Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ASYMPTOTICKÉ VLASTNOSTI INTEGRÁLŮ HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE ČTVRTÉHO ŘÁDU

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

DT: 517.934

(Došlo dne 11. ledna 1957)

V práci jsou uvedeny některé postačující podmínky pro ohraničenost integrálů diferenciální rovnice (1,2). Dále je ukázáno, jak lze v některých případech odvodit asymptotické vzorce pro fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (1,2) pomocí známých asymptotických vzorců pro fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (1,5).

1. Diferenciální rovnici

$$w'''' + 4a_3w''' + 6a_2w'' + 4a_1w' + a_0w = 0\,, \tag{1,1}$$

kde a_3''', a_2'', a_1', a_0 jsou spojité funkce v intervalu $J \equiv \langle x_0, \infty)$, můžeme převést transformací $w = e^{-\int a_3 \mathrm{d}x} y$ na první kanonický tvar

$$y'''' + 10Ay'' + (10A' + \omega)\, y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\, y = 0\,, \tag{1,2}$$

kde ω (ω_1) je invariant (semiinvariant) rovnice (1,1), $A = \frac{3}{5}(a_2 - a_3^2 - a_3')$, viz [6]. Funkce ω', ω_1, A'' jsou spojité v intervalu J.

V případě $\omega \equiv 0$ pro všechna $x \in J$ je

$$y'''' + (10Ay')' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\, y = 0 \tag{1,3}$$

samoadjungovanou rovnicí. Rovnice

$$y'''' + (10Ay')' + 3(3A^2 + A'')\, y = 0 \tag{1,4}$$

je iterovaná a její fundamentální systém řešení tvoří funkce u^3, u^2v, uv^2, v^3, jestliže u, v jsou lineárně nezávislé integrály diferenciální rovnice

$$u'' + Au = 0\,. \quad \text{Viz na př. [9]}\,. \tag{1,5}$$

Má-li rovnice (1,5) integrál $u_1(x)$, který nemá v J ani jeden nulový bod, pak můžeme (1,2) transformovat substitucí

$$y = \frac{v[\xi(x)]}{[\xi'(x)]^{\frac{3}{2}}}\,, \quad \xi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_1^2(t)}\,\mathrm{d}t \tag{1,6}$$

na druhý kanonický tvar

$$\frac{d^4v}{d\xi^4} + \frac{1}{\xi'^3}\omega\frac{dv}{d\xi} + \frac{1}{\xi'^4}\left(\omega_1 - \frac{3}{2}\frac{\xi''}{\xi'}\omega\right)v = 0\,, \quad \text{viz [6]}\,. \tag{1,7}$$

Každý integrál $y(x)$ rovnice (1,2) vyhovuje integrální rovnici

$$y(x) = z(x) - \frac{1}{6}y(\bar{x}_0)\,\omega(\bar{x}_0)\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(\bar{x}_0) & v(\bar{x}_0)\end{vmatrix}^3 + \tag{1,8}$$

$$+ \frac{1}{6}\int_{\bar{x}_0}^{x} y(t)\left\{[\omega_1(t) - \omega'(t)]\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t)\end{vmatrix}^3 - 3\omega(t)\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t)\end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(t) & v'(t)\end{vmatrix}\right\} dt\,,$$

kde $z(x)$ je integrál rovnice (1,4) splňující v bodě $\bar{x}_0 \geqq x_0$ stejné počáteční podmínky jako $y(x)$ a $u(x)$, $v(x)$ jsou integrály rovnice (1,5), jejichž wronskien je roven 1, viz [8].

2. Dále uvedeme některé postačitelné podmínky pro ohraničenost integrálů diferenciální rovnice (1,2). Kvůli stručnějšímu vyjadřování zavedeme tyto definice:

a) Řekneme, že integrál $y(x)$ diferenciální rovnice má vlastnost

(O_i) $\Rightarrow |y^{(i)}(x)| \leqq M$ pro všechna $x \in J$; $\quad i = 0, 1, 2, 3$;

(O_{01}) $\Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| \leqq M$ pro všechna $x \in J$;

$\vdots$

$(O_{0123}) \Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| + |y''(x)| + |y'''(x)| \leqq M$ pro všechna $x \in J$;

(o_0) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$;

(o_{01}) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0, \ \lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$; $M = \text{konst} > 0$.*)

b) Řekneme, že diferenciální rovnice má některou z vlastností odst. a), když každé její řešení má tutéž vlastnost.

2,1. Nechť

$$\int^{\infty}|\omega|\,dx < \infty\,, \quad \int^{\infty}|\omega_1|\,dx < \infty\,. \tag{2,1}$$

Jestliže rovnice (1,4) má vlastnost (O_{0123}), pak rovnice (1,2) má vlastnost (O_{0123}), viz [1], T. 6, str. 55.

Poznámka 2,1. Rovnice (1,4) má vlastnost (O_{0123}), jestliže rovnice (1,5) má vlastnost (O_{01}), při čemž $|A| + |A'| \leqq M$.

Poznámka 2,2. Rovnice (1,5) má vlastnost (O_{01}), jestliže

$$\lim_{x\to\infty}|A + a| = 0,\ \int^{\infty}|A + a|\,dx < \infty,\ a = \text{konst} < 0,$$

viz [1]. II, T. 7, str. 56, nebo

$$\lim_{x\to\infty}|A + a| = 0,\ \int^{\infty}|A'|\,dx < \infty,\ a = \text{konst} < 0,$$

viz [1], VI, T. 1, str. 133.

*) V dalším textu budeme vždy písmenem M označovat vhodnou kladnou konstantu.

2,2. Nechť

$$\int^{\infty} |\omega_1 - \omega'| \, dx < \infty \, , \quad \int^{\infty} |\omega| \, dx < \infty \, . \tag{2,2}$$

Jestliže rovnice (1,5) má vlastnost (O_{01}), pak rovnice (1,2) má vlastnost (O_0).

Podle (1,8) je vzhledem k předpokladu $|u(x)| \leqq M$, $|v(x)| \leqq M$, $|u'(x)| \leqq M$, $|v'(x)| \leqq M$

$$|y(x)| \leqq M^3(|c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4| + c_5) + \frac{4}{3} M^6 \int_{\bar{x}_0}^{x} |y|[|\omega_1 - \omega'| + 3|\omega|] \, dt \, ,$$

kde jsme použili vztahů

$$z(x) = c_1 u^3(x) + c_2 u^2(x) \, v(x) + c_3 u(x) \, v^2(x) + c_4 v^3(x) \, ,$$

$$c_5 = \frac{1}{6} \, |y(\bar{x}_0) \, \omega(\bar{x}_0)| \, . \, [|u(\bar{x}_0)| + |v(\bar{x}_0)|]^3 \, .$$

Podle Bellmanovy nerovnosti, viz [1], str. 46, je

$$|y(x)| \leqq c \exp\left\{\frac{4}{3} M^6 \int_{\bar{x}_0}^{x} [|\omega_1 - \omega'| + 3|\omega|] \, dt\right\}, \quad c = M^3 \sum_{i=1}^{5} |c_i| \, ,$$

odkud s ohledem na (2,2) plyne tvrzení.

P o z n á m k a 2,3. Nechť platí (2,2). Jestliže rovnice (1,5) má vlastnost (O_{01}), při čemž $|A| + |A'| \leqq M$, pak rovnice (1,2) má vlastnost (O_{0123}).

2,3. Nechť platí předpoklady:

a) $A \geqq \text{konst} > 0$, $A^{-\frac{1}{4}}$ je konvexní pro $x \in \langle x_0, \infty)$,

b) $\displaystyle\int^{\infty} \frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt{A^3}} \, dx < \infty \, , \quad \int^{\infty} \frac{|\omega|}{A} \, dx < \infty \, .$

Pak rovnice (1,2) má vlastnost (O_{01}).

Podle předpokladu a) je

$$|u(x)| \leqq \frac{M}{\sqrt[4]{A}} \geqq |v(x)| \, , \quad |u'(x)| \leqq M\sqrt[4]{A} \geqq |v'(x)| \, , \tag{2,3}$$

viz *Zlámal* [3], str. 85. Podle (1,8) je

$$|y(x)| \leqq \frac{c}{\sqrt[4]{A^3(x)}} + \frac{4}{3} \frac{M^6}{\sqrt[4]{A^3(x)}} \int_{\bar{x}}^{x} |y| \left[\frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt[4]{A^3(t)}} + \frac{3|\omega|}{\sqrt[4]{A(t)}}\right] dt \, ,$$

$$|y(x) \sqrt[4]{A^3(x)}| \leqq c + \frac{4}{3} M^6 \int_{\bar{x}_0}^{x} |y\sqrt[4]{A^3(t)}| \left[\frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt{A^3(t)}} + \frac{3|\omega|}{A(t)}\right] dt \, , \tag{2,4}$$

kde c je vhodná kladná konstanta. Jestliže aplikujeme na (2,4) Bellmanovu nerovnost, snadno podle předpokladu b) dojdeme k závěru, že integrál $y(x)$ je ohraničený.

Derivací (1,8) s ohledem na (2,3) obdržíme odhad

$$|y'(x)\sqrt[4]{A(x)}| \leqq \bar{c} + 4M^6 \int_{x_0}^{x} |y\sqrt[4]{A^3(t)}| \left[\frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt[4]{A^3(t)}} + \frac{3|\omega|}{A(t)}\right] dt\,,$$

kde $\bar{c} > 0$ je vhodná konstanta. Integrál na pravé straně podle předpokladu konverguje, neboť funkce $y\sqrt[4]{A^3(x)}$ je podle (2,4) ohraničena.

Poznámka 2,4. Jestliže platí předpoklady odst. 2,7 a $\lim_{x\to\infty} A(x) = \infty$, pak rovnice (1,2) má vlastnost (o_{01}).

Přesněji

$$y(x) = O\left[\frac{1}{\sqrt[4]{A^3(x)}}\right], \quad y'(x) = O\left[\frac{1}{\sqrt[4]{A(x)}}\right].$$

3

3,1. Nechť $|A + a| \to 0$ pro $x \to \infty$, $\int^{\infty} |A'(x)|\,dx < \infty$, $\int^{\infty} |\omega|\,dx < \infty$, $\int^{\infty} |\omega_1 + 3A''|\,dx < \infty$. Pak existuje fundamentální systém řešení rovnice (1,2) tvaru

$$y_k^{(i)} = \exp\left[\int_{x_0}^{x} \lambda_k(t)\,dt\right][c_{ki} + o(1)]\,, \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, 3, 4,\\ i = 0, 1, 2, 3, \end{array}$$

kde $\lambda_{1,2}(t) = \pm\sqrt{-A(t)}$, $\lambda_{3,4}(t) = \pm 3\sqrt{-A(t)}$, c_{ki} jsou konstanty nezávislé na x, x_0. Viz [1], II, T. 8, str. 64.

3,2. Nechť $|A + a| \to 0$ pro $x \to \infty$, $a = $ konst., $\int^{\infty} |A'(x)|\,dx < \infty$. Potom

$$u_1^{(i)} = e^{-\int_{x_0}^{x} \sqrt{-A(t)}\,dt}[c_{1i} + o(1)]\,, \quad u_2^{(i)} = e^{\int_{x_0}^{x} \sqrt{-A(t)}\,dt}[c_{2i} + o(1)]\,, \quad i = 0, 1, \tag{3,1}$$

kde c_{ki} jsou konstanty nezávislé na x, x_0; u_1, u_2 jsou nezávislé integrály rovnice (1,5). Viz [1], II, T. 8, str. 64.

Důsledek.

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-3\int_{x_0}^{x} \sqrt{-A(t)}\,dt}[1 + o(1)]\,, & y_2 &= e^{-\int_{x_0}^{x} \sqrt{-A(t)}\,dt}[1 + o(1)]\,,\\ y_3 &= e^{\int_{x_0}^{x} \sqrt{-A(t)}\,dt}[1 + o(1)]\,, & y_4 &= e^{3\int_{x_0}^{x} \sqrt{-A(t)}\,dt}[1 + o(1)]\,, \end{aligned} \tag{3,2}$$

kde $y_i = u_1^{4-i} \cdot u_2^{i-1}$, $i = 1, 2, 3, 4$, jsou nezávislé integrály rovnice (1,4).

3,3. Předpokládejme, že rovnice (1,5) má integrál $u_1(x)$, který nemá v intervalu J žádný nulový bod a $\int^{\infty} \frac{1}{u_1^2(x)}\, dx = +\infty$. Potom můžeme rovnici (1,2) transformovat substitucí (1,6) na tvar (1,7), při čemž $\lim_{x\to\infty} \xi(x) = \infty$.

Nechť

$$\int^{\infty} \frac{\xi^2}{\xi'^2} |\omega|\, dx < \infty\,, \quad \int^{\infty} \frac{\xi^3}{\xi'^3} \left|\omega_1 - \frac{3}{2}\frac{\xi''}{\xi'}\omega\right| dx < \infty\,. \tag{3,3}$$

Integrály rovnice (1,7) jsou podle Ghizettiho věty (viz [7]) asymptoticky rovny integrálům rovnice $v^{(4)} = 0$. Přesněji, rovnice (1,7) má fundamentální systém tvaru

$$v_i = \xi^{i-1}[1 + o(1)]\,, \quad i = 1, 2, 3, 4\,.$$

Důsledek. Integrály rovnice (1,2) jsou podle Ghizettiho věty asymptoticky rovny integrálům rovnice (1,4). Přesněji, rovnice (1,2) má fundamentální systém tvaru $y_i = u_1^{4-i} \cdot u_2^{i-1}[1 + o(1)]$, kde u_1, u_2 jsou vhodné lineárně) nezávislé integrály rovnice (1,5).

3,4. Nechť rovnice (1,5) má integrál $u_2(x)$ (nezávislý na $u_1(x)$) takový, že $\int^{\infty} \frac{1}{u_2^2(x)} < \infty$.

Jestliže integrály

$$\int^{\infty} \varphi^2(x)\, |\omega|\, dx\,, \quad \int^{\infty} \psi(x)\, \varphi^2(x)\, |\omega|\, dx\,, \quad \int^{\infty} \varphi^3(x)\, |\omega_1|\, dx \tag{3,4}$$

konvergují, kde

$$\begin{aligned} u_1 \,.\, u_2 &= O[\varphi(x)]\,,\\ u_1' \,.\, u_2 &= O[\psi(x)]\,, \end{aligned} \tag{3,5}$$

pak platí tvrzení odstavce 3,3. Ukažme, že je splněna podmínka (3,3).

$$\int^{\infty} \frac{\xi^2}{\xi'^2} |\omega|\, dx = \int^{\infty} u_1^4 \left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_1^2}\, dt\right)^2 |\omega|\, dx = \int^{\infty} \left[u_1\left(c_1 u_2 + c_2 u_2 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_2^2}\, dt\right)\right]^2 |\omega|\, dx \leqq$$

$$\leqq N_1 \int^{\infty} (u_1 u_2)^2\, |\omega|\, dx, \quad \text{kde} \quad \left(c_1 + c_2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{u_2^2}\, dt\right)^2 \leqq N_1, \ c_1, c_2 \text{ jsou konst.}$$

Podobně zjistíme, že

$$\int^{\infty} \frac{\xi^3}{\xi'^3} \left|\omega_1 - \frac{3}{2}\frac{\xi''}{\xi'}\omega\right| dx \leqq N_2 \left[\int^{\infty} |(u_1 u_2)^3\, \omega_1|\, dx + \int^{\infty} |(u_1^3)'\, u_2^3 \omega|\, dx\right],$$

kde N_2 je vhodná konstanta > 0.

Všechny tři integrály, které se vyskytují na pravých stranách obou nerovností, podle předpokladů (3,4), (3,5) konvergují.

3,5. Nechť platí předpoklady odstavce 3,2 pro $a > 0$. Jestliže integrály $\int^{\infty} |\omega| \,\mathrm{d}x$, $\int^{\infty} |\omega_1| \,\mathrm{d}x$ konvergují, má rovnice (1,2) fundamentální systém (3,2). Podle (3,1) je $\varphi(x) = \psi(x) = 1$.

4. G. SANSONE ve své práci [2] dokazuje následující dvě věty o diferenciální rovnici

$$[\vartheta_2 y'']'' - [\vartheta_1 y']' - \omega y' + \vartheta_0 y = 0\,. \tag{4,1}$$

Věta 1. *Nechť v rovnici (4,1) jsou ϑ_2'', ϑ_1', ϑ_0, ω' spojité funkce pro všechna $x \geqq a$ a nechť platí tyto předpoklady:*

$$\begin{gathered} L \geqq \vartheta_2 > 0\,, \quad \vartheta_2' \geqq 0\,, \quad M \geqq \vartheta_1 \geqq m > 0\,, \quad \vartheta_1 \geqq \vartheta_2'\,, \quad \vartheta_1' \geqq \omega\,, \\ \vartheta_0 + \tfrac{1}{2}\omega' \geqq \tfrac{1}{2}[\vartheta_1' - \omega]\,, \quad \vartheta_0 + \tfrac{1}{2}\omega' \geqq \tau > 0\,, \ (L, M, m, \tau \text{ jsou konst.}). \end{gathered} \tag{4,2}$$

Jestliže $y(x)$ je řešení rovnice (4,1), pak mohou nastat tyto případy:

i) *$y(x)$ neosciluje [má v intervalu $\langle a, \infty)$ konečný počet kořenů]; pak je buď* $\lim\limits_{x\to\infty} |y(x)| = 0$ *nebo* $\lim\limits_{x\to\infty} |y(x)| = \infty$;

ii) *$y(x)$ osciluje a není* $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$; *pak*

$$\int_a^{\infty} [y^2(x) + y'^2(x)] \,\mathrm{d}x = +\infty\,,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} y'^2(x_n) = \infty$ *[$\{x_n\}$ je posloupnost nulových bodů integrálu $y(x)$], $y'(x_n) \cdot$ $\cdot\, y''(x_n) > 0$ pro dosti velká n.*

Věta 2. *Nechť platí předpoklady věty 1. Nechť je dále pro všechna $x \geqq a$*

$$|\vartheta_1' - \omega| \leqq H_1\,, \quad |\vartheta_0 + \omega'| \leqq H_2\,, \quad (H_1, H_2 \text{ jsou kladné konstanty})\,. \tag{4,3}$$

iii) *Jestliže integrál $y(x)$ rovnice (4,1) je ohraničený, pak* $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Poznámka 4,1. K důkazu obou vět používá Sansone identity

$$U(x) = U(a) - \int_a^x [\vartheta_2 y''^2 + \vartheta_1 y'^2 + \tfrac{1}{2}(\omega' + \vartheta_0)\, y^2] \,\mathrm{d}x\,, \tag{4,4}$$

kde

$$U(x) = y[\vartheta_2 y'']'' - \vartheta_2 y' y'' - \vartheta_1 y y' - \tfrac{1}{2}\omega y^2\,,$$

viz [2], str. 15.

Tvrzení obou vět platí beze změny pro diferenciální rovnici (1,2), jenom místo (4,2) event. (4,3) musíme předpokládat

$$\begin{gathered} -M \leqq A \leqq -m < 0\,, \quad \omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega' \geqq n > 0\,, \\ 0 \leqq A' + \tfrac{1}{2}\omega \leqq \omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega'\,, \end{gathered} \tag{4,2'}$$

event.

$$|\omega - 10A'| \leqq H_1\,, \quad |3(3A^2 + A'') + \omega_1 - \omega'| \leqq H_2 \tag{4,3'}$$

(M, m, n, H_1, H_2 jsou kladné konstanty).