Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA O DÉLCE JORDANOVY KŘIVKY

JAN MAŘÍK, Praha

DT: 513.83

(Došlo dne 17. dubna 1957)

Autor dokazuje, že délka Jordanovy křivky s vnitřkem G je supremem množiny čísel

$$\int_G \left(\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial y} \right) dx\, dy\,,$$

kde v_1, v_2 jsou polynomy, splňující nerovnost $v_1^2(x, y) + v_2^2(x, y) \leqq 1$ pro všechna $[x, y] \in G$.

1. Symbol E_1 (resp. E_2) označuje množinu všech reálných (resp. komplexních) čísel. Dvojici reálných čísel $[x, y]$ ztotožňujeme s komplexním číslem $x + iy$. Funkci dvou reálných proměnných budeme tedy pokládat též za funkci komplexní proměnné nebo naopak. Reálnou (resp. imaginární) část komplexní funkce f budeme vždy značit symbolem f_1 (resp. f_2).

Buď f spojitá komplexní funkce, definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť $f(a) = f(b)$ a nechť platí implikace

$$(t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle,\ 0 < |t_1 - t_2| < b - a) \Rightarrow f(t_1) \neq f(t_2)\,.$$

Potom množinu $C = f(\langle a, b\rangle)$ nazveme Jordanovou křivkou (a řekneme, že funkce f určuje Jordanovu křivku C). Množina $E_2 - C$ má dvě komponenty a křivka C je jejich společnou hranicí. Tyto komponenty jsou ovšem oblasti (t. j. otevřené souvislé množiny). Jedna z nich je omezená; ta se nazývá vnitřek křivky C. Druhá (neomezená) oblast se nazývá vnějšek C.

Je-li h komplexní (nebo reálná) funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, položíme

$$\operatorname{var}(h, a, b) = \operatorname{var}(h) = \sup_D \sum_{j=1}^{n} |h(t_j) - h(t_{j-1})|\,,$$

kde $D = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ probíhá všechna dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

Jestliže funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ určuje touž Jordanovu křivku C jako funkce g v intervalu $\langle c, d\rangle$, je $\operatorname{var}(f, a, b) = \operatorname{var}(g, c, d)$; tuto hodnotu (která ovšem nemusí být konečná) nazveme délkou křivky C.

Pro libovolnou komplexní funkci h v intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

$$\max\,(\mathrm{var}\,(h_1), \mathrm{var}\,(h_2)) \leqq \mathrm{var}\,(h) \leqq \mathrm{var}\,(h_1) + \mathrm{var}\,(h_2)\,. \tag{1}$$

jak se snadno dokáže. (Zde jsou ovšem — podle úmluvy — funkce h_1, h_2 reálné a je $h = h_1 + ih_2$.)

Množinu všech spojitých komplexních funkcí h v intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $\mathrm{var}\,(h) < \infty$, označíme symbolem $V(a, b)$. Dále buď $V_0(a, b)$ množina všech $h \in V(a, b)$, pro něž $h(a) = h(b)$.

Jsou-li z_0, z_1 body oblasti $G \subset E_2$, existuje $h \in V(0, 1)$ tak, že $h(0) = z_0$, $h(1) = z_1$, $h(\langle 0, 1\rangle) \subset G$.

Je-li $h \in V_0(a, b)$, můžeme na množině $E_2 - h(\langle a, b\rangle)$ definovat funkci ind_h předpisem

$$\mathrm{ind}_h\, z = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\mathrm{d}h(t)}{h(t) - z}\,.$$

Potom nabývá funkce ind_h jen celočíselných hodnot a je konstantní na každé komponentě množiny $E_2 - h(\langle a, b\rangle)$; je-li $|z|$ dostatečně velké, platí $\mathrm{ind}_h\, z = 0$. (Viz [1], odst. 4.)

2. *Buď $h \in V_0(a, b)$. Pro $j = 1, 2$ buď $z_j = x + iy_j$, kde $x, y_j \in E_1$, $y_1 < y_2$ (resp. $z_j = x_j + iy$, kde $x_j, y \in E_1$, $x_1 < x_2$); buď J úsečka o koncových bodech z_1, z_2. Nechť body z_1, z_2 nepatří do $h(\langle a, b\rangle)$ a nechť existuje právě jedno $t \in \langle a, b\rangle$, pro něž $h(t) \in J$; dále předpokládejme, že $t \in (a, b)$ a že funkce h_1 (resp. h_2) je ryze monotonní v bodě t. Potom platí*

$$|\mathrm{ind}_h\, z_1 - \mathrm{ind}_h\, z_2| = 1\,. \tag{2}$$

Důkaz. Viz [1], odst. 7, vzorce (19) a (26).

3. *Nechť funkce f $(= f_1 + if_2)$, definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$, určuje Jordanovu křivku C. Buď M množina všech $t \in (a, b)$, v nichž má funkce f_1 lokální extrém (ostrý nebo neostrý). Buď G vnitřek nebo vnějšek křivky C. Nechť $x, y_j \in E_1$, $y_1 < y_0 < y_2$, $z_j = x + iy_j$ $(j = 0, 1, 2)$; nechť $z_0 \in C$ a nechť úsečka o koncových bodech z_1, z_2 je částí $\overline{G}$. Potom $x \in f_1(M) \cup \{f_1(a)\}$.*

Důkaz. Nechť $x \neq f_1(a)$. Rozeznávejme dva případy.

I. Existují η_1, η_2 tak, že $\eta_1 < \eta_2$ a že úsečka J o koncových bodech $x + i\eta_1$, $x + i\eta_2$ je částí C. Můžeme určit čísla a_1, b_1 $(a < a_1 < b_1 < b)$ tak, že x non $\in f_1(\langle a, a_1\rangle) \cup f_1(\langle b_1, b\rangle)$ a tedy $J \subset f(\langle a_1, b_1\rangle)$. Protože na množině $\langle a_1, b_1\rangle$ je zobrazení f homeomorfní, je $f^{-1}(J)$ opět úsečka. Pro $t \in f^{-1}(J)$ je však $f_1(t) = x$; odtud plyne $x \in f_1(M)$.

II. Taková čísla η_1, η_2 neexistují. Potom můžeme předpokládat, že z_1, z_2 non $\in C$ a tedy $z_1, z_2 \in G$. Protože G je oblast, existuje $g \in V(0, 1)$ tak, že $g(0) = z_1$, $g(1) = z_2$, $g(\langle 0, 1\rangle) \subset G$. Buď U otevřený kruh o středu z_0 a poloměru ε

takový, že $U \cap g(\langle 0, 1\rangle) = \emptyset$; buď U_+ (resp. U_-) množina těch bodů z U, jejichž první souřadnice je větší (resp. menší) než x. Položme $h(t) = g(t)$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$, $h(t) = z_2 + (t - 1)(z_1 - z_2)$ pro $t \in \langle 1, 2\rangle$. Potom je $h \in V_0(0, 2)$. Protože $\tilde{G} = E_2 - \overline{G}$ je oblast disjunktní s $h(\langle 0, 2\rangle) \subset \overline{G}$, je funkce ind_h konstantní na $\tilde{G}$; z podobného důvodu je funkce ind_h konstantní také na každé z množin U_+, U_-. Položíme-li na př. $z_+ = z_0 + \frac{1}{2}\varepsilon$, $z_- = z_0 - \frac{1}{2}\varepsilon$, plyne snadno z (2) (kde ovšem píšeme z_-, z_+ místo z_1, z_2), že funkce ind_h má na U_+ jinou hodnotu než na U_-. Nemůže tedy platit zároveň $\tilde{G} \cap U_+ \neq \emptyset$ i $\tilde{G} \cap U_- \neq \emptyset$. Je-li na př. $\tilde{G} \cap U_+ = \emptyset$, zjistí se snadno, že v bodě t_0, kde $f(t_0) = z_0$, má funkce f_1 lokální maximum; je tedy opravdu $x \in f_1(M)$.

4. Je-li $A \subset E_2$, $t \in E_1$, buď

$$A_t^1 = E[x; x \in E_1, x + it \in A], \quad A_t^2 = E[y; y \in E_1, t + iy \in A].$$

Lebesgueovu míru v E_k budeme značit μ_k ($k = 1, 2$). Slova „skoro všude“, „měřitelná množina“ a pod. se vždy budou vztahovat k míře μ_k; ze souvislosti bude patrné, které k je míněno.

Buď A omezená měřitelná neprázdná část E_2. Buď $\mathfrak{P}_A$ (resp. $\mathfrak{B}_A$) množina všech reálných (resp. komplexních) polynomů $\varrho(x_1, x_2)$, splňujících vztah $|\varrho(x_1, x_2)| \leq 1$ pro každý bod $[x_1, x_2] \in A$. Pro $k = 1, 2$ položme

$$\|A\|_k = \sup \int_A \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} \, d\mu_2 , \quad \text{kde } \varrho \in \mathfrak{P}_A ;$$

dále buď

$$\|A\| = \sup \int_A \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_2}\right) d\mu_2 , \quad \text{kde } \varrho = \varrho_1 + i\varrho_2 \in \mathfrak{B}_A .$$

Snadno se zjistí (viz [2], odst. 4, str. 523), že

$$\max (\|A\|_1, \|A\|_2) \leq \|A\| \leq \|A\|_1 + \|A\|_2 . \tag{3}$$

5. *Nechť funkce f ($= f_1 + if_2$) definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$ určuje Jordanovu křivku C; buď G vnitřek C a buď A taková měřitelná množina, že $G \subset A \subset \overline{G}$. Položme $v_j =$ var (f_j) ($j = 1, 2$). Potom platí*

$$v_1 = \|A\|_2 , \quad v_2 = \|A\|_1 . \tag{4}$$

Důkaz. Pro $x \in E_1$ buď $q(x)$ počet prvků množiny $f_1^{-1}(x)$ (je-li tato množina nekonečná, položíme $q(x) = \infty$). Podle Banachovy věty (viz [3], str. 280) je funkce q měřitelná a platí

$$\int_{E_1} q \, d\mu_1 = v_1 . \tag{5}$$

Buď napřed $\|A\|_2 < \infty$. Podle [2], odst. 33 (str. 545) existuje množina $K \subset E_1$, která má tyto vlastnosti:

1) Je $\mu_1(E_1 - K) = 0$.

2) Ke každému $x \in K$ existují čísla $\alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_r < \beta_r$ (r celé $\geqq 0$) tak, že množina A_x^2 je ekvivalentní*) se sjednocením $\bigcup_{j=1}^{r} (\alpha_j, \beta_j)$; položíme-li $r = \psi(x)$, je

$$2\int_{E_1} \psi \, \mathrm{d}\mu_1 = \|A\|_2 \,. \tag{6}$$

Dále buď M množina těch bodů $t \in (a, b)$, v nichž má funkce f_1 lokální extrém; buď

$$T = \{f_1(a)\} \cup f_1(M) \cup (E_1 - K) \,.$$

Snadno se zjistí, že množina $f_1(M)$ je spočetná; je tedy $\mu_1(T) = 0$. Zvolme $x \in E_1 - T$ a sestrojme podle 2) čísla α_j, β_j. Protože $A \subset \bar{G}$, je $\bigcup_{j=1}^{r} (\alpha_j, \beta_j) \subset (\bar{G})_x^2$; protože však x non $\in f_1(M) \cup \{f_1(a)\}$, je (podle odst. 3) $\bigcup_{j=1}^{r} (\alpha_j, \beta_j) \subset G_x^2$. Položíme-li ještě $\beta_0 = -\infty$, $\alpha_{r+1} = \infty$, zjistíme podobně, že $\bigcup_{j=0}^{r} (\beta_j, \alpha_{j+1}) \subset (E_2 - \bar{G})_x^2$. Je tedy $C_x^2 = \{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_r, \beta_r\}$; vidíme, že $q(x) = 2r = 2\psi(x)$. Odtud a z (5), (6) plyne $v_1 = \|A\|_2$.

Buď nyní $v_1 < \infty$. Pro každé x je hranice množiny A_x^2 částí množiny C_x^2, která má $q(x)$ prvků; množina A_x^2 má tedy nejvýš $q(x)$ komponent. Podle (5) je $\int_{E_1} q \, \mathrm{d}\mu_1 < \infty$; podle [2], odst. 20 (str. 535—536) je tedy $\|A\|_2 \leqq 2\int_{E_1} q \, \mathrm{d}\mu_1 < \infty$. Je-li tudíž $\|A\|_2 = \infty$, je též $v_1 = \infty$. Tím je dokázáno, že v každém případě platí $v_1 = \|A\|_2$; důkaz vztahu $v_2 = \|A\|_1$ je podobný.

Poznámka 1. Ze vztahů (1), (3), (4) plyne, že platí var $(f) < \infty$, právě když $\|A\| < \infty$.

Poznámka 2. Buď var $(f) < \infty$ (a tedy $\|A\| < \infty$). Zvolme $x \in f_1(\langle a, b\rangle) - T$ (snadno se zjistí, že takové x existuje a že $\psi(x) \geqq 1$) a určeme čísla y_1, y_2 tak, abychom měli $y_1 < \alpha_1 < y_2 < \beta_1$. Protože $\mathrm{ind}_f\, z = 0$ pro všechna $z = x + iy$, kde $y < \alpha_1$, plyne snadno z (2), že $|\mathrm{ind}_f\,(x + iy_2)| = 1$. Je-li tedy $\varkappa$ hodnota funkce $\mathrm{ind}_f\, z$ na vnitřku G křivky C, je $\varkappa = \pm 1$.

6. Jsou-li g, h komplexní funkce (na téže množině), pak symbolem $[g, h]$ (skalární součin) budeme rozumět (reálnou) funkci $g_1 h_1 + g_2 h_2$. Dále píšeme $\operatorname{div} v = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}$ pro každý komplexní polynom $v(x_1, x_2)$.

7. *Buď G vnitřek Jordanovy křivky, určené funkcí f v intervalu $\langle a, b\rangle$. Předpokládejme, že funkce f_1, f_2 jsou absolutně spojité. Buď $\varkappa$ hodnota funkce* ind_f *na G; buď π komplexní funkce, splňující rovnost*

$$i\varkappa\,\pi(t) = f'(t)$$

*) Řekneme, že množiny P, Q jsou ekvivalentní, jestliže $\mu_1(P - Q) = \mu_1(Q - P) = 0$.