справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} y(t) &= f^{-1/4}(t)\{y_0 \sin (\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_0) + \gamma(t)\}\,, \\ y'(t) &= f^{1/4}(t)\{y_0 \cos (\int_{t_0}^{t} (f^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_0) + \delta(t)\}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\gamma(t) \to 0,\ \delta(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$ *и*

$$|\gamma(t+2)| \leqq \text{konst}\, |(f^{-\alpha}(t))'_+|\,, \quad |\delta(t+2)| \leqq \text{konst}\, |(f^{-\alpha}(t))'_+|\,.$$

Если y *является ненулевым решением* (1), *то* $y_0 \neq 0$.

Докажем теорему, считая сначала что функция f имеет непрерывную вторую производную. Мы знаем решения дифференциального уравнения

$$z'' + \{f(t) - f^{1/4}(t)(f^{-1/4}(t)'')\}\, z = 0\,. \tag{7}$$

Уравнение (1) перепишем в виде уравнения (7) с правой частью. Решение уравнения (1) тогда находится по знакомой формуле (см. [1], глава 1, теорема 3). Оттуда вытекают асимптотические формулы (6).

В общем случае мы построим к функции f последовательность функций f_n, которые имеют непрерывную вторую производную и используем теорему о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра.

В дальнейшем на примере показано, что предположение о выпуклости функции $f^{-1/2}$ не является достаточным условием справедливости асимптотических формул (6).

Zusammenfassung

DIE ASYMPTOTISCHEN FORMELN FÜR DIE LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y'' + f(t)\,y = 0$

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha

(Eingelangt am 3. Oktober 1957)

In dieser Arbeit wird folgender Satz bewiesen:

Es sei $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. *Es sei* $f(t) \geqq \text{konst} > 0$ *und die Funktion* $f^{-\alpha}$ *sei konvex in* $\langle t_0, \infty)$. *Dann gelten für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*

$$y'' + f(t)\,y = 0 \tag{1}$$

folgende asymptotische Formeln:

$$y(t) = f^{-1/4}(t)\,\{y_0 \sin(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,ds + \varphi_0) + \gamma(t)\}\,, \tag{6}$$
$$y'(t) = f^{1/4}(t)\,\{y_0 \cos(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,ds + \varphi_0) + \delta(t)\}\,,$$

wo $\gamma(t) \to 0$, $\delta(t) \to 0$ *für* $t \to \infty$ *und*

$$|\gamma(t+2)| \leqq \text{konst}\,|(f^{-\alpha}(t))'_+|\,, \quad |\delta(t+2)| \leqq \text{konst}\,|(f^{-\alpha}(t))'_+|\ \textit{ist.}$$

Ist y *nicht die Null-Lösung von* (1), *dann ist* $y_0 \neq 0$.

Der Beweis ist zuerst für den Fall, wenn die Funktion f eine stetige zweite Ableitung hat, ausgeführt. Wir kennen die Lösung der Differentialgleichung

$$z'' + \{f(t) - f^{1/4}(t)\,(f^{-1/4}(t))''\}\,z = 0\,. \tag{7}$$

Die Gleichung (1) drücken wir als die Gleichung (7) mit der rechten Seite aus. Die Lösung der Gleichung (1) ist dann durch die bekannte Formel gegeben (siehe [1], Kap. I, Satz 3). Hieraus können die asymptotischen Formeln (6) abgeleitet werden.

Im allgemeinen Falle konstruieren wir zur Funktion f eine Funktionenfolge f_n mit stetiger zweiten Ableitung und benützen den Satz über die Abhängigkeit der Lösung der Differentialgleichungen vom Parameter.

Endlich wird an einem konstruierten Beispiel gezeigt, dass die Voraussetzung, dass die Funktion $f^{-1/2}$ konvex ist, schon nicht mehr dazu genügt, dass die asymptotischen Formeln (6) gelten.