Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ALGEBRAICKÉ KORESPONDENCE

JAN BÍLEK, Praha

(Došlo dne 26. října 1956) DT:513.6.001

Základní vlastnosti algebraické korespondence mezi dvěma algebraickými varietami definovanými nad tělesem charakteristiky 0 jsou běžně známy. (Viz WAERDEN, Einführung in die alg. Geometrie nebo HODGE - PEDOE, Methods of algebraic Geometry, díl II.) V této práci jest uvažována algebraická korespondence mezi algebraickými varietami nad tělesem libovolné charakteristiky. K studiu této korespondence se užívá methody, jež je rozšířením methody, která ve speciálním případě biracionální korespondence je popsána v knize A. WEIL, Foundations of algebraic geometry, 1946. Specialisací tělesa koeficientů do tělesa charakteristiky 0 dostaneme z našich výsledků výsledky uvedené v citovaných knihách.

V tomto pojednání budeme považovati za známé větu 26 a větu 27 z § 7 na str. 105 z knihy A. WEIL: Foundations of algebraic geometry, 1946 (v dalším značeno W). Tyto dvě věty zde uvedeme pod čísly 1, 2.

Věta 1. *Nechť U je podvarieta součinu variet $V \times W$ a nechť U' je její projekce na V. Nechť Z je podvarieta variety U s projekcí Z' na V. Potom Z je obsažena v $U \cap (Z' \times W)$; každá komponenta $\bar{Z}$ průniku $U \cap (Z' \times W)$ obsahující Z má Z' za projekci na V; když r, r', s' jsou dimense variet U, U', Z', potom každá komponenta $\bar{Z}$ má alespoň dimensi $r + s' - r'$.*

Věta 2. *Nechť U je podvarieta součinu variet $V \times W$ mající touž dimensi jako její projekce U' na V. Nechť k je těleso z definice pro U a nechť P' je obecný bod ϵ U' nad k. Potom U je konečná nad P'; body ϵ U s projekcí P' na V jsou všechny k sobě konjugované nad $k(P')$, a když P je jeden z těchto bodů, pak máme $[k(P) : : k(P')] = [U : U']$.*

Poznámka. Definici U je konečná nad P' a definici symbolu $[U : U']$ viz W, 106.

Nechť $U \subset (V \times W)$, k těleso z definice pro U, U' projekce U na V a U, U' nemají touž dimensi. Nechť $P' = (x)$ je obecný bod U' nad k. Na U nemůže existovat konečný počet bodů P, které mají bod P' za projekci na V. Body P musí tedy vytvořiti alespoň jednu varietu $Z \subset U$, při čemž dim $(Z) \neq 0$.

Věta 3. *Nechť $U \subset (V \times W)$, U' projekce U na V a nechť dimense variety U je r, dim. variety U' je r' a nechť $r \neq r'$ a k je společné těleso z definice pro U, V, W. Nechť P je obecný bod ϵ U' nad k. Potom maximální podvariety $Z \subset U$, jež mají za projekci na V bod P, jsou konjugované obrazy nad $k(P)$.*

Pod maximální podvarietou Z rozumíme, že neexistuje varieta $X \subset U$ taková, aby $Z \subset X$ a aby projekce Z na V a X na V byly rovny bodu P.

Důkaz. Nechť tedy $Z \subset U$ je taková, že má za projekci na V bod P. Pak je $Z \subset U \cap (P \times W)$. Podle věty 1 každá komponenta $\bar{Z}$ průniku $U \cap (P \times W)$, jež obsahuje Z, má také za projekci na V bod P. Poněvadž $\bar{Z} \subset U$, musí nutně $Z = \bar{Z}$. Z je tedy nějaká komponenta průniku $U \cap (P \times W)$. Podle theoremu 8, W, 89 existuje soustava (bunch) variet B, která je normálně algebraická nad společným tělesem z definice variet U a $P \times W$. Bodu P jako nuldimensionální varietě nad tělesem $k(P)$ přísluší těleso z definice $k(P)$ a za těleso z definice pro U i W můžeme vzíti $k(P)$, neboť $k \subset k(P)$. Součin variet $P \times W$ má těleso z definice podle theoremu 5, W, 79 také těleso $k(P)$. Je tedy zmíněná soustava variet normálně algebraická nad tělesem $k(P)$. Každá komponenta soustavy variet B je algebraická nad $k(P)$ a je proto Z varieta algebraická nad $k(P)$.

Je-li nyní M obecný bod ϵ Z nad $\overline{k(P)}$, pak je $M = (P \times Q)$, kde Q je nějaký bod ϵ W. Potom každá obecná specialisace bodu M nad $k(P)$ je obecný bod nad $\overline{k(P)}$ jediného konjugovaného obrazu nad $k(P)$ (theorem 4, W, 76). Každá obecná specialisace bodu M nad $k(P)$ má tvar $M' = (P \times Q')$, kde Q' je bod ϵ W a M' je obecný bod konjugovaného obrazu Z' nad $k(P)$ variety Z (th. 4, W, 76). Projekce variety Z' na V je bod P. Konjugovaný obraz Z' nad $k(P)$ variety Z je také komponenta soustavy B (th. 8. W, 89).

Musíme ještě dokázat, že soustava variet $B = U \cap (P \times W)$ obsahuje jen tyto komponenty a žádné jiné. Nechť tedy B obsahuje komponentu Z_1, která je různá od všech konjugovaných obrazů nad $k(P)$ k varietě Z. Obecný bod ϵ Z_1 nad $\overline{k(P)}$ je tvaru $P \times Q_1$, kde bod $Q_1 \epsilon W$. Označme d_1 dimensi variety Z_1 nad $\overline{k(P)}$. Potom podle věty 1 dostáváme $d_1 \geqq r - r'$. Dimense Z_1 nad $\overline{k(P)}$ je $\dim_{\overline{k(P)}} (P \times Q_1) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q_1) = \dim_{k(P)}(Q_1) = d_1$. Avšak

$$\dim_k(P, Q_1) = \dim_k(P) + \dim_{k(P)}(Q_1) = r' + d_1 .$$

Poněvadž bod $(P, Q_1) \epsilon U$, plyne z toho, že $\dim_k(P, Q_1) \leqq r$. Proto $r \geqq r' + d_1$, a poněvadž dříve jsme dokázali, že $d_1 \geqq r - r'$, plyne z těchto dvou vztahů, že $r = r' + d_1$ a tudíž bod $(P \times Q_1)$ je obecný bod ϵ U nad k. Stejným způsobem bychom dokázali, že bod $(P \times Q)$ je obecný bod ϵ U nad k. Proto bod $(P \times Q)$ má za obecnou specialisaci nad k bod $(P \times Q_1)$ a tudíž bod $(P \times Q)$

má za obecnou specialisaci nad $k(P)$ bod $(P \times Q_1)$ (W, 29, věta 2). Potom podle th. 4, W, 76 plyne, že Z_1 splyne s některým konjugovaným obrazem variety Z, což je proti předpokladu. Tím je věta 3 dokázána.

Věta 4. *Všechny maximální variety Z ve větě 3, jež mají za projekci na V bod P, mají stejnou dimensi.*

Důkaz. To plyne z toho, že obecné body variet Z, Z' jsou obecné specialisace nad $k(P)$ a tudíž mají stejnou dimensi (th. 3. W. 28). Rovněž platí, že $\dim_{\overline{k(P)}}(Q) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q')$. $P \times Q$ je obecný bod $\epsilon\, Z$ nad $\overline{k(P)}$, $\dim_{k(P)}(P \times Q) = \dim_{k(P)}(Q) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q)$. $P \times Q'$ je obecný bod $\epsilon\, Z'$ nad $\overline{k(P)}$, $\dim_{k(P)} . (P \times Q) = \dim_{k(P)}(P \times Q') = \dim_{k(P)}(Q') = \dim_{\overline{k(P)}}(Q')$. $\dim_{\overline{k(P)}}(Q) = \dim_{\overline{k(P)}}(Q')$.

Věta 5. *Maximálních variet $Z \subset U$* (viz větu 4), *jež mají za projekci na V obecný bod P nad k z variety U', je konečný počet a je roven $[k_1 : k(P)]_s$.*

Důkaz. Ze všech těles z definice pro nějakou komponentu Z, která obsahují těleso $k(P)$, existuje jedno nejmenší — označíme je k_1 — a toto těleso k_1 je algebraické rozšíření tělesa $k(P)$ a počet různých konjugovaných obrazů variety Z nad $k(P)$ je právě roven $[k_1 : k(P)]_s$. (Věta 5, W, 76.) Symbol $[k_1 : k(P)]_s$ viz W, 9.

Poznámka. Konečný počet variet Z plyne také z definice soustavy variet (W, 84).

Definice 1. *Podvarietu $T \subset (V \times W)$ jmenujeme algebraickou korespondencí mezi varietami V a W, když projekce T na V je rovna V a projekce T na W je rovna W.*

Nechť k je společné těleso variet T, V, W. Nechť P je obecný bod variety V nad tělesem k. Potom podle věty 3, 4, 5 existuje na T $\alpha = [k_1 : k(P)]_s$ konjugovaných variet L_i $(i = 1, \ldots, \alpha)$ nad $k(P)$, které jsou stejné dimense nad $\overline{k(P)}$. Projekce těchto L_i variet na W označme L_i^W a tyto variety vezmeme za odpovídající variety bodu $P \epsilon V$ na W. Podobně existuje na T $\beta = [k_1' : k(Q)]_s$ konjugovaných variet M_j $(j = 1, \ldots, \beta)$ nad $k(Q)$, které jsou stejné dimense nad $\overline{k(Q)}$, a bod Q je obecný bod $\epsilon\, W$ nad k. Projekce těchto M_j variet na V označme M_j^V a tyto variety vezmeme za odpovídající variety bodu $Q \epsilon W$ na varietě V.

Věta 6. *Buď $T \subset (V \times W)$ algebraická korespondence mezi varietami V a W, k společné těleso z definice pro T, V, W. Nechť P je obecný bod $\epsilon\, V$ na k a L_i^W jemu odpovídající variety na W. Nechť dále Q je obecný bod $\epsilon\, W$ nad k a M_j^V jemu odpovídající variety na V. Potom všechny variety L_i^W (M_j^V) jsou algebraické nad $k(P)$ $(k(Q))$ a jsou konjugovanými obrazy nad $k(P)$ $(k(Q))$. Všechny variety L_i^W mají stejnou dimensi nad tělesem $\overline{k(P)}$ a podobně všechny variety M_j^V mají stejnou dimensi nad tělesem $\overline{k(Q)}$.*

Důkaz. Z věty 3 plyne, že všechny variety L_i jsou konjugované obrazy nad $k(P)$. Z theoremu 6, W, 81 plyne, že všechny L_i^W jsou algebraické nad tělesem $k(P)$. Je-li nyní $P \times Q_i$ obecný bod $\epsilon\, L_i$ nad $\overline{k(P)}$, je Q_i obecný bod $\epsilon\, L_i^W$ nad $\overline{k(P)}$. Je-li $P \times Q_{i_1}$, $i \neq i_1$, obecný bod $\epsilon\, L_{i_1}$ nad $\overline{k(P)}$, je Q_{i_1} obecný bod $\epsilon\, L_{i_1}^W$ nad $\overline{k(P)}$. Poněvadž $P \times Q_{i_1}$ je obecnou specialisací bodu $P \times Q_i$ nad $k(P)$, je také Q_{i_1} obecnou specialisací bodu Q_i nad $k(P)$ a mají tedy L_i^W a $L_{i_1}^W$ nad $\overline{k(P)}$ touž dimensi a podle th. 4 W., 76 je Q_i obecným bodem nad $\overline{k(P)}$ jediného konjugovaného obrazu variety L_i^W nad $k(P)$ a je tedy $L_{i_1}^W$ konjugovaný obraz variety L_i^W nad $k(P)$. Podobně provedeme důkaz pro variety M_j^V. Označíme-li nyní dimensi variety L_i^W nad $\overline{k(P)}$ d a dimensi variety M_j^V nad $\overline{k(Q)}$ δ, můžeme algebraickou korespondenci T nad k mezi V a W značit $T(\delta_\beta, d_\alpha)$.

Věta 7. *Nechť T je alg. korespondence mezi V a W a nechť k je těleso z definice pro T. Nechť $P \times Q$ je obecný bod $\epsilon\, T$ nad k. Potom P je obecný bod $\epsilon\, V$ nad k a Q obecný bod $\epsilon\, W$ nad k.*

Důkaz. Nechť $P \times Q$ je obecný bod $\epsilon\, T$ nad k, potom podle theoremu 6, W 81 P, Q jsou obecné body $\epsilon\, V$ a $\epsilon\, W$ nad k a tedy také nad každým jiným tělesem z definice.

Věta 8. *Nechť T^t je alg. korespondence mezi V^r a W^s a nechť k je těleso z definice pro T. Nechť P je obecný bod $\epsilon\, V$ nad k. Nechť bod P je projekcí maximální variety $L \subset T$ na V a bod $P \times Q$ její obecný bod nad $\overline{k(P)}$. Potom bod $P \times Q$ je obecným bodem algebraické korespondence T nad k.*

Varieta $L \subset T$ je jeden z konjugovaných obrazů variet nad $k(P)$, které mají za svou projekci na V bod P. Projekce L^W variety L na W má bod Q za obecný nad $\overline{k(P)}$. Podle věty 1 dimense variety L nad $\overline{k(P)}$ je $d \geqq t - r$, neboť $k(P)$. $(P \times Q) = k(P)\,(Q)$ a podobně $\overline{k(P)}\,(P \times Q) = \overline{k(P)}\,(Q)$. $\mathrm{Dim}_{k(P)}\,(Q) = \mathrm{dim}_{\overline{k(P)}}\,(Q)$ podle věty 2, W, 3. Bod $P \times Q$ je však bod z variety T, proto jeho dimense nad k je $\leqq t$. Poněvadž $\mathrm{dim}_k(P \times Q) = \mathrm{dim}_{k(P)}(Q) + \mathrm{dim}_k(P) = d + r$, dostáváme $t \geqq d + r$. Máme $t \leqq d + r$ a $t \geqq d + r$, čili $t = d + r$. Obecný bod $P \times Q \,\epsilon\, L$ nad $\overline{k(P)}$ má nad k dimensi t a tedy je obecným $\epsilon\, T$ nad k. Projekce tohoto bodu je obecný bod $\epsilon\, W$ nad k podle věty 7. Stejná úvaha pro obecný bod $R \,\epsilon\, W$ nad k vede k rovnici $t = s + \delta$ a proto $r + d = s + \delta$. Poslední rovnice vyjadřuje tak zvaný princip sčítání konstant v algebraické korespondenci, který vyslovíme větou:

Když v t dimensionální alg. korespondenci T^t mezi varietami V^r a W^s o společném tělese z definice k obecnému bodu P nad $k \,\epsilon\, W$ odpovídá na W α d-dimensionálních nad $k(P)$ konjugovaných variet a obráceně obecnému bodu Q nad $k \,\epsilon\, W$ odpovídá na $V \beta$ δ-dimensionálních nad $k(Q)$ konjugovaných variet, pak je $t = r + d = s + \delta$.

Z předchozího plyne, že v algebr. korespondenci T^t mezi V^r a W^s o společném tělese z definice k obecnému bodu P nad k z variety V odpovídá na W α

$(t - r)$-dimensionálních nad $k(P)$ konjugovaných variet a obecnému bodu Q nad $k \in W$ odpovídá β $(t - s)$-dimensionálních nad $k(Q)$ konjugovaných variet.

Věta 9. *Buď $T \subset (V \times W)$ alg. korespondence mezi varietami V a W, k společné těleso z definice pro T, V, W. Když obecnému bodu $\in V$ nad k odpovídají d-dimensionální variety L_i^W, tak každému bodu $\in V$ odpovídají nejméně d-dimensionální variety na W. Podobný výsledek platí pro body variety W.*

Důkaz. Nechť P' je nějaký bod $\in V$. Pak komponenty průniku $T \cap (P' = \times \times W)$, které mají za projekci na V bod P', mají podle věty 1 dimensi aspoň $t - r = d$. Podobně pro body variety W.

Věta 10. *Nechť V a W jsou dvě variety definované nad tělesem k; nechť P, Q jsou obecné body $\in V$ a $\in W$ nad k. Potom existuje alg. korespondence T, definovaná nad k mezi V a W taková, že bod $P \times Q$ je obecný bod nad $k \in T$, když a jen když $k(P, Q)$ je regulární rozšíření nad k.*

Důkaz. Když $k(P, Q)$ je regulární rozšíření nad k, pak bod $P \times Q$ má locus T nad k, a poněvadž $P \times Q \in V \times W$, je $T \subset V \times W$. $P \times Q$ je obecný bod $\in T$ nad k. Projekce T na V a W je zase V a W, tedy podle definice 1 je T algebraická korespondence nad k mezi V a W.

Obráceně, když $P \times Q$ je obecný bod nad k z alg. korespondence $T \subset V \times W$, pak T je locus bodu $P \times Q$ nad k a rozšíření $k(P, Q)$ je regulární nad k (W, 68).

Poznámka. Jestliže bod P je obecný bod $\in V$ nad k a Q je obecný bod $\in W$ nad k, které jsou nezávislé nad k, pak algebraická korespondence $T = V \times W$, v níž každému bodu $\overline{P} \in V$ odpovídá celá varieta W a každému bodu $\overline{Q} \in W$ odpovídá celá varieta V. Takovouto alg. korespondenci mezi varietami V a W nad k nazýváme triviální. Jestliže tedy mezi varietami V a W, které jsou definovány nad tělesem k, existuje netriviální alg. korespondence nad k, pak obecný bod $P \in V$ nad k a obecný bod $Q \in W$ nad k jsou takové, že $k(P, Q)$ je regulární rozšíření tělesa k a body P, Q jsou závislé nad k. (Definici nezávislých bodů viz W, 3.)

Definice 2. *Nechť $T^t \subset V^r \times W^s$ je alg. korespondence nad k mezi V^r a W^s. Pak bod $P \in V$, $(Q \in W)$ nazýváme regulární bod korespondence, když mu na varietě W, (V) odpovídají variety dimense $t - r$, $(t - s)$.*

Z definice 2 a z věty 8 plyne, že každý obecný bod nad $k \in V$ (nad $k \in W$) je regulární pro alg. korespondenci T.

Věta 11. *Nechť $T \subset V \times W$ je alg. korespondence nad k mezi V a W. Nechť P a P' jsou dva body $\in V$ takové, že P' je regulární bod $\in T$ a že P' je specialisací bodu P nad k. Potom P je také regulární bod $\in T$.*

Tato věta je bezprostředním důsledkem věty 12.

Věta 12. *Nechť $T \subset V \times W$ je alg. korespondence nad k mezi V a W. Nechť P a P' jsou dva body $\in V$ takové, že P' je konečnou specialisací bodu P nad tělesem*

k. Potom ke každé varietě odpovídající bodu P existuje aspoň jedna varieta odpovídající bodu P', která má větší nebo stejnou dimensi.

Důkaz. Označme $W(P)$ množinu všech bodů $\in W$, které v korespondenci T odpovídají bodu $P \in V$, a podobně $W(P')$ pro bod P'. $W(P)$ dostaneme, když soustavu variet $T \cap (P \times W)$ promítneme na varietu W a podobně $W(P')$ dostaneme, když promítneme na varietu W soustavu variet $T \cap (P' \times W)$. Soustava $T \cap (P \times W)$ je normálně algebraická nad $k(P)$ a soustava $T \cap$ $\cap (P' \times W)$ je normálně algebraická nad $k(P')$. Nechť C je libovolná komponenta soustavy $T \cap (P \times W)$, která má obecný bod (P, Q) nad $\overline{k(P)}$. Nechť nyní (P', Q') je konečná specialisace bodu (P, Q) nad k a taková, že bod Q' je nějakou isolovanou specialisací bodu Q nad specialisací $P \to P'$ nad k. Pak podle věty 13 (W, 65) $\dim_{k(P')}(Q') \geqq \dim_{k(P)}(Q)$. Projekce bodu (P', Q') na varietu V je rovna bodu P'; proto bod $(P', Q') \in T \cap (P' \times W)$. Bod (P', Q') leží tedy aspoň na jedné komponentě soustavy variet $T \cap (P' \times W)$. Označme jednu takovou z nich C', takže $(P', Q') \in C'$. Nechť obecný bod nad $\overline{k(P')}$ variety C' je $P' \times \overline{Q}$. Potom $\dim_{\overline{k(P')}}(P', \overline{Q}) \geqq \dim_{\overline{k(P')}}(P', Q')$. Z poslední relace plyne, $\dim_{k(P')}(P', \overline{Q}) \geqq \dim_{k(P')}(P', Q')$. Vzhledem k dříve dokázané relaci $\dim_{k(P')}(Q') \geqq \dim_{k(P)}(Q)$, dostáváme $\dim_{k(P')}(P'\overline{Q}) \geqq \dim_{k(P)}(Q)$. Označme $\overline{C}, \overline{C}'$ projekce variety C, C' na varietu W. Poněvadž $\dim_{\overline{k(P)}}(P, Q) =$ $= \dim_{\overline{k(P)}}(Q) = \dim_{\overline{k(P)}}\overline{C}$ a podobně $\dim_{\overline{k(P')}}(P', \overline{Q}) = \dim_{\overline{k(P')}}(\overline{Q}) = \dim_{k(P')}(\overline{Q}) =$ $= \dim_{\overline{k(P')}}\overline{C}'$, plyne odtud, že $\dim_{\overline{k(P')}}\overline{C}' \geqq \dim_{k(P)}\overline{C}$.

Nechť $T \subset V \times W$ je alg. korespondence nad k mezi V a W a nechť T a V mají touž dimensi nad k. Potom obecnému bodu P nad $k \in V$ odpovídá α bodů na W, jež jsou algebraické nad $k(P)$. Obecnému bodu Q nad $k \in W$ odpovídá β variet, jež jsou algebraické nad $k(Q)$. T je konečná nad P (W, 106), což plyne z věty 2.

Definice 3. *$T \subset V \times W$ jmenujeme algebraickou korespondencí (β, α)-značnou nad tělesem k mezi varietami V, W, když projekce T na V rovná se V a projekce T na W rovná se W a když T je konečná nad P a nad Q, kde P je obecný bod nad $k \in V$ a Q je obecný bod nad $k \in W$.*

Zavedeme-li ještě pojem „*projekce z T k V a z T k W je regulární*“, dostáváme se tak k definici biracionální korespondence T na k mezi varietami V a W. (W, 190.) Vlastnosti biracionálních korespondencí nalezne čtenář ve W, 109 a násl.

Jako příklady na užití principu sčítání konstant dokážeme následující věty.

Věta 13. *Nechť V^r $(r > 0)$ je varieta definovaná nad tělesem k v prostoru S^n. Pak komponenty průniku obecné nadroviny $(u_1, \ldots, u_n)$ prostoru S^n a variety V^r jsou $(r - 1)$-dimensionální variety, algebraické nad $k(u_1, \ldots, u_n)$ a jsou konjugovanými obrazy nad tělesem $k(u_1, \ldots, u_n)$.*

Důkaz. Nechť (ξ) je obecný bod $\in V$ nad tělesem $k(u_1, \ldots, u_{n-1})$. Uvažujme všechny nadroviny z prostoru S^n, které tímto bodem procházejí, což je vyjádřeno rovnicí $u_1\xi_1 + \ldots + u_n\xi_n + 1 = 0$. Poněvadž (ξ) je obecný bod ϵV nad $k(u_1, \ldots, u_{n-1})$, plyne z toho, že $k(\xi, u_1, \ldots, u_{n-1})$ je regulární rozšíření nad k. Ukážeme nyní, že existuje alg. korespondence s obecným bodem $(\xi, u_1, \ldots \ldots, u_n)$ nad k mezi V a S^n, kde $u_n = -(1 + u_1\xi_1 + \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1}) : \xi_n$. Soustavu souřadnicovou jsme volili tak, že $\xi_n \neq 0$ a ξ_n je transcend. nad k. Musíme proto dokázat, že bod $(\xi, u_1, \ldots, u_n)$ má locus T nad k, t. j., že $k(\xi, u_1, \ldots \ldots, u_n)$ je regulární rozšíření nad k a že projekce T na V je V a projekce T na S^n je S^n.

Dosadíme-li do $k(\xi, u_1, \ldots, u_n)$ za $u_n = -(1 + u_1\xi_1 + \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1}) : \xi_n$, dostaneme, že $k(\xi, u_1, \ldots, u_{n-1}) = k(\xi, u_1, \ldots, u_n)$, a poněvadž $k(\xi, u_1, \ldots, u_{n-1})$ je regulární rozšíření, je takové také $k(\xi, u)$ a bod (ξ, u) má tedy locus nad k, který jsme označili T. Projekce T na V je zase zřejmě V. Projekce T na S^n je také S^n, neboť $u_1, \ldots, u_n$ je množina n nezávislých veličin nad k. Předpokládejme, že $u_1, \ldots, u_n$ jsou algebraicky závislé nad k, pak u_n je algebraické nad $k(u_1, \ldots, u_{n-1})$. Potom $f(u_n) = u_n^\alpha + a_1 u_n^{\alpha-1} + \ldots + a_\alpha = 0$, kde $f(x) \epsilon k[u_1, \ldots \ldots, u_{n-1}][x]$ je irreducibilní polynom. Dosadíme-li za $u_n = -(1 + u_1\xi_1 + \ldots \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1}) : \xi_n$, dostaneme

$$[-(1 + u_1\xi_1 + \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1}) : \xi_n]^\alpha + a_1[\ldots]^{\alpha-1} + \ldots = 0\,.$$

Po vynásobení ξ_n^α dostaneme

$$[-(1 + u_1\xi_1 + \ldots + u_{n-1}\xi_{n-1})]^\alpha + a_1\xi_n[\ldots]^{\alpha-1} + \ldots = 0\,.$$

Poněvadž $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ jsou algebraicky nezávislé nad $k(\xi)$, musí koeficienty u všech monomů v $u_1, \ldots, u_{n-1}$ býti rovny nule. Tato vlastnost platí i pro koeficient u monomu nultého stupně, z čehož plyne $(-1)^\alpha + a_{10}(-1)^{\alpha-1}\xi_n + \ldots \ldots + a_{\alpha 0}\xi_n^\alpha = 0$, kde $a_{i0} \epsilon k$. Poněvadž ξ_n je algebraicky nezávislé nad k, musí všechny koeficienty v poslední rovnici býti rovny nule, což vede ke sporu, neboť $(-1)^\alpha \neq 0$. Podle principu konstant platí $r + n - 1 = n + \delta$, odtud plyne $\delta = r - 1$. Tedy obecné nadrovině ϵS^n odpovídají $(r-1)$-dimensionální variety algebraické nad $k(u_1, \ldots, u_n)$ a jsou konjugovanými obrazy nad tímto tělesem.

Úplně stejně bychom dokázali větu 14.

Věta 14. *Nechť $V^r (r > 0)$ je varieta definovaná nad tělesem k v S^n. Pak komponenty průniku obecné nadplochy v prostoru S^n a variety V jsou $(r-1)$-dimensionální variety, které jsou algebraické nad $k(u)$ a jsou konjugovanými obrazy nad tělesem $k(u)$. [(u) je množina koeficientů nějaké obecné nadplochy.]*

Věta 15. *Nechť $V^r (r > 0)$ je varieta definovaná nad tělesem k v S^n a Π^{n-1} varieta nad týmž tělesem. Potom $V^r \cap \Pi^{n-1} = V^r$ nebo $V^r \cap \Pi^{n-1}$ je soustava variet, jejíž každá komponenta má dimensi $r - 1$ a všechny komponenty jsou algebraicky konjugované nad k.*

Důkaz plyne takřka bezprostředním užitím věty 14 a věty 9.

Poznámka. Věta 15 je bezprostředním důsledkem th. 7, W, 86.