Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O ROZKLADECH EUKLEIDOVSKÝCH PROSTORŮ

MILAN SEKANINA, Brno

DT: 519.51

(Došlo dne 23. ledna 1957)

Věta 1 následujícího článku se zabývá rozkladem eukleidovského prostoru E_n, $n \geqq 2$, na podmnožiny o mohutnosti menší než daná mohutnost $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$. Věta 2 se zabývá rozkladem prostoru E_{2k+1}, $k \geqq 0$, na podmnožiny přímo shodné s podmnožinami z prostoru E_k.

1

Nechť E_n značí n-rozměrný eukleidovský prostor.[1]) Eukleidovským pohybem neboli shodností v E_n rozumíme isometrické zobrazení E_n na sebe. Je známo, že v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic je eukleidovský pohyb vyjádřen soustavou rovnic

$$y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + d_1 ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = a_{1n}x + \ldots + a_{nn}x_n + d_n ,$$

kde $\|a_{ik}\|$ je reálná orthogonální matice, $d_1, \ldots, d_n$ jsou reálná čísla. Je-li determinant $|a_{ik}| = 1$, nazveme daný eukleidovský pohyb eukleidovským pohybem 1. druhu (nebo též přímou shodností), je-li $|a_{ik}| = -1$ eukleidovským pohybem 2. druhu (nepřímou shodností). O dvou množinách $M_1, M_2 \subset E_n$ řekneme, že jsou shodné, existuje-li eukleidovský pohyb S tak, že $S(M_1) = M_2$, a píšeme též $M_1 \cong M_2$. Existuje-li S 1. druhu mající tuto vlastnost, píšeme též $M_1 \doteq M_2$ a říkáme, že množiny M_1 a M_2 jsou přímo shodné. Rozkladem na množině M rozumíme systém neprázdných disjunktních podmnožin z M, jehož sjednocení je rovno M.

Definice 1. *Budiž $M \subset E_n$. Řekneme, že $M_1 \subset E_n$ je rozkladová množina na M, když existuje rozklad $\boldsymbol{R}$ na množině M v množiny M_ι, pro něž $M_\iota \cong M_1$. Existuje-li $\boldsymbol{R}$ tak, že platí dokonce $M_\iota \doteq M_1$, řekneme, že M_1 je přímou rozkladovou množinou na M.*

Bezprostředním důsledkem definice 1 je

[1]) Definice základních pojmů z analytické geometrie viz na př. E. Čech: Základy analytické geometrie I, Praha 1951. 0-rozměrným eukleidovským prostorem rozumíme prostor složený z jediného bodu.

Lemma 1. *Nechť $M_1, M_2, M_3 \subset E_n$. Nechť M_1 je rozkladovou množinou na M_2, nechť M_2 je rozkladovou množinou na M_3. Potom M_1 je rozkladovou množinou na M_3. Tvrzení platí, zaměníme-li pojem „rozkladová množina" za pojem „přímá rozkladová množina".*

2

Věta 1. *Budiž $n \geqq 2$, $\mathfrak{m}$ mohutnost menší než $2^{\aleph_0}$ různá od 0, $\mathfrak{S}$ systém o mohutnosti $2^{\aleph_0}$ neprázdných podmnožin M_ι z E_n, pro něž platí $\overline{\overline{M}}_\iota \leqq \mathfrak{m}$ ($\overline{\overline{M}}$ = mohutnost množiny M). Potom existuje systém $\mathfrak{S}'$ podmnožin M_ι, pro něž platí:*

$$1.\ M^\iota \doteq M_\iota\,. \quad 2.\ \mathfrak{S}' \text{ je rozklad na } E_n\,.$$

Důkaz. Nechť V_n značí zaměření prostoru E_n. Je-li v E_n dán souřadnicový systém S, určený bodem o a ortogonálními vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, potom shodnost prostoru E_n definovanou rovnicemi

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos\varphi \,.\, x_1 - \sin\varphi \,.\, x_2\,,\\ y_2 &= \sin\varphi \,.\, x_1 + \cos\varphi \,.\, x_2\,,\\ y_3 &= x_3\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ y_n &= x_n\,, \end{aligned}$$

kde $0 \leqq \varphi < 2\pi$, y_i resp. x_i jsou souřadnice bodu y resp. x v S, označme (S, φ) [tedy $(S, \varphi)(x) = y$]. Budiž Ω počáteční ordinální číslo patřící k mohutnosti $2^{\aleph_0}$. Uspořádejme body prostoru E_n v transfinitní posloupnost

$$x_0, x_1, \ldots, x_\tau, \ldots, \tau < \Omega\,.$$

Rovněž $\mathfrak{S}$ uspořádejme v transfinitní posloupnost typu Ω (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že množina indexů ι je množinou ordinálních čísel menších než Ω):

$$M_0, \ldots, M_\tau, \ldots, \tau < \Omega\,.$$

Věta bude dokázána, když sestrojíme transfinitní posloupnost podmnožin z E_n

$$M^0, M^1, \ldots, M^\tau, \ldots, \tau < \Omega\,, \tag{2.1}$$

takovou, že platí

$$1.\ \tau < \Omega \Rightarrow M^\tau \doteq M_\tau\,, \tag{2.2}$$

$$2.\ 0 \leqq \sigma < \tau < \Omega \Rightarrow M^\tau \cap M^\sigma = \emptyset\,, \tag{2.3}$$

$$3.\ x_\tau \in \bigcup_{\sigma \leqq \tau} M^\sigma\,. \tag{2.4}$$

V dalším sestrojíme posloupnost (2.1) s vlastnostmi (2.2) až (2.4) transfinitní indukcí.

Nechť $x \in M_0$. Nechť T je translace, pro niž platí $T(x) = x_0$. Označme $T(M_0) = M^0$. (2.2)—(2.4) je triviálně splněno. Budiž nyní $\nu < \Omega$, $\nu \geqq 1$. Předpokládejme, že pro $\sigma < \nu$ je definováno M^σ s vlastnostmi (2.2) až (2.4). Položme $N_\nu = \bigcup_{\sigma<\nu} M^\sigma$. Poněvadž $\overline{\overline{M^\sigma}} \leqq \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, $\bar{\nu} < 2^{\aleph_0}$, je $E_n - N_\nu \neq \emptyset$. Nechť ν_1 je prvý index $\varkappa$, pro nějž platí $x_\varkappa \in E_n - N_\nu$. Z (2.4) plyne, že $\nu_1 \geqq \nu$. Zvolme $x \in M_\nu$ a proveďme translaci T, pro niž $T(x) = x_{\nu 1}$. Položme $M_\nu^* = T(M_\nu)$. Nyní ukážeme, že existuje lineární podprostor dimense $n - 2$ (označíme jej U) takový, že

$$x_{\nu_1} \in U \quad \text{a} \quad U \cap N_\nu = \emptyset\,. \tag{2.5}$$

Nechť nejprve $n = 2$. Potom za U položíme bod x_{ν_1}. Nechť $n > 2$. Označme podprostor, skládající se jen z bodu x_{ν_1}, jako U^0. Potom U^0 je dimense 0 a platí pro U^0 (2.5). Předpokládejme, že existuje lineární podprostor dimense $k < n - 2$ U^k tak, že splňuje (2.5). Nechť V^k značí zaměření prostoru U^k, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ nechť je base ve V^k, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ base ve V_n, která vznikne doplněním base $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ (pro $k = 0$ je množina těchto vektorů prázdná). Nechť γ je reálné číslo. Položme

$$U_\gamma = \mathop{\mathrm{E}}_{y}[y = x_{\nu_1} + (\mathbf{v}_{k+2} + \gamma \mathbf{v}_{k+1})\,\lambda + \mathbf{v}_k\lambda_k + \ldots + \mathbf{v}_1\,.\,\lambda_1,\ \lambda, \lambda_k, \ldots, \lambda_1 \ \text{reálná čísla}]\,.$$

Nechť $\gamma \neq \gamma'$ a $y \in U_\gamma \cap U_{\gamma'}$. Je

$$y = x_{\nu_1} + (\mathbf{v}_{k+2} + \gamma \mathbf{v}_{k+1})\,\lambda + \mathbf{v}_k\lambda_k + \ldots + \mathbf{v}_1\lambda_1\,,$$
$$y = x_{\nu_1} + (\mathbf{v}_{k+2} + \gamma' \mathbf{v}_{k+1})\,\lambda' + \mathbf{v}_k\lambda_k' + \ldots + \mathbf{v}_1\lambda_1'\,.$$

Odtud $\lambda = \lambda'$, $\gamma\lambda = \gamma'\lambda'$, z čehož plyne $\lambda = \lambda' = 0$, tedy $y \in U^k$. Když $\gamma \neq \gamma'$, $y \in N_\nu$, $y \in U_\gamma$, potom je y non $\in U_{\gamma'}$. Poněvadž $\overline{\overline{N_\nu}} < 2^{\aleph_0}$, existuje γ_1 tak, že $U_{\gamma_1} \cap N_\nu = \emptyset$. Položíme $U^{k+1} = U_{\gamma'}$. U^{k+1} zřejmě splňuje (2.5). Odsud plyne existence podprostoru U dimense $n - 2$ s vlastností (2.5). Nechť $\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \ldots, \mathbf{w}_n$ tvoří orthonormální basi v U (pro $n = 2$ je množina těchto vektorů prázdná). Existují vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ tak, že $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \ldots, \mathbf{w}_n$ tvoří orthonormální basi v E_n. Souřadnicový systém S budiž určen bodem x_{ν_1} jako počátkem a vektory $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$. Označme nyní transformaci (S, φ) jako R_φ, $R_\varphi(M_\nu^*)$ označme kratčeji $M_{\nu,\varphi}^*$. Budiž nyní $x = (x_1, \ldots, x_n) \in N_\nu$. Protože x non $\in U$, je $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Připusťme, že existuje φ_1 tak, že $x \in M_{\nu,\varphi_1}^*$. Potom existuje $x' = (x_1', \ldots, x_n') \in M_\nu^*$ tak, že $R_{\varphi_1}(x') = x$. Je

$$x_1 = \cos\varphi_1\,.\,x_1' - \sin\varphi\,.\,x_2'\,, \quad x_2 = \sin\varphi_1\,.\,x_1' + \cos\varphi\,.\,x_2'\,. \tag{2.6}$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} x_1x_1' + x_2x_2' &= \cos\varphi_1[(x_1')^2 + (x_2')^2]\,,\\ x_1x_2' - x_2x_1' &= -\sin\varphi_1[(x_1')^2 + (x_2')^2]\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Je $(x_1')^2 + (x_2')^2 \neq 0$ (plyne z (2.6)). Tedy rovnicemi (2.6) a (2.7) je $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ jednoznačně určeno. Odtud plyne, že $x \in N_\nu$ je prvkem maximálně $\overline{\overline{M_\nu}}$ množin $M_{\nu,\varphi}^*$. Poněvadž $\overline{\overline{M_\nu}} < 2^{\aleph_0}$ a $\overline{\overline{N_\nu}} < \mathfrak{m}\,.\,\bar{\nu} < 2^{\aleph_0}$, je mohutnost množiny těch φ, pro něž $M^*_{\nu,\varphi} \cap N_\nu \neq \emptyset$, menší než $2^{\aleph_0}$, existuje tedy $\varphi' \in [0, 2\pi)$ tak, že $M^*_{\nu,\varphi'} \cap \cap N_\nu = \emptyset$. Nechť $M^\nu = M^*_{\nu,\varphi}$. Je $M^\nu \doteq M_\nu$, $M^\nu \cap M^\sigma = 0$ pro $\nu > \sigma$, podle definice ν_1 je $x_\nu \in \bigcup_{\sigma \leq \nu} M^\sigma$. Tedy M^ν splňuje (2.2)—(2.4). Tím je věta dokázána.

Důsledek věty 1. *Každá podmnožina $M \subset E_n$, $n \geq 2$, pro niž $0 < \overline{\overline{M}} < 2^{\aleph_0}$, je přímá rozkladová množina na E_n.*

3

Lemma 2. *Budiž $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$. Budiž v $(2k + 1)$-rozměrném eukleidovském prostoru E_{2k+1} $(k \geq 0)$ dáno $\mathfrak{m}$ lineárních podprostorů E^ι_k (ι probíhá množinu I o mohutnosti $\mathfrak{m}$) dimense k. Budiž $\iota_1 \in I$, budiž x libovolný, ale pevně zvolený prvek z E'_k takový, že x non $\in E^\iota_k$, $\iota \in I$, $\iota \neq \iota_k$. Potom existuje k-rozměrný podprostor E^ι_k, pro nějž platí:*

1. $E'_k \subset E_{2k+1}$, 2. $E'_k \cap E^{\iota_1}_k = \{x\}$, 3. $E'_k \cap E^\iota_k = \emptyset$ *pro* $\iota \in I$, $\iota \neq \iota_1$.

Důkaz. Pro $k = 0$ je tvrzení triviální, nechť tedy dále $k > 0$. Nechť V^ι_k značí zaměření prostoru E^ν_k. Nechť (E^ι_k, x) je nejmenší (ve smyslu množinové inkluse) z lineárních prostorů z E_{2k+1} obsahujících E^ι_k i x. Poněvadž $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$ a E_{2k+1} nemůže být sjednocením množiny o mohutnosti menší než $2^{\aleph_0}$ lineárních prostorů dimense nanejvýš rovné $k + 1$, existuje $x_1 \in E_{2k+1} - \bigcup_{\iota \in I} (E^\iota_k, x)$. Tedy speciálně $x_1 \neq x$. Body x_1 a x určují přímku p_1 (její zaměření nechť má basi $\mathbf{p}_1$), která má tyto vlastnosti:

α) $p_1 \cap E^{\iota_1}_k = \{x\}$.

β) $\mathbf{p}_1$ non $\in V^\iota_k$, $\iota \in I$.

γ) $p_1 \cap E^\iota_k = \emptyset$, $\iota \in I$, $\iota \neq \iota_1$.

Ad α) Kdyby $x \neq y \in p_1 \cap E^{\iota_1}_k$, potom $p_1 \subset E^{\iota_1}_k$, tedy $x_1 \in E^{\iota_1}_k$, což je spor s volbou x_1.

Ad β). Připusťme, že $\mathbf{p}_1 \in V^\iota_k$, $\iota \in I$. Potom $x + \alpha \cdot \mathbf{p}_1 \in (E^\iota_k, x)$, α reálné číslo. Tedy $x_1 \in (E^\iota_k, x)$, což je spor s volbou x_1.

Ad γ). Připusťme, že $z \in p_1 \cap E^\iota_k$, $\iota \neq \iota_k$. Potom vektor určený body z a x patří do zaměření prostoru (E^ι_k, x) a odtud jako v ad β) $x_1 \in (E^\iota_k, x)$, což je spor.

Nechť $\varkappa$ je přirozené číslo splňující nerovnost $0 < \varkappa < k$. Předpokládejme, že v E_{2k+1} existují přímky $p_1, \ldots, p_\varkappa$ (base v jejich zaměřeních nechť tvoří vektory $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa$) s těmito vlastnostmi:

$1^\varkappa$. $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa$ jsou lineárně nezávislé vektory.

$2^\varkappa$. Pro lineární prostor $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x)$ určený vektory $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa$ a bodem x platí:

a) $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa, x) \cap E^{\iota_1}_k = \{x\}$,

b) $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_\varkappa x)$, $\cap E^\iota_k = \emptyset$, $\iota \in I$, $\iota \neq \iota_1$.

$3^\varkappa$. Pro vektorový prostor $(\mathfrak{p}_k, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa)$ určený vektory $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa$ platí $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa) \cap V_k^\iota = \{\mathbf{o}\}$, $\iota \in I$, $\mathbf{o}$ je nulový vektor.

p_1 splňující shora uvedené podmínky $\alpha)$ až $\gamma)$ splňuje též zřejmě 1^1, 2^1, 3^1. $(E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$ budiž nejmenší lineární podprostor v E_{2k+1}, obsahující E_k^ι a x a jehož zaměření obsahuje vektory $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa$. Dimense prostoru $(E_k^\iota, \mathfrak{p}_k, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$ je $k + \varkappa + 1$ pro $\iota \neq \iota_1$, $k + \varkappa$ pro ι_1. Poněvadž těchto podprostorů je m a $k + \varkappa + 1 < 2k + 1$, existuje $x_{\varkappa+1} \in E_{2k+1} - \bigcup_{\iota \in I} (E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$. Body $x_{\varkappa+1}$ a x určují přímku $p_{\varkappa+1}$ (basi v jejím zaměření označme $\mathfrak{p}_{\varkappa+1}$), pro niž platí:

$1^{\varkappa+1}$. Vektory $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}$ jsou lineárně nezávislé.

$2^{\varkappa+1}$. Pro lineární prostor $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}, x)$ určený bodem x a vektory $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}$ platí:

a) $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}, x) \cap E_k^{\iota_1} = \{x\}$,

b) $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}. x) \cap E_k^\iota = \emptyset$, $\iota \in I$, $\iota \neq \iota$.

$3^{\varkappa+1}$. Pro vektorový prostor $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+k})$ platí

$$(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}) \cap V_k^\iota = \{\mathbf{o}\}.$$

Ad $1^{\varkappa+1}$. Připusťme, že $l_1\mathfrak{p}_1 + \ldots + l_\varkappa\mathfrak{p}_\varkappa + l_{\varkappa+1}\mathfrak{p}_{\varkappa+1} = \mathbf{o}$, $\sum_{i=1}^{\varkappa+1} l_k^2 \neq 0$. Poněvadž podle $1^\varkappa$ $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}^\varkappa$ jsou nezávislé vektory, je $l_{\varkappa+1} \neq 0$. Potom $\mathfrak{p}_{\varkappa+1}$ je prvkem zaměření lineárního prostoru $(E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$ a tedy $x_{\varkappa+1} \in (E_\varkappa^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$, což je spor.

Ad $2^{\varkappa+1}$. a) Připusťme, že $x \neq y \in (\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}, x) \cap E_k^{\iota_1}$. Nechť vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_1$ tvoří basi ve $V_k^{\iota_1}$. Potom platí $l_1\mathfrak{p}_1 + \ldots + l_{\varkappa+1}\mathfrak{p}_{\varkappa+1} = h_1\mathbf{v}_1 + \ldots + h_k\mathbf{v}_k$ pro vhodná reálná čísla $l_1, \ldots, l_{\varkappa+1}, h_1, \ldots, h_k$, kde $\sum_{i=1}^{\varkappa+1} l_i^2 \neq 0$. Protože platí $3^\varkappa$, je $l_{\varkappa+1} \neq 0$. Tedy $\mathfrak{p}_{\varkappa+1}$ patří do zaměření prostoru $(E_k^{\iota_1}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$, odkud plyne $x_{\varkappa+1} \in (E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$, což je spor.

b) Připusťme, že $y \in (\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}, x) \cap E_k^\iota$ pro jisté $\iota \neq \iota_1$. Potom $y = x + l_1\mathfrak{p}_1 + \ldots + l_{1+1}\mathfrak{p}_{\varkappa+k}$. Z $2^\varkappa$ b) plyne, že $l_{\varkappa+1} \neq 0$. Tedy $\mathfrak{p}_{\lambda+1}$ je prvkem zaměření prostoru $(E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$, tedy $x_{\varkappa+1} \in (E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$, což je spor.

Ad $3^{\varkappa+1}$. Připusťme, že $\mathbf{o} \neq \mathbf{v} \in (\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\varkappa+1}) \cap V_k^\iota$ pro jisté ι. Z $3^\varkappa$ plyne, že potom je $\mathfrak{p}_{\varkappa+1}$ prvkem zaměření prostoru $(E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$. Odtud plyne, že $x_{\varkappa+1} \in (E_k^\iota, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa, x)$, což je spor.

Položíme-li $\varkappa = k - 1$, zjistíme podle 1^k, 2^k, 3^k, že prostor $(x, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k)$ splňuje vlastnosti 1, 2, 3 uvedené ve znění lemmatu.

Věta 2. *Budiž I množina indexů, $\bar{\bar{I}} = 2^{\aleph_0}$. Nechť ke každému $\iota \in I$ je přiřazena množina M_ι, $\emptyset \neq M \subset E_k \subset E_{2k+1}$ $(k \geqq 0)$. Potom existuje systém $\mathfrak{S}$ podmnožin M^ι z E_{2k+1} takový, že*

1. $M^\iota \simeq M_\iota$, 2. *$\mathfrak{S}$ je rozklad na E_{2k+1}.*

Důkaz. Uspořádejme body z E_{2k+1} v posloupnost typu Ω

$$x_0, x_1, \ldots, x_\tau, \ldots, \tau < \Omega .$$

Můžeme předpokládati, že množina indexů I je množina ordinálních čísel menších než Ω. Ukážeme, že lze sestrojit posloupnost

$$M^0, M^1, \ldots, M^\tau, \ldots, \tau < \Omega , \tag{3.1}$$

podmnožin z E_{2k+1} tak, že platí:

1. $M^\tau \simeq M_\tau$, $M^\tau \cap M^\sigma = \emptyset$, $\sigma < \lambda$.

2. Ke každému $\tau < \Omega$ je přiřazen k-rozměrný lineární podprostor $E_k^\tau \subset E_{2k+1}$ tak, že platí:

$$M^\tau \subset E_k^\tau , \quad E_k^\tau \cap E_k^\sigma \subset \bigcup_{\nu' \leqq \tau} M^{\nu'} , \quad \tau > \sigma . \tag{3.2}$$

3. $x_\tau \in \bigcup_{\sigma \leqq \tau} M^\sigma$.

Posloupnost (3.1) s vlastnostmi (3.2) sestrojíme transfinitní indukcí. Zvolme $x \in M_0$ a nechť T je translace prostoru E_{2k+1}, pro niž $T(x) = x_0$. Položme $T(M_0)$ rovno M^0, $E_k^0 = T(E_k)$. Vlastnosti (3.2) jsou pro M^0 a E_k^0 zřejmě splněny. Nechť $0 < \nu < \Omega$ a nechť jsou definovány M^τ, E_k^τ pro $\tau < \nu$. Protože $\bigcup_{\tau<\nu} M^\tau \neq E_{2k+1}$, existuje bod x_{ν_1}, kde ν_1 je první index $\varkappa$, pro nějž platí $x_\varkappa$ non $\in \bigcup_{\tau<\nu} M^\tau$. Podle vlastnosti (3) je $\nu_1 \geqq \nu$. Mohou nastat dva případy

a) x_{ν_1} non $\in \bigcup_{\tau<\nu} E_k^\tau$,

b) $x_{\nu_1} \in \bigcup_{\tau<\nu} E_k^\tau$.

Definujme nyní E^ν a $\mathfrak{M}_\nu$ takto:

V případě a) nechť E^ν je libovolně, ale pevně zvolený k-rozměrný lineární podprostor v E_{2k+1} takový, že $x_{\nu_1} \in E^\nu$. Systém všech E_k^τ, $\tau < \nu$, označme $\mathfrak{M}_\nu$.

V případě b) existuje právě jedno τ_1 tak, že $x_{\nu_1} \in E_k^{\tau_1}$, jak plyne z 2. Položme $E^\nu = E_k^{\tau_1}$ a systém $\{E_k^\tau\}_{\tau<\nu} - \{E_k^{\tau_1}\}$ označme $\mathfrak{M}_\nu$.

Podle lemmatu 2 existuje k-rozměrný lineární podprostor E' v E_{2k+1} tak, že

1'. $x_{\nu_1} \in E'$,

2'. $E' \cap E = \emptyset$, $E \in \mathfrak{M}_\nu$,

3'. $E^\nu \cap E' = \{x_{\nu_1}\}$.

Zvolme $x \in M_\nu$. Existuje přímá shodnost T' v E_{2k+1} tak, že $T'(x) = x_{\nu_1}$, $T'(E_k) = E'$. Nechť $M^\nu = T'(M_\nu)$, $E_k^\nu = E'$. Ukážeme, že pro M^ν, E_k^ν platí (3.2).

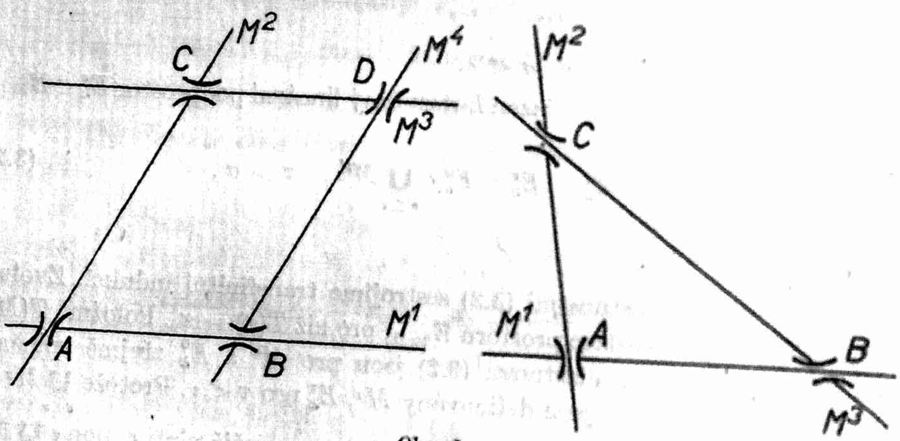
Ad 1. $M^\nu \simeq M_\nu$ plyne ihned z definice M^ν. $M^\nu \cap M^\sigma = \emptyset$ pro $\nu > \sigma$ plyne z inklusí $M^\sigma \subset E_k^\sigma$ pro $\sigma \leqq \nu$, z definice E_k^ν a z vlastností 1', 2', 3' pro E_k^ν.

Ad 2. Plyne z 2' a 3'.

Ad 3. Plyne ihned z definice bodu x_{ν_1}.

Tím je dokázána existence posloupnosti (3.1). Vlastnosti 1 a 3 ukazují, že množiny této posloupnosti tvoří rozklad na E_{2k+1} s žádanými vlastnostmi.

Důsledek věty 2. *Budiž $\emptyset \neq M \subset E_2 \subset E_{2k+1}$. Potom M je přímá rozkladová množina prostoru E_{2k+1}.*



Obr. 1.

Ukažme ještě, že existuje neprázdná podmnožina přímky, která není rozkladovou množinou na rovině. Příkladem takové množiny je množina, kterou dostaneme, když z přímky vypustíme bod. Označme tuto množinu jako M. Připusťme, že existuje rozklad na rovině E_2 na množiny shodné s M. Potom nastane jeden z případů naznačených na obrázku 1. Zvolíme-li bod X uvnitř rovnoběžníka $ABCD$, resp. trojúhelníka ABC, vidíme, že pro každou $M' \cong M$, pro niž $X \in M'$, je aspoň jeden z průniků $M' \cap M^i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) neprázdný. To je spor. M tedy není rozkladová množina roviny.

4

Věta 1 pro $n = 1$ neplatí. To se ihned zjistí na př. v případě, že se E skládá z množin přímo shodných s množinou $\{0, 1, 3\}$ (pokládáme E_1 za číselnou osu).[2])

Pro přímku platí na př. tato věta:

Věta 3. *Budiž M množina bodů na číselné ose, $\overline{\overline{M}} \geqq \aleph_0$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom existuje $N \supset M$ tak, že $\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{M}}$, N je přímou rozkladovou množinou na přímce a $d(N) \leqq d(M) + \varepsilon$ ($d(M)$ značí průměr množiny M).*

---

[2]) Rozkladovými množinami na přímce se zabývá připravovaný článek KOUTSKÝ-SEKANINA: O rozkladových množinách na přímce.

Důkaz. Položme $M_1 = M$ v případě, že M je neohraničená, $M_1 = M \cup \{d(M) + \varepsilon\}$, je-li M ohraničená. Nechť N' značí aditivní grupu vytvořenou množinou M_1. Je $\overline{N'} = \overline{M}$. Třídy mod N' v aditivní grupě všech reálných čísel jsou množiny přímo shodné s N. Je-li M neohraničené, položíme $N = N'$. Budiž M ohraničená množina. Položme $A = N' \cap [\inf M - \frac{\varepsilon}{2}, \sup M + \frac{\varepsilon}{2})$. Nechť T je translace, pro niž $T(0) = d(M) + \varepsilon$. Poněvadž $d(M) + \varepsilon \in N'$, je $T^k(A) \subset N'$ pro k celé (T^k značí k-tou mocninu translace T v grupovém slova smyslu, při čemž násobení je definováno jako skládání zobrazení). Je zřejmě $T^{k_1}(A) \cap T^{k_2}(A) = \emptyset$ pro $k_1 \neq k_2$. Konečně pro $x \in N'$ existuje k tak, že $x \in T^k(A)$. Tvoří tedy $\{T^k(A)\}, k$ celé, rozklad na N'. Je tedy A přímou rozkladovou množinou na N a, podle lemmatu 1, je též přímou rozkladovou množinou na přímce. Můžeme položit $N = A$. Jest zřejmé, že $d(A) \leqq d(M) + \varepsilon$. Tím je věta dokázána.

Ukažme ještě na Cantorově množině, že tvrzení věty 3 nelze v podstatě zesílit. Cantorova množina C je množina reálných čísel c s triadickým rozvojem $c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}$, kde $c_i = 0$ nebo 2.

Je dobře známo, že $\mu(C) = 0$.[3]) H. Steinhaus dokázal následující větu:[4])

(S) *Ke každému číslu $0 \leqq \alpha \leqq 1$ existují v C čísla x, y tak, že*

$$x - y = \alpha . \tag{4.1}$$

Z (S) plyne

Lemma 3. *Nechť $\alpha \in [-1, 1]$. Nechť T je translace reálné osy o číslo α. Nechť $M \supset C$. Potom $M \cap T(M) \neq \emptyset$.*

Důkaz. Z (4.1) plyne, že existují $x, y \in C$ tak, že $x - y = \alpha$. Poněvadž $0 \in C$, je $0 \in M$ a $T(0) = \alpha \in T(M)$ a též $\alpha + y \in T(M)$. Poněvadž $\alpha + y = x$, je $x \in T(M) \cap M$.

Na základě lemmatu 3 dokážeme toto tvrzení:

Věta 4. *Nechť $M \supset C$ je přímá rozkladová množina na číselné ose. Potom*

$$1.\ d(M) > 1, \qquad 2.\ \mu^*(M) \geqq 1.$$

Důkaz. Nechť $M \supset C$, M je přímá rozkladová množina na číselné ose. Existuje rozklad $\boldsymbol{R} = \{T_\iota(M)\}$, kde T_ι je translace, ι probíhá jistou množinu I. Nechť $t_\iota = T_\iota(0)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $M \in \boldsymbol{R}$.

Ad 1. Připusťme, že $d(M) = 1$. Potom $M \subset [0, 1]$. Protože interval $[0, 1]$ není rozkladovou množinou na přímce, existuje $z \in [0, 1]$ tak, že z non $\in M$. Existuje

[3]) $\mu(M)$ značí Lebesgueovu míru množiny M, $\mu^*(M)$ vnější Lebesgueovu míru množiny M.

[4]) H. Steinhaus: Nowa własność mnogości G. Cantora, Wektor 7 (1917), citováno dle Fortschritte d. Math. XLVI, 1. díl, s. 300 (1916–18).