tak, že $\frac{1}{m^{\gamma+1}} \leqq y - x < \frac{1}{m^\gamma}$, $\frac{l}{m^\gamma} < x \leqq \frac{l+1}{m^\gamma}$. Pro číslo y pak platí buď $\frac{l}{m^\gamma} < y \leqq \frac{l+1}{m^\gamma}$ nebo $\frac{l+1}{m^\gamma} \leqq y < \frac{l+2}{m^\gamma}$, ale v každém případě podle (9) platí

$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l+1}{m^\gamma}\right)\right| < \left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right)\frac{1}{n^\gamma},$$

$$\left|\varphi(y) - \varphi\left(\frac{l+1}{m^\gamma}\right)\right| < \left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right)\frac{1}{n^\gamma},$$

tedy

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < 2\left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right)\frac{1}{n^\gamma}.$$

Protože $|x - y| \geqq \frac{1}{m^{\gamma+1}}$ a podle (2) jest $m^\sigma < n$, tedy pro $0 < y - x < \frac{1}{m}$ dostaneme

$$\frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\sigma} < 2m^{\sigma(\gamma+1)}\left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right)\frac{1}{n^\gamma} < 2m^\sigma\left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right). \tag{10}$$

Skutečně tedy funkce $\varphi(x)$ splňuje na A_m Lipschitzovu podmínku řádu σ.

Z posledního výsledku však plyne, že $\varphi(x)$ je na A_m stejnoměrně spojitá. Existuje tedy funkce $f(x)$ definovaná a stejnoměrně spojitá na množině všech reálných čísel taková, že pro $x \in A_m$ je $f(x) = \varphi(x)$.[2]) Funkce $f(x)$ splňuje Lipschitzovu podmínku řádu σ na množině všech reálných čísel. Neboť jsou-li x, y libovolná reálná čísla, $0 < |x - y| < \frac{1}{m}$, existují čísla $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots;$ $x_i \in A_m$, $y_i \in A_m$, $x_i \neq y_i$, tak, že $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$, $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = y$, a v důsledku spojitosti funkce $f(x)$ podle (10) platí

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\sigma} = \lim_{i\to\infty}\frac{|f(x_i) - f(y_i)|}{|x_i - y_i|^\sigma} \leqq 2m^\sigma\left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right).$$

Dále pro každé číslo x_0 platí (1). Neboť existují celá čísla l_k, $k = 1, 2, \ldots,$ tak, že

$$\frac{l_k}{m^k} \leqq x_0 < \frac{l_k + 1}{m^k}.$$

Podle (8) dostaneme

$$\frac{\left|f\left(\frac{l_k+1}{m^k}\right) - f\left(\frac{l_k}{m^k}\right)\right|}{\left|\frac{l_k+1}{m^k} - \frac{l_k}{m^k}\right|^\tau} = \frac{m^{k\tau}}{n^k} = \left(\frac{m^\tau}{n}\right)^k.$$

Protože podle (2) je $\frac{m^\tau}{n} > 1$, jest

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|f\left(\frac{l_k+1}{m^k}\right) - f\left(\frac{l_k}{m^k}\right)\right|}{\left|\frac{l_k+1}{m^k} - \frac{l_k}{m^k}\right|^\tau} = \infty. \tag{11}$$

Jestliže pro nekonečně mnoho k je $\frac{l_k}{m^k} = x_0$, potom (1) již plyne z (11). Jestliže pro skoro všechna k je $\frac{l_k}{m^k} < x_0$, pak pro tato k jest

$$0 < \left|\frac{l_k}{m^k} - x_0\right| < \left|\frac{l_k+1}{m^k} - \frac{l_k}{m^k}\right|, \quad 0 < \left|\frac{l_k+1}{m^k} - x_0\right| < \left|\frac{l_k+1}{m^k} - \frac{l_k}{m^k}\right|$$

[2]) Viz třeba [2], věta 177.

a tedy

$$\frac{\left|f\left(\frac{l_k+1}{m^k}\right)-f\left(\frac{l_k}{m^k}\right)\right|}{\left|\frac{l_k+1}{m^k}-\frac{l_k}{m^k}\right|^\tau} \leqq \frac{\left|f\left(\frac{l_k+1}{m^k}\right)-f(x_0)\right|}{\left|\frac{l_k+1}{m^k}-x_0\right|^\tau} + \frac{\left|f\left(\frac{l_k}{m^k}\right)-f(x_0)\right|}{\left|\frac{l_k}{m^k}-x_0\right|^\tau}.$$

Protože limita levé strany je ∞ a pravá strana je součet nezáporných sčítanců, musí limes superior aspoň jednoho z těchto sčítanců býti roven ∞. Odtud plyne (1) i pro tento případ.

Dokázali jsme tedy, že funkce $f(x)$ splňuje všechny podmínky ve větě 1. Poznamenejme ještě, že podle (6) je $f(0) = 0$.

Z věty 1 snadno plyne tato

Pomocná věta. *Buďtež dána reálná čísla p, q, $1 \leqq p < q$. Pak existuje funkce $f(x)$ definovaná a spojitá na množině všech reálných čísel a mající tyto vlastnosti:*

I. *pro každé číslo $r \geqq q$ a každé číslo x_0 platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|^r}{|x-x_0|} = 0\,; \tag{12}$$

II. *pro každé číslo $s \leqq p$ a každé číslo x_0 jest*

$$\limsup_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|^s}{|x-x_0|} = \infty\,; \tag{13}$$

III. $f(0) = 0$.

Důkaz. Položme $\sigma = \dfrac{2}{p+q}$, $\tau = \dfrac{1}{p}$, takže jest $0 < \sigma < \tau \leqq 1$ a uvažujme funkci $f(x)$ z věty 1.

I. Existuje číslo K tak, že pro $|x - x_0| < \dfrac{1}{m}$ je $\dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{\frac{2}{p+q}}} \leqq K$, tedy

$\dfrac{|f(x)-f(x_0)|^{\frac{p+q}{2}}}{|x-x_0|} \leqq K^{\frac{p+q}{2}}$ a tedy pro každé číslo $r > \frac{1}{2}(p+q)$ a tedy tím spíše pro každé $r \geqq q$ platí

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|^r}{|x-x_0|} = \frac{|f(x)-f(x_0)|^{\frac{p+q}{2}}}{|x-x_0|}\,.\,|f(x)-f(x_0)|^{r-\frac{1}{2}(p+q)} \leqq$$

$$\leqq K^{\frac{1}{2}(p+q)}\,.\,|f(x)-f(x_0)|^{r-\frac{1}{2}(p+q)}$$

a tedy v důsledku spojitosti funkce $f(x)$ platí (12).

II. Jest $\limsup_{x\to x_0} \dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{\frac{1}{p}}} = \infty$, tedy též $\limsup_{x\to x_0} \dfrac{|f(x)-f(x_0)|^p}{|x-x_0|} = \infty$.

Budiž $x_1, x_2, \dots$ posloupnost taková, že $\lim_{i\to\infty} x_i = x_0$, $f(x_i) \neq f(x_0)$, $\lim_{i\to\infty} \dfrac{|f(x_i)-f(x_0)|^p}{|x_i-x_0|} = \infty$. Potom — protože $s \leqq p$ — budeme v důsledku spojitosti funkce $f(x)$ mít

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|f(x_i)-f(x_0)|^s}{|x_i-x_0|} = \lim_{i\to\infty} \frac{|f(x_i)-f(x_0)|^p}{|x_i-x_0|} \cdot \lim_{i\to\infty} |f(x_i)-f(x_0)|^{s-p} = \infty$$

a tedy platí (13).

III. Z poznámky na konci důkazu věty 1 vidíme, že $f(0) = 0$.

Věta 2. *Budiž m přirozené číslo. Pak existuje funkce $f(t)$ definovaná a spojitá na množině všech reálných čísel a mající tyto vlastnosti:*

I. *je-li $P(x)$ libovolný nekonstantní polynom stupně menšího než m, nemá funkce $P(f(t))$ vlastní derivaci v žádném bodě;*

II. *existuje polynom $Q(x)$ stupně m takový, že funkce $Q(f(t))$ má aspoň v jednom bodě derivaci rovnou nule.*

Důkaz. Je-li $m = 1$, stačí za funkci $f(t)$ vzíti libovolnou konstantu. Budiž $m > 1$. Položme $p = m - 1$, $q = m$ a $f(t)$ budiž funkce splňující podmínky I, II, III pomocné věty.

I. Budiž $P(x)$ nekonstantní polynom stupně menšího než m, t_0 reálné číslo. Dokážeme, že funkce $P(f(t))$ nemá vlastní derivaci v bodě t_0.

Označíme $f(t_0) = x_0$. Existuje přirozené číslo $s < m$ takové, že pro derivace polynomu $P(x)$ v bodě x_0 platí

$$P'(x_0) = P''(x_0) = \dots = P^{(s-1)}(x_0) = 0\,, \quad P^{(s)}(x_0) \neq 0\,.$$

Podle Taylorovy věty platí

$$|P(x) - P(x_0)| = \frac{1}{s!} P^{(s)}(\xi)(x-x_0)^s,$$

při čemž $|\xi - x_0| \leqq |x - x_0|$. Protože všechny derivace polynomu jsou spojité, existuje číslo $\varepsilon > 0$ tak, že pro x, pro něž $|x - x_0| < \varepsilon$, platí

$$|P^{(s)}(x)| > \tfrac{1}{2}|P^{(s)}(x_0)|.$$

Snadno zjistíme, že pro x, pro něž $|x - x_0| < \varepsilon$, platí

$$|P(x) - P(x_0)| > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s!} \cdot |P^{(s)}(x_0)| \,.\, |x - x_0|^s\,. \tag{14}$$

Protože funkce $f(t)$ je spojitá, existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro t, pro něž $|t - t_0| < \delta$, platí $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$. Pro t, pro něž $|t - t_0| < \delta$, tedy podle (14) platí

$$|P(f(t)) - P(f(t_0))| > C \,.\, |f(t) - f(t_0)|^s\,,$$

kde klademe pro zkrácení $C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s!} \cdot |P^{(s)}(x_0)| > 0$. Odtud zjistíme, že pro t, pro něž $|t - t_0| < \delta$, platí

$$\left| \frac{P(f(t)) - P(f(t_0))}{t - t_0} \right| > C \cdot \frac{|f(t) - f(t_0)|^s}{|t - t_0|} .$$

Jest však $s \leqq m - 1 = p$ a tedy podle pomocné věty platí (13). Tedy tím spíše $\limsup_{t \to t_0} \left| \frac{P(f(t)) - P(f(t_0))}{t - t_0} \right| = \infty$ a tedy funkce $P(f(t))$ nemá vlastní derivaci v bodě t_0.

II. Dokážeme, že funkce $(f(t))^m$ má v bodě 0 derivaci rovnou nule. Jest totiž $f(0) = 0$, takže $\frac{|(f(t))^m - (f(0))^m|}{|t - 0|} = \frac{|f(t) - f(0)|^m}{|t - 0|}$, a protože $q = m$, platí podle pomocné věty vzorec (12) pro $r = m$ a funkce $(f(t))^m$ má tedy v bodě 0 nulovou derivaci. Stačí tedy položit $Q(x) = x^m$.

LITERATURA

[1] *Auerbach-Banach:* Über die Höldersche Bedingung, Studia mathematica *3* (1931), 180—184.

[2] *Jarník:* Diferenciální počet II, Praha 1953.

[3] *Steinitz:* Stetigkeit und Differentialquotient, Mathematische Annalen *52* (1899), 58—69.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

МИЛОСЛАВ ЮЗА (Miloslav Jůza), Прага

(Поступило в редакцию 6/III 1957 г.)

Пусть $0 < \sigma < \tau \leqq 1$. Положим $n = [3^{\frac{\sigma\tau}{\tau - \sigma}}] + 1$; пусть m — натуральное число такое, что $n^{\frac{1}{\tau}} < m < n^{\frac{1}{\sigma}}$, m — четное или нечетное вместе с n. На множестве A_m всех чисел вида $\frac{l}{m^k}$, где l—целое, k—натуральное, определим функцию $\varphi(x)$ по формуле (6), где величины $\Delta_{k,i}$ определены по формулам (3). Тогда $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка σ. Если теперь $f(x)$ — непрерывное расширение функции $\varphi(x)$ на множество всех вещественных чисел, то функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липши-

ца порядка σ на всем этом множестве. Кроме того, для нее имеет место формула (1) для любого x_0. Существование такой функции было впервые доказано методом категорий в статье [1].

Из существования такой функции нетрудно доказать следующую теорему:

Пусть m — натуральное гисло. Тогда существуем функция $f(t)$, определениая и непрерывная на множестве всех вещественных чисел, имеющая следующие свойстеа:

I. если $P(x)$ — лыбой непостоянный полином степени меньше m, то функция $P(f(t))$ не обладает собственной производной ни в какой точке;

II. существует полином $Q(x)$ степени m такой, что функция $Q(f(t))$ имеет в некоторой точке проипводную, равную нулю.

Résumé

SUR CERTAINES CLASSES DE FONCTIONS CONTINUES

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 6 mars 1957)

Soit $0 < \sigma < \tau \leqq 1$. Posons $n = [3^{\frac{\sigma\tau}{\tau-\sigma}}] + 1$ et soit m un nombre naturel de la même parité que n et tel que $n^{\frac{1}{\tau}} < m < n^{\frac{1}{\sigma}}$. Sur l'ensemble A_m de tous les nombres $\frac{l}{m^k}$, où l est entier, k naturel, définissons la fonction $\varphi(x)$ par la formule (6), ou les quantités $\Delta_{k,i}$ sont définies par les formules (3). La fonction $\varphi(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz d'ordre σ. Si maintenant $f(x)$ signifie le prolongement continu de la fonction $\varphi(x)$ sur l'ensemble de tous les nombres réels, la fonction $f(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz d'ordre σ sur cet ensemble tout entier. De plus, la fonction $f(x)$ vérifie aussi la formule (1) pour chaque x_0. L'existence d'une telle fonction a été démontrée pour la première fois par la méthode des catégories dans le Mémoire [1].

De l'existence d'une telle fonction, il résulte aisément le théorème suivant:

m étant un nombre naturel, il existe une fonction $f(t)$ définie et continue sur l'ensemble de tous les nombres réels et jouissant des propriétés suivantes:

I. pour tout polynôme $P(x)$ non-constant, dont le degré est plus petit que m, la fonction $P(f(t))$ n'admet de dérivée finie en aucun point;

II. il existe un polynôme $Q(x)$ du degré m tel que la fonction $Q(f(t))$ admet une dérivée égale à zéro dans un point au moins.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA O DÉLCE JORDANOVY KŘIVKY

JAN MAŘÍK, Praha

DT: 513.83

(Došlo dne 17. dubna 1957)

Autor dokazuje, že délka Jordanovy křivky s vnitřkem G je supremem množiny čísel

$$\int_G \left(\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial y} \right) dx\, dy\,,$$

kde v_1, v_2 jsou polynomy, splňující nerovnost $v_1^2(x, y) + v_2^2(x, y) \leqq 1$ pro všechna $[x, y] \in G$.

1. Symbol E_1 (resp. E_2) označuje množinu všech reálných (resp. komplexních) čísel. Dvojici reálných čísel $[x, y]$ ztotožňujeme s komplexním číslem $x + iy$. Funkci dvou reálných proměnných budeme tedy pokládat též za funkci komplexní proměnné nebo naopak. Reálnou (resp. imaginární) část komplexní funkce f budeme vždy značit symbolem f_1 (resp. f_2).

Buď f spojitá komplexní funkce, definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť $f(a) = f(b)$ a nechť platí implikace

$$(t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle,\ 0 < |t_1 - t_2| < b - a) \Rightarrow f(t_1) \neq f(t_2)\,.$$

Potom množinu $C = f(\langle a, b \rangle)$ nazveme Jordanovou křivkou (a řekneme, že funkce f určuje Jordanovu křivku C). Množina $E_2 - C$ má dvě komponenty a křivka C je jejich společnou hranicí. Tyto komponenty jsou ovšem oblasti (t. j. otevřené souvislé množiny). Jedna z nich je omezená; ta se nazývá vnitřek křivky C. Druhá (neomezená) oblast se nazývá vnějšek C.

Je-li h komplexní (nebo reálná) funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$, položíme

$$\text{var}\,(h, a, b) = \text{var}\,(h) = \sup_D \sum_{j=1}^{n} |h(t_j) - h(t_{j-1})|\,,$$

kde $D = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ probíhá všechna dělení intervalu $\langle a, b \rangle$.

Jestliže funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$ určuje touž Jordanovu křivku C jako funkce g v intervalu $\langle c, d \rangle$, je $\text{var}\,(f, a, b) = \text{var}\,(g, c, d)$; tuto hodnotu (která ovšem nemusí být konečná) nazveme délkou křivky C.

Pro libovolnou komplexní funkci h v intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

$$\max(\operatorname{var}(h_1), \operatorname{var}(h_2)) \leqq \operatorname{var}(h) \leqq \operatorname{var}(h_1) + \operatorname{var}(h_2)\,, \tag{1}$$

jak se snadno dokáže. (Zde jsou ovšem — podle úmluvy — funkce h_1, h_2 reálné a je $h = h_1 + ih_2$.)

Množinu všech spojitých komplexních funkcí h v intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $\operatorname{var}(h) < \infty$, označíme symbolem $V(a, b)$. Dále buď $V_0(a, b)$ množina všech $h \in V(a, b)$, pro něž $h(a) = h(b)$.

Jsou-li z_0, z_1 body oblasti $G \subset E_2$, existuje $h \in V(0, 1)$ tak, že $h(0) = z_0$, $h(1) = z_1$, $h(\langle 0, 1\rangle) \subset G$.

Je-li $h \in V_0(a, b)$, můžeme na množině $E_2 - h(\langle a, b\rangle)$ definovat funkci ind_h předpisem

$$\operatorname{ind}_h z = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\mathrm{d}h(t)}{h(t) - z}\,.$$

Potom nabývá funkce ind_h jen celočíselných hodnot a je konstantní na každé komponentě množiny $E_2 - h(\langle a, b\rangle)$; je-li $|z|$ dostatečně velké, platí $\operatorname{ind}_h z = 0$. (Viz [1], odst. 4.)

2. *Buď $h \in V_0(a, b)$. Pro $j = 1, 2$ buď $z_j = x + iy_j$, kde $x, y_j \in E_1$, $y_1 < y_2$ (resp. $z_j = x_j + iy$, kde $x_j, y \in E_1$, $x_1 < x_2$); buď J úsečka o koncových bodech z_1, z_2. Nechť body z_1, z_2 nepatří do $h(\langle a, b\rangle)$ a nechť existuje právě jedno $t \in \langle a, b\rangle$, pro něž $h(t) \in J$; dále předpokládejme, že $t \in (a, b)$ a že funkce h_1 (resp. h_2) je ryze monotonní v bodě t. Potom platí*

$$|\operatorname{ind}_h z_1 - \operatorname{ind}_h z_2| = 1\,. \tag{2}$$

Důkaz. Viz [1], odst. 7, vzorce (19) a (26).

3. *Nechť funkce f $(= f_1 + if_2)$, definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$, určuje Jordanovu křivku C. Buď M množina všech $t \in (a, b)$, v nichž má funkce f_1 lokální extrém (ostrý nebo neostrý). Buď G vnitřek nebo vnějšek křivky C. Nechť $x, y_j \in E_1$, $y_1 < y_0 < y_2$, $z_j = x + iy_j$ $(j = 0, 1, 2)$; nechť $z_0 \in C$ a nechť úsečka o koncových bodech z_1, z_2 je částí $\overline{G}$. Potom $x \in f_1(M) \cup \{f_1(a)\}$.*

Důkaz. Nechť $x \neq f_1(a)$. Rozeznávejme dva případy.

I. Existují η_1, η_2 tak, že $\eta_1 < \eta_2$ a že úsečka J o koncových bodech $x + i\eta_1$, $x + i\eta_2$ je částí C. Můžeme určit čísla a_1, b_1 $(a < a_1 < b_1 < b)$ tak, že x non $\in f_1(\langle a, a_1\rangle) \cup f_1(\langle b_1, b\rangle)$ a tedy $J \subset f(\langle a_1, b_1\rangle)$. Protože na množině $\langle a_1, b_1\rangle$ je zobrazení f homeomorfní, je $f^{-1}(J)$ opět úsečka. Pro $t \in f^{-1}(J)$ je však $f_1(t) = x$; odtud plyne $x \in f_1(M)$.

II. Taková čísla η_1, η_2 neexistují. Potom můžeme předpokládat, že z_1, z_2 non $\in C$ a tedy $z_1, z_2 \in G$. Protože G je oblast, existuje $g \in V(0, 1)$ tak, že $g(0) = z_1$, $g(1) = z_2$, $g(\langle 0, 1\rangle) \subset G$. Buď U otevřený kruh o středu z_0 a poloměru ε

takový, že $U \cap g(\langle 0, 1\rangle) = \emptyset$; buď U_+ (resp. U_-) množina těch bodů z U, jejichž první souřadnice je větší (resp. menší) než x. Položme $h(t) = g(t)$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$, $h(t) = z_2 + (t - 1)(z_1 - z_2)$ pro $t \in \langle 1, 2\rangle$. Potom je $h \in V_0(0, 2)$. Protože $\tilde{G} = E_2 - \overline{G}$ je oblast disjunktní s $h(\langle 0, 2\rangle) \subset \overline{G}$, je funkce ind_h konstantní na $\tilde{G}$; z podobného důvodu je funkce ind_h konstantní také na každé z množin U_+, U_-. Položíme-li na př. $z_+ = z_0 + \frac{1}{2}\varepsilon$, $z_- = z_0 - \frac{1}{2}\varepsilon$, plyne snadno z (2) (kde ovšem píšeme z_-, z_+ místo z_1, z_2), že funkce ind_h má na U_+ jinou hodnotu než na U_-. Nemůže tedy platit zároveň $\tilde{G} \cap U_+ \neq \emptyset$ i $\tilde{G} \cap U_- \neq \emptyset$. Je-li na př. $\tilde{G} \cap U_+ = \emptyset$, zjistí se snadno, že v bodě t_0, kde $f(t_0) = z_0$, má funkce f_1 lokální maximum; je tedy opravdu $x \in f_1(M)$.

4. Je-li $A \subset E_2$, $t \in E_1$, buď

$$A_t^1 = E[x; x \in E_1, x + it \in A], \quad A_t^2 = E[y; y \in E_1, t + iy \in A].$$

Lebesgueovu míru v E_k budeme značit μ_k ($k = 1, 2$). Slova „skoro všude", „měřitelná množina" a pod. se vždy budou vztahovat k míře μ_k; ze souvislosti bude patrné, které k je míněno.

Buď A omezená měřitelná neprázdná část E_2. Buď $\mathfrak{P}_A$ (resp. $\mathfrak{B}_A$) množina všech reálných (resp. komplexních) polynomů $\varrho(x_1, x_2)$, splňujících vztah $|\varrho(x_1, x_2)| \leq 1$ pro každý bod $[x_1, x_2] \in A$. Pro $k = 1, 2$ položme

$$\|A\|_k = \sup \int_A \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} \, \mathrm{d}\mu_2, \quad \text{kde } \varrho \in \mathfrak{P}_A ;$$

dále buď

$$\|A\| = \sup \int_A \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}\mu_2, \quad \text{kde } \varrho = \varrho_1 + i\varrho_2 \in \mathfrak{B}_A .$$

Snadno se zjistí (viz [2], odst. 4, str. 523), že

$$\max(\|A\|_1, \|A\|_2) \leq \|A\| \leq \|A\|_1 + \|A\|_2 . \tag{3}$$

5. *Nechť funkce f ($= f_1 + if_2$) definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$ určuje Jordanovu křivku C; buď G vnitřek C a buď A taková měřitelná množina, že $G \subset A \subset \overline{G}$. Položme v_j = var (f_j) (j = 1, 2). Potom platí*

$$v_1 = \|A\|_2, \quad v_2 = \|A\|_1 . \tag{4}$$

Důkaz. Pro $x \in E_1$ buď $q(x)$ počet prvků množiny $f_1^{-1}(x)$ (je-li tato množina nekonečná, položíme $q(x) = \infty$). Podle Banachovy věty (viz [3], str. 280) je funkce q měřitelná a platí

$$\int_{E_1} q \, \mathrm{d}\mu_1 = v_1 . \tag{5}$$

Buď napřed $\|A\|_2 < \infty$. Podle [2], odst. 33 (str. 545) existuje množina $K \subset E_1$, která má tyto vlastnosti:

1) Je $\mu_1(E_1 - K) = 0$.

2) Ke každému $x \in K$ existují čísla $\alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_r < \beta_r$ (r celé $\geqq 0$) tak, že množina A_x^2 je ekvivalentní*) se sjednocením $\bigcup_{j=1}^{r} (\alpha_j, \beta_j)$; položíme-li $r = \psi(x)$, je

$$2\int_{E_1} \psi \, d\mu_1 = \|A\|_2 . \tag{6}$$

Dále buď M množina těch bodů $t \in (a, b)$, v nichž má funkce f_1 lokální extrém; buď

$$T = \{f_1(a)\} \cup f_1(M) \cup (E_1 - K) .$$

Snadno se zjistí, že množina $f_1(M)$ je spočetná; je tedy $\mu_1(T) = 0$. Zvolme $x \in E_1 - T$ a sestrojme podle 2) čísla α_j, β_j. Protože $A \subset \bar{G}$, je $\bigcup_{j=1}^{r} (\alpha_j, \beta_j) \subset (\bar{G})_x^2$; protože však $x \operatorname{non} \in f_1(M) \cup \{f_1(a)\}$, je (podle odst. 3) $\bigcup_{j=1}^{r} (\alpha_j, \beta_j) \subset G_x^2$. Položíme-li ještě $\beta_0 = -\infty$, $\alpha_{r+1} = \infty$, zjistíme podobně, že $\bigcup_{j=0}^{r} (\beta_j, \alpha_{j+1}) \subset (E_2 - \bar{G})_x^2$. Je tedy $C_x^2 = \{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_r, \beta_r\}$; vidíme, že $q(x) = 2r = 2\psi(x)$. Odtud a z (5), (6) plyne $v_1 = \|A\|_2$.

Buď nyní $v_1 < \infty$. Pro každé x je hranice množiny A_x^2 částí množiny C_x^2, která má $q(x)$ prvků; množina A_x^2 má tedy nejvýš $q(x)$ komponent. Podle (5) je $\int_{E_1} q \, d\mu_1 < \infty$; podle [2], odst. 20 (str. 535—536) je tedy $\|A\|_2 \leqq 2\int_{E_1} q \, d\mu_1 < \infty$. Je-li tudíž $\|A\|_2 = \infty$, je též $v_1 = \infty$. Tím je dokázáno, že v každém případě platí $v_1 = \|A\|_2$; důkaz vztahu $v_2 = \|A\|_1$ je podobný.

Poznámka 1. Ze vztahů (1), (3), (4) plyne, že platí var $(f) < \infty$, právě když $\|A\| < \infty$.

Poznámka 2. Buď var $(f) < \infty$ (a tedy $\|A\| < \infty$). Zvolme $x \in f_1(\langle a, b \rangle) - T$ (snadno se zjistí, že takové x existuje a že $\psi(x) \geqq 1$) a určeme čísla y_1, y_2 tak, abychom měli $y_1 < \alpha_1 < y_2 < \beta_1$. Protože $\operatorname{ind}_f z = 0$ pro všechna $z = x + iy$, kde $y < \alpha_1$, plyne snadno z (2), že $|\operatorname{ind}_f (x + iy_2)| = 1$. Je-li tedy $\varkappa$ hodnota funkce $\operatorname{ind}_f z$ na vnitřku G křivky C, je $\varkappa = \pm 1$.

6. Jsou-li g, h komplexní funkce (na téže množině), pak symbolem $[g, h]$ (skalární součin) budeme rozumět (reálnou) funkci $g_1 h_1 + g_2 h_2$. Dále píšeme $\operatorname{div} v = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}$ pro každý komplexní polynom $v(x_1, x_2)$.

7. *Buď G vnitřek Jordanovy křivky, určené funkcí f v intervalu $\langle a, b \rangle$. Předpokládejme, že funkce f_1, f_2 jsou absolutně spojité. Buď $\varkappa$ hodnota funkce ind_f na G; buď π komplexní funkce, splňující rovnost*

$$i\varkappa\, \pi(t) = f'(t)$$

*) Řekneme, že množiny P, Q jsou ekvivalentní, jestliže $\mu_1(P - Q) = \mu_1(Q - P) = 0$.

pro skoro všechna $t \in \langle a, b \rangle$. Potom platí

$$\int_a^b [v(f), \pi] \, d\mu_1 = \int_G \operatorname{div} v \, d\mu_2 \tag{7}$$

pro každý komplexní polynom v.

Důkaz. Podle Greenovy věty (viz [1], odst. 10) dostáváme $\varkappa \int_G \operatorname{div} v \, d\mu_2 =$

$$= \int_a^b v_1(f) \, df_2 - \int_a^b v_2(f) \, df_1 = \int_a^b (v_1(f) f_2' - v_2(f) f_1') \, d\mu_1 = \varkappa \int_a^b [v(f), \pi] \, d\mu_1 .$$

8. *Buď G vnitřek Jordanovy křivky C, která má délku d $(0 < d \leq \infty)$. Buď A měřitelná množina taková, že $G \subset A \subset \bar{G}$. Potom platí $\|A\| = d$.*

Důkaz. Podle poznámky 1 v odst. 5 stačí vyšetřit případ, kdy $d < \infty$ (a tedy též $\|A\| < \infty$). Můžeme proto předpokládat, že funkce f, která určuje křivku C, „má za parametr oblouk", t. j., že $f \in V_0(0, d)$ a že var $(f, 0, t) = t$ pro každé $t \in (0, d)$. Potom jsou funkce f_1, f_2 absolutně spojité a platí $|f'(t)| = 1$ pro skoro všechna $t \in \langle 0, d \rangle$. (Viz [3], str. 123, Theorem (8.4).) Označme hodnotu funkce ind_f na množině G písmenem $\varkappa$ a definujme v intervalu $\langle 0, d \rangle$ komplexní borelovskou funkci π tímto předpisem: Jestliže $f'(t)$ existuje $(0 < t < d)$ a má prostou hodnotu 1, buď $\pi(t) = -i\varkappa f'(t)$; pro ostatní t položme (na př.) $\pi(t) = 1$. Dále definujme na množině C funkci ν vztahem

$$\nu(z) = \pi(t) \, , \quad \text{kde} \quad z = f(t) \, .$$

Protože pro každé $n > \dfrac{1}{d}$ je zobrazení f intervalu $\langle 0, d - \dfrac{1}{n} \rangle$ homeomorfní, je ν borelovská funkce. Položme konečně

$$p(B) = \mu_1(f^{-1}(B))$$

pro každou borelovskou množinu $B \subset C$. Snadno se zjistí, že p je míra a že pro každou omezenou borelovskou funkci ω na C platí $\int_C \omega \, dp = \int_0^d \omega(f) \, d\mu_1$; pro každý komplexní polynom v je tedy (viz (7))

$$\int_C [v, \nu] \, dp = \int_0^d [v(f), \pi] \, d\mu_1 = \int_G \operatorname{div} v \, d\mu_2 = \int_A \operatorname{div} v \, d\mu_2 \, .$$

Odtud plyne podle [2], odst. 18 (str. 534), že $p(C) = \|A\|$; je tedy opravdu $\|A\| = d$.

LITERATURA

[1] *J. Král a J. Mařík:* Der Greensche Satz, Чех. мат. журнал, *7 (82)*, 1957, 235–247.

[2] *J. Mařík:* The surface integral, Чех. мат. журнал, *6 (81)*, 1956, 522–558.

[3] *S. Saks:* Theory of the integral, New York.

Резюме

ЗАМЕТКА О ДЛИНЕ ЖОРДАНОВОЙ КРИВОЙ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага

(Поступило в редакцию 17/IV 1957 г.)

В работе [2] для всякого измеримого ограниченного множества $A \subset E_m$ определено число $\|A\|$, которое играет важную роль в теории поверхностного интеграла. В настоящей работе доказана следующая теорема:

Пусть G — область, лежащая внутри (плоской) жордановой кривой длины α $(0 < \alpha \leqq \infty)$; пусть A — измеримое множество, $G \subset A \subset \overline{G}$. Тогда $\|A\| = \alpha$.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE LÄNGE EINER JORDANSCHEN KURVE

JAN MAŘÍK, Praha

(Eingelangt 17. IV. 1957)

In der Arbeit [2] wird jeder beschränkten messbaren Menge $A \subset E_m$ eine Zahl $\|A\|$ zugeordnet, welche in der Theorie des Oberflächenintegrals eine wichtige Rolle spielt. In diesem Artikel wird der folgende Satz bewiesen:

Es sei G das Innere einer (ebenen) Jordanschen Kurve von der Länge d $(0 < < d \leqq \infty)$. Wenn eine messbare Menge A die Bedingungen $G \subset A \subset \overline{G}$ erfüllt, dann gilt $\|A\| = d$.

OPRAVA K ČLÁNKU „POZNÁMKA K OTÁZCE ŘEŠITELNOSTI JISTÉ SOUSTAVY NEROVNOSTÍ KLADNÝMI ČÍSLY"*)

ALENA ČERVENÁ, Praha

DT: 512.13

(Došlo dne 15. října 1957)

V citovaném článku byla uveřejněna tato věta:

Nutná a dostačující podmínka k tomu, aby soustava nerovností

$$\begin{aligned} \alpha_1 C_{11} - \alpha_2 C_{12} - \alpha_3 C_{13} - \ldots - \alpha_n C_{1n} &> 0\,, \\ -\alpha_1 C_{21} + \alpha_2 C_{22} - \alpha_3 C_{23} - \ldots - \alpha_n C_{2n} &> 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ -\alpha_1 C_{n1} - \alpha_2 C_{n2} - \alpha_3 C_{n3} - \ldots + \alpha_n C_{nn} &> 0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

kde všechny konstanty C_{ik} jsou kladné, měla řešení $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, kde $\alpha_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, je tato:

a) *Součin $C_{11}C_{22} \ldots C_{nn}$ má největší hodnotu ze všech součinů typu $C_{1i_1}C_{2i_2} \ldots$ $\ldots C_{ni_n}$, kde $i_1, i_2, \ldots, i_n$ je nějaká permutace čísel $1, 2, \ldots, n$.*

b) *Determinant soustavy* (1) *je větší než nula.*

Při uvedené formulaci jsou podmínky a) a b) pouze podmínky nutné. Mají-li to být zároveň podmínky dostačující, je nutno zostřit formulaci podmínky a).

Uvažujme při daném přirozeném n množinu n determinantů, definovaných rekurentně takto:

Jako D_n označme determinant soustavy (1) a položme $C_{ik}^{(n)} = C_{ik}$. Nechť D_j pro $2 \leqq j < n$ jest j-řadový determinant s prvky $(-1)^{1-\delta_{ik}} C_{ik}^{(j)}$, kde

$$C_{ik}^{(j)} = C_{ik}^{(j+1)} C_{j+1,j+1}^{(j+1)} + (1 - 2\delta_{ik})\, C_{ij+1}^{(j+1)} C_{j+1k}^{(j+1)} \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, j;\; k = 1, 2, \ldots, j\,.$$

Pak nastupuje místo podmínky a) podmínka a'):

Součin $C_{11}^{(j)} C_{22}^{(j)} \ldots C_{jj}^{(j)}$ má (pro $2 \leqq j \leqq n$) největší hodnotu ze všech součinů typu $C_{1i_1}^{(j)} C_{2i_2}^{(j)} \ldots C_{ji_j}^{(j)}$, kde $i_1, i_2, \ldots, i_j$ je nějaká permutace čísel $1, 2, \ldots, j$.

Při důkazu postačitelnosti podmínek a') a b) uprostřed na str. 338 je potom při indukčním kroku u determinantu (9) splněna podmínka a') na základě předpokladu a o splnění podmínky b) se přesvědčíme výpočtem, jak je uvedeno v článku. Zároveň se dá ukázat, že podmínka a') je rovněž podmínka nutná.

Ze vztahu $D_{n-1} = C_{nn}^{n-2} D_n$ (str. 338 nahoře) plyne indukcí, že podmínka b) je už důsledkem zostřené podmínky a') (determinant druhého stupně D_j pro $j = 2$ je totiž kladný vzhledem k a')).

*) Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 335—341.

ИСПРАВЛЕНИЕ К СТАТЬЕ „ЗАМЕТКА К ВОПРОСУ РЕШАЕМОСТИ ОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ ПРИ ПОМОЩИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ“*)

АЛЕНА ЧЕРВЕНА (Alena Červená), Прага

(Поступило в редакцию 15/X 1957 г.)

Так как условия а) и б) в теореме цитированной статьи — необходимые, но не достаточные, далим более острую формулировку условия а):

Пусть D_n — определитель системы (1), D_j $(2 \leqq j < n)$ — определитель j-го порядка с элементами $(-1)^{1-\delta_{ik}} C_{ik}^{(j)}$, где $C_{ik}^{(j)} = C_{ik}^{(j+1)} C_{j+1,j+1}^{(j+1)} + (1 - 2\delta_{ik}) C_{i,j+1}^{(j+1)} C_{j+1,k}^{(j+1)}$ для $i, k = 1, \ldots, j$; при этом $C_{ik}^{(n)} = C_{ik}$.

Тогда условие а') — следующее:

Произведение $C_{11}^{(j)} C_{22}^{(j)} \ldots C_{jj}^{(j)}$ *имеет наибольшее значение из всех произведений типа* $C_{1i_1}^{(j)} C_{2i_2}^{(j)} \ldots C_{ji_j}^{(j)}$, *где* $i_1, i_2, \ldots, i_j$ *является какой-то перестановкой чисел* $1, 2, \ldots, j$.

Оказывается, что условие б) является уже следствием условия а').

BERICHTIGUNG ZUR „BEMERKUNG ÜBER DIE LÖSUNGSFRAGE EINES SPEZIELLEN SYSTEMS VON UNGLEICHUNGEN DURCH POSITIVE ZAHLEN“*)

ALENA ČERVENÁ, Praha

(Eingelangt am 15. Oktober 1957)

Da die Bedingungen a), b) im Satze dieser Arbeit zwar notwendig, doch nicht hinreichend sind, wird eine schärfere Bedingung a') gegeben:

Es sei D_n das Determinant des Systems (1), D_j $(2 \leqq j < n)$ das j-reihige Determinant mit Elementen $(-1)^{1-\delta_{ik}} C_{ik}^{(j)}$, wo $C_{ik}^{(j)} = C_{ik}^{(j+1)} C_{j+1,j+1}^{(j+1)} + (1 - 2\delta_{ik}) C_{i,j+1}^{(j+1)} C_{j+1,k}^{(j+1)}$ für $i, k = 1, \ldots, j$, wobei $C_{ik}^{(n)} = C_{ik}$ gilt.

Dann ist die Bedingung a') die folgende:

Das Produkt $C_{11}^{(j)} C_{22}^{(j)} \ldots C_{jj}^{(j)}$ *besitzt den grössten Wert von allen Produkten des Typus* $C_{1i_1}^{(j)} C_{2i_2}^{(j)} \ldots C_{ji_j}^{(j)}$, *wo* $i_1, i_2, \ldots, i_j$ *eine Permutation der Zahlen* $1, 2, \ldots, j$ *darstellt.*

Es zeigt sich, dass die ursprüngliche Bedingung b) eine Folgerung dieser Bedingung a') ist.

*) Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 335—341.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

RŮZNÉ

DIRICHLETOVA ÚLOHA

RUDOLF VÝBORNÝ, Praha

DT: 517.947.42

(Došlo dne 19. června 1957)

V článku se vyšetřuje funkcionální prodloužení Dirichletovy úlohy.

Je dobře známo, že pro $m \geqq 3$ nemusí být Dirichletova úloha řešitelná v m-rozměrné oblasti ani tehdy, je-li hraniční funkce spojitá. O. PERRONEM a N. WIENEREM [1], [2] byly vypracovány metody, podle nichž je každé spojité hraniční funkci f přiřazena harmonická funkce W_f, která splývá s řešením Dirichletovy úlohy, jestliže řešení existuje. Je známo, že Perronova i Wienerova konstrukce vede k témuž zobecněnému řešení Dirichletovy úlohy (viz na př. [3]).

A. F. MONNA [4] předložil problém, zda toto zobecněné řešení je jediným funkcionálním prodloužením klasické Dirichletovy úlohy. Přesněji řečeno: nechť

1. A_f je operátor, přiřazující každé funkci spojité na hranici omezené oblasti G funkci harmonickou*) v G;

2. $A_f(P)$ splývá s řešením Dirichletovy úlohy, je-li pro funkci f Dirichletova úloha řešitelná;

3. A_f je distributivní operátor, t. j. $A_{c_1f_1+c_2f_2} = c_1A_{f_1} + c_2A_{f_2}$;

4. $m \leqq A_f(P) \leqq M$ v G, je-li $m \leqq f(P) \leqq M$ na hranici G.

Je $A_f(P) = W_f(P)$ v G? Problém rozřešil M. V. KELDYŠ [5], který dokázal správnost této rovnice.

Ukažme, že požadavky 1—4 možno zeslabit. Tak na př. lze podmínky 1, 2, 4 nechat beze změny a podmínku 3 nahradit slabší podmínkou

3'. $A_{f_1+f_2} = A_{f_1} + A_{f_2}$.

To lze dokázat tak, že z 3' odvodíme 3 pro racionální c_1 a c_2 a 4 použijeme k limitnímu přechodu od racionálních čísel c_1 a c_2 k iracionálním. Tak vzniká přirozeně otázka, zda podmínku 3 není možno vůbec opustit. Dokážeme, že to je možné, když požadavek 4 nahradíme požadavkem poněkud silnějším.

*) Jejíž hodnotu v bodě P značíme $A_f(P)$.

Věta. *Buď $W_f(P)$ Perronovo zobecněné řešení Dirichletovy úlohy. Buď A_f operátor, který splňuje podmínky 1 a 2 a pro nějž platí:*

4'. Je-li K konstanta a $f_1 \leqq f_2 + K$ na hranici oblasti G, potom $A_{f_1}(P) \leqq \leqq A_{f_2}(P) + K$ v G.

Potom $W_f(P) = A_f(P)$ v G.

Poznámka. Splňuje-li operátor A_f podmínky 1—4, splňuje i 4'. Není však ihned patrno (plyne teprve z dokazované věty), že operátor splňující požadavky 1, 2 a 4' splňuje i podmínky 1—4.

Důkaz věty. Stačí dokázat, že $W_f(P) = A_f(P)$ ve všech regulárních bodech hranice, neboť dvě omezené harmonické funkce splývají v G, jestliže mají ve všech regulárních bodech hranice oblasti stejné limitní hodnoty, jak dokázali EVANS a KELLOG. Buď Q regulární bod, potom existuje funkce V_Q harmonická v G, spojitá v $\overline{G}$ a taková, že $V_Q(Q) = 0$, $V_Q(P) > 0$ pro $P \neq Q$. Hraniční hodnoty funkce V_Q v bodě P označme $\varphi(P)$. Buď ε libovolné kladné číslo. K němu existuje okolí U bodu Q tak, že pro body $P \in U$ platí $f(P) < f(Q) + \varepsilon$. Protože funkce V_Q má vně U kladné infimum, a protože funkce f je omezená, lze zvolit konstantu C tak, že vně U platí $f(P) < C\varphi(P) + f(Q) + \varepsilon$. Tedy všude na hranici oblasti G platí $f(P) < C\,\varphi(P) + f(Q) + \varepsilon$. Podle 4' je $A_f(P) \leqq A_{C\varphi}(P) + f(Q) + \varepsilon$, avšak dle 2 je $A_{C\varphi} = CV_Q$ a tedy $A_f(P) \leqq \leqq C.V_Q(P) + f(Q) + \varepsilon$; uvědomíme-li si, že $\lim_{P\to Q} V_Q(P) = 0$, dostaneme $\overline{\lim_{P\to Q}}\, A_f(P) \leqq f(Q) + \varepsilon$. Analogicky se dokáže $\underline{\lim_{P\to Q}}\, A_f(P) \geqq f(Q) - \varepsilon$ a tedy a tedy $A_f(Q) = f(Q) = W_f(Q)$ c. b. d.

LITERATURA

[1] *O. Perron;* Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. Math. Zeitschrift *18* (1923), 42—54.

[2] *N. Wiener;* Certain Notions in Potential Theory. Journal of Mathematics and Physics *3* (1924), 24—51.

[3] *M. B. Келдыш:* О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. Успехи мат. наук *8* (1941), 171—231.

[4] *A. F. Monna;* Het Problem van Dirichlet. Niew Archief voor Wiskunde *19* (1938), 249—256.

[5] *M. B. Келдыш:* О задаче Дирихле. ДАН СССР, *32* (1941), 308.

ÚLOHY A PROBLÉMY

1. Budiž P množina všech posloupností $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $a_k = 0$ nebo 1. Nechť Q je množina všech posloupností $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $b_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i$, při čemž $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ probíhá množinu P. Rozhodněte, zda ke každému intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ (kde $0 < \alpha \leqq \beta < 1$) existuje v Q posloupnost, jejíž množina hromadných hodnot je právě $\langle\alpha, \beta\rangle$. (Speciálně tedy: Lze každé číslo $\gamma \in (0, 1)$ pokládat za limitu jisté posloupnosti z Q?)

Dále vyšetřete, zda pro každou posloupnost z Q je množina hromadných hodnot intervalem.

Jiří Sedláček, Praha

2. V eukleidovském n-rozměrném prostoru je dáno $N = 2^n$ navzájem různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_N$ tak, že pro $i, j, k = 1, 2, \ldots, N$ $(i \neq j \neq k \neq i)$ platí $\sphericalangle A_iA_jA_k \leqq \frac{\pi}{2}$. Rozhodněte, zda platí, že body $A_1, A_2, \ldots, A_N$ jsou vrcholy n-rozměrného kvádru (t. j. pravoúhlého rovnoběžnostěnu).

M. Fiedler, Praha

Řešení úlohy 4 (autor *M. Fiedler*) z č. 2 roč. 82 (1957), str. 229.

Bohuslav Míšek, Honice u Nového Strašecí, zaslal redakci řešení částí a), b) úlohy 4. Uveřejňujeme zde výsledky:

Řešením úl. 4 a) je prostorový čtyrúhelník $ABCD$, jehož všechny čtyři strany mají délku $\frac{1}{4}$ a pro který platí $ABC \perp CDA$, $BCD \perp DAB$.

Řešením úl. 4b) je prostorový pětiúhelník $ABCDE$, pro který $AB = BC = DE = EA = \frac{3}{16}$, $CD = \frac{1}{4}$, $AC = AD = \frac{\sqrt{5}}{8}$ a dále $ABC \perp ACD \perp ADE$, při čemž rovina ACD odděluje body B, E. Tomuto pětiúhelníku nelze opsat kulovou plochu.

*

K úlohám 4c) a 4d) sděluje autor:

Řešení úlohy 4d) je v článku E. Egerváry, On the smallest convex cover of a simple arc of space-curve, Publ. Math. Debrecen *1* (1949—50), 65—70. Výsledkem je oblouk šroubovice (v pravoúhlých souřadnicích)

$$x = \frac{\cos t}{\sqrt{6}\pi}, \quad y = \frac{\sin t}{\sqrt{6}\pi}, \quad z = \frac{t}{2\sqrt{3}\pi}, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi .$$

Tento oblouk rovněž neleží na kulové ploše.

Řešení úl. 4c) není dosud známo, avšak v předběžném sdělení Z. A. Melzak, Convex hulls of a class of closed space curves, Bams *63* (1957), 250 se uvádí, že úloha je ekvivalentní řešení isoperimetrického problému, jehož Lagrange-Eulerovy rovnice jsou

$$z' = xy\,, \quad x'' = -\,xy^2\,, \quad y'' = -\,yx^2\,,$$

kde x, y, z jsou pravoúhlé souřadnice a nezávisle proměnná je délka oblouku křivky.

Redakce

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

REFERÁTY

PROSTORY S AFINNÍ KONEXÍ LOKÁLNĚ EUKLEIDOVSKÉ A KORESPONDENCE MEZI PROSTORY AFINNÍMI A PROJEKTIVNÍMI

(Les espaces à connexion affines localement euclidiens et les correspondances entre espaces affines ou projectivés)

(Referát o přednášce akademika GHEORGHE VRĂNCEANU proslovené ve schůzi matematické obce pražské dne 2. září 1957.)

Přednášející předpokládal n-rozměrný prostor A_n s afinní konexí $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$, lokálně eukleidovský, pro který $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ a který má tensor křivosti roven nule, t. j.

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk} = 0 . \tag{1}$$

Prostoru A_n přidružil bodovou transformaci

$$u^i = u^i(x^1, \ldots, x^n) \tag{2}$$

rovnicemi

$$\frac{\partial^r u^i}{\partial x^j \, \partial x^k} + \Gamma^s_{jk} \frac{\partial x^i}{\partial x^s} = 0 , \tag{3}$$

při čemž u^i jsou kartézské souřadnice prostoru A_n.

Uvažujeme-li nyní dva afinní prostory $E_n(u^1, \ldots, u^n)$, $A_n(x^1, \ldots, x^n)$, můžeme složky Γ^i_{jk} považovat za složky tensoru v prostoru A_n; potom je možné na základě vlastností tohoto tensoru usuzovat na charakter korespondence (2) mezi prostory A_n a E_n.

Jde-li o projektivní prostory A_n a E_n, potom úlohu elementů Γ^i_{jk} přejímají veličiny Π^i_{jk} takto definované

$$\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \frac{1}{n+1}\,\delta^i_j\,\frac{\partial \lg \Delta}{\partial x^k} + \frac{1}{n+1}\,\delta^i_k\,\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^j} , \quad \Delta = \left|\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right| ,$$

což jsou koeficienty projektivní konexe Thomasovy. Elementy Π^i_{jk} lze obdobně jako elementy Γ^i_{jk} považovat za složky tensoru ve smyslu dříve uvedeném.

Přednášející definuje tensory $\Gamma_{jk} \equiv \Gamma^i_{sj}\Gamma^s_{ik}$ resp. $\Pi_{jk} \equiv \Pi^i_{sj}\Pi^s_{ik}$, které mají podstatný význam pro studium korespondence (2). Je zřejmě možno formálně dojít naznačenou cestou k tensorům vyšších stupňů.

Jako příklad tensoru Π_{jk} ukázal prof. Vrănceanu pro $n = 2$, že tento tensor charakterisuje korespondenci (2) podle profesora O. BORŮVKY. Není-li totiž Π_{ij} degenerovaný, je korespondence (2) prvního druhu, je-li degenerovaný, je korespondence (2) druhého druhu a je třetího druhu podle O. Borůvky, je-li tensor Π_{ij} nulový.

Po přednášce, která byla početně navštívena našimi mladými geometry, rozvinula se diskuse, v níž zejména akademik E. ČECH ukázal, že tensory Γ^i_{jk}, Π^i_{jk} úzce souvisí s linearisující korespondencí, kterou před časem do teorie korespondencí zavedl.

František Vyčichlo, Praha

ZOBECNĚNÍ POJMU PROSTORU S KONEXÍ

(Referát ALOISE ŠVECE, přednesený v matematické obci pražské dne 30. září 1957.)

Prostor s afinní konexí je definován následujícím způsobem: Každému bodu (u) oblasti parametrů $\Omega \subset A_n$ buď přiřazen cetroafinní lokální prostor $A_n(u)$ s centrem $M(u)$; každému oblouku γ mezi body $\underset{1}{(u)}$, $\underset{2}{(u)}$ buď přiřazena afinita mezi prostory $A_n\underset{1}{(u)}$ a $A_n\underset{2}{(u)}$. Zmíněná konexe mezi lokálními prostory je dána známým způsobem analyticky, což zaručuje její dostatečnou hladkost. Lokální prostory mohou být ovšem i prostory projektivní, eukleidovské a afinity mezi nimi nahrazeny kolineacemi, resp. shodnostmi; pak dostáváme prostory s projektivní a eukleidovskou konexí.

Definice Königovy variety (nebo podle nové Kanitaniho terminologie prostoru s majorantní konexí) je shodná s definicí prostoru s afinní nebo jinou konexí, jenom dimense lokálních prostorů (označme ji m) je různá od dimense n oblasti parametrů Ω. Tyto prostory zavedl R. KÖNIG (Jahresb. D. M. Verein, 28, 1919, 213—228) a upozornil na ně J. A. SCHOUTEN (C. R. 178, 1924, 2044—2046); v novější době studoval prostory s projektivní majorantní konexí ($m > n$) J. KANITANI (většinou v Mem. Univ. Kyoto, u nás nepřístupné). Königovy prostory se vyskytují přirozeným způsobem při studiu variet v prostorech s konexí: Buď dána na př. varieta V_r v prostoru s projektivní konexí P_n a v každém lokálním prostoru každého jejího bodu buď zvolen bod M; množina těchto bodů je spolu s příslušnými lokálními prostory, mezi nimiž je konexe určena konexí prostoru P_n, Königovým prostorem. Je pravděpodobné, že na př. celou teorii transformací ploch v projektivním prostoru S_3 bude možno zobecniti na plochy v P_3. Ve své nepublikované práci jsem definoval dualisaci π^* plochy $\pi \subset P_3$ (je to opět Königova varieta $n = 2$, $m = 3$), zjistil geometrickou interpretaci CARTANEM uvažovaných zobecnění Darbouxových křivek a nalezl projektivní lineární elementy plochy π a π^*, jež se zachovávájí při jejich projektivní deformaci. Ve své práci „Prostory s konexí II" (cyklost. MÚČSAV) jsem podrobně studoval plochu v trojdimensionálním prostoru s eukleidovskou konexí, zvláště souvislost mezi hlavními křivkami a rozvinutelnými plochami kongruence normál.

Prostor s konexí je možno zobecniti i jiným způsobem: Každému bodu oblasti Ω buď přiřazen lokální prostor (na př. projektivní) S_μ, jehož centrum je pak nahrazeno podprostorem S_m; mezi lokálními prostory S_μ je pak dána konexe obvyklým způsobem. Tento prostor zobecňuje varietu podprostorů projektivního prostoru právě tak, jako Königův prostor zobecňuje bodovou varietu projektivního prostoru. V práci „Congruences de droites dans les espaces réglés à connexion projective" (Čech. mat. ž. 7 (82), 96—114) jsem studoval případ $n = 4$, $m = 1$, $\mu = 3$, hlavně však dvojdimensionální variety tohoto prostoru, což je vlastně zobecnění teorie kongruencí přímek v P_3. Případem $n = 2$, $m = 1$, $\mu = 3$ jsem se potom podrobně zabýval v práci „Prostory s konexí III" (cyklost. MÚČSAV).

Domnívám se, že soustavné studium těchto zobecněných prostorů by značně přispělo k větší geometričnosti při studiu variet v prostorech s konexí.

Alois Švec, Liberec

O DIRICHLETOVĚ ÚLOZE NA NEOMEZENÝCH OBLASTECH

(Referát o přednášce IVO BABUŠKY a RUDOLFA VÝBORNÉHO, konané v matematické obci pražské dne 7. října 1957.)

Přednášející nejdříve podali historický přehled o řešení Dirichletovy úlohy při spojité hraniční funkci a nejobecnější hranici. Potom referovali o vlastní práci zobecňující výsledky J. MAŘÍKA (viz Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 257—282).

Byla dokázána existence zobecněného řešení Dirichletovy úlohy pro oblast G (nemusí být omezená) a spojitou hraniční funkci f, jestliže existují funkce φ a ψ spojité na $\overline{G}$; φ je subharmonická, ψ superharmonická, $\varphi \leqq f \leqq \psi$ na hranici G a $\varphi \leqq \psi$ v G. Zobecněným řešením je míněna funkce harmonická, která ve všech regulárních bodech nabývá předepsaných hodnot. Mezi všemi zobecněnými řešeními u, pro které platí $u \geqq \varphi$ existuje nejmenší, označme ho W. Funkci W lze aproximovat řešením Dirichletovy úlohy na oblasti G_1, která aproximuje G a na jejíž hranici je dáno vhodné spojité rozšíření funkce f. Dále byla v přednášce ukázána souvislost funkce W s Perronovou metodou horních a dolních funkcí.

Byla rozřešena otázka jednoznačnosti ve třídě omezených funkcí. Dirichletova úloha je pro oblast $G \subset E_3$ jednoznačně řešitelná tehdy a jen tehdy, jestliže řada $\Sigma \gamma_n 2^{-n}$ diverguje. Přitom γ_n je kapacita množiny $\underset{x}{\mathfrak{E}}[x \in G, 2^n \leqq |x| \leqq 2^{n+1}]$. Z této věty lze odvodit jednoduché geometrické kriterium jednoznačnosti:

Jestliže komplement oblasti G obsahuje list $L = \underset{x}{\mathfrak{E}}[0 \leqq x_2 \leqq x_1^{-\mu};\ x_1 \geqq 1,\ x_3 = 0]$, μ libovolné reálné, potom je Dirichletova úloha jednoznačně řešitelná ve třídě omezených funkcí.

Z věty řešící otázku jednoznačnosti ve třídě omezených funkcí (na event. neomezené oblasti) lze pomocí Kelvinovy transformace odvodit kriteria jednoznačnosti na omezené oblasti ve třídě funkcí, které nerostou rychleji než elementární řešení. Tak získáme větu zobecňující výsledky Zarembovy.

Věta. *Buď G omezená oblast, x^i $(i = 1, \ldots, s)$, y^j $(j = 1, \ldots, r)$ konečný počet bodů hranice oblasti G. Body x^i buďte regulární. Buď u funkce harmonická ve všech regulárních bodech s výjimkou bodů x^i spojitě prodlužitelná k nule. Nechť dále* $u(x) = O\left(\dfrac{1}{\varrho(x, x^i)}\right)$ a $u(x) = o\left(\dfrac{1}{\varrho(x, y^j)}\right)$; potom $u \equiv 0$.

Rudolf Výborný, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

RECENSE

А. И. Мальцев: **Основы линейной алгебры.** (Základy lineární algebry). 2. vyd. přepracované, Moskva, Gostechizdat, 1956, 340 str.

Lineární algebra se zabývá, jak uvádí autor, předměty trojího druhu: maticemi, lineárními prostory a algebraickými formami. Souvislost teorií těchto tří předmětů je tak úzká, že většina úloh lineární algebry připouští formulaci v každé z nich. V knize zvolena za základ výkladu teorie matic, ač v geometrii a mechanice většina úloh lineární algebry se jeví jako úlohy z teorie algebraických forem a vnitřní vztahy mezi různými úlohami z lineární algebry se nejvýrazněji projevují při úvahách o lineárních prostorech. Při studiu lineární algebry je tedy důležité navykat si přecházet od formulace v jedné teorii k formulaci v druhých dvou. Ze stanoviska teorie forem se rozpadá lineární algebra na tři části: teorii lineárních forem, teorii bilineárních a kvadratických forem a teorii forem multilineárních. Vyšší části této teorie jsou již předmětem teorie invariantů a o té se v knize nejedná.

V kapitole I—V se studují matice a vektory nad libovolným tělesem — tělesem základním. Čtenář, který se zajímá o užití lineární algebry v geometrii a v mechanice nebo obecněji v teoretické fysice, může za základní těleso volit těleso čísel reálných nebo komplexních.

Znalost počátků theorie determinantů se v knize předpokládá. Dokonalé přípravy k jejímu studiu lze nabýt probráním příslušných částí z Kořínkových „Základů algebry". Chce-li se čtenář omezit na základní těleso tvořené čísly reálnými nebo čísly komplexními, stačí jako příprava Bydžovského „Základy theorie determinantů a matic".

Uvedeme stručně obsah spisu.

V kapitole I jsou vyložena hlavní pravidla pro počítání s maticemi. V § 3 je vyloženo počítání s maticemi rozdělenými na bloky (pole), které je v mnohém ohledu analogické s dříve vyloženým počítáním s maticemi.

Obsahem kapitoly II jsou lineární prostory.

Kapitola III se zabývá lineárním zobrazením.

Kapitola IV je nadepsána „Mnohočlenové matice". V prvních třech kapitolách se skoro stále studovaly jen matice, jejichž prvky jsou prvky ze základního tělesa K. Pouze v souvislosti s charakteristickým mnohočlenem bylo třeba se zabývat charakteristickou maticí $\lambda E - A$, jejíž prvky nebyly prvky z K, nýbrž mnohočleny v λ s koeficienty z K. V této kapitole se systematicky studují vlastnosti matic, jejichž prvky jsou mnohočleny nad K. Výsledků je pak použito k určení Jordanovy formy matice lineárního zobrazení.

Kapitola V jedná o unitárních a euklidovských prostorech. K operacím dříve zavedeným, sčítání vektorů a jejich násobení číslem, zde přistupuje jako další operace skalární součin vektorů.

Kapitola VI jedná o kvadratických a bilineárních formách.

Kapitola VII má název „Lineární zobrazení bilineárně metrických prostorů". Uvažuje se v ní o klasifikaci hlavních typů lineárních zobrazení (symetrických, kososymetrických a isometrických) prostorů s bilineární metrikou.

Konečně kapitola VIII se zabývá multilineárními formami a tensory. K umožnění definice tensorů byl dříve zaveden pojem duálního prostoru. Pak je vyložena tensorová algebra a teorie invariantů.

Ke každému paragrafu jsou připojeny příklady a úlohy, při čemž u těžších úloh je také návod k řešení. Mnohé z těchto úloh doplňují látku v knize probíranou. Tak v úloze 9, § 3, kap. IV se mluví o charakteristikách Segreových, v úl. 10 o charakteristikách Weyrových[1]) a v úl. 11 o souvislosti obou těchto druhů charakteristik.

Podle mého názoru bylo by však pro čtenáře jistě výhodné udat aspoň v některých případech u úloh poukazy na literaturu, z níž bylo čerpáno a kde lze po případě nalézt další podrobnosti o probíraném předmětu.

Způsobem, jak látku spisovatel zpracoval, docílil toho, že jeho kniha je látkou nejbohatší z ruských knih jednajících o lineární algebře, ať to je známá kniha ŠILOVOVA, GELFANDOVA (přeložená do češtiny M. FIEDLEREM), nebo kniha GANTMACHEROVA „Теория матриц", která sleduje jiné cíle.

Karel Rychlík, Praha

*

Н. Г. Четаев: **Устойчивость движения.** Gostechizdat, Moskva, 1955, str. 207, cena 7 rublů.

Recensovaná kniha je druhým opraveným vydáním knihy téhož názvu z r. 1946. Prvé vydání nebylo v ČSR k disposici a nebylo proto u nás recensováno. Je proto třeba upozornit čtenáře na tuto knihu, která má některé nepopiratelné přednosti. Stačí to však provést v poměrně stručné formě, neboť základní pojmy teorie stability pohybu byly v posledních letech v tomto časopisu uvedeny v řadě článků (mimo jiné v recensi Malkinovy knihy „Teorija ustojčivosti dviženija", Čas. pro pěst. mat. *80* (1955), 491—497).

Kniha je rozdělena do deseti kapitol. V prvé úvodní kapitole (str. 7—16) jsou zavedeny pouze základní pojmy a definice teorie stability pohybu.

V kapitole druhé (str. 17—37) jsou dokázány obecné věty o stabilitě, asymptotické stabilitě a nestabilitě pomocí přímé, někdy také zvané druhé, Ljapunovovy metody. Věty jsou ozřejmeny na řadě dosti zevrubně provedených příkladů z mechaniky. Jako aplikace je zde také dokázána Routhova věta o stabilitě pohybu, známe-li některé prvé integrály.

V kapitole třetí (str. 38—56) je vyšetřována stabilita rovnovážné polohy mechanické soustavy, jež je podrobena holonomně skleronomním vazbám a na niž působí pouze potenciální síly. Zde je uvedena známá Lagrangeova věta o stabilitě a Četajevova věta o nestabilitě rovnovážné polohy. Vedle jiných běžných výsledků je zde stručně vyložena zajímavá Poincarého teorie rozvětvení (bifurkace) rovnovážných poloh v případě, že potenciální síly jsou funkcemi nějakého parametru.

Ve čtvrté kapitole (str. 57—96) je vyložena teorie řešení soustav linearních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a to tak, že všechny potřebné pojmy i věty (na př. teorie elementárních dělitelů, Hurwitzovy věty) jsou zde zavedeny a dokázány nezávisle na jiných učebnicích. I když v této kapitole není pochopitelně nových výsledků, není její čtení nezajímavé ani pro čtenáře s touto teorií již seznámeného. Na př. souvislost typů partikulárních řešení s elementárními děliteli je zde podána velmi instruktivně; i takové upozornění, že eliminační metoda může při řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic vést k chybným výsledkům, může mít pro praktika značnou cenu.

V kapitole páté (str. 97—116) se autor zabývá vlivem poruch na rovnovážnou polohu. Vychází z Lagrangeových rovnic druhého druhu, při čemž předpokládá, že v okolí rovno-

[1]) Viz E. WEYR: O theorii forem bilineárných, Praha 1889, 111 str.; něm. překlad v Monatshefte *1* (1890), 163—236.

vážné polohy lze kinetickou energii resp. potenciální energii vyjádřit jako kvadratickou formu rychlostí resp. souřadnic s konstantními koeficienty. Nejdříve ukáže, že vhodnou transformací lze každou takovou soustavu uvést na normální tvar, t. j. $\ddot{x}_i + \lambda x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, a potom vyšetřuje vliv různých rušivých sil na takovou soustavu podle jejich fysikálního charakteru (nové vazby, dissipativní síly, gyroskopické síly, vzájemné působení dvou speciálních soustav).

V třech následujících kapitolách jsou uvažovány takové soustavy, jejichž pravé strany jsou holomorfní funkce nezávislé na čase.

V kapitole šesté (str. 117—125) jsou odvozeny známé věty o stabilitě na základě stability soustavy prvého přiblížení.

V kapitole sedmé (str. 126—139) je zkoumán kritický případ, kdy matice linearisované soustavy (s konstantními koeficienty) má kromě vlastních čísel se zápornou reálnou částí ještě nulu jako vlastní číslo.

V kapitole osmé (str. 140—161) je vyšetřován další důležitý kritický případ, kdy matice linearisované soustavy má vedle vlastních čísel se zápornou reálnou částí za vlastní čísla dvojici ryze imaginárních konjugovaných čísel.

V kapitole deváté (str. 162—186) vyšetřuje autor stabilitu řešení soustav, jejichž pravé strany jsou funkcemi času (neautonomní soustavy). Nejprve vyslovuje základní poučky o charakteristických číslech funkcí a řešení diferenciálních rovnic, zavádí pojem regulární soustavy diferenciálních rovnic a posléze pro tyto soustavy odvozuje klasické Ljapunovovy věty o stabilitě a nestabilitě.

Kapitola desátá (str. 187—204) je věnována vyšetřování stability triviálního řešení lineární soustavy s periodickými koeficienty. Vedle základů Floquetovy teorie jsou tu udány dvě metody na přibližný výpočet charakteristických čísel a to pomocí metody postupných aproximací a pomocí malého parametru.

Kniha je opatřena jmenným a věcným rejstříkem.

Vcelku lze říci, že Četajevova kniha přes svůj pouze úvodní charakter je velmi užitečná a to zvláště pro čtenáře s technickým zaměřením pro svůj výklad úzce spjatý s mechanikou a pro řadu příkladů (často technických), zpravidla důkladně vypracovaných, jimiž je celý výklad doprovázen.

Otto Vejvoda, Praha

*

Э. Кольман: **Бернард Больцано** (Bernard Bolzano). Izdat. A. N. SSSR, Moskva, 1955, str. 224, cena 9 rublů.

Recensovaná kniha obsahuje vedle předmluvy pět kapitol, dva dodatky a bibliografii.

Kapitoly jsou nazvány takto: I. *Sociálně-politická situace v Čechách v posledním dvacetiletí 18. století a v první polovině 19. století.* Pražská universita v té době (9 stran). II. *Bolzanův životopis.* Původ, rodina, výchova, studentská léta. Pedagogická, vědecká a osvětová činnost. Pronásledování reakcí (15 stran). III. *Bolzanovy matematické objevy.* Význam a pojmy matematiky. Matematický důkaz. Aritmetisace analysy. Teorie podobnosti a postulát o rovnoběžkách. Bolzano jako předchůdce teorie množin. Základy teorie funkcí reálné proměnné (65 stran). IV. *Bolzanova filosofie.* Logika. Filosofické otázky přírodovědy. Psychologie, estetika, etika (24 stran). V. *Bolzanovy společensko-politické názory.* Učení o právu a státu. Boj za rovnoprávnost národů, za mír. Bolzanova socialistická utopie. Závěr (52 stran).

V doplňku 1 je uveden ruský překlad Bolzanovy práce „Ryze analytický důkaz věty, že mezi dvěma libovolnými hodnotami dávajícími výsledek opačného znaménka leží alespoň jeden kořen rovnice", a v d o p l ň k u 2 je uveden úryvek z Bolzanovy „Teorie funkcí" týkající se konstrukce Bolzanovy spojité funkce, která nemá derivaci v nekonečně mnoha bodech.

Kolmanova monografie o našem vynikajícím mysliteli BERNARDU BOLZANOVI je marxistickou prací, která se snaží o všestranné zhodnocení této veliké osobnosti. Zhodnotit vědeckou práci Bolzanovu v matematice, logice, filosofii, jeho sociálně-politické názory a utopie je jistě vědecky náročným úkolem. (Prací Bolzanových z mechaniky a fysiky si Kolman nevšímá.)

Zkoumání dějin vědeckých problémů má velký positivní význam pro řešení současných otázek vědy. Proto studium Bolzanovy osobnosti není jenom speciálně historickou záležitostí, nýbrž i prací, která může podnětně působit při řešení soudobých problémů. Kolmanovo zpracování logických a matematických studií Bolzanových na jedné straně a Bolzanovy filosofie na druhé straně dává možnost hlouběji promyslet vztah světového názoru filosofie a speciální vědy. Kolman připomíná Bolzanův přínos k otázkám logiky a přitom ukazuje, jak řešení jednotlivých otázek nebo způsob argumentace jsou podmíněny filosofickými názory Bolzanovými. Zároveň při analyse těchto prací je ukázáno, že není možné zaměnit světový názor vědce a objektivní význam objevů jím učiněných.

Zvláštnost marxistického zkoumání dějin přírodních věd ukazuje Kolman v tom, že chápe proces poznání jako proces společenský. Autorovo rozčlenění látky a také pořad kapitol obráží vnitřní logiku tohoto zkoumání. Jednotlivé vědy jsou různým způsobem podmíněny ekonomicko-politickými faktory. Přitom je třeba vycházet z toho, že teprve v dlouhých časových obdobích odpovídá křivka vývoje speciální vědy křivce vývoje ekonomického. Proto je podle našeho názoru nutné oddělit především tendence vývoje výroby a hospodářské základny společnosti a potřeby praxe a ukázat, jak se obrážely ve vývoji vědy, která se vyvíjí relativně samostatně. Bude třeba, aby autor v dalším vydání podrobněji rozpracoval souvislost života Bolzanova a jeho vědecké a filosofické činnosti v tehdejší společnosti, neboť takto se první kapitola jeví poměrně isolovanou od ostatních. Autor se tu hlavně věnuje vylíčení českého národního obrození; Bolzano však byl jen slabě spojen s touto ideou a proto tento výklad málo přispívá k vysvětlení vzniku Bolzanových názorů.

První dvě kapitoly mají řadu drobných nedopatření i věcných chyb: spletené údaje o Bolzanově procesu, nesprávné tvrzení o nutnosti odejít na venkov (str. 26), vysvětlivka o tom, co je metafysika (str. 26), údaje o životě na venkově (str. 27–28), ocenění bolzanovců (str. 28), umístění činnosti druhého pokolení buditelů až do druhé poloviny let čtyřicátých (str. 7), Jungmann jako přítel Bolzanův (str. 8), údaje o universitě (str. 12), Česká královská učená společnost jako společnost nacionalistická (str. 13).

V třetí kapitole jsou uvedeny hlavní výsledky Bolzanových *matematických prací*. Jde především o práce „Ryze analytický důkaz věty, že mezi dvěma hodnotami, jež dávají výsledek opačného znaménka, leží alespoň jeden reálný kořen rovnice", „Paradoxien des Unendlichen" a „Functionenlehre", v nichž Bolzano razil cestu buď novému pojetí některých disciplin (na př. úvahám o základech matematiky), nebo novým disciplinám (na př. teorii funkcí reálné proměnné a teorii množin).

Kolmanovo hodnocení čistě matematických výsledků Bolzanových se v podstatě shoduje s hodnocením, jež bylo českými matematiky uveřejněno na různých místech (na př. v předmluvách k soubornému vydání Bolzanova díla a jinde), a jež je českému čtenáři většinou dobře známo. Nové prvky nalézáme v tom, jak se u Bolzana v matematických úvahách odrážejí jeho filosofické názory, což v dosavadní literatuře nebylo souborně zpracováno. Bolzano zdůrazňoval (na př. v předmluvě k „Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte") úzký vztah mezi matematikou a filosofií. Na jedné straně soudil, že matematické myšlení má velký význam pro filosofii, což částečně pramenilo z jeho přeceňování formální logiky jako součásti filosofie. Na druhé straně vycházeje ze svých idealistických názorů věří, že základní pojmy matematiky lze odvodit čistě rozumovou konstrukcí (z Begriffswahrheiten). To, že Bolzano vůbec považuje matematické pravdy za zcela „pojmové", že nevidí, že v matematice se odráží naše zkušenost a znalost objektivního světa, způsobuje, že Bolzano i tam, kde popírá chybné názory jiných idealistických filosofů (na př. Kanta) na matematiku, není schopen nahradit tyto názory podstatně správnějšími. Bolzanův „filosofický" přístup k matematice přináší i některé jiné zápory, které se týkají více vlastní matematiky, tak na př. spíše „filosofické", vágní definice některých pojmů (podobnosti, sčítání), které nakonec vedou k nesprávným důkazům. Měl však bezesporu v mnohém i kladný význam — na př. v tom, že obrátil pozornost k logickým základům matematiky, nebo v tom, že vyzdvihl nutnost přísně logického odvozování matematických vět bez odvolávání se na smyslový názor.

Také do textu třetí kapitoly se vloudily mimo několik tiskových chyb i chyby věcné. Tak na str. 65 při důkazu existence vlastního hromadného bodu je třeba mluvit o nekonečné ohraničené množině a nikoliv o množině uzavřené; na str. 82 soudí Kolman neodůvodněně, že z textu, v němž Bolzano mluví o veličinách M, N, μ, ν, plyne, že veličinami jsou zde míněna reálná čísla; na str. 87 Kolman tvrdí, že množina, jež je kontinuem ve smyslu Bolzanově, není dokonalá, zatím co můžeme pouze tvrdit, že nemusí být dokonalá; na str. 88, ř. 4 chce Kolman zřejmě říci iracionální a nikoliv racionální.

Kapitola čtvrtá: Dále autor ukazuje, jak na Bolzanovy práce navázala *matematická logika*. Proti vulgarisujícím tendencím, které nedovedly oddělit vědu a nesprávné filosofické závěry, ukazuje na to, že formální logika nabyla u Bolzana mimořádně přesných forem, které umožňují zkoumat logické základy matematiky.

Přesnější představě o Bolzanově pojetí logiky by přispělo podrobnější prozkoumání vztahů k Leibnizovi, Kantovi a zvláště k Hegelově koncepci dialektické logiky. (Stejně by bylo třeba podrobnějšího rozboru tehdejšího stavu matematiky v předchozí kapitole.) Chybí potřebné vysvětlení, jakou roli sehrály Bolzanovy názory ve sporech mezi psychologisty a logicisty v pozdějším vývoji logiky a filosofie.

Kapitola pátá: Bolzano byl postavou složitou a plnou rozporů. To, že autor se zabývá všemi stránkami jeho díla, nám dává možnost poznat jak vnitřní spojení mezi jednotlivými částmi jeho díla, tak i rozpory mezi náboženstvím a racionalistickým pojímáním vědy. Závěrečná část knihy je věnována rozboru *společensko-politických názorů* Bolzanových. Autor poukazuje na humanistický charakter řady stanovisek a požadavků Bolzanových, které se týkají reformy společnosti a které jsou vyloženy v díle „O nejlepším státě". I zde by bylo třeba podrobněji prozkoumat historické souvislosti Bolzanových názorů.

Kolmanova kniha přibližuje nám dílo velikého myslitele. Činí tak s velkou znalostí Bolzanova díla, které rozebírá se všech hledisek. Proto je správné, že Státní nakladatelství politické literatury připravuje český překlad tohoto Kolmanova spisu.

Vladimír Ruml a *Otto Vejvoda*, Praha

*

М. Я. Громов: **Начертательная геометрия,** 1. díl, Moskva, 1951, str. 122, obr. 116. Vydal Všesvazový polytechnický institut pro dálkově studující.

Rozsahem nepříliš veliká knížka se zabývá pouze jednou promítací metodou, pravoúhlým promítáním na dvě k sobě kolmé průmětny. Podtitul j.ště blíže vymezuje obsah na užití pravoúhlého promítání k řešení základních stereometrických úloh o bodech, přímkách a rovinách. Probírá se tedy jen základní část obvyklého obsahu Mongeovy projekce, zato dost důkladně a systematicky. Přitom celkové pojetí není rozhodně tradiční, takže v každém případě je velmi užitečné se s ním seznámit a porovnat s běžnou metodikou výuky tohoto zobrazení.

V poměrně velmi krátkém úvodu (str. 5—17) je v první kapitole všeobecná zmínka o základních pojmech promítání, pak jsou vyloženy některé základní vlastnosti středového, rovnoběžného a pravoúhlého promítání a konečně je stručně uvedeno pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny, při čemž je hned zdůrazněno, že je možno základnici vynechat. V dalším, až na celkem velmi řídké výjimky, se již základnice neužívá.

V druhé kapitole (str. 18—29) se autor zabývá zobrazováním bodu a přímky. Při zobrazování přímky, kterou zásadně určuje dvěma různými body, tedy v podstatě úsečkou, užívá místo souřadnic určujících bodů jen rozdílů stejnojmenných souřadnic těchto bodů. Tak na př. přímka rovnoběžná se základnicí x a od ní různá má rozdíl x-ových souřadnic různý od 0, kdežto rozdíly y-ových a z-ových souřadnic jsou nulové. Obdobně se charakterisují i jiné specielní polohy přímky k průmětnám. Přirozeně potom již se důsledně pracuje při hledání skutečné velikosti úsečky vždy bez základnice a užívá se tedy jen rozdílového trojúhelníka.

Třetí kapitola (str. 30—87) je věnována zobrazení roviny. Nejprve si autor všímá dvojice přímek; rovnoběžných a různoběžných užívá k určení roviny. Přitom zásadně neužívá základnice; výjimku činí jen v případech, kdy určující přímky jsou stopami roviny. Přímku a bod v rovině zobrazuje, jak je zvykem, užitím incidenčních vlastností. Ve zvláštním odstavci probírá promítací roviny a hledá jejich průsečíky s přímkou a průsečnice s obecně položenou rovinou. Po zavedení hlavních přímek přejde se hned k podmínkám kolmosti přímky k rovině. Stanovení skutečné velikosti rovinného obrazce se věnuje neobvykle veliká péče. Nejprve se probírají úlohy v promítací rovině; velikost rovinného obrazce se určuje a) sklápěním, b) otáčením. U obecně položené roviny se ukazuje nejprve užití třetí pomocné průmětny a teprve po vyložení pojmu otáčení kolem přímky postupně po podrobném rozboru se dospěje k obvyklým konstrukcím otáčení roviny kolem hlavní přímky do polohy rovnoběžné s příslušnou průmětnou.

Poslední, čtvrtá kapitola (str. 88—119) řeší řadu příkladů sestavených podle metod, jichž se užívá k jejich řešení. Jsou to především úlohy na základní principy zobrazení, úlohy při nichž se zavádí pomocná promítací rovina, úlohy na transformaci průměten a konečně úlohy řešené otáčením roviny.

Význačným znakem celkového pojetí knížky je shrnutí základních úloh o úsečce (odchylka od průměten, skutečná velikost úsečky) resp. o rovině (hlavní přímky, kolmost přímky a roviny, odchylka roviny od průměten, úlohy v rovině) do zvláštních odstavců nesoucích velmi neobvyklé názvy „analysa úsečky“ resp. „analysa úseku roviny“, které ukončují příslušné části výkladu o přímce resp. o rovině.

V knížce je užito celé řady ne právě obvyklých názvů, zavádějí se nové pojmy (na př. konické a cylindrické promítání) a zvláště velmi často je zvoleno označení, značně se odchylující od běžného označení. Mnohé nově zvolené označení a pojmenování je důsledkem původního pojetí výkladu; u některého snad přece jen tradiční označení se zdá vhodnější (na př. autor označuje skutečné velikosti úsečky čarou plnou přerušenou polokružnicí, kdežto v obvyklém označení se užívá čerchovaně vytažené čáry).

Učebnice ukazuje, že autor věnoval výběru látky a zejména jejímu uspořádání velikou péči; znamená nový přínos k metodice výuky deskriptivní geometrie. V rukou učitele, který by vhodně kombinoval výklad s příklady uvedenými v poslední části, byla by vhodným nástrojem k výkladům o základech deskriptivní geometrie.

Samostatně dálkově studující, jimž je učebnice doporučena jako pomůcka, budou však v učebnici rozhodně postrádat dostatečný počet názorných obrázků, které by jim lépe umožnily pochopit probíranou látku. S didaktického hlediska jistou obtíž bude pro ně znamenat také téměř důsledné vynechávání základnice. I když speciální volba základnice, případně její vynechání, nehraje při vlastním řešení úlohy v Mongeově projekci, jak je velmi správně zdůrazněno, žádnou podstatnou roli, studující odkázaný jen na vlastní studium nebude snadno spojovat uváděné řešení úlohy v Mongeově projekci bez základnice s řešením úlohy v prostoru. K tomu je třeba určité praxe a hlavně již dobře vycvičené prostorové představivosti.

Knížku, která je psána jasně, srozumitelně a velmi přístupnou formou, by měli dobře prostudovat všichni učitelé deskriptivní geometrie především proto, aby se seznámili s jejím pojetím zdůrazňujícím základní principy a metody, podávajícím řešení základních úloh a úplně potlačujícím procvičování látky na příkladech někdy celkem umělých a často značně obtížných, vyžadujících mnohdy velkého důvtipu při stereometrickém řešení, ale nevyžadujících přirozeně při řešení v Mongeově projekci nic jiného než právě aplikaci základních úloh.

A. Urban, Praha

*

М. Я. Громов: **Начертательная геометрия**, 2. díl, Moskva, 1954, str. 280, obr. 232. Vydal Všesvazový polytechnický institut pro dálkově studující.

Už podtitul „Rovinné křivky, prostorové křivky, plochy", obsahující názvy jednotlivých oddílů, ukazuje celkové zaměření druhého dílu Gromovovy učebnice deskriptivní geometrie, vydané Všesvazovým polytechnickým ústavem dálkového studia. V porovnání s prvním dílem je rozsah více než dvojnásobný. Poměrem rozsahů obou dílů autor plným právem zdůrazňuje důležitost znalosti základních vlastností křivek a ploch. Na druhé straně je ovšem třeba uvést, že dosti rozsáhlá část látky vykládaná autorem teprve v rámci nauky o křivkách a plochách se v běžných učebnicích deskriptivní geometrie probírá obvykle již průběhem výkladů o zobrazovacích metodách, případně ve speciálních partiích (v kinematické geometrii).

Autor přistoupil s naprosto nového hlediska k bohatému materiálu úloh deskriptivní geometrie. Jestliže již v prvním díle své učebnice úspěšně uvedl v úsporně omezeném rozsahu své vlastní uspořádání základů Mongeovy projekce, pak v druhém díle přímo radikálně změnil obvyklou metodiku, jejímž charakteristickým rysem je, že věty diferenciální geometrie křivek a ploch se prostě aplikují ve sledu obvyklém v diferenciální geometrii na technicky nejdůležitější křivky a plochy. U křivek velmi obratným způsobem užil jejich přirozených souřadnic, u ploch vyšel z jejich kinematického vytvoření.

Prvý oddíl (str. 7—72), věnovaný rovinným křivkám, je rozdělen na tři kapitoly.

V první kapitole se probírají základní vlastnosti křivek. Po zavedení pojmu sečny, polotečny, hladké křivky v bodě, hladké křivky a její tečny přechází k přirozeným souřadnicím bodu hladké křivky. Jsou-li O a X pevný a proměnný bod dané hladké křivky, t_0 a t_x tečny křivky v těchto bodech, pak přirozenými souřadnicemi bodu X rozumí autor jednak délku oblouku OX křivky, jednak úhel tečen t_0, t_x (pro který se u nás užívá názvu kontingenční úhel).

Při vyšetřování křivek pak autor užívá zobrazení dané křivky na křivku, jejíž pravoúhlé souřadnice jsou rovny přirozeným souřadnicím křivky (x-ová souřadnice je rovna oblouku OX, y-ová souřadnice příslušnému kontingenčnímu úhlu). Přitom se autor omezuje jen na t. zv. prosté křivky; rozumí tím křivky, pro něž kontingenční úhel je ryze monotonní funkcí oblouku.

Základní myšlenka užití přirozených souřadnic křivky se ukazuje jednak na kružnici a jejím obraze, kterým je úsečka (ležící v 1. kvadrantu) s jedním krajním bodem v počátku, jednak na oválech složených zk ružnic. Užitím přirozených souřadnic dospívá autor k pojmům křivosti křivky v bodě, oskulační kružnice, poloměru a středu křivosti, evoluty a evolventy a vyšetřuje styk křivek.

V druhé kapitole jsou pod souhrnným názvem transformace křivek uvedeny některé konstrukce resp. zobrazení, jež umožňují z daných křivek sestrojit nové křivky. Tak je tu uvedena konstrukce přímých konchoid (Nicomédovy konchoidy, Pascalových závitnic), inverse, konformní zobrazení a osová afinita. Na to velice stručně navazuje rovnoběžné promítání kuželoseček.

Třetí kapitola zavádí pojem kinematických křivek; autor tím rozumí jak trajektorie bodu při pohybu neproměnné rovinné soustavy, tak i obálky pohybujících se neproměnných křivek. Základní pojmy a věty kinematiky neproměnné rovinné soustavy jsou uvedeny jen ve velmi stručném přehledu, naznačuje se základní myšlenka konstrukce středu křivosti kotálnice, užije se jí k odvození Euler-Savariho konstrukce a sestrojují se de la Hireovy kružnice.

Druhý oddíl o prostorových křivkách je poměrně krátký (str. 73—99). V první kapitole po zavedení základních pojmů tečny, oskulační roviny a průvodního trojhranu prostorové křivky probírá autor hned rozvinutelnou plochu svázanou s prostorovou křivkou. To mu umožňuje geometricky názorné zavedení dvou důležitých pohybů neproměnné prostorové soustavy, nazývá je rotativní a spiroidální (kinematicky jsou charakterisovány tím, že axoidy pohybu jsou rozvinutelné plochy, okamžitý pohyb axoidů v prvém případě je rotační, ve druhém šroubový).

Křivost a torse se definuje užitím sférických indikatrix tečen a binormál, při čemž se podobně jako v případě rovinných křivek užívá přirozených souřadnic křivky: délky oblouku, kontingenčního úhlu (tečen) a úhlu torse (t. j. úhlu binormál). Prostorová křivka se zobrazuje do dvojice rovinných křivek. Jedna znázorňuje (v pravoúhlých souřadnicích) kontingenční úhel jako funkci oblouku, druhá úhel torse jako funkci oblouku. Nalezené výsledky jsou v druhé kapitole aplikovány na šroubovici a rozvinutelnou šroubovou plochu. Šroubovice je definována jako prostorová křivka, jejíž obrazy tvoří v uvedeném zobrazení dvojici přímek procházejících počátkem souřadnic.

Největší, třetí oddíl učebnice (str. 100—275) zabírá teorie ploch.

V první kapitole je zaveden pojem kinematické plochy; rozumí se tím plocha vznikající pohybem křivky (jež není trajektorií pohybu) nebo obalová plocha pohybující se plochy. Autor se omezuje jen na základní pohyby a tedy také jen na základní typy ploch (za předpokladu, že pohybující se křivka je neproměnná): translační, rotační a šroubové.

V druhé kapitole se probírají paralelně vedle sebe všechny tyto plochy a postupně se řeší některé nejjednodušší úlohy.

Třetí kapitola je věnována zmíněným základním úlohám na speciálních lineárních a cyklických plochách uvedených typů (rotační válcové a kuželové ploše, rotačním jednodílném hyperboloidu, zborcené přímkové šroubové ploše, kulové ploše, anuloidu a serpentině).

Čtvrtá kapitola pojednává o tečné rovině, o její konstrukci na kinematických plochách základního typu a o jejím užití k řešení některých úloh, zejména k nalezení bodu obrysu rotačních ploch a vývrtkové plochy.

Pátá kapitola probírá některé další třídy kinematických ploch. Autor je nazývá rotativními resp. spiroidálními podle toho zda vznikají rotativním resp. spiroidálním pohybem. Ukazuje se, že každá rozvinutelná plocha je rotativní. Této vlastnosti se užívá k výkladu o rozvinutí rozvinutelných ploch. Konstrukce rozvinutí se ovšem opírají o známou definici rozvinutí. Ke spiroidálním plochám náleží přímé konoidy (je probírána pravoúhlá uzavřená šroubová plocha, hyperbolický paraboloid, Plückerův konoid, obecný přímý konoid a jejich užití) a přímkové plochy, které autor nazývá plochami s řídicí rovinou (přímky plochy svírají s ní konstantní úhel), jež jsou současně také rotativními plochami. Závěrem kapitoly jsou probrány některé další speciální typy přímkových ploch (cylindroid, konoid a hyperbolický paraboloid) a obecné vytvoření přímkové plochy užitím tří řídicích křivek.

Rozsáhlá šestá kapitola je cele věnována průniku ploch. Po základní úvaze o vyhledání společných bodů křivky a plochy vyšetřují se systematicky od nejjednodušších případů metody řešení průniku speciálních typů ploch.

Podobně jako první díl Gromovovy učebnice deskriptivní geometrie přináší i druhý díl řadu podnětů k metodice výuky deskriptivní geometrie. Nejpodstatnější z nich jsou zavedení a konstruktivní využití přirozených souřadnic rovinné a prostorové křivky a důsledné řešení úloh o plochách na základě jejich kinematického vytvoření. Už tímto pojetím se liší podstatně od jiných učebnic základů deskriptivní geometrie. Koncepce učebnice si vyžádala ovšem také dosti hluboké zásahy do obvyklého uspořádání látky. Některé partie o křivkách a plochách, které se celkem tradičně připojují přímo k výkladům o zobrazení, jsou zařazeny do širšího celku geometrie křivek o ploch; tím ovšem ustupují poněkud do pozadí kuželosečky, řezy kulové, rotační válcové a kuželové plochy rovinou, průniky hranolových a jehlanových ploch. Na druhé straně opět vystupují do popředí kinematické metody, jejichž důležitost se obecně uznává, ale kterým bývá věnována celkem poměrně malá pozornost; v Gromovově učebnici se stávají jednotícím principem. Tím se deskriptivní geometrie dostává do užšího kontaktu s aplikacemi v technických disciplinách. Vyvstává tu ovšem nový problém, problém hlubšího spojení s analysou. Již kinematika neproměnné rovinné soustavy vyžaduje konstrukci nejen bodů trajektorií, ale i jejich tečen a oskulačních kružnic. S hlediska analysy je tedy třeba užít derivací a jít až do druhého řádu. Autor si je toho dobře vědom a alespoň naznačuje, jak lze analyticky odvodit geometricky názorné výsledky o pohybu neproměnné soustavy v rovině, o kotálení hybné poloidy po pevné poloidě, o konstrukcích středů křivosti. V teorii ploch je situace složitější. Vynecháme-li základní pohyby neproměnné soustavy v prostoru (translaci, rotaci a šroubování), je poměrně dost obtížné popsat jiné pohyby v prostoru jen geometricky názorným výkladem. V učebnici se autor omezil jen na jednoduché případy, kdy oba axoidy pohybu jsou rozvinutelnými plochami (rotativní a spiroidální pohyb; případ, kdy axoidy jsou zborcené plochy, byl vynechán); pracoval přitom s nekonečně blízkými elementy bez analytického doprovodu. I když výklad je velmi instruktivní, geometricky dost názorný, není dobře možno, aby tato cesta dala čtenáři v celém rozsahu jasný obraz kotálení hybného axoidu po pevném axoidu jednou beze smyku (rotativní pohyb), podruhé se smykem (spiroidální pohyb).

Kinematické pojetí výkladu theorie ploch ovšem není úplně nové. Obvykle se však omezuje jen na translační, rotační a šroubové plochy. Hlavní autorovou zásluhou je, že touto metodou pracoval systematicky (tak na př. úlohy na translačních, rotačních a šroubových plochách řešil paralelně vedle sebe) a že vtipně rozvinul základní myšlenku i na partie z teorie ploch, které se obvykle zpracovávají jinými cestami (přímkové plochy).

A. Urban, Praha

*

Stanisław Gołąb, **Rachunek tensorowy.** Państwowe wydawnictwo naukove, Warszawa, 1956, (Biblioteka matematyczna, Tom 11), náklad 3000, 1. vydání, str. 312, obr. 6, cena váz. zł 30,70.

Kniha je rozdělena do tří částí: V první části (kapitola I—IV) se pojednává o tensorové algebře a zavádějí se potřebné pojmy a operace; ve druhé části (kapitola V—IX), o tensorové analyse, je již použito výsledků první části a v třetí části (kapitola X) se aplikuje tensorový počet v geometrii.

V kap. I jsou základem úvah *analytické prostory* konečné dimense, v nichž lze zavést v každém bodě lokální souřadnicový systém a přechod z jednoho systému k druhému lze získat pomocí vzájemně jednoznačných a spojitých transformací. Tyto transformace tvoří množinu, která musí mít vlastnosti pseudogrupy. Transformační rovnice lze považovat buď za vztah mezi dvěma různými bodovými prostory nebo za vztah mezi souřadnicemi téhož prostoru v různých souřadnicových systémech. Druhý způsob výkladu je použit v této knize. Bodový prostor nazývá se v okolí bodu lokálním prostorem G_r, jsou-li přípustné transformace třídy C_r, což značí, že funkce v transformačních rovnicích mají spojité parciální derivace řádu r včetně. Jako podgrupa grupy G_1 je nejdříve uvedena afinní grupa G_a (příslušná k prostoru E_n) a dále její podgrupy se svými vlastnostmi a z nich zvlášť metrická grupa G_m (příslušná prostoru R_n). V afinním prostoru jsou pak definovány lineární prostory dimense $p < n$. Velmi důležité je označení souřadnic bodů téhož systému a označení souřadnic týchž bodů po transformaci. Poněvadž počet (zautomatisovaný a zeschematisovaný tak, že je téměř vyloučena možnost početních omylů) je vlastně záležitostí indexů, jsou indexy podle své funkce rozlišeny na pevné a běžné, živé a neživé, volné a vázané. Nakonec jsou uvedeny vztahy mezi koeficienty transformace třídy C_1.

V kap. II (*geometrické objekty*) je definován vázaný vektor (kontravariantní) v daném bodě jako přiřazení n čísel v^λ (souřadnic) v souřadnicovém systému (λ), které se určitým, předem daným způsobem transformují. Pro takové vektory lze zavést různé operace, nelze však porovnat vektory vázané v různých bodech. Vektor je geometrickým objektem o n souřadnicích. Obecně objekt ω je geometrickým objektem, když jeho souřadnice v systému (λ') lze získat z jeho souřadnic v systému (λ) pomocí dané transformace $T(\lambda \to \lambda')$. Třídou objektu se rozumí řád parciální derivace užité transformace T při vyjádření jeho nových souřadnic. Je-li objekt definován v každém bodě oblasti, pak je v ní dáno pole objektů. Tak derivacemi skalárního pole třídy C_1 dostaneme souřadnice kovariantního vektoru, který geometricky určuje dvojici rovnoběžných nadrovin a jeho souřadnice jsou převrácené velikosti úseků vyťatých nadrovinami na osách. Kontravariantní vektor vyjadřuje geometricky dvojici bodů. Incidence kontravariantního vektoru v^λ a kovariantního vektoru u_λ je dána skalárem $\sigma = u_\lambda v^\lambda$. Pro vektory (obou druhů) se buduje algebra (sčítání, násobení reálným číslem, odčítání, nulový vektor, zákony komutativní, asociativní a distributivní, násobení nulového vektoru skalárem, násobení vektoru nulou a t. zv. nasunutí $\sigma = u_\lambda v^\lambda$). Pro další úvahy se zavádí pojem lineární závislosti a nezávislosti vektorů, z nichž zvlášť důležité jsou základní vektory e^λ. K systému n lineárně nezávislých vektorů $\overset{\nu}{v}{}^\lambda$ $(\overset{\mu}{v}_\lambda)$ existuje inversní systém lineárně nezávislých vektorů $\overset{\nu}{\bar{v}}{}^\lambda$ $(\overset{\mu}{\bar{v}}_\lambda)$. Kapitola končí definicí lineární kombinace systému vektorů a vyjádřením libovolného vektoru jako lineární kombinací n lineárně nezávislých vektorů.

V kap. III (*afinory*) je nejdříve podána definice afinoru vzniklého násobením dvou vektorů, která je pak zobecněna na afinory valence (p, q), t. j. p-krát kontravariantní a q-krát kovariantní. Speciálně jsou vyloženy vlastnosti jednotkového afinoru (smíšeného) $\overset{\nu}{e}{}^\lambda \underset{\nu}{e}_\mu = A^\lambda_\mu$. Pak jsou postupně probrány algebraické operace s afinory: násobení afinoru reálným číslem, sčítání afinorů (téže valence) a součin afinorů, který je závislý na pořadí činitelů. Pro další použití je vsunut pojem lineární závislosti afinorů téže valence a uveden maximální počet afinorů dané valence lineárně nezávislých. Po těchto operacích je definováno úžení afinorů [z afinoru valence (p, q) se získá afinor valence $(p - 1, q - 1)$] a nasunutí afinorů, které je složenou operací z násobení a úžení [z afinorů valence (p, q) a (r, s) vznikne afinor valence $(p + r - 1, q + s - 1)$]. Obě operace lze případně provést i vícekrát po sobě. K provedení symetrisování příp. alternování je třeba pojmu isomeru daného afinoru, který je afinorem téže valence. Aritmetický průměr všech isomerů (pro daný počet týchž indexů) je symetrickým afinorem vzhledem ke zvoleným indexům. Tato operace provedená na všechny indexy afinoru valence $(p, 0)$ příp. $(0, q)$ dá tensor (jímž je afinor mající pouze jeden druh indexů symetrický ke všem indexům). Symetrisace je tedy opět operace složená z isomerace, sčítání a násobení číslem. Při alternaci jsou jednotlivé isomery opatřeny znaménkem podle toho, je-li permutace zvolených indexů sudá nebo lichá. Operace provedená na všechny indexy afinoru (o jednom druhu indexů) dá t. zv. p-vektor. Speciální případ jsou jednoduché p-vektory, které vzniknou součinem p vektorů a provedením alternace. Geometricky n-vektor dává míru objemu nadrovnoběžnostěnu a n lineárně nezávislých vektorů definuje v prostoru E_n orientaci. Z transformačního zákona pro souřadnici n-vektoru je zobecněním odvozen pojem hustoty váhy r. Podle znaménka transformačního koeficientu jsou rozlišeny Δ-hustoty, W-hustoty (Weylovy) a G-hustoty, pro něž je podána algebra a jejichž zobecněním jsou afinorové hustoty, vzniklé násobením afinoru a hustoty. Pro tyto veličiny platí tytéž operace jako pro afinory. Potom následují postačující podmínky pro to, aby geometrický objekt byl afinorem (afinorovou hustotou). Důležitou částí této kapitoly je určení základního tensoru $g_{\lambda\mu}$, stanovení inversního tensoru $g^{\lambda\nu}$, operace zvyšování a snižování indexů afinoru (afinorové hustoty), definice délky vektoru, skalární součin dvou vektorů (vázaných v témž bodě) a jejich úhel (z čehož plyne podmínka kolmosti dvou vektorů). Jako další příklad užití základního tensoru je zaveden versor vektoru v, který je jednotkový a závislý na daném vektoru. V centricky afinní grupě je geometrickým obrazem tensoru $g_{\lambda\mu}$ nadkvadrika $g_{\lambda\mu}\xi^\lambda\xi^\mu = 1$. Je-li pak v prostoru X_n dáno úplné pole tensorů $g_{\lambda\mu}$, dostáváme Riemannův prostor V_n. Pomocí hustoty váhy $+2$ (dané determinantem ze souřadnic tensoru) lze zavést objemovou míru. Tensor $g_{\lambda\mu}$ umožňuje zavést dva zvláštní n-vektory (Ricciovy), pomocí nichž lze k p-vektoru kontravariantnímu (kovariantnímu) přiřadit $(n - p)$-vektor kovariantní (kontravariantní). Ricciovy vektory umožňují také přiřadit $(n - 1)$-vektoru za pomoci základního tensoru nový vektor zvaný vektorovým součinem, jehož základní vlastnosti jsou uvedeny. Tensor $g_{\lambda\mu}$ je pak uveden na kanonický tvar, přičemž základní vektory tvoří orthonormální systém. Po zmínce o vlastní hodnotě afinoru a vlastním vektoru je dokázána existence orthonormálního systému (získaného užitím versorů) pro každý tensor T a ukázáno, že v tomto systému všechny souřadnice tensoru o různých indexech jsou nulové.

Kap. IV doplňuje zavedenou *afinorovou algebru*. Po zjednodušeních pro pravoúhlý kartézský systém eukleidovského prostoru je afinor definován jiným způsobem pomocí vektorového zobrazování funkcemi o daných vlastnostech. Diady ($2n$ konstantních vektorů) umožňují provést zobrazení vektorově-vektorové. Při hledání systému souřadnic (K), v němž n daných lineárních nezávislých vektorů by bylo základními vektory, se zjistí, že nalezené podmínky integrability nejsou obecně splněny a daný systém je anholonomní. V těchto systémech je definován objekt anholonomnosti Ω_{IJ}^{K} antisymetrický vzhledem k dolním indexům, který je geometrickým objektem druhé třídy. Je-li dáno skalární pole σ třídy C_2, pak Hessián $\mathfrak{h} = |\sigma_{\lambda\mu}|$ (kde $\sigma_{\lambda\mu} = \partial_\lambda \partial_\mu \sigma$) není v grupě G_1 zvláštním geometrickým objektem, v grupě G_a je $\sigma_{\lambda\mu}$ tensorem a Hessián $\mathfrak{h}$ hustotou váhy -2. Pro $n = 2$ jsou dány ještě Penzovovy objekty ω, které v grupě rotací G_0 v eukleidovské rovině představují tangentu úhlu vektoru v s osou ξ^1. Po uvedení gradientu hustoty jsou uvažovány vztahy pro afinory (zvané rozdvojené), které jsou jistými indexy vázány s prostorem X_n a jinými s prostorem Y_m. Ze vztahů je zvlášť uveden průmět veličiny a incidence. Po vyšetření silových veličin (důležitých v mechanice) končí kapitola třemi příklady dvoubodových afinorových polí.

Druhá část: V kap. V (*rovnoběžný přenos*) je definována absolutní derivace se svými vlastnostmi. Při odvození absolutní derivace vektorového pole v E_n tak, aby vzniklo opět vektorové pole, je zaveden objekt rovnoběžného přenosu $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, který je základem všech dalších úvah. Tento objekt je definován i pro anholonomní systémy. Objekty $\Gamma_{\mu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}$ a $\Lambda_{\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu}$ získané úžením v objektu $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ mají oba stejný transformační zákon. Souřadnice objektu $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ lze rozdělit na součet symetrické a antisymetrické části: Symetrická část $\Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)}$ se transformuje stejně jako $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ (nemá charakter afinoru), kdežto antisymetrická část $\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]}$ je antisymetrický afinor vzhledem k dolním indexům. Prostor, v němž je dán objekt $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ je označen L_n, prostor se symetrickým objektem Γ je označen A_n. Potom je uveden původní autorův způsob zavedení objektu rovnoběžného přenosu a ukázáno, jak je prováděn rovnoběžný přenos v Riemannově prostoru V_n. Lze-li podél křivky sestrojit pohyblivý geodetický systém, pak se v něm absolutní derivace pole libovolných veličin redukuje na obyčejnou derivaci. Je-li vektorové pole dáno v n-rozměrné oblasti nebo v celém prostoru, zavádí se kovariantní derivace $\nabla_{\mu} v^{\lambda}$, tvořící afinorové pole. Pomocí této derivace lze jednoduše vyjádřit absolutní derivace zavedených veličin. Zvlášť je ukázáno, že kovariantní (a tedy i absolutní) derivace pole jednotkových vektorů je rovna nule. V prostoru L_n jsou pak určeny geodetické křivky tak, že pole tečných vektorů má nulovou absolutní derivaci. Geodetiky jsou závislé jen na symetrické části objektu Γ a Weyl podal nutnou a postačující podmínku, kdy dva různé objekty Γ_1, Γ_2 určují jeden a týž systém geodetik. Pro křivky je odvozen afinní parametr, který pro geodetiky se nazývá přirozeným parametrem. Když v bodě je objekt rovnoběžného přenosu roven nule, nazývá se příslušný systém lokálně geodetickým.

Úvodem kap. VI (*tensory křivosti a torse*) je afinor křivosti $R^{\lambda}_{\varrho\mu\nu}$ antisymetrický vzhledem k prvním dvěma indexům. Řešením problému záměnnosti kovariantního derivování získají se souřadnice afinoru křivosti v anholonomním systému a výsledek, že obecně kovariantní derivace záměnná není. Odpověď je kladná jen v případě nulového afinoru křivosti. Při stanovení objektu Γ v anholonomních systémech byl učen objekt S^{K}_{MN} zvaný afinorem torse. Pro holonomní systémy se uvádí geometrická interpretace obou afinorů. Úžením se získají z afinoru $R^{\varrho}_{\lambda\mu\nu}$ dva afinory $V_{\lambda\mu} = R^{\nu}_{\lambda\mu\nu}$ a $R_{\lambda\mu} = R^{\nu}_{\nu\lambda\mu}$, kde $V_{\lambda\mu}$ je antisymetrický afinor a v případě, že $V_{\lambda\mu} = 0$ v celém prostoru, pak $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ je objektem zachovávajícím objem. Podle Bompianiho je uvedeno zobecnění geometrické interpretace afinoru $R_{\lambda\mu}$.

V kap. VII (*metrika prostoru*) jsou zavedeny Christoffelovy symboly, které byly vybrány z objektů Γ za pomoci metrického tensoru $g_{\lambda\mu}$. Tyto symboly (druhého i prvního druhu) lze jednoduše odvodit z metrického tensoru $g_{\lambda\mu}$. Protože jsou Christoffelovy symboly symetrické vzhledem k dolním indexům, je afinor torse identicky nulový. Rovněž kovariantní derivace základního tensoru je v tomto případě identicky nulová, proto je-li kovariantní derivace tensoru $g_{\lambda\mu}$ vyjádřená pomocí objektu Γ rovna nule, je objekt Γ symetrický a jsou to právě Christoffelovy symboly. Jejich další užití je při určení délky vektorů a úhlů mezi nimi. Problém volby $g_{\lambda\mu}$ pro $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ vede na řešení systému homogenních rovnic. Po uvedení vztahů mezi souřadnicemi afinoru křivosti je odvozena zobecněná identita Bianchiho, jejímž speciálním tvarem je Einsteinova rovnice obecné relativity v prostoru.

Kap. VIII (*některé speciální prostory*) uvádí vlastnosti prostorů Weylových (při rovnoběžném přenosu vektorů podél křivky jsou zachovány úhly a poměry délek vektorů), prostory afinně eukleidovské (systém n lineárně nezávislých vektorů určuje objekt rovnoběžného přenosu zvaný teleparalelismem, nezávislým na dráze) a prostory metricko-eukleidovské (afinor křivosti je roven nule). Při positivně definitním metrickém tensoru lze zavést polární souřadnice a stanovit vztahy mezi novými a původními souřadnicemi.

V kap. IX (*diferenciální operátory a integrální věty*) jsou zobecněny z prostoru R_3 známé pojmy gradientu skalárního pole, rotace p-vektoru (zvyšující valenci veličiny, na niž byl operátor použit) a divergence (snižující valenci veličiny). K vyslovení důležitých integrálních vět byl pomocně zaveden orientovaný vícenásobný integrál, za jehož použití je vyslovena zobecněná věta Gauss-Stokesova, která pro $n = 2$ přechází ve větu Greenovu a pro $n = 3$ a eukleidovské prostory dává vzorec Gauss-Ostrogradského.

V poslední kap. X (*užití tensorového počtu v geometrii*) jsou určeny řešením variačního problému křivky, mající v prostoru V_n s tensorem $g_{\lambda\mu}$ mezi dvěma danými body minimální délku. Podmínka ukazuje, že křivky jsou geodetickými čarami. Při řešení problémů geometrie prostorů Y_m vnořených do X_n užívá se rozdvojených afinorů, určují se souřadnice rovnoběžného přenosu, pomocí nichž je dána kovariantní derivace, dále afinor křivosti vnořeného prostoru a průmět $'g_{ab}$ metrického tensoru do Y_m. Metrika v Y_m indukovaná $'g_{ab}$ je totožná s metrikou indukovanou tensorem $g_{\lambda\mu}$. Pro prostor V_{n-1} vnořený do V_n je sestrojen symetrický afinor h_{ab} zvaný druhý základní tensor prostoru V_{n-1}. Po uvedení pojmu geodetického prostoru je pro křivku V_1 na nadploše V_{n-1} stanoven vektor křivosti křivky v bodě (rovný nule v bodech geodetické křivky). Jeho průmět do V_{n-1} je t. zv. relativní vektor křivosti a jejich rozdíl zvaný vynucený vektor křivosti souvisí s normální křivostí křivky na nadploše. Anulování relativního vektoru křivosti je nutná a postačující podmínka pro to, aby křivka byla v prostoru V_{n-1} geodetikou. Pro vektor křivosti a vynucený vektor křivosti platí zobecněná věta Meusnierova. V přehledu jsou uvedeny asymptotické křivky, kulové body, sdružené směry a křivoznačné čáry. Potom jsou zobecněny Gaussovy a Mainardi-Codazziho rovnice a sestrojen skalár R vzniklý z afinoru křivosti užitím metrického tensoru, pomocí něhož je dána skalární křivost prostoru V_n (pro $n = 2$ t. zv. Gaussova křivost). Obšírněji je pojednáno o prvním a druhém diferenciálním operátoru Beltramiho a jejich použití. Závěr knihy tvoří odvození zobecněných Frenetových vzorců pro danou křivku, ve kterých vyskytující se skaláry jsou křivostmi této křivky. Tyto křivosti obráceně určují křivku jednoznačně a rovnice vyjadřující závislost křivostí na oblouku jsou známé přirozené rovnice křivky.

Tuto knihu může číst každý náš čtenář, který je seznámen se základy vektorového a tensorového počtu v eukleidovském trojrozměrném prostoru. Není třeba používat příliš slovníku, protože po naučení se poměrně málo hlavním slovíčkům je z textu a prováděných výpočtů zřejmo, oč vlastně jde. Při tisku a korekturách nebylo postihnuto několik drobných chyb (týkajících se indexů), které však jsou ihned patrné, takže smysl není rušen. Je snad škoda, že do knihy nebylo pojato užití tensorového počtu v mechanice a hydromechanice, a to tím spíše, že tyto kapitoly byly již napsány. Rozsah knihy by tím jistě nevzrostl a bylo by znovu ukázáno, že tak výhodný početní aparát, kterým beze sporu tensorový počet je, není určen jenom matematikům, ale je užitečný v jiných více či méně theoretických vědních oborech (fysika, astronomie, theoretická chemie) i v oborech praktických a technických (mechanika, geologie).

Karel Drábek, Praha

*

E. W. Beth: **Les fondements logiques des mathématiques.** Collection de Logique Mathématique, Série A. Svazek 1, 2. vyd. 1955, str. XV + 241. Paris, Gauthier-Villars; Louvain, E. Nauwelaerts.

Jak autor praví v předmluvě, je kniha určena čtenáři, který není specialistou v matematické logice, který však (jako obvykle) má „jistou kulturu filosofického a matematického myšlení". Je míněna jako úvod do moderní matematické logiky a chce seznámit na základě konkretního matematického materiálu (převážně aritmetiky, zčásti též theorie množin) s hlavními současnými tendencemi v oblasti t. zv. základů matematiky. Řekněme hned, že a) je to kniha významná, b) vyžaduje mnohem více samostatné čtenářovy práce, než bývá u „úvodů" obvyklé; je spíše přehledem než úvodem, c) její četba bude podnětná i pro odborníka.

S výjimkou theorie rekursivních funkcí zde najdeme vyloženu většinu method a výsledků, které tvoří základ současné matematické logiky. Vhodným uspořádáním látky se autorovi podařilo spojit genetickou methodu výkladu (postupné zvětšování přesnosti) s maximální stručností. Výstižná motivace mu dovoluje uvést čtenáře velmi rychle přímo do středu problematiky. Význačným rysem knihy je autorova schopnost soustředit se na podstatu problému. Hlavní myšlenka není nikde zastíněna technickými detaily, i když se jim autor, pokud se mu zdají podstatné, nevyhýbá (na př. v souvislosti s aritmetisací popisuje úplně i axiomatisaci syntaxe výrokového počtu). Snaha o stručnost, při tom ale též o maximální šíři pohledu na vzájemné souvislosti jednotlivých vět a method, vede ovšem k tomu, že text má na mnoha místech charakter článku z encyklopedie: Autor referuje o množství dalších výsledků (nezřídka z prací u nás těžko dostupných) a doprovází je vlastními, mnohdy i pro odborníka cennými poznámkami (některé formulace jsou ovšem tak stručné, že nejsou víc než ne zcela jasným náznakem).

Úroveň výkladu je vcelku vysoká, přesto však několik okolností může při četbě působit rušivě. Uveďme alespoň:

a) Do cvičení na konci knihy je ze základního textu přesunuto provedení příliš mnoha konkretních detailů. (Na př. prakticky celá technika odvozování formulí výrokového a predikátového počtu.)

b) Výklad je na mnoha místech veden v poněkud příliš „velkém stylu". Celá řada i když nepříjemných, přece jen nutných formálních detailů se přejde mlčením, resp. se jen naznačí. (Přehlednosti systému predikátového počtu též nepřidá ta okolnost, že autor vzhledem ke své definici formule musí k odvozovacím pravidlům připojit klausuli „je-li výsledný výraz formulí".)

c) Genetická methoda výkladu se přece jen poněkud nepříjemně projevuje v tom, že teprve v kapitole o syntaxi se čtenář dozví, jak se vlastně má dívat na symboly predikátového počtu, vyloženého dříve. Kromě toho autor nikde neužívá typografických prostředků k odlišení metamatematických, syntaktických proměnných.

d) Protože autor nevykládá theorii rekursivních funkcí, musí se u důkazů dvou hlavních Gödelových vět o aritmetice spokojit s tím, že technické detaily vynechá. Pociťuje to sám jako nedostatek, čtenář však dvojnásob.

e) Predikátový počet 2. stupně je subtilní záležitost. Je proto poněkud na závadu, že ho autor užívá v diskusi theorie modelů, opíraje se pouze o jeho nejdůležitější rysy, aniž odpovídající systém podrobně popsal.

f) Vzhledem k tomu, jak podrobně se autor zabývá intuicionistickou matematikou, je s podivem, že ani ve cvičení neuvádí formální systém intuicionistické logiky.

g) Některé odkazy na výsledky jsou v textu opatřeny pouze jménem příslušného autora a rokem vydání práce. Citace práce chybí.

Všimněme si podrobněji obsahu (vzhledem k již zmíněnému referativnímu charakteru mnohých paragrafů knihy je nutno omezit se jen na nejdůležitější):

Kniha se skládá ze šesti „knih", z nichž některé se dělí na kapitoly. Na konci knihy jsou připojeny příklady a 11 stran bibliografie.

Úvodní krátká kniha I je věnována všeobecným otázkám filosofického rázu: Aristotelovu pojetí deduktivní vědy, jeho vlivu na další vývoj a vztahu mezi matematikou a tradiční filosofií. Výklad je velmi kusý. V dalších knihách II—V se autor explicitně specificky filosofických problémů téměř nedotýká.

Kniha II je věnována především diskusi principu důkazu a definice úplnou indukcí. Autor ukazuje podrobně jak lze tento princip ospravedlnit resp. dokázat uvnitř Dedekindovy theorie přirozených čísel. Dokazuje kategoričnost systému Dedekindových axiomů (ovšem v rámci naivní theorie množin), zdůrazňuje však, že Dedekindova theorie nezaručuje existenci modelu, který by splňoval její axiomy.

Kniha III obsahuje jednak theorii predikátového počtu, jednak rozsáhlý výklad hlavních výsledků methodologie formalisovaných deduktivních systémů (zde je třeba spatřovat první vrchol knihy).

V kap. 1 je popsán axiomatický systém elementární logiky, t. j. predikátového počtu prvního stupně (o výrokovém počtu je zmínka pouze v poznámce, je mu však věnováno značné místo ve cvičeních na konci knihy). Dále je předběžně naznačeno užití elementární logiky při formalisaci deduktivních theorií.

Kap. 2 je věnována „theorii důkazu", t. j. metamatematické theorii formálních deduktivních systémů. Autor nejprve vykládá Hilbertův program. Z dalšího uveďme: redukce formulí predikátového počtu v oborech konečného řádu, definice deduktivní theorie formalisované pomocí elementární logiky, pojem syntakticky úplné theorie (v autorově terminologii *saturé*), problém rozhodnutelnosti, věta o dedukci (autor zdůrazňuje její přijatelnost s intuicionistického hlediska). Zbytek kapitoly je věnován aplikacím. Zde ovšem autor porušuje zásadu používání pouze finitních prostředků (a to vědomě), neboť pracuje s pojmem modelu (v naivně množinovém smyslu) a formule pravdivé při určité interpretaci. Protože k důležitému thematu první aplikace se autor ještě vrací dále v kapitole o sémantice, bude na místě stručně naznačit, oč jde:

Na základě atomů typu $m = n$, $m < n$, $x + m = y + n$, $x + m < y + n$, kde m, n resp. x, y jsou symboly pro číslovky 1, 2, 3, ... resp. pro proměnné $x_1, x_2, \ldots$, je induktivně vytvořena pomocí prostředků elementární logiky jistá třída formulí N. Interpretujme číslovky 1, 2, 3, ... jakožto odpovídající přirozená čísla, proměnné $x_1, x_2, \ldots$ jakožto proměnné, probíhající množinu celých čísel. Pomocí methody sématického vyhodnocení (vyložené dále v kap. 4), lze přesně definovat, které z uvedených formulí z N jsou při této interpretaci pravdivé. (Ukáže se pak, že třída $M \subseteq N$ pravdivých formulí je deduktivně uzavřená.) Na základě popsané interpretace je pak možno pomocí známé methody eliminace kvantifikátorů rozřešit problém rozhodnutelnosti, t. j. popsat methodu, jak o dané formuli z N rozhodnout, zda patří do M. Jednotlivé kroky tohoto procesu lze speciálně u formule z M pokládat za její „důkaz". To vede k možnosti množinu M konečným způsobem axiomatisovat. Příslušný axiomatický systém A, který autor uvádí, neobsahuje axiom (schema) úplné indukce (ve formě pro celá čísla), lze ho však dokázat, neboť v oboru celých čísel je každá formule, představující konkretní jeho případ, pravdivou větou, tedy patří do M; ale každou větu z M lze v A dokázat. Je tedy nasnadě očekávat, že možnost dokázat axiom úplné indukce zaručí (podobně jako u Dedekindovy theorie) kategoričnost systému A (jenž, jak se může zdát, popisuje jednoznačně strukturu celých čísel). Autor však jednoduše ukazuje, že tomu tak není: existují neisomorfní modely systému A. Důvod tohoto faktu spočívá do jisté míry v nedostatečnosti výrazových prostředků systému A. Neexistuje v něm na př. formule, kterou by při interpretaci v oboru celých čísel splňovala právě lichá čísla. — Jako druhou aplikaci řeší autor problém rozhodnutelnosti pro theorii reflexivní, symetrické a transitivní relace.

Kap. 3 má název „Syntaxe". Je popsána axiomatisace a aritmetisace syntaxe formalisované deduktivní theorie. Dále je naznačen důkaz obou hlavních Gödelových vět o aritmetice: o existenci nerozhodnutelných vět a o nemožnosti formalisace důkazu bezespornosti aritmetiky uvnitř jí samé. Nicméně autorem uvedený (ovšem vědomě neúplný) důkaz se dost dobře nehodí do kapitoly o syntaxi, neboť jeden z předpokladů, který autor na příslušný formální systém klade, je formulován tak, že žádná dokazatelná věta systému nepředstavuje formalisaci intuitivně nesprávné aritmetické věty. Jde tedy spíš o sémantickou versi důkazu (srov. na př. úvod v Mostowského knize „Sentences undecidable in formalized arithmetics"). V souvislosti s Gödelovými větami provádí autor diskusi finitistického stanoviska a vyslovuje přesvědčení, že v oblasti důkazů bezespornosti je třeba hledat nové methody, jimž lze rozumně důvěřovat, i když nejsou finitní v původním Hilbertově slova smyslu. Zmiňuje se o Gentzenově důkazu bezespornosti aritmetiky.

Kap. 4 je věnována sémantice, t. j. theorii obsahové interpretace formulí deduktivní theorie. Je zaveden Tarského pojem vyhodnocení a splnitelnosti a pojem normálního modelu jakožto modelu, u něhož základním oborem je množina intuitivních přirozených čísel. Autor pak převádí Gödelovu větu o úplnosti predikátového počtu, Löwenheim-Skolemovu větu o existenci spočetných modelů a řadu dalších příbuzných vět na tuto základní větu:

Aby třída D formulí predikátového počtu měla normální model, k tomu je nutné a stačí, aby třída $K(D)$ (t. j. zhruba řečeno třída všech formulí, které lze odvodit z axiomů predikátového počtu a z formulí z D) *byla syntakticky bezesporná, t. j. neobsahovala všechny formule vůbec.*

Pro tuto větu podává podrobný důkaz, užívající elementárních topologických prostředků. Sem též zařazuje Herbrandovu větu jakožto finitní versi Gödelovy věty. Zvláštní paragraf je věnován predikátovému počtu s identitou, pro který je rovněž mimo jiné dokázána úplnost. Z dalšího obsahu kapitoly uveďme ještě diskusi predikátového počtu 2. stupně. Je naznačeno, jak lze přechodem k této silnější logice vyloučit existenci nežádoucích neisomorfních modelů, na př. pro systém A z kap. 2. Autor zdůrazňuje přednost sémantické methody před syntaktickou v oblasti logiky vyššího stupně a velmi podrobně pojednává o tom, jak se projevuje změna situace s hlediska theorie modelů. (Podrobnější popis komplikované situace, která zde nastává, musíme bohužel nechat stranou.) V závěru kapitoly je naznačen důkaz Tarského věty o nemožnosti definovat sémantický pojem pravdivosti v rámci elementární logiky a jsou uvedeny poznámky o souvislosti sémantické methody s theorií množin, representací algeber a topologií. (Toto thema stojí dnes v popředí zájmu logiků a zčásti i matematiků.)

Kniha IV má název „Existence matematických objektů". Kap. 1 je věnována výkladu t. zv. logistiky, t. j. snahy vybudovat celou matematiku na čistě logických principech. Autor podrobně vykládá Fregeho postup při vybudování theorie přirozených čísel a srovnává ho s Dedekindovým. Hovoří dále o Russellově systému a o nejnovějších logistických tendencích. K logistice zaujímá kritické stanovisko.

Kap. 2 je věnována theorii množin. Jsou vyloženy základní pojmy naivní theorie množin. Pak je uveden Zermelův a Fraenkelův axiomatický systém. O systému v. Neumann-Bernays-Gödelově je pouze zmínka. (Quineův systém a theorie typů jsou podrobněji diskutovány až v knize V.) Autor poznamenává, že axiomatickou theorii množin nelze vybudovat pouze na základě pojmů logiky: Nelze se obejít bez principů specificky matematických.

Kap. 3 se zabývá intuicionismem. Zde je druhý vrchol knihy. Autor, sám neintuicionista, podává tu jeden z nejlepších kritických výkladů výsledků Brouwerovy školy. Probírá stanovisko intuicionistů k důkazům bezespornosti, k principu tertium non datur, pojednává o Brouwerově theorii množin a kontinua atd. Výklad je doplněn přesvědčivými příklady. Kapitola je uzavřena diskusí nových výsledků v oblasti intuicionistické matematiky, zvláště algebry a geometrie, a úvahou o možnostech formalisace intuicionistické logiky.

Kniha V je věnována logickým a matematickým antinomiím, kterých autor uvádí dvanáct. Nejprve je vyloženo jejich znění, pak se hovoří o konkretních prostředcích k jejich řešení resp. odstranění. Zvlášť významný je komentář (Skolemovy) antinomie, která spočívá v tom, že podle Skolemovy věty má mimo jiné i axiomatická theorie množin spočetný model. Autor se vrací k diskusi z kap. 4 a poukazuje na relativní charakter tam dosažených výsledků týkajících se modelů. Záleží totiž na tom, v jaké versi axiomatické theorie množin modely konstruujeme.

Poslední krátká kniha VI obsahuje poznámky jednak o povaze a cílech matematiky, jednak o její souvislosti s filosofií. Filosofických otázek se však autor dotýká pouze letmo.

50 příkladů na konci knihy nejsou většinou prosté úlohy na procvičení, nýbrž buď podstatně doplňují základní text, anebo mají spíš charakter odkazů na literaturu.

Jiří Bečvář, Liberec

*

E. J. Primrose: **Plane Algebraic Curves.** Macmillan, London 1955. Stran 111, obrázků 17.

Knížka je určena začátečníkům. Seznamuje čtenáře přístupným způsobem s nejdůležitějšími pojmy a výsledky theorie rovinných algebraických křivek a připravuje ho tak ke studiu důkladnějších knih z tohoto oboru.

Při výkladu vychází autor z názoru. Věnuje proto první kapitolu těm vlastnostem křivek, které nejvíce ovlivňují jejich průběh v reálné eukleidovské rovině a dává čtenáři praktický návod, jak k dané algebraické rovnici sestrojit náčrtek příslušné křivky. Třebaže tato kapitola zabírá téměř třetinu celé knížky, nelze o její vhodnosti pochybovat, neboť začátečníkovi jistě prospěje, má-li hned od začátku o algebraických křivkách správnou představu.

Celá zbývající část je věnována — téměř výhradně — vlastnostem projektivním; základním tělesem je těleso komplexních čísel. V druhé a třetí kapitole seznámí se čtenář s racionálními křivkami v jejich parametrickém vyjádření a s tečnovou rovnicí křivky.

Obsahem čtvrté kapitoly je analysa singularit provedená pomocí kvadratických transformací; násobné body v okolí bodu daného nazývá autor též implicitní. V závěru této kapitoly je zkoumán vztah mezi inversí a základní kvadratickou transformací, z kterého přímo plynou známé věty o inversi.

V páté kapitole, jejímž hlavním bodem je Bézoutova věta, je řešena otázka násobnosti průsečíků dvou křivek, v šesté kapitole jsou odvozeny běžným způsobem Plückerovy vzorce.

V sedmé kapitole je provedena klasifikace kubik. Jsou zde též základní vlastnosti eliptických funkcí, jichž je užito k parametrickému vyjádření nesingulární kubiky. Pozornost je věnována inflexním bodům jednotlivých typů kubik. Dále je odvozena Salmonova věta a známá věta o kubice procházející obecnou skupinou osmi bodů.

V poslední, osmé kapitole je podán důkaz věty o transformaci křivky, jejíž násobné body jsou vesměs obyčejné, a je tu definován rod křivky. Dále je dokázána věta o tom, že racionální křivka má rod nula, i obrácená věta a nakonec věta o invariantnosti rodu křivky vůči biracionální transformaci.

Celý výklad je doprovázen množstvím vhodně volených příkladů v textu a dále úlohami k procvičení, jež jsou na konci knihy rovněž vyřešeny.

Vzhledem k určení knížky je ji nutno posuzovat s hlediska didaktického. V tomto směru lze říci, že se autor zhostil svého úkolu — usnadnit začátečníkovi rychlé proniknutí k jádru theorie — úspěšně. Rozmanitost látky, svěžest výkladu a jednoduchost důkazů jsou hlavní přednosti této knížky malé rozsahem, avšak dosti pronikavé obsahem. Vyzdvihnout je třeba také to, že si jejím studiem čtenář vyložené metody může osvojit tak, aby jich mohl bez obtíží používat i při řešení konkretních úloh.

Kniha má ovšem též své nedostatky. Snaha omezit rozsah na minimum vedla autora ke stručnosti místy přílišné; pouhá náznakovost některých důkazů činí je pro začátečníka málo přesvědčivými. Při odvození tečnové rovnice v příkladu na str. 43 nestačí — jak je uvedeno — dělit vhodnou mocninou n, nýbrž také druhou mocninou činitele $l + m - n$, jehož anulování vyjadřuje podmínku, aby přímka procházela dvojnásobným bodem dané křivky. V sedmé kapitole by bylo vhodné doplnit základní vlastnosti eliptických funkcí ještě dvěma, jichž je v dalším použito, totiž, že derivace eliptické funkce je opět eliptická funkce a že počet nulových bodů eliptické funkce v rovnoběžníku period je tentýž jako počet pólů (počítáme-li je s příslušnou násobností). Konečně je třeba opravit nedopatření na str. 65, kde v determinantu je opomenut jeden člen, který se podílí na souhrnu členů nejnižšího stupně, a na str. 84, kde na konci 19. řádku nemá být rovnice, nýbrž jen výraz z její levé strany.

Ježto přednosti shora uvedené převládají nad zmíněnými nedostatky, je možno očekávat, že ten, kdo použije knížku k prvnímu seznámení s theorií algebraických křivek, bude s ní spokojen.

Vladimír Bruthans, Liberec

*

Strojnická příručka — matematika, díl první a druhý. Přeložili: *O. Koníček, Zd. Tichý* a *J. Veselka*. Vydalo St. nakladatelství techn. literatury, Praha, 1956 a 1957, stran 230 a 192, cena Kčs 29,80 a 24,75.

Strojnická příručka (díl první a druhý) je překladem části knihy Справочник машиностроителя, vydané v roce 1951 v Moskvě nakladatelstvím Машгиз. V roce 1954 bylo vydáno druhé (opravené a doplněné) vydání ruského originálu. Český překlad byl přizpůsoben tomuto vydání, ne však zcela důsledně.

Je to přehled elementární a vyšší matematiky, sestavený s přihlédnutím k aplikacím matematiky v technické praxi, konstrukci a výzkumu. Oba díly obsahují látku z matematiky potřebnou ke studiu ostatních dílů „Strojnické příručky".

V prvním dílu jsou matematické značky a tabulky, základní poznatky z algebry, přehled elementárních funkcí, výklad o řešení (i numerickém) rovnic a základy diferenciálního a integrálního počtu.

Druhý díl obsahuje planimetrii a stereometrii, funkce komplexní proměnné, diferenciální rovnice, vektorový a tensorový počet, analytickou a diferenciální geometrii, diferenční počet a interpolace, nomografii, theorii pravděpodobnosti a její aplikaci v matematické statistice a výklad o matematických strojích.

V předmluvě k českému vydání je zdůrazněno, že toto vydání bylo přizpůsobeno pojetí a způsobu výkladu matematiky na našich technických vysokých školách. Domníváme se, že v tomto případě mělo být přihlédnuto i k uspořádání kapitol, aby odpovídalo postupu výkladu matematiky. Při nynějším uspořádání se na příklad v odstavci „Numerické řešení rovnic" kapitoly 4 pracuje s pojmy „spojitost, derivace, parciální derivace", zatím co tyto pojmy jsou definovány až v kapitole 5. Nebo v kapitole 3 „Elementární funkce" prvního dílu se užívá pojmu souřadnice, zatím co tento pojem je zaveden až v kapitole 5 „Analytická geometrie" druhého dílu. Tato příručka sice není učebnicí, takže není nutné, aby látka byla uspořádána tak, jak se postupuje při výkladu matematiky. Domníváme se však, že by takové uspořádání bylo vhodnější a dalo by se snadno uskutečnit přesunutím některých kapitol a dalšími menšími úpravami. Potom by se stala tato příručka skutečně vhodnou studijní pomůckou pro posluchače techniky, kteří se po prvé seznamují s látkou.

V českém vydání příručky jsou určité nedostatky drobnějšího rázu (zjištěné uvedeme v závěru). Některé z nich se v druhém vydání sovětského originálu nevyskytují.

Množství látky uvedené v příručce je vcelku dostačující. Domníváme se, že by bylo potřeba příručku doplnit o kriteria pro konvergenci nevlastních integrálů, zmínkou o základních typech integrálních rovnic a v matematické statistice o vlastnosti výběrů a výběrových charakteristik.

Vedle uvedených nedostatků je třeba zdůraznit také klady. Přestože výklad je stručný, nejsou opomíjeny předpoklady, za kterých uváděná tvrzení platí (což nelze říci o většině příruček tohoto druhu). K osvětlení uvedených pojmů přispívá množství obrázků a vhodně volené řešené příklady. Užitečné pro čtenáře budou jistě i tabulky a bohatý seznam literatury, uváděný k jednotlivým kapitolám. Překladatelé vypustili ze seznamu literatury prameny u nás nedostupné a nahradili je dostupnými.

V současné době byl v české technické literatuře pociťován nedostatek příručky tohoto druhu, vzniklý rozebráním dobře známé Čuříkovy příručky „Matematika", prvního svazku „Technického průvodce". Tento nedostatek byl odstraněn vydáním „Strojnické příručky", která jistě dobře nahrazuje příručku Čuříkovu.

Domníváme se, že rozdělení části „Matematika" Strojnické příručky do dvou dílů je zbytečné. Vydání v jednom díle by bylo pro čtenáře výhodnější, jak z důvodů obsahových, tak i z důvodů cenových.

Závady zjištěné v prvním díle:

Na str. 106 v odstavci „Funkce $y = ax^n$" je řečeno, že $y = ax^n$ se nazývá pro n celé záporné lomená racionální funkce. Bylo by vhodnější říci, že „dostáváme speciální případ lomené racionální funkce".

Na str. 113 v 7. řádku shora má být: $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

Na str. 117 na obrázku 22 by bylo vhodnější kreslit graf funkce $y = \sin x$ jen v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$; lépe by vynikla souvislost mezi grafy $y = \sin x$ a $y = \arcsin x$. Podobně na obr. 23.

Na str. 117 v 1. řádku zdola má být $-\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2}$.

Na str. 118 vztahy mezi cyklometrickými funkcemi by bylo vhodné doplnit vzorci:

$$\arcsin u + \arcsin v = \arcsin (u \,.\, \sqrt{1 - v^2} + v \,.\, \sqrt{1 - u^2}) ,$$
$$\arccos u + \arccos v = \arccos (uv - \sqrt{1 - u^2} \,.\, \sqrt{1 - v^2}) ,$$
$$\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u + v}{1 - uv} .$$

Na str. 132 v odstavci „Transcendentní rovnice" (případ 2) substituce $y = A^x$ nepřevede vždy danou rovnici na rovnici algebraickou. Někdy je třeba další substituce. Bylo by lépe danou substituci nahradit substitucí $y = A^{qx}$, kde q je nejmenší společný jmenovatel čísel $k_1, k_2, k_3, \ldots$.

Na str. 132 v řádku 9. zdola má být $\log (3x - 11)(x - 27) = \log 1000$.

Na str. 139 v řádku 14. shora má být $f'(x) \geqq 0$.

Na str. 155: Pojem funkce rostoucí, ..., je definován již na str. 104; není nutné znovu to opakovat.

Na str. 157 v tabulce derivací by bylo vhodné zdůraznit, které ze vzorců jsou základní a které jsou pouze speciálními případy vzorců základních. Na př.: $(x^n)' = x^{n-1}$, speciálně:

$$x' = 1 ; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} ; \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} ; \quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} .$$

Tabulka by zasloužila lepšího uspořádání: nejdříve uvést vzorce pro derivování základních elementárních funkcí a potom teprve derivace některých ostatních funkcí.

Na str. 188 v odstavci „Integrace některých racionálních funkcí" by měla být (alespoň pod čarou) ke vzorcům (1) a (2) zmínka, že za daných předpokladů nejde vždy o racionální funkci.

Na str. 217, 7. řádek zdola, má být $\mathrm{d}V = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$.

Na str. 220, 3. řádek zdola, má být: Pravoúhlé souřadnice těžiště tělesa.

Závady zjištěné v druhém díle:

Na str. 71: Pravoúhlé souřadnice jsou zavedeny nesprávně. Správně má být: $x_M = \pm\, OA$ (+ nebo − podle toho, je-li bod A na kladné nebo záporné polopřímce v ose x); $y_M = \pm\, OB$ (+ nebo − podle toho, je-li bod B na kladné nebo záporné polopřímce v ose y).

Na str. 86: Vektorový tvar rovnice roviny procházející třemi body $M_1 \equiv [\vec{r}_1]$, $M_2 \equiv [\vec{r}_2]$, $M_3 \equiv [\vec{r}_3]$ je lépe psát $[\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{r}_1 - \vec{r}_3] = 0$ a souřadnicově

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Na str. 124 má být správně $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s} = \vec{\omega} \times \vec{\tau}$.

Jan Raška a *Stanislav Gabriel*, Praha

*

G. M. Mirakjan: **Šroubovice.** Přeložil Ing. *Milan Ullrich*, vydalo Státní nakladatelství technické literatury jako 17. svazek knižnice „Populární přednášky o matematice“, Praha 1957. Stran 60, obrázků 31, cena 1,52 Kčs.

Mirakjanova knížka, kterou nedávno dostali naši středoškolští studenti do rukou, patří jistě k nejpřístupněji psaným dílkům, která dosud vyšla v knižnici „Populární přednášky o matematice“. Název „Šroubovice“, který pro knížku zvolila česká redakce, není příliš výstižný, neboť obsah spisku je mnohem širší; v osmi kapitolách se totiž čtenář seznamuje s některými zajímavými vlastnostmi válcové plochy (v ruském originále má knížka název Прямой круговой цилиндр).

O šroubovici, která dala českému vydání název, se mluví jen v první kapitole. Z dalšího obsahu jmenujeme vedle tradiční úlohy o válci, který má při daném povrchu maximální objem, jen příklad s t. zv. Schwarzovým válcem, který ukazuje, že nelze definovat obsah plochy jako limitu obsahů stěn mnohostěnů vepsaných této ploše. Spisek je doplněn několika fysikálními a technickými aplikacemi.

Autoru jistě není možno vytýkat, že se na mnoha místech své knížky opírá o názor, neboť mnohé jeho úvahy jsou v podstatě úlohy z matematické analysy. Důkazy se podávají jen tam, kde mají středoškolský charakter; pak by však měly být pokud možno úplné (na str. 21 není úplný důkaz, že rovinným řezem válce je — za jistých předpokladů — elipsa; chybí totiž obrácení). Další drobné nedostatky originálu jsou opraveny nebo komentovány poznámkou překladatele pod čarou.

Domnívám se, že pro svůj přístupný a zajímavý obsah najde tato knížka řadu čtenářů mezi naší mládeží.

Jiří Sedláček, Praha

*

DALŠÍ VYDANÉ KNIHY

Emil Kraemer: **Analytická geometrie lineárních útvarů.** Druhé vydání 1957, Nakladatelství ČSAV, 240 stran, 40 obrazů, cena brož. Kčs 10,50.

Nové vydání odborné příručky a učebnice pro vysoké školy pedagogické. Recensi prvního vydání viz v Časopise pro pěstování matematiky, *80* (1955), 103—105.

*

Jur Hronec: **Diferenciálny a integrálny počet, I.** Třetí přepracované vydání 1957, Slovenské vydavateľstvo techn. lit., Bratislava, 288 stran, 39 obrazů, cena váz. Kčs 22,—.

Nové vydání učebnice pro studující matematiky na Přírodovědecké fakultě a na Vysoké škole pedagogické.

*

František Glanc s kolektivem spolupracovníků: **Kapesní početní tabulky.** Státní nakladatelství technické literatury; Praha 1957, 58 stran a volná tabulka, cena Kčs 5,60.

Tabulky obsahují 20000 + 400 součinů čísel a jsou určeny pro použití zejména v dílnách a kancelářích.

*

A. I. Markuševič: **Komplexní čísla a konformní zobrazení.** Z ruštiny přeložil Ing. *Milan Ullrych,* 2. vydání. Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1957, 76 stran a 45 obrázků, cena Kčs 2,30.

Nové nezměněné vydání 12. svazku „Populárních přednášek o matematice“. Recensi prvního vydání viz v Časopise pro pěstování matematiky, *81* (1956), str. 264.

Redakce

ZPRÁVY

PROFESOR Dr. FRANTIŠEK VYČICHLO ZEMŘEL

Dne 6. ledna t. r. zemřel nositel Řádu práce profesor RNDr. František Vyčichlo, doktor fysikálně-matematických věd, vedoucí profesor katedry matematiky a deskriptivní geometrie fakulty inženýrského stavitelství na Českém vysokém učení technickém.

Profesor Vyčichlo vynikl zejména svými pracemi v diferenciální geometrii a byl naším největším znalcem tensorové analysy. Po válce věnoval se též aplikacím matematiky a v matematické teorii pružnosti a v teorii skořepin uplatňoval své hluboké znalosti tensorové analysy a diferenciální geometrie. Byl vynikajícím pedagogem, který dovedl prokázat význam moderních matematických metod v technických vědách.

Profesor Vyčichlo byl vedoucí osobností matematického života v ČSR. Zpráva o jeho smrti se hluboce dotkla nás všech, kteří jsme ho znali jako neúnavného pracovníka a organisátora, muže ryzího charakteru a vzácných lidských vlastností, připraveného pomoci každému, kdo jeho pomoci potřeboval. Náš časopis v zesnulém ztratil jednoho z nejzkušenějších a nejobětavějších spolupracovníků. Podrobné zhodnocení života a díla prof. Vyčichla přineseme v některém z příštích čísel.

Redakce

K PADESÁTINÁM PROFESORA VLADIMÍRA KNICHALA

Dne 20. března 1958 se dožívá padesáti let prof. dr. Vladimír Knichal, doktor fysikálně matematických věd a ředitel Matematického ústavu Československé akademie věd. Jeho všestranné a hluboké matematické znalosti a jeho tvůrčí matematické výkony jsou blízkým jeho spolupracovníkům a přátelům dobře známé; je škoda, že jeho publikované práce o tom podávají jen kusý přehled. Přinášejí významné výsledky z teorie reálných funkcí (superposice reálných funkcí), z teorie čísel (dyadické rozvoje a geometrie čísel), z algebraické geometrie a z matematické fysiky. Zvláště je třeba zdůraznit, že prof. Knichal má rozsáhlé a hluboké znalosti fysiky a že věnoval mnoho úsilí a práce jak použíti numerických metod ve fysikálních a technických problémech, tak i tomu, aby základní teoretické otázky ve fysice byly formulovány a řešeny s matematickou přesností.

Svou vědeckou dráhu začal jako asistent na Karlově universitě v letech 1929—1941. V letech 1937—38 byl ve Varšavě, kde pracoval v semináři kombinatorické topologie prof. K. Borsuka. Za války učil na průmyslových a jiných středních školách.

V r. 1945 stal se profesorem na Masarykově universitě v Brně. Současně konal přednášky na Pedagogické fakultě v Brně, na Přírodovědecké fakultě Karlovy university a na fakultě inženýrského stavitelství Českého vysokého učení technického v Praze.

Po založení Ústředního ústavu matematického v r. 1950 stává se prof. Knichal vedoucím oddělení technické matematiky a významnou měrou se podílí na vývoji ústavu. V r. 1954 stal se po akad. E. Čechovi ředitelem Matematického ústavu ČSAV, který z Ústředního ústavu matematického vznikl; věnuje mu všechny své síly a pracuje s nevšední obětavostí a energií jak na problematice vědecké, tak i na otázkách organisačních.

Všichni jeho spolupracovníci a přátelé, kteří si váží jeho schopností i osobních vlastností, mu přejí do dalších let pevné zdraví a řadu úspěchů.

Jaroslav Kurzweil, Praha

30. ZASEDÁNÍ MEZINÁRODNÍHO STATISTICKÉHO ÚSTAVU (ISI) VE STOCKHOLMU

Ve dnech 7.—16. srpna 1957 konalo se ve Stockholmu 30. zasedání Mezinárodního statistického ústavu (International Statistical Institute). Tento ústav je sdružením nejpřednějších (k aplikacím zaměřených) statistiků celého světa a zasedá pravidelně po dvou letech. Příští zasedání bude mimořádně roku 1958 v Bruselu u příležitosti Světové výstavy.

Zasedání se zúčastnilo asi 600 delegátů ze 48 států. Československo zastupovali dr. A. Žaludová (VÚTT), dr. F. Fajfr (předseda SÚS), dr. Jar. Hájek (MÚČSAV), Ing. F. Herbst (SÚS) a dr. J. Světon (VŠE Bratislava). A. Žaludová přednesla sdělení „Statistická kontrola jakosti výroby pomocí jednotlivých pozorování“ a J. Hájek sdělení „Některé příspěvky k theorii pravděpodobnostního výběru“.

Na programu bylo celkem 137 příspěvků, přednesených na 20 shromážděních, z nichž vždy dvě probíhala souběžně. Příspěvky se týkaly matematické statistiky (pokusnictví, kontrola jakosti, výběrová šetření), demografie, lineárního programování, používání elektronických strojů a ekonomické statistiky. Podrobnější zpráva o programu bude uveřejněna v Aplikacích matematiky.

Jaroslav Hájek, Praha

ZPRÁVA O ZÁJEZDU DO DRÁŽĎAN K ÚČASTI NA KONFERENCI JEDNOTY NĚMECKÝCH MATEMATIKŮ (DMV)

Letošní konference Jednoty německých matematiků (Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung) konala se ve dnech 9.—14. září v Drážďanech za velké účasti německých a zahraničních matematiků. Zúčastnilo se jí na 400 odborníků z NDR a NSR a z dalších 14 států. Zastoupeny byly: Anglie, Bulharsko, Československo, Čína, Holandsko, Italie, Jugoslavie, Maďarsko, Norsko, Polsko, Rakousko, Rumunsko, SSSR, Švédsko. Sovětský svaz byl zastoupen pětičlennou delegací v čele s prof. P. S. Alexandrovem.

Konference byla zahájena pozdravnými projevy rektora drážďanské techniky a předsedy DMV prof. E. Spernera z Hamburku, kteří uvítali přítomné delegace a hosty. Pozdravné projevy zahraničních delegátů do programu zařazeny nebyly.

Konferenční práce se skládaly ze sedmi hlavních přednášek a asi z 90 sdělení. Hlavní přednášky byly hodinové a konaly se v počtu jedné nebo dvou vždy dopoledne. Sdělení trvala 20 minut včetně diskusí, na něž bylo počítáno 5 minutami. Doba přednášek i sdělení byla zpravidla přísně dodržována. Jedno odpoledne (11. 9.) bylo věnováno otázkám vyučování matematice na středních školách a bylo zpestřeno promítnutím dvou filmů o neeuklidovských pohybech a o topologické struktuře projektivní roviny.

Hlavní přednášky byly prosloveny na tato themata:

E. Hölder, Lipsko: Über die partiellen Differentialgleichungssysteme der mehrdimensionalen Variationsrechnung.

L. Schmeterer, Hamburk: Nichtparametrische Methoden in der mathematischen Statistik.

Wu Wen-Tsün, Peking: Studies on the cyclic product of a space and some of its applications.

P. S. Alexandrov, Moskva: 50 Jahre Topologie.

E. Borsuk, Varšava: Über einige Probleme der anschaulichen Topologie.

H. Billing, Göttingen: Übersicht über neuere Entwicklungen auf dem Gebiet der digitalen Grossrechenanlagen.

P. Roquette, Hamburk: Algebraische Gruppen und ihre Anwendung in der Theorie der Funktionenkörper.

Největší a v každém směru oprávněný úspěch měla přednáška prof. P. S. Alexandrova, kterou předsedající prof. H. Hasse z Hamburku označil slovy: „Ex oriente lux“. Také ostatní přednášky měly vysokou úroveň. Zdá se, že největší zájem na konferenci se soustřeďoval na topologii a na klasickou analysu v okruhu obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic.

Čs. delegace se skládala z těchto členů: O. Borůvka, Mir. Driml, Mir. Fiedler, M. Kolibiar, Fr. Nožička, O. Vejvoda. Všichni proslovili na konferenci sdělení, která byla vesměs přijata příznivě:

9. 9. *Mir. Fiedler*: Metrische Eigenschaften endlicher Punktgruppen in euklidischen Räumen.

10. 9. *O. Vejvoda:* Einige singuläre Fälle der periodischen Schwingungen der quasilinearen Systeme.

10. 9. *Fr. Nožička*: Zur Berührung von Mannigfaltigkeiten im affin-euklidischen Raume.

13. 9. *Mir. Driml*: Verteilungsfunktionale und charakteristische Funktionale verallgemeinerter zufälliger Grössen.

13. 9. *M. Kolibiar*: Über die Relation „zwischen“ in Verbänden.

13. 9. *O. Borůvka*: Über Reihen von Zerlegungen auf Mengen und einige Anwendungen derselben.

V rámci konference byl uspořádán (12. 9.) celodenní autobusový zájezd do Saského Švýcarska. Mimo to uspořádala DMV (13. 9.) k poctě účastníků konference společenský večer s hudebním a zábavným programem. Účastníci měli též možnost navštívit operní představení a symfonický koncert.

Konference přinesla čs. účastníkům nové cenné zkušenosti vědecké a pedagogické a zejména poskytla celkový pohled na snahy a výsledky německých matematiků.

Otakar Borůvka, Brno

JUBILEJNÍ SHROMÁŽDĚNÍ MATEMATICKÉ SPOLEČNOSTI JÁNOŠE BOLYAIE V SEGEDÍNĚ

Ve dnech 21., 22. a 23. září 1957 konalo se v Segedíně jubilejní shromáždění maďarské matematické společnosti, jež nese jméno Janoše Bolyaie „A Bolyai János matematikai társulat“. Byl to vlastně sjezd maďarských matematiků, který byl uspořádán u příležitosti desetiletého trvání společnosti, která byla založena roku 1947 v Segedíně (Szeged). Zasedání se konalo za účasti zahraničních hostí v celkovém počtu 15 matematiků. Z Bulharska přijeli B. Petkančin, B. Dolapčijev, L. Iljev, A. Matejev; z Jugoslavie A. G. Avakumović; z NDR H. Grell; z Polska R. Sikorski, W. Knapowski; z Rumunska

T. Popoviciu, J. Gergely, O. Sacter; z SSSR S. M. Nikolskij. Z Československa se zúčastnili sjezdu: Vl. Kořínek, J. Novák a Št. Schwarz.

Program sjezdu byl velmi bohatý, takže všechny tři dny jím byly značně naplněny. Přesto probíhal celý sjezd velmi hladce. Na plenárních schůzích bylo 7 přednášek, z nichž každé bylo vyměřeno $\frac{3}{4}$ až 1 hodina času. Přednášeli: *L. Kalmár*: Zpráva o logickém stroji v Segedíně; *G. Hajós*: Názornost a geometrie; *G. Alexits*: O konvergentních vlastnostech ortogonálních řad; *B. Szökefalvi-Nagy*: Nové výsledky o operátorech Hilbertova prostoru; *L. Rédei*: O význačných bodech v trojúhelníku; *O. Varga*: Nové výsledky z teorie prostorů diferenciální geometrie, *L. Fuchs*: O možnosti rozšířiti Hajósovu větu na nekonečné grupy.

O obsahu těchto přednášek uvedu jen několik poznámek o těch, které se mi zdály nejzajímavější.

L. Kalmár vykládal o logickém stroji, který se právě sestrojuje v Segedíně. Stroj bude obsahovat jen ve své vstupní a ve své výstupní části relátka, kdežto vlastní pracovní část bude pracovat vůbec bez relátek, jen na základě zapojení. Má provádět logické úsudky, pokud obsahují základní logické operace bez kvantorů.

G. Hajós mluvil o několika svých myšlenkách, na které přišel při psaní své nové obsáhlé knihy o elementární geometrii. Podle něho dosavadní způsoby, jak se vykládá elementární geometrie jsou buď přesné, ale zcela nenázorné, neb názorné, avšak nepřesné. Podle mínění Hajósova je třeba vykládat geometrii tak, aby byl výklad přesný, ale zároveň geometrický, což podle něho značí názorný.

V 6 sekcích bylo vyměřeno na sdělení i s debatou vždy 20 minut. Bylo předneseno celkem 67 sdělení od maďarských účastníků. Uvedu zde jen názvy sekcí a počet v nich učiněných maďarských sdělení: algebra a teorie čísel 15, analysa 15, geometrie 9, matematická logika a teorie počítacích strojů 10, počet pravděpodobnosti 8, vyučování 10.

Českoslovenští účastníci přednesli tato sdělení: V sekci algebry a teorie čísel přednášeli: *Vl. Kořínek* na téma „Poznámky k tak zvanému třetímu zkušebnímu problému (Test problem) Kaplanskyho" a *Št. Schwarz* „O struktuře multiplikativní pologrupy zbytkových tříd mod m". V sekci analysy mluvil *J. Novák* „O kartézském součinu jistých L-grup".

O své zahraniční hosty se maďarští matematici vzorně starali a vůbec celý sjezd se krásně vydařil. Na konec je proto možno upřímně blahopřát maďarským matematikům k velmi zdařilému sjezdu a srdečně přáti matematické společnosti Jánoše Bolyaie mnoho zdaru a úspěchu do dalších desetiletí.

Vladimír Kořínek, Praha

ZPRÁVA O POBYTU Dr. J. KURZWEILA V SSSR

V SSSR byl jsem od 31. 3. do 22. 6. t. r. Nejdéle jsem byl v Moskvě a jenom krátce jsem navštívil Leningrad a Kijev.

Těžiště spolupráce moskevských matematiků je na mechanicko-matematické fakultě MGU (Moskevská státní universita). Fakulta pracuje ve velkém měřítku; v jednom ročníku studuje asi 400 posluchačů (z toho 250 matematiků) a na fakultě se připravuje asi 100 aspirantů — další aspiranti se školí v Matematickém ústavu Akademie. Obdobně jako aspirantura existuje v SSSR ještě t. zv. doktorantura, určená k přípravě doktorské disertace, která trvá dva roky. Na fakultě pracuje asi 160 učitelských sil; z toho je více než polovina docentů, neboť asistent, který obhájil kandidátskou disertaci, je brzy jmenován docentem. Většinu cvičení vedou docenti a profesoři, naproti tomu jsou přednášky vedené asistenty. Kromě toho pracuje na fakultě asi 200 vědeckých pracovníků (z toho 120 ve středisku pro výpočty na samočinných počítačích). Profesoři, docenti a asistenti nejsou vázáni normami a je možné některé osvobodit od učebního úvazku, aby se mohli věnovat vědecké práci. Široce se uplatňuje zásada (nejenom v Moskvě), že je třeba na fakultě vychovávat velký počet posluchačů, aby z nich bylo možné vybírat nejschopnější pro tvůrčí vědeckou práci. Mezi fakultou a ústavem Akademie je živý kontakt; řada matematiků pracuje na obou pracovištích současně.

Moskevská matematická společnost se schází každý týden. Na pořadu schůzí bývají dva až tři odborné referáty, ale tím se činnost společnosti nevyčerpává; byl jsem na př. přítomen obsáhlé a věcné diskusi o plánu vydávání matematických publikací. Každý rok uděluje společnost dvě vysoké peněžité odměny mladým matematikům (do 30 let). Za zmínku stojí i skutečnost, že v SSSR je číslo časopisu vytištěno za dva měsíce po odevzdání rukopisu tiskárně, zatím co u nás je potřebí dvojnásobné doby.

V SSSR je vysoko oceňována úloha automatických počítačů pro rozvoj průmyslu a intensivně se pracuje na konstrukci a využití těchto automatů. V Moskvě pracují střediska pro výpočty na samočinných počítačích na mechanicko-matematické fakultě i v Akademii, Ústav přesné mechaniky Akademie pracuje na nových elementech a konstrukcích těchto strojů a další střediska se budují v Leningradě, v Kijevě, v Novosibirsku, ve Sverdlovsku a jinde. Počet posluchačů specialisace „vyčislitelnaja matematika" na mechanicko-matematické fakultě MGU byl zvýšen na 60 v jednom ročníku; táž specialisace se přednáší i na jiných universitách a v brzké době budou uvedeny do provozu samočinné počítače vyrobené seriově.

Vědecká činnost v matematice je v Moskvě velmi obsáhlá a mohu se zmínit jen o některých směrech podle velmi subjektivního výběru. Jedinečný je seminář vedený I. M. Gelfandem. Tento seminář navštěvuje řada vynikajících matematiků a je možno říci, že thematika zahrnuje celou matematiku. Letos byly na semináři předneseny přehledné referáty o směrech bádání v řadě disciplin (na př. v teorii funkcí více komplexních proměnných, v kombinatorické topologii) a řada referátů i krátkých sdělení o nových výsledcích; na seminář občas dojíždějí i staří účastníci, kteří pracují mimo Moskvu. Thematem, které soustřeďuje širokou pozornost, je problém malého parametru při nejvyšších derivacích v parciálních rovnicích a problém přirozeně vznikajících nespojitostí v řešeních nelineárních rovnic hyperbolického typu (t. zv. nespojité vlny; rovnice samy i počáteční podmínky jsou hladké; viz přehled v článku O. A. Олейник: Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений; Успехи матем. наук, т. XII, *3* (*75*), 1957, 1—73.

Thematikou semináře o obyčejných diferenciálních rovnicích vedeného V. V. Nemyckým je asymptotické chování integrálů diferenciálních rovnic, okolí singulárních bodů, otázky stability rovnice s nespojitými pravými stranami a pod. V Matematickém ústavu Akademie se obyčejnými diferenciálními rovnicemi zabývá oddělení vedené S. L. Pontrjaginem, které je známé pracemi v kombinatorické topologii. Toto oddělení rozpracovalo novou problematiku, související s otázkami optimální automatické regulace (viz referát P. В. Гамкрелидзе: Семинар Л. С. Понтрягина по математическим проблемам теории колебаний и автоматического регулирования, Успехи матем. наук, т. XII, *3* (*75*), 1957, 267—272.

Nezávisle získal o témže problému závažné výsledky N. N. Krasovskij ze Sverdlovska. Asymptotické chování a kriteria stability v obyčejných diferenciálních rovnicích je část thematiky oddělení obecné mechaniky Ústavu mechaniky Akademie. V Moskvě, Leningradě a Kijevě jsem několikrát přednášel o své vlastní práci a výsledky, o nichž jsem hovořil, jsou uloženy v mých pracích v mezinárodním časopise Чехосл. мат. журнал v loňském ročníku a v práci, kterou jsem napsal pro časopis Прикладная математика и механика.

Závěrem bych chtěl zdůraznit velký zájem sovětských matematiků o osobní styky s československými matematiky jak při návštěvě a přednáškách v ČSR, tak i na půdě Sovětského svazu.

Jaroslav Kurzweil, Praha

STUDIJNÍ POBYT MIROSLAVA SOVY V POLSKU

Na své studijní cestě do Polska, trvající jeden a půl měsíce (od 6. 5. do 24. 6. 1957), jsem navštívil matematická pracoviště ve Varšavě, Poznani a Vratislavi. Zajímal jsem se hlavně o funkcionální analysu a počet pravděpodobnosti.

Ve Varšavě jsem se zúčastnil seminářů z funkcionální analysy, theorie distribucí a matematické fysiky. V semináři z funkcionální analysy se zde soustavně studují B_0-prostory, v semináři matematické fysiky se studuje zejména theorie Hilbertových prostorů; vznikly zajímavé práce o parciálních diferenciálních rovnicích (Cauchyův problém). V Poznani mne zajímaly práce tamních matematiků o vektorových funkcích. Ve Vratislavi vznikla řada prací o ergodickém problému, z nichž některé dávají ucelené řešení problému. V semináři o počtu pravděpodobnosti bylo v době, kdy jsem tam byl, referováno o nových výsledcích z theorie zobecněných stochastických procesů.

Referoval jsem několikrát o výsledcích, týkajících se integrálů vektorových funkcí a semigrup operátorů. Na všech místech, kde jsem byl, mne překvapilo velké množství mladých matematiků, kteří pracují s velkým elánem a mají mnoho nových výsledků, o čemž ostatně svědčí i množství publikovaných prací.

Miroslav Sova, Praha

HABILITACE NA MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍ FAKULTĚ KU

Na matematicko-fysikální fakultě KU v Praze obhájil dne 10. října 1957 kandidát fysikálně-matematických věd ALOIS ŠVEC, odborný asistent Vysoké školy strojní v Liberci, habilitační práci docenta matematických věd s názvem „Kongruence přímek s projektivní konexí“.

Redakce

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

V matematické obci pražské byly začátkem studijního roku 1957—58 opět zahájeny pravidelné přednášky a diskuse; pořádá je Jednota československých matematiků a fysiků a Matematický ústav Československé akademie věd. Konají se od 17 hod. 15 minut na Matematicko-fysikální fakultě KU v Praze II, Ke Karlovu 3, zpravidla v pondělí.

Konaly se tyto přednášky s diskusemi:

2. 9. 1957: *Gheorghe Vrănceanu*, Bukurešť, Les espaces à connexion affines localement euclidiens et les correspondances entre les espaces affines ou projectifs. Viz referát na str. 103.

16. 9. 1957: *Walter Hoffmann*, Darmstadt, Moderne Rechentechnik in Darmstadt a

17. 9. 1957: Entwicklungsstand elektronischer Rechenanlagen mit Berücksichtigung der Situation in Deutschland — obě přednášky pořádaly JČMF a Matematický ústav ČSAV spolu s Ústavem matematických strojů ČSAV.

30. 9. 1957: *Alois Švec*, Zobecnění pojmu prostoru s konexí. Viz referát na str. 104.

7. 10. 1957: *Ivo Babuška* a *Rudolf Výborný*, O Dirichletově úloze na neomezených oblastech.

Redakce