ÚLOHY A PROBLÉMY

5. Buď n přirozené číslo. Buďte

$$B_{i,k} = \begin{pmatrix} p_{i,k} & q_{i,k} \\ q_{k,i} & p_{k,i} \end{pmatrix}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

reálné symetrické, positivně definitní matice druhého řádu. Budiž dále $A = (a_{i,k})$, $i, k = 1, \ldots, n$, čtvercová matice, pro niž $a_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k}$, $a_{i,j} = q_{i,j}$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Matici A nazveme maticí přiřazenou maticím $B_{i,k}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.

a) Ukažte, že A je symetrická positivně definitní matice.

b) Rozhodněte, zda ke každé positivně definitní čtvercové matici A existují matice $B_{i,k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ tak, aby A byla přiřazena k maticím $B_{i,k}$.

c) V případě, že neexistují (obecně) matice $B_{i,k}$ (v otázce b), rozhodněte, zda tyto matice existují za dalšího předpokladu, že všechny prvky matice A jsou kladné.

I. Babuška, Praha

6. V n-rozměrném eukleidovském prostoru nechť jsou dány jednotkové vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vytvářející m-rozměrný podprostor, kde $m < \dfrac{n-1}{2}$. Jest dokázat, že existují reálná čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tak, že charakteristická čísla $g_1, g_2, \ldots, g_n$ Gramovy matice vektorů $c_1\mathbf{a}_1, c_2\mathbf{a}_2, \ldots, c_n\mathbf{a}_n$ splňují podmínku $g_1 \geqq \ldots \geqq g_{n-m} \geqq g_{n-m+1} = \ldots = g_m > g_{m+1} = \ldots = g_n = 0$.

Václav Havel, Brno

7. V n-rozměrném eukleidovském prostoru nechť jsou dány posloupnosti bodů $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i=1}^{m+2}$, $\mathfrak{B} = \{B_i\}_{i=1}^{n+2}$, kde body $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}$ vytvořují m-rozměrný podprostor a body $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$ vytvořují celý prostor. Jest nalézti podmínku pro to, aby posloupnost $\mathfrak{A}$ byla středovým nebo paralelním průmětem posloupnosti $\mathfrak{B}' = \{B'_i\}_{i=1}^{n+2}$ shodné s $\mathfrak{B}$ (podrobněji: aby bod A_1 byl průmětem bodu B'_1, bod A_2 průmětem bodu B'_2 atd.). Jest řešit obdobný problém, při němž poslední body $A_{n+2}, B_{n+2}, B'_{n+2}$ jsou nahrazeny přímkami.

Václav Havel, Brno

Řešení jedné úlohy Jana Maříka

(Řešení úlohy č. 9 otištěné v tomto časopise, roč. *81* (1956), str. 470)

V tomto článku je elementárními prostředky dokázána věta 1 a tím řešena úloha č. 9; v odstavci 5 je pak naznačeno (věta 2) zobecnění na případ spojitých křivek.[1])

1. Věta 1. *Nechť L, M jsou lomené čáry. Nechť L má počáteční bod $A[0, -1]$ a koncový bod $B[0, 1]$, nechť M má počáteční bod $C[-1, 0]$ a koncový bod $D[1, 0]$. Nechť pro každý bod $[x, y]$ množiny L (resp. M) platí $|x| \leqq 1$ (resp $|y| \leqq 1$). Pak $L \cap M \neq \emptyset$.*

2. *Lomená čára* je konečná posloupnost $\{u_1, \ldots, u_n\}$ netriviálních uzavřených úseček $u_i = \overline{P_{i-1}P_i}$. Body $P_0, \ldots, P_n$ tvoří posloupnost *vrcholů* lomené čáry. Jestliže $P_n = P_0$, pak lomená čára je *mnohoúhelník*. Každé lomené čáře je přiřazena množina jejích bodů, kterou označíme stejným symbolem.

Směr v dalším znamená orientovaný směr. $p(A, s)$ (resp. $q(A, s)$ značí přímku (resp. uzavřenou polopřímku), určenou bodem A a směrem s.

3. Nechť $L = \{u_1, \ldots, u_n\}$ je lomená čára a nechť $M \subset \mathbf{E}^2$. Definujme funkci $\varphi(L, M)$ takto: $\varphi(L, M) = 0$ (resp. $= 1$), jestliže počet indexů i s vlastností $u_i \cap M \neq \emptyset$ je sudý (resp. lichý).

Lemma. *Nechť N je mnohoúhelník, nechť A, B jsou dva body takové, že $N \cap \overline{AB} = \emptyset$. Nechť V je množina všech vrcholů mnohoúhelníku N, rozmnožená o body A, B. Nechť s je směr takový, že na každé přímce tohoto směru leží nejvýš jeden bod množiny V. Pak*

$$\varphi(N, q(A, s)) = \varphi(N, q(B, s)) . \tag{1}$$

D ů k a z. Označme $q_1 = q(A, s)$, $q_2 = q(B, s)$. Případ $A = B$ je jasný. Nechť $A \neq B$. Úsečka $\overline{AB}$ není rovnoběžná se směrem s. Existuje nejvýš konečný počet bodů $C \in \overline{AB}$ takových, že na $q(C, s)$ leží nějaký vrchol čáry N. Přitom je vždy $A \neq C \neq B$.

Jestliže žádný takový bod C neexistuje, pak každá úsečka čáry N, která protíná jednu z polopřímek q_1, q_2, protíná i druhou, takže (1) platí.

Nechť body C existují. Můžeme se zřejmě omezit na případ, že takový bod je pouze jeden (jinak lze $\overline{AB}$ vhodně rozdělit na konečný počet částí a na každou zvlášť užít úvahy, která následuje). Nechť D je vrchol čáry N, který leží na $q(C, s)$. Protože N je mnohoúhelník, lze úsečky čáry N, které mají D za krajní bod, sdružit ve dvojice sousedních tak, že u každé dvojice nastává právě jeden ze dvou případů: buď a) obě úsečky protínají touž z polopřímek q_1, q_2 nebo b) každá z nich protíná jinou. Úsečky čáry N, které nemají D za krajní bod a protínají jednu z polopřímek q_1, q_2, protínají i druhou. Z předchozího úhrnem snadno plyne platnost vztahu (1).

4. D ů k a z v ě t y 1. Předpokládejme, že $L \cap M = \emptyset$. Existuje číslo a takové, že pro každý bod $[x, y] \in M$ platí $x < a$. Nechť každý bod $[x, y] \in L$ platí $y < a$ a současně pro každý bod $[x, y] \in M$ platí $x < a$. Nechť $D' = [a + 1, 0]$, $E = [a + 2, -2]$, $F = [a + 2, 2]$, $G = [a + 1, a]$, $H = [a, a]$. Nechť M' je lomená čára, která vznikne z M přidáním úsečky $\overline{DD'}$ jakožto poslední. Nechť L' je mnohoúhelník, který vznikne z L tak, že mezi koncový bod B a počáteční bod A vložíme úsečky $\overline{BF}$, $\overline{FE}$, $\overline{EA}$. Zřejmě $L' \cap M' = L \cap M$ a tedy $L' \cap M' = \emptyset$. Nechť s je směr takový, že

$$q(D', s) \cap \overline{GH} \neq \emptyset \tag{2}$$

---

[1]) V článku je použito zjednodušení původních důkazů, které navrhl J. Mařík.

a že na každé přímce směru s leží nejvýš jeden vrchol kterékoliv z čar L', M'. Jestliže $M' = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $u_i = \overline{P_{i-1}, P_i}$, $P_0 = C$, $P_n = D'$, pak podle lemmatu

$$\varphi(L', q(P_{i-1}, s)) = \varphi(L', q(P_i, s)) .$$

Protože zřejmě $\varphi(L', q(C, s)) = 0$, plyne odtud $\varphi(L', q(D', s)) = 0$. To je spor, neboť s ohledem na (2) je $\varphi(L', q(D', s)) = 1$. Tedy $L' \cap M' \neq \emptyset$ a tedy i $L \cap M \neq \emptyset$.

5. Věta 2 *nechť vznikne z věty 1 náhradou pojmu „lomená čára" pojmem „spojitá křivka"*. (Spojitá křivka je spojitý obraz uzavřené úsečky.)

Elementární důkaz této obecnější věty 2 lze založit na důkazu věty 1. Elementárnost je však zde nutno chápat v širším smyslu než dříve. Samo užití pojmu spojitá křivka naznačuje, že by nebylo na místě vyhýbat se základním vlastnostem spojitých zobrazení a pojmu kompaktnosti.

Důkaz věty 2. Nechť $L \cap M = \emptyset$. Množiny L, M jsou kompaktní, mají tedy kladnou vzdálenost 2ε. Zobrazení, která dávají L a M jakožto spojité obrazy uzavřené úsečky, jsou stejnoměrně spojitá. Na základě toho se snadno sestrojí lomené čáry L', M' takové, že splňují předpoklady věty 1, při čemž L' leží v ε-okolí čáry L a M' v ε-okolí čáry M. Odtud plyne $L' \cap M' = \emptyset$, což odporuje větě 1.

Jiří Bečvář, Liberec