Resumé

ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN LINEARER HOMOGENER DIFFERENTIALGLEICHUNG DER VIERTEN ORDNUNG

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingelangt am 11. I. 1957)

In der vorgelegten Arbeit werden hinreichende Bedingungen für die Begrenztheit der Lösungen der Differentialgleichung

$$y'''' + 10Ay'' + (10A' + \omega)\, y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\, y = 0\,, \tag{1}$$

A'', ω', ω_1, sind stetige Funktionen von $x \in J \equiv \langle x_0, \infty)$ eingeführt und einige asymptotische Formeln für das Fundamentalsystem abgeleitet. Wegen der Möglichkeit von kürzerer Ausdrückung wurden folgende Definitionen eingeführt:

a) Man sagt, dass die Lösung $y(x)$ einer Differentialgleichung folgende Eigenschaft besitzt

$$\begin{aligned}
&(O_i) &&\Rightarrow |y^{(i)}(x)| \leqq M = \text{konst.} > 0\,,\ i = 0, 1, 2, 3\,,\\
&(O_{01}) &&\Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| \leqq M\,,\\
&\ \vdots &&\ \ \vdots\\
&(O_{0123}) &&\Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| + |y''(x)| + |y'''(x)| \leqq M\,,\\
&(o_0) &&\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = 0\,,\\
&(o_{01}) &&\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = 0\,,\quad \lim_{x\to\infty} y'(x) = 0\,.
\end{aligned}$$

b) Man sagt, dass die Differentialgleichung eine der Eigenschaften des Absatzes a) besitzt, falls jede ihre Lösung dieselbe Eigenschaft besitzt.

Die Differentialgleichung (1) besitzt die Eigenschaft (O_{0123}), wenn die Differentialgleichung

$$y'' + Ay = 0 \tag{2}$$

die Eigenschaft (O_{01}) besitzt, $|A| + |A'| \leqq M = \text{konst.} > 0$, $\int^{\infty} |\omega|\, \mathrm{d}x < \infty$, $\int^{\infty} |\omega_1|\, \mathrm{d}x < \infty$.

Die Differentialgleichung (1) besitzt die Eigenschaft (O_0), wenn die Differentialgleichung (2) die Eigenschaft (O_{01}) besitzt,

$$\int^{\infty} |\omega_1 - \omega'|\, \mathrm{d}x < \infty\,,\quad \int^{\infty} |\omega|\, \mathrm{d}x < \infty\,.$$

Es sei $A \geqq \text{konst.} > 0$ und die Funktion $A^{-\frac{1}{4}}$ sei konvex,

$$\int^{\infty} \frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt{A^3}}\, \mathrm{d}x < \infty\,,\quad \int^{\infty} \frac{|\omega|}{A}\, \mathrm{d}x < \infty\,.$$

Dann besitzt die Differentialgleichung (1) die Eigenschaft (O_{01}). Wenn $\lim\limits_{x\to\infty} A(x) = \infty$, so besitzt die Differentialgleichung (1) die Eigenschaft (o_{01}).

Im Falle dass, $\lim\limits_{x\to\infty} |A + a| = 0$, $a =$ konst., $\int^{\infty} |A'| \, dx < \infty$, $\int^{\infty} |\omega| \, dx < \infty$, $\int^{\infty} |\omega_1| \, dx < \infty$, dann besitzt die Differentialgleichung (1) das Fundamentalsystem

$$y_{1,2} = e^{\pm 3 \int_{x_0}^{x} \sqrt{-A(t)} \, dt} [1 + o(1)] , \quad y_{3,4} = e^{\pm \int_{x_0}^{x} \sqrt{-A(t)} \, dt} [1 + o(1)] .$$

G. Sansone beweist in seiner Arbeit [2] zwei Sätze über die asymptotischen Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung

$$[\vartheta_2 y'']'' - [\vartheta_1 y']' - \omega y' + \vartheta_0 y = 0 .$$

In dieser Arbeit werden die Voraussetzungen, die die Koefizienten der Differentialgleichung (1) erfüllen müssen, eingeführt, sollten beide Sansons' Sätze auch für die Differentialgleichung (1) gelten.