Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O JISTÝCH TŘÍDÁCH FUNKCÍ SPOJITÝCH

MILOSLAV JŮZA, Praha

DT: 517.131

(Došlo dne 6. března 1957)

V článku je přímou konstrukcí proveden důkaz věty 1, kterou dokázali AUERBACH a BANACH v práci [1] methodou kategorií. Ke konstruktivnímu důkazu je užito methody, použité E. STEINITZEM v práci [3]. Jako snadný důsledek věty 1 se dostane věta 2.

Slovem číslo se v tomto článku všude, pokud není výslovně řečeno jinak, rozumí vždy reálné číslo; slovem funkce se všude rozumí funkce jedné reálné proměnné.

Věta 1. *Budiž $0 < \sigma < \tau \leqq 1$. Potom existuje funkce $f(x)$, která splňuje Lipschitzovu podmínku řádu σ,* [1] *ale pro každé číslo x_0 jest*

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\tau} = \infty . \tag{1}$$

Existenci takové funkce po prvé dokázali AUERBACH a BANACH v práci [1] methodou kategorií. V tomto článku dokážeme větu 1 přímou konstrukcí takové funkce.

Budiž tedy $0 < \sigma < \tau \leqq 1$. Položme $n = [3^{\frac{\sigma\tau}{\tau-\sigma}}] + 1$. Potom jest $n > 3^{\frac{\sigma\tau}{\tau-\sigma}}$, takže $n^{\frac{\tau-\sigma}{\sigma\tau}} > 3$, $n^{\frac{1}{\tau}} > 3^{\frac{\sigma}{\tau-\sigma}} > 1$, tedy

$$n^{\frac{1}{\sigma}} - n^{\frac{1}{\tau}} = n^{\frac{1}{\tau}}(n^{\frac{\tau-\sigma}{\sigma\tau}} - 1) > 2 .$$

Tedy existuje nejmenší přirozené číslo m takové, že

$$n^{\frac{1}{\tau}} < m < n^{\frac{1}{\sigma}} \tag{2}$$

a že m má touž paritu jako n. Protože jest $m > n^{\frac{1}{\tau}} \geqq n$, jest číslo $\frac{1}{2}(m + n)$ celé kladné a menší než m.

[1]) T. j. existují čísla $\delta > 0$, $K > 0$ tak, že pro $|x - x_0| < \delta$ je $|f(x) - f(x_0)| \leqq K|x - x_0|^\sigma$

Budeme definovat čísla $\Delta_{k,lm+i}$, k přirozené, l celé, $i = 1, 2, \ldots, m$, takto:

$$\Delta_{1,lm+i} = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(m+n);$$

$$\Delta_{1,lm+i} = -\frac{1}{n}, \quad i = \tfrac{1}{2}(m+n) + 1, \ldots, m; \tag{3}$$

$$\Delta_{k+1,(l-1)m+i} = \Delta_{k,l} \cdot \Delta_{1,i}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Zřejmě pro l celé, $k = 1, 2, \ldots$, platí

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_{k+1,(l-1)m+i} = \Delta_{k,l}, \quad \sum_{i=1}^{m^k} \Delta_{k+1,i} = 1, \tag{4}$$

$$|\Delta_{k,l}| = \frac{1}{n^k}. \tag{5}$$

Budiž A_m množina všech čísel tvaru $\frac{l}{m^k}$, l celé, k přirozené. Budeme definovat na množině A_m funkci $\varphi(x)$ předpisem

$$\varphi\left(l_0 + \frac{l}{m^k}\right) = l_0 + \sum_{i=1}^{l} \Delta_{k,i}, \quad l_0 \text{ celé}, \quad l = 0, 1, \ldots, m^k - 1; \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Protože platí (4), je funkce $\varphi(x)$ tímto předpisem na množině A_m jednoznačně určena.

Buďtež p, q celá čísla, $p > q$, k přirozené, $\left[\frac{p}{m^k}\right] = \left[\frac{q}{m^k}\right]$. Potom platí

$$\left|\varphi\left(\frac{p}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{q}{m^k}\right)\right| \leqq \frac{p-q}{n^k}. \tag{7}$$

Neboť nechť $\frac{p}{m^k} = \left[\frac{p}{m^k}\right] + \frac{p_1}{m^k}$, $\frac{q}{m^k} = \left[\frac{q}{m^k}\right] + \frac{q_1}{m^k}$; potom podle (6) a (5) platí

$$\left|\varphi\left(\frac{p}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{q}{m^k}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{p_1} \Delta_{k,i} - \sum_{i=1}^{q_1} \Delta_{k,i}\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=q_1+1}^{p_1} \Delta_{k,i}\right| \leqq \sum_{i=q_1+1}^{p_1} |\Delta_{k,i}| = \frac{p_1 - q_1}{n^k} = \frac{p-q}{n^k}.$$

Dále pro každé celé l a každé přirozené k platí

$$\left|\varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{l}{m^k}\right)\right| = \frac{1}{n^k}. \tag{8}$$

Neboť není-li $\frac{l+1}{m^k}$ celé, pak $\left[\frac{l+1}{m^k}\right] = \left[\frac{l}{m^k}\right] = l_0$, $\frac{l}{m^k} = l_0 + \frac{l_1}{m^k}$, $\frac{l+1}{m^k} = l_0 + \frac{l_1+1}{m^k}$ a podle (6) a (5) máme

$$\left|\varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{l}{m^k}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{l_1+1} \Delta_{k,i} - \sum_{i=1}^{l_1} \Delta_{k,i}\right| = |\Delta_{k,l_1+1}| = \frac{1}{n^k}.$$

Je-li však $\dfrac{l+1}{m^k} = l_0$ celé, potom $\dfrac{l}{m^k} = (l_0 - 1) + \dfrac{m^k - 1}{m^k}$ a podle (6), (4) a (5) dostaneme

$$\left|\varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{l}{m^k}\right)\right| = \left|l_0 - \left(l_0 - 1 + \sum_{i=1}^{m^k-1} \Delta_{k,i}\right)\right| =$$
$$= \left|1 - \sum_{i=1}^{m^k-1} \Delta_{k,i}\right| = |\Delta_{k,m^k}| = \frac{1}{n^k}.$$

Je-li $\dfrac{l_0}{m^k} \leqq x \leqq \dfrac{l_0+1}{m^k}$, l_0 celé, k přirozené, $x \in A_m$, potom

$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l_0}{m^k}\right)\right| < \left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right)\frac{1}{n^k},$$
$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l_0+1}{m^k}\right)\right| < \left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right)\frac{1}{n^k}. \tag{9}$$

To plyne ihned z (8), je-li $x = \dfrac{l_0+1}{m^k}$. Jestliže $x < \dfrac{l_0+1}{m^k}$, pak existují $\lambda, l_1, l_2, \ldots, l_\lambda$, $0 \leqq l_\iota \leqq m - 1$ pro $\iota = 1, \ldots, \lambda$, tak, že $x = \sum\limits_{\iota=0}^{\lambda} \dfrac{l_\iota}{m^{k+\iota}}$ a podle (7) platí

$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l_0}{m^k}\right)\right| = \left|\varphi\left(\sum_{\iota=0}^{\lambda}\frac{l_\iota}{m^{k+\iota}}\right) - \varphi\left(\frac{l_0}{m^k}\right)\right| \leqq \sum_{\mu=1}^{\lambda}\left|\varphi\left(\sum_{\iota=0}^{\mu}\frac{l_\iota}{m^{k+\iota}}\right) - \varphi\left(\sum_{\iota=0}^{\mu-1}\frac{l_\iota}{m^{k+\iota}}\right)\right| \leqq$$
$$\leqq \sum_{\mu=1}^{\lambda}\frac{l_\mu}{n^{k+\mu}} < (m-1)\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+\mu}} = \frac{m-1}{n-1}\,\frac{1}{n^k};$$

z této nerovnosti a z (8) dále plyne

$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l_0+1}{m^k}\right)\right| \leqq \left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l_0}{m^k}\right)\right| + \left|\varphi\left(\frac{l_0}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{l_0+1}{m^k}\right)\right| <$$
$$< \left(\frac{m-1}{n-1} + 1\right)\cdot\frac{1}{n^k},$$

což je druhá z nerovností (9).

Nyní dokážeme, že funkce $\varphi(x)$ splňuje na množině A_m Lipschitzovu podmínku řádu σ. Budiž totiž $x \in A_m$, $y \in A_m$, $0 < y - x < \dfrac{1}{m}$. Existuje přirozené číslo γ a celé číslo l tak, že $\dfrac{1}{m^{\gamma+1}} \leqq y - x < \dfrac{1}{m^\gamma}$, $\dfrac{l}{m^\gamma} < x \leqq \dfrac{l+1}{m^\gamma}$. Pro číslo y pak platí buď $\dfrac{l}{m^\gamma} < y \leqq \dfrac{l+1}{m^\gamma}$ nebo $\dfrac{l+1}{m^\gamma} \leqq y < \dfrac{l+2}{m^\gamma}$, ale v každém případě podle (9) platí

$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l+1}{m^\gamma}\right)\right| < \left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right)\frac{1}{n^\gamma},$$
$$\left|\varphi(y) - \varphi\left(\frac{l+1}{m^\gamma}\right)\right| < \left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right)\frac{1}{n^\gamma},$$

tedy

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < 2\left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right)\frac{1}{n^\gamma}.$$

Protože $|x - y| \geqq \frac{1}{m^{\gamma+1}}$ a podle (2) jest $m^\sigma < n$, tedy pro $0 < y - x < \frac{1}{m}$ dostaneme

$$\frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\sigma} < 2m^{\sigma(\gamma+1)}\left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right)\frac{1}{n^\gamma} < 2m^\sigma\left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right). \quad (10)$$

Skutečně tedy funkce $\varphi(x)$ splňuje na A_m Lipschitzovu podmínku řádu σ.

Z posledního výsledku však plyne, že $\varphi(x)$ je na A_m stejnoměrně spojitá. Existuje tedy funkce $f(x)$ definovaná a stejnoměrně spojitá na množině všech reálných čísel taková, že pro $x \in A_m$ je $f(x) = \varphi(x)$. [2]) Funkce $f(x)$ splňuje Lipschitzovu podmínku řádu σ na množině všech reálných čísel. Neboť jsou-li x, y libovolná reálná čísla, $0 < |x - y| < \frac{1}{m}$, existují čísla $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots;$ $x_i \in A_m$, $y_i \in A_m$, $x_i \neq y_i$, tak, že $\lim_{i\to\infty} x_i = x$, $\lim_{i\to\infty} y_i = y$, a v důsledku spojitosti funkce $f(x)$ podle (10) platí

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\sigma} = \lim_{i\to\infty}\frac{|f(x_i) - f(y_i)|}{|x_i - y_i|^\sigma} \leqq 2m^\sigma\left(1 + \frac{m-1}{n-1}\right).$$

Dále pro každé číslo x_0 platí (1). Neboť existují celá čísla l_k, $k = 1, 2, \ldots$, tak, že

$$\frac{l_k}{m^k} \leqq x_0 < \frac{l_k + 1}{m^k}.$$

Podle (8) dostaneme

$$\frac{\left|f\left(\frac{l_k+1}{m^k}\right) - f\left(\frac{l_k}{m^k}\right)\right|}{\left|\frac{l_k+1}{m^k} - \frac{l_k}{m^k}\right|^\tau} = \frac{m^{k\tau}}{n^k} = \left(\frac{m^\tau}{n}\right)^k.$$

Protože podle (2) je $\frac{m^\tau}{n} > 1$, jest

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|f\left(\frac{l_k+1}{m^k}\right) - f\left(\frac{l_k}{m^k}\right)\right|}{\left|\frac{l_k+1}{m^k} - \frac{l_k}{m^k}\right|^\tau} = \infty. \quad (11)$$

Jestliže pro nekonečně mnoho k je $\frac{l_k}{m^k} = x_0$, potom (1) již plyne z (11). Jestliže pro skoro všechna k je $\frac{l_k}{m^k} < x_0$, pak pro tato k jest

$$0 < \left|\frac{l_k}{m^k} - x_0\right| < \left|\frac{l_k+1}{m^k} - \frac{l_k}{m^k}\right|, \quad 0 < \left|\frac{l_k+1}{m^k} - x_0\right| < \left|\frac{l_k+1}{m^k} - \frac{l_k}{m^k}\right|$$

[2]) Viz třeba [2], věta 177.

a tedy

$$\frac{\left|f\left(\frac{l_k+1}{m^k}\right)-f\left(\frac{l_k}{m^k}\right)\right|}{\left|\frac{l_k+1}{m^k}-\frac{l_k}{m^k}\right|^\tau} \leqq \frac{\left|f\left(\frac{l_k+1}{m^k}\right)-f(x_0)\right|}{\left|\frac{l_k+1}{m^k}-x_0\right|^\tau}+\frac{\left|f\left(\frac{l_k}{m^k}\right)-f(x_0)\right|}{\left|\frac{l_k}{m^k}-x_0\right|^\tau}.$$

Protože limita levé strany je ∞ a pravá strana je součet nezáporných sčítanců, musí limes superior aspoň jednoho z těchto sčítanců býti roven ∞. Odtud plyne (1) i pro tento případ.

Dokázali jsme tedy, že funkce $f(x)$ splňuje všechny podmínky ve větě 1. Poznamenejme ještě, že podle (6) je $f(0) = 0$.

Z věty 1 snadno plyne tato

Pomocná věta. *Buďtež dána reálná čísla p, q, $1 \leqq p < q$. Pak existuje funkce $f(x)$ definovaná a spojitá na množině všech reálných čísel a mající tyto vlastnosti:*

I. *pro každé číslo $r \geqq q$ a každé číslo x_0 platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|^r}{|x-x_0|} = 0\,; \tag{12}$$

II. *pro každé číslo $s \leqq p$ a každé číslo x_0 jest*

$$\limsup_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|^s}{|x-x_0|} = \infty\,; \tag{13}$$

III. $f(0) = 0$.

Důkaz. Položme $\sigma = \dfrac{2}{p+q}$, $\tau = \dfrac{1}{p}$, takže jest $0 < \sigma < \tau \leqq 1$ a uvažujme funkci $f(x)$ z věty 1.

I. Existuje číslo K tak, že pro $|x - x_0| < \dfrac{1}{m}$ je $\dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{\frac{2}{p+q}}} \leqq K$, tedy

$\dfrac{|f(x)-f(x_0)|^{\frac{p+q}{2}}}{|x-x_0|} \leqq K^{\frac{p+q}{2}}$ a tedy pro každé číslo $r > \frac{1}{2}(p+q)$ a tedy tím spíše pro každé $r \geqq q$ platí

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|^r}{|x-x_0|} = \frac{|f(x)-f(x_0)|^{\frac{p+q}{2}}}{|x-x_0|}\,.\,|f(x)-f(x_0)|^{r-\frac{1}{2}(p+q)} \leqq$$

$$\leqq K^{\frac{1}{2}(p+q)}\,.\,|f(x)-f(x_0)|^{r-\frac{1}{2}(p+q)}$$

a tedy v důsledku spojitosti funkce $f(x)$ platí (12).

II. Jest $\limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{\frac{1}{p}}} = \infty$, tedy též $\limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|^p}{|x - x_0|} = \infty$.

Budiž $x_1, x_2, \ldots$ posloupnost taková, že $\lim_{i \to \infty} x_i = x_0$, $f(x_i) \neq f(x_0)$, $\lim_{i \to \infty} \frac{|f(x_i) - f(x_0)|^p}{|x_i - x_0|} = \infty$. Potom — protože $s \leqq p$ — budeme v důsledku spojitosti funkce $f(x)$ mít

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|f(x_i) - f(x_0)|^s}{|x_i - x_0|} = \lim_{i \to \infty} \frac{|f(x_i) - f(x_0)|^p}{|x_i - x_0|} \cdot \lim_{i \to \infty} |f(x_i) - f(x_0)|^{s-p} = \infty$$

a tedy platí (13).

III. Z poznámky na konci důkazu věty 1 vidíme, že $f(0) = 0$.

Věta 2. *Budiž m přirozené číslo. Pak existuje funkce $f(t)$ definovaná a spojitá na množině všech reálných čísel a mající tyto vlastnosti:*

I. *je-li $P(x)$ libovolný nekonstantní polynom stupně menšího než m, nemá funkce $P(f(t))$ vlastní derivaci v žádném bodě;*

II. *existuje polynom $Q(x)$ stupně m takový, že funkce $Q(f(t))$ má aspoň v jednom bodě derivaci rovnou nule.*

Důkaz. Je-li $m = 1$, stačí za funkci $f(t)$ vzíti libovolnou konstantu. Budiž $m > 1$. Položme $p = m - 1$, $q = m$ a $f(t)$ budiž funkce splňující podmínky I, II, III pomocné věty.

I. Budiž $P(x)$ nekonstantní polynom stupně menšího než m, t_0 reálné číslo. Dokážeme, že funkce $P(f(t))$ nemá vlastní derivaci v bodě t_0.

Označíme $f(t_0) = x_0$. Existuje přirozené číslo $s < m$ takové, že pro derivace polynomu $P(x)$ v bodě x_0 platí

$$P'(x_0) = P''(x_0) = \ldots = P^{(s-1)}(x_0) = 0\,, \quad P^{(s)}(x_0) \neq 0\,.$$

Podle Taylorovy věty platí

$$|P(x) - P(x_0)| = \frac{1}{s!} P^{(s)}(\xi)(x - x_0)^s,$$

při čemž $|\xi - x_0| \leqq |x - x_0|$. Protože všechny derivace polynomu jsou spojité, existuje číslo $\varepsilon > 0$ tak, že pro x, pro něž $|x - x_0| < \varepsilon$, platí

$$|P^{(s)}(x)| > \tfrac{1}{2}|P^{(s)}(x_0)|.$$

Snadno zjistíme, že pro x, pro něž $|x - x_0| < \varepsilon$, platí

$$|P(x) - P(x_0)| > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s!} \cdot |P^{(s)}(x_0)| \cdot |x - x_0|^s\,. \tag{14}$$

Protože funkce $f(t)$ je spojitá, existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro t, pro něž $|t - t_0| < \delta$, platí $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$. Pro t, pro něž $|t - t_0| < \delta$, tedy podle (14) platí

$$|P(f(t)) - P(f(t_0))| > C \cdot |f(t) - f(t_0)|^s\,,$$